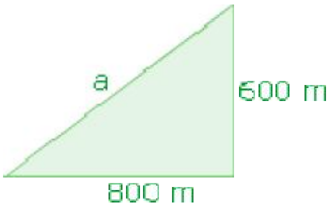
1) Uma pessoa caminha em uma pista plana com a forma de triângulo retângulo. Ao dar uma volta completa na pista com velocidade constante de caminhada, ela percorre 600 e 800 metros nos trajetos correspondentes aos catetos da pista triangular, e o restante da caminhada ela completa em 10 minutos. A velocidade constante de caminhada dessa pessoa é igual a quantos quilômetros por hora?

A resolução desta questão se baseia no **teorema de Pitágoras**. Vamos descobrir a medida do trajeto percorrido em 10 minutos, a partir do qual iremos calcular a velocidade procurada.



Para solucionar o problema vamos observar a figura ao lado que representa a pista em questão.

Em função do enunciado sabemos que o lado **a**, correspondente à**hipotenusa**, foi percorrido em **10 minutos**, assim sendo, basta descobrirmos o seu comprimento para podermos calcular a velocidade na qual ele foi percorrido, que é constante em todo o percurso.

Segundo o teorema de Pitágoras **o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos**, para quaisquer triângulos retângulos.

O teorema pode ser representado pela seguinte equação:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Neste nosso problema temos **b** = **600** e **c** = **800**, o que nos leva à seguinte equação:

$$a^2 = 600^2 + 800^2$$

Agora temos condições de descobrir quantos metros possui o trecho da pista que foi percorrido em dez minutos. Vejamos:

Agora sabemos o trecho percorrido em dez minutos tem **1000 m** de comprimento.

Se em **10 min** percorremos **1000 m**, em **60 min** (ou seja, em **1 h**) vamos percorrer quantos metros?

Resolvendo a **regra de três simples e direta** temos:

Então a velocidade constante de caminhada foi de **6000 m** por **hora**, mas o enunciado pede a velocidade em **km/h**, por isto precisamos realizar mais uma conversão, agora de **m** para **km**.

Já aprendemos que a **conversão de metros para quilômetros é realizada dividindo-se por 1000 a medida em metros**. Como temos **6000** metros, ao dividi-los por **1000** obtemos **6** quilômetros.

Portanto:

A velocidade constante de caminhada é de 6 km/h.

2) Um professor aplicou duas provas, cada uma valendo 10. O combinado com seus alunos era que a média final de cada um seria calculada utilizando-se peso 1 na nota da primeira prova e peso 2 na nota da segunda prova. Na hora de fazer os cálculos da média de um aluno, o professor trocou os pesos entre as duas provas, obtendo média igual a 5. Corrigido o erro, a média do aluno subiu 1 ponto. Nas condições do problema, a nota que esse aluno tirou na segunda prova superou sua nota da primeira prova em quantos por cento?

A resolução desta outra questão envolve tanto o **cálculo da média aritmética ponderada**, quanto o**cálculo de porcentagem**.

Em resumo precisamos descobrir o valor de cada nota, para então descobrimos quantos por cento a segunda nota é maior que a primeira. Vamos então à resolução.

Segundo o enunciado, erroneamente a média foi calculada com os pesos invertidos. A primeira nota tendo peso **2** e a segunda peso **1**:

$$\frac{N_1 \cdot 2 + N_2 \cdot 1}{1 + 2} = 5$$

No entanto a média deveria ser calculada tendo a primeira nota peso **1** e a segunda peso **2**:

$$\frac{N_1 \cdot 1 + N_2 \cdot 2}{1 + 2} = 6$$

Note que com os pesos corretos a média passou de **5** a **6** conforme o enunciado.

Vamos tratar as equações eliminado assim as frações:

Como temos duas variáveis com duas equações, vamos montar um **sistema de equações com duas variáveis** para identificarmos o valor de cada nota obtida pelo aluno:

$$\begin{cases} 2N_1 + N_2 = 15 \\ N_1 + 2N_2 = 18 \end{cases}$$

Vamos eliminar $\mathbf{N_2}$ multiplicando a primeira equação por **-2** e somando à segunda equação, obtendo assim o valor de $\mathbf{N_1}$:

$$\Rightarrow N_1 = \frac{-12}{-3} \Rightarrow N_1 = 4$$

Agora podemos obter o valor de $\mathbf{N_2}$ substituindo $\mathbf{N_1}$ pelo seu valor na primeira equação:

Agora sabemos que o aluno teve nota **4** na primeira prova e nota **7** na segunda prova.

Como o enunciado pergunta quantos por cento a segunda nota é maior que a primeira, precisamos dividir a diferença entre a segunda e a primeira, pela primeira nota:

$$\frac{7 - 4}{4} \Rightarrow \frac{3}{4} \Rightarrow 0{,}75$$

Esta divisão resulta em **0,75** que é o valor procurado, mas na forma decimal, precisamos então multiplicá-lo por **100%** para convertê-lo na forma percentual:

$$0{,}75 \cdot 100\% \Rightarrow 75\%$$

Então:

A nota que esse aluno tirou na segunda prova superou sua nota da primeira prova em 75%.

3) Bel, Karen e Isabella são três embarcações que navegam, respectivamente, com velocidades de 40 km/h, 50 km/h e 60 km/h. Bel começou sua viagem às 7 h e Karen, às 9 h. Sabe-se que as três embarcações partiram de um mesmo local e seguiram a mesma rota. Para que todas se encontrem num mesmo horário, qual deve ser o horário em que Isabella começou a sua viagem?

Este problema requer que calculemos a que distância do ponto de partida estarão **Bel** e **Karen** quando se encontrarem, sendo que **Bel**, que é a mais lenta das três embarcações, partiu **2 horas** mais cedo e depois calculemos quanto tempo **Isabella** gasta para fazer tal percurso, a fim de calcularmos a que horas ela deve partir.

A distância percorrida pode ser obtida multiplicando-se a **velocidade** pelo **tempo** de viagem. Sabendo disto, podemos montar a seguinte equação a partir dos dados fornecidos pelo enunciado:

$$40t = 50(t - 2)$$

No primeiro membro desta equação estamos calculando a distância percorrida por **Bel**, já no segundo membro calculamos a distância percorrida por **Karen**. Sendo **t** a variável que indica o tempo no percurso em horas, note que **Karen** tem duas horas a menos de viagem, pois partiu duas horas mais tarde.

Solucionando esta equação do primeiro grau iremos descobrir que as duas primeiras embarcações que partiram **se encontraram dez horas depois** da partida da primeira:

Às **17 h** tanto **Bel** quanto **Karen** estavam no mesmo ponto após terem percorrido **400 km** (o produto de**40 km/h** por **10 h** referente a **Bel**, ou de **50 km/h** por **8 h** referente a **Karen**). Então precisamos calcular em quanto tempo **Isabella** consegue fazer tal percurso na velocidade de **60 km/h**. Obtemos tal tempo dividindo **400 km** por **60 km/h**:

$$\frac{400}{60} \Rightarrow \frac{20}{3} \Rightarrow 6\frac{2}{3}$$

Agora sabemos que **Isabella** demora **6 h** e mais $^{2}/_{3}$ **h** para fazer tal percurso. Vamos então subtrair este número de horas de **17 h** que é o horário no qual as três embarcações devem se encontrar:

Isabella deve partir às **10** $^{1}/_{3}$ **h**.

Para convertemos $^{1}/_{3}$ **h** em **minutos** vamos multiplicá-lo por **60 min/h**, já que temos sessenta minutos em uma hora:

$$\frac{1}{3} \cdot 60 \Rightarrow \frac{60}{3} \Rightarrow 20$$

Logo:

Isabella começou a sua viagem às 10h 20min.

4) Os vídeos são exibidos, em uma televisão, usualmente a 30 quadros por segundo, uma velocidade que proporciona uma sensação natural de movimento. Para mostrar detalhes de movimentos muito rápidos, algumas câmeras conseguem filmar a uma taxa de 324 000 quadros por segundo. Se o número de quadros filmados com essas câmeras, durante um segundo, fosse exibido na velocidade usual, qual seria a duração do vídeo em horas?

Neste caso não há muito que pensar. Se **324000** quadros são exibidos em um segundo na alta velocidade e apenas **30** quadros na velocidade usual, ao dividirmos **324000** por **30** iremos encontrar o número de segundos que durará a exibição do vídeo:

$$\frac{324000}{30} \Rightarrow 10800$$

Como é solicitada a resposta em horas, precisamos fazer a conversão.

Já que em **1 h** temos **60 min** e em **1 min** temos **60 seg**, então temos **3600 seg** em **1 h**:

$$1 \cdot 60 \cdot 60 \Rightarrow 3600$$

Para transformarmos os **10800 seg** em **horas** vamos dividi-los por **3600 seg/h**:

$$\frac{10800}{3600} \Rightarrow 3$$

Portanto:

A duração do vídeo na velocidade usual de 30 quadros por segundo seria de 3 horas.

5) Hoje, a idade de um pai é o quíntuplo da idade de seu filho e, daqui a 15 anos, a soma das idades será de 60 anos. Pode-se afirmar que daqui a 15 anos, a idade do pai será quantas vezes a idade do filho?

Nesta questão iremos montar um sistema de equações do primeiro grau com duas incógnitas para obtermos a idade do pai e a idade do filho, depois iremos utilizar o conceito de razão para descobrirmos quantas vezes a primeira é maior que a última.

A idade do pai é o quíntuplo da idade do seu filho, o que nos leva à seguinte equação:

$$p = 5f$$

Onde **p** é a idade do pai e **f** a idade do filho.

Daqui a 15 anos a soma das idades será de 60 anos. Isto pode ser expresso como:

$$(p + 15) + (f + 15) = 60$$

Para ficar mais simples o trabalho, vamos simplificar a expressão:

Vamos então montar o sistema de equações:

$$\begin{cases} p = 5f \\ p + f = 30 \end{cases}$$

Vamos solucioná-lo pelo método da substituição. Na segunda equação vamos substituir **p** por **5f**:

Agora podemos substituir **f** por **5** na primeira equação:

$$p = 5f \Rightarrow p = 5 \cdot 5 \Rightarrow p = 25$$

Sabendo que o pai tem **25** anos e que o filho tem **5** anos, basta calcularmos a razão das idades que eles terão daqui quinze anos:

$$\frac{p+15}{f+15} \Rightarrow \frac{25+15}{5+15} \Rightarrow \frac{40}{20} \Rightarrow 2$$

Então:

Daqui a 15 anos, a idade do pai será 2 vezes a idade do filho.

6) Em uma determinada turma, a razão entre o número de meninas e o número de meninos, nessa ordem, é igual a 1/3 e, em outra turma, com o mesmo número de alunos, essa razão é 3/2. Quando juntaram as duas turmas para assistir a um filme, os professores das duas turmas perceberam que a razão entre o número de meninas e o número de meninos, nessa ordem, passou a ser igual a quanto?

Esta questão tem como resposta a **razão entre o número total de meninas e o número total de meninos**. A dificuldade é que não se conhece o número de alunos em cada classe. Sabe-se, porém que elas têm o mesmo número de alunos no total.

Como número de meninas para o número de meninos na primeira classe está na razão de **1** para **3**, podemos dizer que o número total de alunos desta classe pode ser dividido em **4** partes iguais, sendo **1**parte composta de meninas e **3** partes contendo apenas meninos. Chamando de $\mathbf{C_1}$ cada uma desta partes, podemos escrever a seguinte expressão:

$$1C_1 + 3C_1$$

De forma análoga, o número de meninas para o número de meninos na segunda classe está na razão de **3**para **2**, então o número total de alunos desta classe pode ser dividido em **5** partes iguais, das quais **3**partes contendo somente meninas e **2** partes contendo apenas meninos. Chamando de $\mathbf{C_2}$ estas partes individuais, temos então a expressão:

$$3C_2 + 2C_2$$

Como o número de alunos nas duas classes é o mesmo, podemos expressar este fato pela seguinte equação:

$$1C_1 + 3C_1 = 3C_2 + 2C_2$$

Agora vamos isolar $\mathbf{C_1}$:

$$1C_1 + 3C_1 = 3C_2 + 2C_2 \Rightarrow 4C_1 = 5C_2 \Rightarrow C_1 = \frac{5C_2}{4}$$

O número total de meninas juntando-se as duas classes é dado por $\mathbf{1C_1 + 3C_2}$, sendo uma parte vinda da primeira classe e três partes vindas da segunda classe.

Já para os meninos, vieram três partes da primeira classe e duas partes da segunda, então o número total de meninos é igual a $\mathbf{3C_1 + 2C_2}$.

A razão entre estas duas expressões é a razão que estamos procurando:

$$\frac{1C_1 + 3C_2}{3C_1 + 2C_2}$$

Precisamos eliminar tanto $\mathbf{C_1}$ quanto $\mathbf{C_2}$. Para isto vamos lembrar que:

$$C_1 = \frac{5C_2}{4}$$

Substituindo $\mathbf{C_1}$ pelo seu equivalente na expressão anterior, temos:

Logo: **Quando juntaram as duas turmas os professores perceberam que a razão entre o número de meninas e o número de meninos passou a ser igual $^{17}/_{23}$.**

7) Suponha que o preço da ação de uma empresa tenha sofrido as seguintes variações sucessivas no primeiro trimestre de um determinado ano: em janeiro, aumentou 12%; em fevereiro, sofreu uma redução de 8%; e, em março, uma redução de 4%, sempre em relação ao mês anterior. Considerando-se essas variações, ao final do trimestre, em relação ao preço original, o preço da ação subiu ou desceu quanto por cento aproximadamente (sem casas decimais)?

Resolvemos esta questão através do cálculo em sequência de porcentagens.

Quando queremos acrescentar **12%** a um valor, devemos multiplicá-lo por **1,12**:

$$100\% + 12\% \Rightarrow 112\% \Rightarrow \frac{112}{100} \Rightarrow 1{,}12$$

O **100%** se refere ao valor original e o **12%** se refere ao acréscimo.

Para reduzirmos **8%** precisamos multiplicar por **0,92**:

$$100\% - 8\% \Rightarrow 92\% \Rightarrow \frac{92}{100} \Rightarrow 0{,}92$$

A redução de **4%** é realizada da mesma forma multiplicando por **0,96**:

$$100\% - 4\% \Rightarrow 96\% \Rightarrow \frac{96}{100} \Rightarrow 0{,}96$$

Multiplicando estes três percentuais na forma decimal iremos descobrir se o valor da ação aumentou, diminui, ou se manteve o mesmo:

$$1{,}12 \cdot 0{,}92 \cdot 0{,}96 \rightarrow 0{,}989184 \rightarrow 0{,}989184 \cdot 100\% \rightarrow 98{,}9184\%$$

Como **98,9184%** é inferior a **100%**, isto indica que o valor da ação diminui.

Obtemos a variação percentual calculando a diferença:

$$100\% - 98{,}9184\% - 1{,}0816\%$$

Portanto:

O preço da ação desceu aproximadamente 1%.

8) A razão entre os números (x+3) e 7 é igual à razão entre os números (x-3) e 5. Nessas condições, o valor de x é?

Neste caso temos que resolver uma igualdade entre razões a qual denominamos proporção.

O enunciado nos dá a seguinte proporção:

$$\frac{x + 3}{7} = \frac{x - 3}{5}$$

Em toda proporção com termos não nulos, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios, em função disto temos:

$$\Rightarrow 2x = 36 \Rightarrow x = \frac{36}{2} \Rightarrow x = 18$$

Então:

O valor de x é 18.

9) Um cozinheiro dispõe de 10 litros de uma mistura de água e leite em quantidades iguais. Para obter uma mistura com $^2/_5$ de água e $^3/_5$ de leite, ele deve acrescentar aos 10 litros da mistura quantos litros do que?

Quando temos um todo e precisamos obter a parte referente a uma fração do mesmo, multiplicamos o todo por tal fração. Na resolução desta questão vamos fazer o cálculo inverso.

Originalmente tínhamos o mesmo volume dos líquidos, isto é, **5 l** de água e **5 l** de leite. Pretendemos ficar com a proporção de $^2/_5$ de água e $^3/_5$ de leite. De onde concluímos que devemos aumentar a quantidade de leite, pois a proporção de leite será maior.

Como a quantidade de água não aumentou, isto quer dizer que os **5 l** de água originais representarão $^2/_5$do novo volume final.

Entendido isto se pode dizer que o problema está resolvido.

Se tivéssemos o novo volume total, para calcularmos quanto daria $^2/_5$ dele, o multiplicaríamos por esta fração e iríamos obter **5 l**. Como temos os **5 l**, precisamos fazer o cálculo inverso, isto é, dividirmos **5 l**por $^2/_5$ para obtermos o novo volume total:

$$5 \div \frac{2}{5} = 5 \cdot \frac{5}{2} = 12{,}5$$

Como tínhamos originalmente **10 l** e iremos ficar com **12,5 l** após o acréscimo do leite, isto quer dizer que acrescentamos **2,5 l** de leite:

$$12{,}5 - 10 = 2{,}5$$

Logo:

- **O cozinheiro deve acrescentar 2,5 litros de leite.**

10) Um artesão produz colares formados por 60 pedras divididas entre ametistas, a um custo de R$ 0,50 a pedra, e jades, a R$ 1,00 a pedra. Para baratear o preço de cada colar, o artesão aumentou a quantidade de ametistas em 4 pedras e diminuiu a de jades em 4 pedras, obtendo o preço de R$ 40,00 o colar. Qual o preço original de cada colar?

Nesta questão temos um outro sistema de equações do primeiro grau com duas incógnitas conforme podemos observar no enunciado.

Vamos representar por **a** a variável referente às **ametistas** e por **j** a incógnitas referentes às **jades**.

O artesão produz colares contendo **ametistas** e **jades** em um total de **60** pedras:

$a + j = 60$

Além disto sabemos que cada pedra de **jade** custa **R$ 1,00** e que cada pedra de **ametista** custa **R$ 0,50**.

Sabemos também que um colar com **60** pedras sai por **R$ 40,00** se tiver **4 pedras de ametista a mais** e **4 pedras de jade a menos** que o colar padrão:

$0{,}50(a + 4) + 1{,}00(j - 4) = 40$

Esta expressão pode ser simplificada:

Podemos então montar o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a + j = 60 \\ 0{,}5a + j = 42 \end{cases}$$

Subtraindo a segunda equação da primeira temos:

Como **a** = **36**, podemos substituí-lo na primeira equação para encontramos o valor de **j**:

Temos um total de **R$ 18,00** em **ametistas**, pois temos **36** pedras ao custo unitário de **R$ 0,50**:

$36 \cdot 0{,}50 = 18{,}00$

Em **jade** temos **R$ 24,00** pois temos **24** pedras que custam **R$ 1,00** a unidade:

$24 \cdot 1{,}00 = 24{,}00$

Então o colar original custa **R$ 42,00**:

$18{,}00 + 24{,}00 = 42{,}00$

Portanto:

O preço original de cada colar é R$ 42,00.