

NOÇÕES DE PROBABILIDADE

INTRODUÇÃO

Há três ramos principais na estatística: a estatística descritiva, que envolve a organização e a sumarização de dados; a teoria das probabilidades, que proporciona uma base racional para lidar com situações influenciadas por fatores relacionados com o acaso, assim como estimar erros; e a teoria da inferência, que envolve análise e interpretação de amostras.

A Estatística, de modo geral, constitui um valioso instrumento para tomada de decisões. Outra característica da Estatística é o uso de modelos. Estes são formas simplificadas de algum problema ou situação real. A característica fundamental dos modelos é o fato de reduzirem situações complexas a formas mais simples e mais compreensíveis.

Por hora, daremos ênfase a teoria da probabilidade como ferramenta para tomada de decisão.

PROBABILIDADE

“As origens da matemática da probabilidade remontam ao século XVI. As aplicações iniciais referiam-se quase todas a jogos de azar. Os jogadores aplicavam o conhecimento da teoria das probabilidades para planejar estratégias de apostas. Mesmo hoje ainda muitas aplicações que envolvem jogos de azar, tais como diversos tipos de loterias, os cassinos de jogos, bingos e os esportes organizados. Todavia, a utilização das probabilidades ultrapassou e muito o âmbito desses jogos. Hoje muitas organizações (públicas e/ou privadas) já incorporaram a teoria das probabilidades em seus processos diários de deliberações.”

O ponto central em todas as situações onde usamos probabilidade é a possibilidade de quantificar quão provável é determinado EVENTO e utilizamos as probabilidades para exprimir a chance de ocorrência de determinado evento.

EXPERIMENTOS ALEATÓRIOS, ESPAÇO AMOSTRAL E EVENTO

Encontramos na natureza dois tipos de fenômenos: determinísticos e aleatórios. Os determinísticos são aqueles em que os resultados são sempre os mesmos, qualquer que seja o número de ocorrência dos mesmos.

Se tomarmos um determinado sólido, sabemos que a uma certa temperatura haverá a passagem para o estado líquido. Esse exemplo caracteriza um fenômeno determinístico.

Nos fenômenos aleatórios, os resultados não serão previsíveis, mesmo que haja um grande número de repetições do mesmo fenômeno.

Por exemplo: se considerarmos a produção agrícola de uma determinada espécie, as produções de cada planta serão diferentes e não previsíveis, mesmo que as condições de temperatura, pressão, umidade, solo sejam as mesmas para todas as plantas.

Podemos considerar como experimentos aleatórios os fenômenos produzidos pelo homem.

Exemplos:

- lançamento de uma moeda;
- lançamento de um dado;
- determinação da vida útil de um componente eletrônico;
- previsão do tempo.

A cada experimento aleatório está associado o resultado do mesmo, que não é previsível, chamado evento aleatório.

Um conjunto U que consiste de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório é denominado ESPAÇO AMOSTRAL. Por exemplo, o conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ representa o espaço amostral para o lançamento de um dado, pois são todos os resultados possíveis de acontecer.

Evento é um dado resultado dentro do espaço amostral. Por exemplo, o resultado Menina, no nascimento de uma criança, ou um número par no lançamento de um dado, ou seis números quaisquer numa aposta da Mega-Sena.

PROBABILIDADE DE UM EVENTO

A probabilidade de um evento A , denotada por $P(A)$, é um número de 0 a 1 que indica chance de ocorrência do evento A . Quanto mais próxima de 1 é $P(A)$, maior é a chance de ocorrência do evento A , e quanto mais próxima de zero, menor é a chance de ocorrência do evento A . A um evento impossível atribui-se probabilidade zero, enquanto que um evento certo tem probabilidade 1,0.

As probabilidades podem ser expressas de diversas maneiras, inclusive decimais, frações e percentagens. Por exemplo, a chance de ocorrência de um determinado evento pode ser expressa como 20%; 2 em 10; 0,20 ou 1/5.

Para se obter a probabilidade de um evento A ocorrer, fazemos:

$$P(A) = \frac{\text{Nº de Casos Favoráveis}}{\text{Nº de Casos possíveis}}$$

Chamamos favoráveis os casos ou situações que aparecem no conjunto A , onde A é o evento que representa todas as escolhas que desejamos que ocorram. Os casos possíveis, são todos os que fazem parte do espaço amostral do experimento.

PROBABILIDADE CONDICIONAL

No geral, quando o espaço amostral de um experimento é alterado devido a ocorrência de um evento B já conhecido, a probabilidade de um segundo evento A é dita condicional ao primeiro evento. Nesse caso, temos:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

No mais, duas regras costumam ser muito importantes: – quando um experimento é realizado e queremos que ocorra um evento A ou um evento B , usamos a **regra do “ou”**, ou regra da soma (regra da União de eventos):

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

No geral, se A e B não podem ocorrer ao mesmo tempo, diz-se que A e B são mutuamente exclusivos e, nesse caso, a $P(A \cap B)$ é nula.

– a probabilidade de A e B ocorrerem simultaneamente pode ser calculada usando a primeiras fórmula dada nesse tópico. Contudo, **se A e B forem independentes**, isto é, se a probabilidade de um não for alterada pela ocorrência do outro, a probabilidade de ocorrerem simultaneamente é dada pela **regra do “e”**, ou regra de multiplicação (regra da intersecção) assim:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

No geral, se os eventos são mutuamente exclusivos podemos usar a regra da soma para quantos eventos tivermos. Analogamente, a regra da multiplicação pode ser usada para até n eventos independentes.

EXERCÍCIOS DE PROBABILIDADE

- 01.** Uma urna contém 10 bolas verdes, 8 vermelhas, 4 amarelas, 4 pretas e cinco brancas, todas de mesmo raio. Uma bola é retirada ao acaso. Qual a probabilidade de a bola escolhida:
- A) não ser verde?
 - B) não ser branca nem vermelha?
 - C) ser vermelha ou preta?
 - D) ser verde, vermelha ou amarela?
- 02.** Três meninos e três meninas sentam-se em fila. Determine a probabilidade de as três meninas sentarem juntas.
- 03.** Uma urna contém 15 cartões enumerados de 1 a 15. Um cartão é retirado aleatoriamente. Qual a probabilidade de o número no cartão ser múltiplo de 3?
- 04.** Joga-se um dado branco e um dado preto e observa-se os números voltados para cima. Calcule a probabilidade de:
- A) Ocorrer soma 6.
 - B) Ocorrer soma 11.
 - C) Ocorrer soma 2.
 - D) Não ocorrer nem soma 2 e nem 8.
- 05.** Uma carta é retirada aleatoriamente de uma baralho comum de 52 cartas. Qual a probabilidade de:
- A) Sair uma carta vermelha
 - B) Sair uma carta de copas
 - C) Sair um rei ou uma carta de copas.
- 06.** Um número inteiro é escolhido ao acaso dentre os números 1, 2, 3, ..., 30. Qual a probabilidade de:
- A) O número ser divisível por 3.
 - B) o número ser divisível por 5.
 - C) o número ser divisível por 5 ou por 3.
 - D) o número não ser divisível nem por 3 e nem por cinco.
- 07.** Duas bolas são retiradas ao acaso de uma urna que contém 20 alaranjadas, 7 verdes, 10 pretas e 5 brancas. Qual a probabilidade de elas serem:
- A) Alaranjadas
 - B) Pretas
 - C) Verdes
 - D) Brancas
 - E) Ambas da mesma cor
 - F) Pelo menos uma preta
- 08.** Uma urna contém 5 bolas brancas e 8 pretas. Se forem retiradas dessa urna 2 bolas sucessivamente, ou seja, não sendo as bolas recolocadas, depois de retiradas, qual a probabilidade de que ambas sejam brancas?
- 09.** Sejam os eventos A, B e C. Encontre uma expressão e mostre no diagrama de Venn para o evento em que:
- A) Exatamente um dos eventos ocorre
 - B) Pelo menos um evento ocorre
 - C) Nenhum evento ocorre.
 - d) A ou B ocorre, mas C não.
- 10.** Lance duas moedas e um dado. Qual a probabilidade de aparecerem duas caras e um número par?
- 11.** Uma moeda é viciada, de maneira que as caras são 3 vezes mais prováveis de aparecer do que as coroas. Se esta moeda é lançada duas vezes. Qual a probabilidade de ocorrer cara apenas uma vez?
- 12.** Das 8 alunas de uma classe, 3 têm olhos azuis. Se duas delas são escolhidas aleatoriamente, qual é a probabilidade de:
- A) Ambas terem os olhos azuis?
 - B) Nenhuma ter olhos azuis?
 - C) Pelo menos uma ter olhos azuis?
- 13.** Três parafusos e três porcas são colocados numa caixa. Se duas peças são retiradas aleatoriamente, encontre a probabilidade de uma ser parafuso e a outra porca.
- 14.** De 120 estudantes que se preparam para um concurso, 70 estudam mais matemática, 80 estudam mais português e 40, matemática e português. Se um estudante é escolhido aleatoriamente, encontre a probabilidade de ele:
- A) Estudar matemática ou português.
 - B) só estudar português.
 - C) só estudar matemática.
 - D) não estudar matemática.
 - E) não estudar português e nem matemática.
- 15.** Um dado é lançado. Se o número é ímpar, qual a probabilidade de ele ser primo?
- 16.** Três moedas não viciadas são lançadas. Se ocorrem caras e coroas, determine a probabilidade de ocorrer exatamente duas coroas.
- 17.** Um par de dados é lançado. Se ocorrem números diferentes, encontre a probabilidade de a soma ser um número primo.
- 18.** Um homem tem em sua mão quatro cartas de baralho vermelhas. Qual a probabilidade de elas serem todas do mesmo naipe, isto é, copas ou ouros?
- 19.** Dois dígitos diferentes são selecionados aleatoriamente dos dígitos de 1 a 9. Se a soma é ímpar, qual a probabilidade do número 2 ser um dos números selecionados?
- 20.** Numa classe há 10 meninos e 15 meninas. Três estudantes são selecionados aleatoriamente, um após o outro. Encontre a probabilidade:
- A) de os dois primeiros serem meninos e o terceiro menina.
 - B) de o primeiro e o terceiro serem meninos.
 - C) de o primeiro e o terceiro serem do mesmo sexo e o segundo de sexo oposto a estes.
- 21.** Numa certa cidade, 40% da população gostam de futebol, 25% gostam de telenovela e 15% de ambos. Uma pessoa da cidade é selecionada aleatoriamente:
- A) Se ela gosta de futebol, qual a probabilidade de também gostar de telenovela?
 - B) Se ela gosta de futebol, qual a probabilidade de não gostar de telenovela?
 - C) Qual a probabilidade de não gostar nem de futebol e nem de telenovela?
- 22.** Em certo colégio, 25% dos meninos e 10% das meninas estão estudando informática. As meninas constituem 40% do corpo de estudantes. Se um estudante é selecionado aleatoriamente e está estudando informática. Qual a probabilidade de ele ser um menino?

- 23.** Tem-se duas urnas: a urna A contém 5 bolas vermelhas, 3 brancas e 8 azuis; a urna B contém 3 bolas vermelhas e 5 brancas. Agora lança-se um dado honesto e observa-se o número da face voltada para cima; se ocorrer 4 ou 6, uma bola é escolhida de A, caso contrário uma bola é escolhida de B.
 A) Indique a probabilidade de uma bola vermelha ser escolhida.
 B) Calcule a probabilidade de uma bola branca ser escolhida.
 C) Determine a probabilidade de uma bola azul ser escolhida.
 D) Se uma bola vermelha é escolhida, qual a probabilidade de ter vindo da urna A?
- 24.** Uma urna contém 5 bolas vermelhas e 3 brancas. Uma bola é selecionada aleatoriamente da urna e abandonada, e duas bolas da outra cor são colocadas na urna. Uma segunda bola então é selecionada. Encontre a probabilidade de ambas as bolas serem da mesma cor?
- 25.** Uma urna I contém 3 bolas vermelhas e 5 brancas, e outra urna II contém 2 bolas brancas e 6 vermelhas. Se uma bola é retirada de cada urna, qual a probabilidade de ambas serem da mesma cor?
- 26.** Uma caixa contém 3 bolas azuis e 5 vermelhas, e outra caixa contém 8 bolas azuis e 7 vermelhas. Extrai-se ao acaso uma bola de uma das caixas: é azul. Qual a probabilidade de ter sido extraída da primeira caixa?
- 27.** Em uma joalheria, cada um dos três armários idênticos tem duas gavetas. Em cada gaveta do primeiro armário há um relógio de ouro. Em cada gaveta do segundo armário há um relógio de prata. Em uma gaveta do terceiro armário há um relógio de ouro, enquanto que na outra gaveta há um relógio de prata. Escolhido ao acaso um armário, e aberta uma das gavetas, verifica-se conter um relógio de prata. Qual a probabilidade de a outra gaveta do armário escolhido conter um relógio de ouro?
- 28.** Certa urna I contém 2 bolas brancas e 3 pretas, enquanto outra urna II, possui 4 brancas e 1 preta e uma urna III, 3 brancas e 4 pretas. Escolhe-se uma urna ao acaso e retira-se uma bola: é branca. Qual a probabilidade de ter sido escolhida a primeira urna?
- 29.** Uma caixa contém 9 fichas numeradas de 1 a 9. Extraem-se três sucessivamente. Determine a probabilidade de serem alternadamente, ímpar-par-ímpar ou par-ímpar-par.
- 30.** Uma urna contém 6 bolas vermelhas e 8 azuis. Extraem-se cinco ao acaso, sem reposição. Determine a probabilidade de serem 3 vermelhas e 2 azuis.
- 31.** Extraem-se três cartas de um baralho usual de 52 cartas. Determinar a probabilidade de:
 A) Serem todas do mesmo naipe.
 B) Saírem ao menos dois ases.
- 32.** Joga-se repetidas vezes um par de dados. Determine a probabilidade de aparecer a soma 11 pela primeira vez na sexta jogada
- 33.** Determine a probabilidade de se obter a soma 7 ao menos uma vez em três jogadas de um par de dados.
- 34.** Uma moeda será lançada até que se observe coroa. Qual a probabilidade de ela ser lançada 10 vezes?
- 35.** A probabilidade de um indivíduo atingir um alvo é $2/3$. Se ele deve atirar até atingir o alvo pela primeira vez. Qual a probabilidade de serem necessários cinco tiros?
- 36.** Certa caixa A contém 3 bolas vermelhas e 5 brancas, e outra caixa B, 4 bolas vermelhas e 2 brancas. Extrai-se ao acaso uma bola da caixa A e coloca-se na caixa B, sem observar a cor. Extrai-se então uma bola da caixa B. Qual a probabilidade de esta última ser branca?
- 37.** Em uma prova do cursinho onde Raquel estuda caíram dois problemas. Sabe-se que 132 alunos acertaram o primeiro problema, 86 erraram o segundo, 120 acertaram os dois e 54 acertaram apenas um problema. Qual a probabilidade de que um aluno, escolhido ao acaso:
 A) Não tenha acertado nenhum dos problemas?
 B) Tenha acertado apenas o segundo problema?
 C) Tenha acertado pelo menos um dos problemas?
- 38.** Em uma capital onde se publicam três jornais A, B, C, constatou-se que entre 2000 famílias pesquisadas, 500 assinam A, 450 assinam B, 350 assinam C, 120 assinam A e B, 220 assinam A e C, 150 assinam B e C, e 80 assinam os três jornais. Escolhendo-se ao acaso uma família, qual a probabilidade de que ela:
 A) Assine pelo menos um jornal?
 B) Não assine nenhum dos três jornais?
 C) Assine apenas um dos três jornais?
- 39.** Vinte pessoas estão em uma sala usando crachás numerados de 1 a 20. Três pessoas são escolhidas ao acaso e retiradas da sala. Os números de seus crachás são anotados. Qual a probabilidade de que o menor número seja 7?
- 40.** O professor Paulo Roberto escreveu na lousa quatro números positivos e seis negativos. Em seguida ele pediu a Daniel que escolhesse 4 desses números ao acaso e efetuasse o produto deles. Qual a probabilidade de que o produto dos números selecionados seja positivo?
- 41.** Cinco cartas vão ser retiradas de um baralho de 52 cartas. Calcular a probabilidade de que as cinco cartas sejam do mesmo naipe?
- 42.** Uma gaveta contém 5 pares de meias verdes e 8 pares de meias brancas. Tiram-se duas meias ao acaso. Qual a probabilidade de se formar:
 A) Um par de meias verdes?
 B) Um par de meias da mesma cor?
 C) Um par com meias de cores diferentes?
- 43.** Uma sala possui 3 soquetes para lâmpadas. De uma caixa com 10 lâmpadas, das quais 6 estão boas, retiram-se 3 lâmpadas ao acaso e colocam-se as mesmas nos bocais. Qual a probabilidade de que:
 A) Todas acendam?
 B) pelo menos uma lâmpada acenda?
- 44.** Uma urna contém 5 bolas pretas, 3 vermelhas, 3 azuis e 2 amarelas. Extraem-se simultaneamente 5 bolas. Qual a probabilidade de que saiam 2 bolas pretas, 2 azuis e uma amarela?

45. Duas pessoas lançam cada uma três moedas. Qual a probabilidade de que tirem o mesmo número de coroas?
46. Duas lâmpadas ruins são misturadas com duas lâmpadas boas. As lâmpadas são testadas uma a uma, até que duas ruins sejam encontradas. Qual a probabilidade de que a última ruim seja encontrada no:
A) Segundo teste? C) Quarto teste?
B) Terceiro teste?
47. A experiência mostra que determinado aluno A tem probabilidade 0,9 de resolver e acertar um exercício novo que lhe é proposto. Seis novos exercícios são apresentados ao aluno A para serem resolvidos. Qual a probabilidade que resolva e acerte no máximo dois exercícios?
48. Uma urna tem 5 bolas verdes, 4 azuis e 5 brancas. Retiram-se 3 bolas com reposição. Qual a probabilidade de que no máximo duas sejam brancas?
49. Num supermercado há 2000 lâmpadas provenientes de 3 fábricas distintas X, Y e Z. X produziu 500, das quais 400 são boas. Y produziu 700, das quais 600 são boas e Z as restantes, das quais 500 são boas. Se sortearmos ao acaso uma das lâmpadas, nesse supermercado, qual a probabilidade de que:
A) Seja boa?
B) Seja boa e não tenha sido produzida na fábrica X?
50. Considerando o exercício anterior, sendo a lâmpada escolhida DEFEITUOSA, qual a probabilidade que tenha sido produzida pela fábrica X?
51. Dez cartas são extraídas aleatoriamente de um baralho usual de 52 cartas. Qual a probabilidade de todas serem de copas?
52. Um professor de probabilidades propôs a seus alunos o seguinte problema: “são dadas duas moedas, uma perfeita (probabilidade de cara igual $1/2$), e outra com duas caras. Uma dessas moedas é escolhida ao acaso e lançada três vezes. Qual a probabilidade que sejam obtidas 3 caras?
53. Uma escola tem 100 alunos que ficaram em exame final. Desses, 40 ficaram em exame de Matemática e 70 ficaram em exame de Português. Qual a probabilidade de, sorteando um aluno ao acaso, termos 1 aluno que ficou em exame em apenas uma matéria?
54. Um conjunto de 6 lâmpadas ruins foi misturado com outras 15 lâmpadas boas. Escolhidas ao acaso, sem reposição, 4 lâmpadas, qual a probabilidade de que:
A) As quatro sejam ruins?
B) Uma seja boa e três ruins?
C) Duas sejam boas e duas ruins?
D) Três sejam boas e uma ruim?
55. Um apresentador de televisão tem três portas: Atrás de cada porta existe um prêmio que só será revelado no final do programa. Sabe-se que atrás de uma delas existe uma viagem ao redor do mundo, atrás de outra existe um automóvel e atrás de outra porta, existe um ratinho. Um candidato escolhe uma das portas. Se, antes do apresentador abrir a porta escolhida pelo candidato, abra-se uma porta que não foi a escolhida e não aparecesse o ratinho e permitisse ao candidato trocar para a outra porta ainda fechada, o candidato deveria aceitar ou não? Justifique.
56. Se a família Silva tiver 5 filhos e a família Oliveira tiver 4, qual a probabilidade de que todos os filhos dos Silva sejam meninas e todos os dos Oliveira sejam meninos?
A) $1/325$ C) $1/682$ E) $1/1754$
B) $1/512$ D) $1/921$
57. Quando dois indivíduos que manifestam um caráter dominante têm um primeiro filho que manifesta o caráter recessivo, a probabilidade de um segundo filho ser igual ao primeiro é:
A) $3/4$ C) $1/4$ E) $1/16$
B) $1/2$ D) $1/8$
58. Um homem de pele com pigmentação normal e olhos castanhos casa-se com uma mulher de fenótipo igual ao seu. Sabendo-se que o casal já tem um filho albino de olhos azuis, qual a probabilidade de num próximo nascimento este casal vir a ter uma filha de olhos azuis e com a pigmentação da pele normal?
A) $2/16$ C) $6/16$ E) $7/16$
B) $4/32$ D) $3/32$
59. No homem, o albinismo é condicionado por um gene autossômico recessivo a. Pais normais que têm um filho albino desejam saber qual a probabilidade de terem outro filho mas com pigmentação normal da pele?
A) $1/2$ C) $3/4$ E) $2/3$
B) $1/4$ D) $1/3$
60. O técnico de um time especula que a probabilidade de um zagueiro D não ser escalado é 0,3, enquanto a probabilidade de um centrovante J ser escalado é de 0,8. Qual a probabilidade de que o zagueiro e o atacante apareçam na escalação?
A) 0,06 B) 0,14 C) 0,56 D) 0,72
61. Numa urna foram colocados todos os anagramas da palavra VESTIBULAR. Põe-se uma mão na urna e retira-se um desses anagramas. Qual a probabilidade de que o anagrama retirado tenha as vogas juntas?
A) $1/5040$ B) $1/1260$ C) $1/60$ D) $1/30$
62. Em uma sala estão 6 rapazes e 5 moças, todos líderes de turma de uma escola. Dentre os onze, 5 serão escolhidos para participar de uma reunião com os vereadores na câmara. Qual a probabilidade de que haja entre os escolhidos pelo menos 2 rapazes e 2 moças?
A) $22/35$ C) $7/11$ E) $23/32$
B) $25/33$ D) $11/23$
63. Cinco prêmios serão sorteados entre os 20 melhores alunos da escola, entre eles Alan, Beto e Clarisse. Sabendo que cada aluno só poderá receber um prêmio, qual a probabilidade de Alan, Beto ou Clarisse façam parte do grupo sorteado?
A) $\frac{137}{228}$ B) $\frac{198}{317}$ C) $\frac{17}{29}$ D) $\frac{389}{995}$
64. Com relação à questão anterior, se fossem apenas três prêmios, qual a probabilidade de que, Isaac Nêwton, o pior aluno da sala, fosse um dos sorteados?
A) 10% C) 20% E) 28%
B) 15% D) 23%