

## PROGRESSÃO GEOMÉTRICA (PG) – LISTA-RESUMO

### Definição de PG

Entenderemos por progressão geométrica (PG) qualquer sequência de números reais ou complexos, onde cada termo a partir do segundo é igual ao anterior, multiplicado por uma constante denominada razão.

### Exemplos:

◊ (1, 2, 4, 8, 16, 32, ...) → PG de razão 2

◊ (5, 5, 5, 5, 5, 5, ...) → PG de razão 1

◊ (100, 50, 25, ...) → PG de razão  $\frac{1}{2}$

◊ (2, -6, 18, -54, 162, ...) → PG de razão -3

### Fórmula do Termo Geral

Seja a PG genérica:  $(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots)$ , onde  $a_1$  é o primeiro termo, e  $a_n$  é o n-ésimo termo, ou seja, o termo de ordem n. Sendo  $q$  a razão da PG, da definição podemos escrever:

$$a_2 = a_1 \cdot q$$

$$a_3 = a_2 \cdot q = (a_1 \cdot q) \cdot q = a_1 \cdot q^2$$

$$a_4 = a_3 \cdot q = (a_1 \cdot q^2) \cdot q = a_1 \cdot q^3$$

Infere-se daí que  $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$  que é denominada fórmula do termo geral da PG. Genericamente, poderemos escrever

$$a_n = a_k \cdot q^{n-k}$$

### Exemplos:

A) Dada a PG (2, 4, 8, ...), calcule o seu décimo termo.

#### Solução:

Temos:  $a_1 = 2$ ,  $q = 2$ . Para calcular o décimo termo, ou seja,  $a_{10}$ , usamos a fórmula:

$$a_{10} = a_1 \cdot q^9 = 2 \cdot 2^9 = 2 \cdot 512 \Rightarrow a_{10} = 1024$$

B) Sabe-se que o quarto termo de uma PG crescente é igual a 20 e o oitavo termo é igual a 320. Qual a razão desta PG?

#### Solução:

Temos  $a_4 = 20$  e  $a_8 = 320$ .

Logo, podemos escrever:  $a_8 = a_4 \cdot q^{8-4}$ .

Ou seja,  $320 = 20 \cdot q^4$ .

Dessa forma,  $q^4 = 16 = 2^4$ .

Simplificando os expoentes, conclui-se, que  $q = 2$ .

### Propriedades Especiais

◊ Dados 3 termos, consecutivos numa PG, podemos

escrevê-los como  $\left(\frac{x}{q}, x, xq\right)$ , onde  $q$  é a razão da PG.

◊ Por essa propriedade, é possível concluir que dados  $(a_1, a_2, a_3)$  temos:

$$a_2^2 = a_1 \cdot a_3$$

### Mais Propriedades

◊ Em toda PG, um termo é a média geométrica dos termos equidistantes dele ou, mais facilmente, dos termos imediatamente anterior e posterior a ele. Ou seja, considerando a PG (A, B, C, D, E, F, G), temos então:

$$B^2 = A \cdot C; C^2 = B \cdot D; D^2 = C \cdot E; E^2 = D \cdot F$$

◊ O produto dos termos equidistantes dos extremos de uma PG é constante. Ou seja, se considerarmos uma PG (A, B, C, D, E, F, G), então vale que:

$$A \cdot G = B \cdot F = C \cdot E = D \cdot D = D^2$$

### Soma dos n Primeiros Termos de uma PG

Seja a PG  $(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots)$ . Para o cálculo da soma dos  $n$  primeiros termos  $S_n$ , podemos utilizar a fórmula que segue.

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

**Exemplo:** Calcule a soma dos 10 primeiros termos da PG (1, 2, 4, 8, ...)

#### Solução:

Note que, neste caso,  $a_1 = 1$  e a razão é  $q = 2$ . Daí temos:

$$S_{10} = \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = \frac{1024 - 1}{1} = 1023.$$

### Soma dos termos de uma PG decrescente e ilimitada

Considere uma PG ilimitada (infinitos termos) e decrescente. Nestas condições, podemos considerar que no limite teremos  $a_n = 0$ . Substituindo na fórmula anterior, encontraremos

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}$$

### Exemplo:

Resolva a equação  $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} + \frac{x}{16} + \dots = 100$ .

#### Solução:

Note que o 1º membro é uma soma dos termos de uma PG razão  $\frac{1}{2}$  onde  $a_1 = x$ . É óbvio, a soma vale 100. Logo, substituindo na fórmula, temos:

$$100 = \frac{x}{1 - \frac{1}{2}} \Rightarrow 100 = \frac{x}{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = 100 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{x = 50}$$

### Produto dos n primeiros termos de uma PG

Sendo  $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$  uma PG de razão  $q$ , o produto  $P_n$  de todos os valores da PG será dado por:

$$P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$$

## LISTA DE EXERCÍCIOS

**01.** Escreva uma PG de quatro termos, onde:

- A)  $a_1 = 3$  e  $q = 2$ .  
 B)  $a_1 = 200$  e  $q = \frac{1}{2}$ .  
 C)  $a_1 = 1$  e  $q = -2$ .

**02.** Escreva o termo seguinte de cada uma das progressões geométricas:

- A) (1, 2, 4, ...)  
 B)  $\left(\frac{3}{5}, 3, 15, \dots\right)$   
 C)  $(2\sqrt{2}, 4, 4\sqrt{2}, \dots)$   
 D) (-3, 18, -108, ...)

**03.** Classifique em crescente, decrescente ou oscilante as progressões geométricas:

- A)  $\left(1000, 100, 10, 1, \frac{1}{10}\right)$   
 B)  $\left(\frac{1}{16}, \frac{1}{4}, 1, 4, 16\right)$   
 C) (2, -4, 8, -16)

**04.** Considere que  $x - 4$ ,  $2x + 4$  e  $10x - 4$  são termos consecutivos de uma PG. Calcule  $x$  de modo que eles sejam positivos.

**05.** Determine  $x$  de modo que a sucessão  $(x - 1, x + 2, 3x, \dots)$  seja uma PG crescente.

**06.** A soma de três termos consecutivos de uma PG é 21 e o produto, 216. Sabendo-se que a razão é um número inteiro, calcule esses números.

**07.** Numa PG tem-se  $a_1 = 3$  e  $a_8 = 384$ . Pede-se:

- A) a razão da PG;  
 B) o quinto termo da PG.

**08.** O primeiro termo de uma PG é  $5\sqrt{2}$ , a razão é  $\sqrt{2}$  e o último termo é 80. Obtenha:

- A) O número de termos dessa PG;  
 B) O quinto termo da PG.

**09.** O oitavo e o décimo termos de uma sequência numérica são, respectivamente, 640 e 2560. Determine o nono e o décimo termos, nos casos a seguir:

- A) A sequência é uma progressão aritmética;  
 B) A sequência é uma progressão geométrica.

**10.** O segundo termo de uma PG decrescente é  $\frac{9}{8}$  e o quarto é  $\frac{1}{2}$ . Calcule o oitavo termo dessa sequência.

**11.** Uma moça seria contratada como balconista para

trabalhar de segunda a sábado nas duas últimas semanas que antecederiam o Natal. O patrão ofereceu R\$ 1,00 pelo primeiro dia de trabalho e nos dias seguintes o dobro do que ela recebera no dia anterior. A moça recusou o trabalho. Se ela tivesse aceitado a oferta, quanto teria recebido pelos 12 dias de trabalho?

**12.** Uma praga atacou uma criação de aves. No primeiro dia, uma ave adoeceu; no segundo dia, duas outras aves adoeceram; no terceiro dia, adoeceram mais quatro e assim por diante, até o oitavo dia. Nenhuma das aves morreu. Sabendo-se que ao fim do oitavo dia não havia nenhuma ave sem a doença, qual é o total de aves dessa criação?

**13.** Calcule:

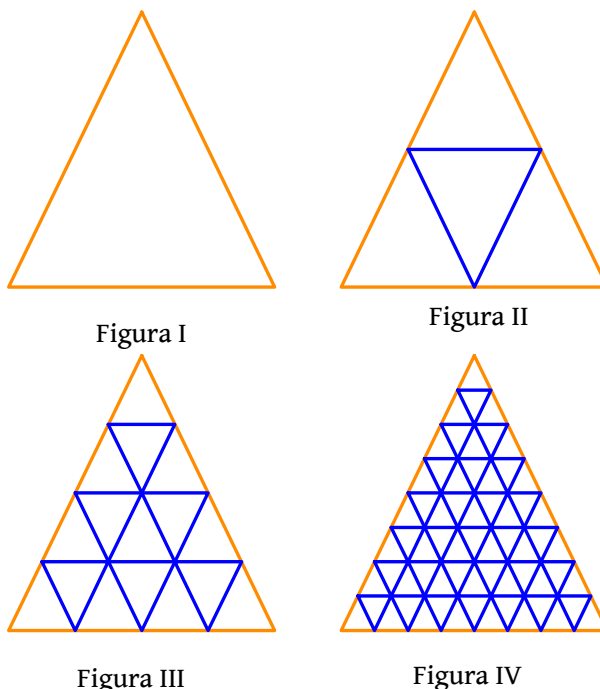
- A) a soma dos cinco primeiros termos da PG (2, -6, 18, ...);  
 B) a soma dos seis primeiros termos da PG  $(3\sqrt{3}, 9, 9\sqrt{3})$ ;  
 C) a soma dos 10 primeiros termos da P.G. (4, 8, 16, 32, ...).

**14.** Calcule a soma dos termos da seguinte PG:  $(2, 2\sqrt{5}, 10, 10\sqrt{5}, 50, 50\sqrt{5}, 250)$

**15.** Determine a soma dos 6 termos da P.G. crescente em que os extremos são  $\frac{1}{9}$  e 27.

**16.** Escreva a PG cuja razão é  $\frac{3}{2}$ , sabendo que a soma dos seus cinco primeiros termos é 422.

**17.** Considere esta sequência de figuras



Na figura I, há 1 triângulo; na figura II, o número de triângulos menores é 4; na figura III, o número de triângulos menores é 16, e assim por diante. Prosseguindo essa construção de figuras, quantos triângulos menores haverá na figura VII?

**18.** Dada uma PG onde o primeiro termo é 2 e a razão, 5, obtenha a soma dos seus 10 primeiros termos.

19. Sabe-se que em uma PG é tal que tem-se  $a_2 + a_4 = 60$  e  $a_3 + a_5 = 180$ . Determine  $a_6$ .

20. Em uma PG de razão positiva sabe-se que:

$$\begin{cases} a_4 + a_6 = -320 \\ a_4 - a_6 = 192 \end{cases}$$

Determine o quinto termo dessa PG

21. Determine a soma dos termos das seguintes progressões geométricas infinitas:

A)  $\left(10, 4, \frac{8}{5}, \dots\right)$

B)  $\left(\frac{3}{5}, \frac{3}{10}, \frac{3}{20}, \dots\right)$

C)  $(100, -10, 1, \dots)$

D)  $\left(\frac{2}{10}, \frac{2}{100}, \frac{2}{1000}, \dots\right)$

22. A soma dos termos de uma PG decrescente infinita é 128 e a razão é  $\frac{1}{4}$ . Calcule o segundo termo da PG.

24. O primeiro termo e a soma dos termos de uma PG decrescente infinita são, respectivamente, 4 e 12. Escreva os cinco primeiros termos dessa PG.

25. Resolva em  $\mathbb{R}$  as equações.

A)  $x + \frac{x}{3} + \frac{x}{9} + \dots = 9$

B)  $x + \frac{4x}{5} + \frac{16x}{25} + \dots = 20$

C)  $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \dots = 16$

D)  $5x + x + \frac{x}{5} + \frac{x}{25} + \dots = \frac{125}{2}$

26. Determine a fração geratriz de cada uma das dízimas periódicas, usando os conceitos de PG.

A) 0,3333...

B) 0,414141...

C) 2,3333...

D) 1,4333...

E) 5,92222...

F) -2,5444....

27. A sequência  $(x, 3x + 2, 10x + 12)$  é uma PG. Pedese:

A) que se calcule o valor de  $x$ .

B) que se escreva essa progressão.

28. Os lados de um triângulo retângulo de área  $150 \text{ m}^2$  são três números em PG. Determine o perímetro desse triângulo.

29. Na compra de um aparelho eletrodoméstico, que custava R\$ 672,00, as prestações foram quatro valores que

obedeceram uma PA crescente de razão R\$ 40,00. Sabe-se que a entrada foi  $\frac{1}{6}$  do preço do produto. A última

prestação foi de:

A) R\$ 220,00

D) R\$ 205,00

B) R\$ 215,00

E) R\$ 200,00

C) R\$ 210,00

30. Um cachorro persegue um coelho. A velocidade do coelho é  $\frac{1}{10}$  da velocidade do cachorro.

A distância que os separa é de 100 metros. Nessas condições, quando o cachorro vencer os 100 metros, o coelho terá corrido  $\frac{1}{10}$  do que percorreu o cachorro e ficará 10 metros a sua frente. Quando o cachorro correr esses 10 metros, o

coelho terá percorrido  $\frac{1}{10}$  dessa distância e estará 1 metro a sua frente. Quando o cachorro correr esse metro, o coelho

terá corrido 10 centímetros, e assim por diante. Esse raciocínio pode levar muita gente a pensar que o cachorro nunca alcançará o coelho. Assim também pensou o coelho. Azar dele.



Com os recursos estudados é possível determinar em que ponto o cachorro alcançará o coelho. E, então, quantos metros ele deverá correr para alcançar o coelho?

31. Uma forte chuva começa a cair na UFRRJ formando uma goteira no teto de uma das salas de aula. Uma primeira gota cai e 30 segundos depois cai uma segunda gota. A chuva se intensifica de tal forma que uma terceira gota cai 15 segundos após a queda da segunda gota. Assim, o intervalo de tempo entre as quedas de duas gotas consecutivas reduz-se à metade na medida em que a chuva piora. Se a situação assim se mantiver, em quanto tempo, aproximadamente, desde a queda da primeira gota, a goteira se transformará em um fio contínuo de água?

32. Seja o número  $N = 1 \times 2 \times 4 \times 8 \times 16 \times 32 \times 64 \times 128$ . O valor  $N$  também pode ser expresso por:

A)  $4^{129}$

B)  $4^{128}$

C)  $129^4$

D)  $128^4$

33. Uma progressão geométrica de 8 termos tem primeiro termo igual a 10 e o logaritmo decimal do produto de seus termos vale 36. Determine a razão dessa progressão.

34. Dada as funções  $f(x) = 2^{-x}$  e  $g(x) = 4^{-x}$ , Calcule o valor de:

A)  $M = f(0) - f(1) + f(2) - f(3) + f(4) - f(5) + \dots$

B)  $N = g(0) - g(1) + g(2) - g(3) + g(4) - g(5) + \dots$

C)  $M - N$