PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Este é um dos conteúdos de Matemática mais cobrado no ENEM e em vestibulares Brasil afora.

No fundo, uma Progressão Aritmética (PA) nada mais é do que uma sequência de números $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n)$ que segue uma "regra" muito simples: qualquer termo (ou elemento) da sequência, diminuído do termo anterior, terá sempre o mesmo resultado, chamado de razão (r). Vamos dar um exemplo numérico. Para facilitar, queremos que imagine a seguinte sequência com seis termos:

$$(2, 5, 8, 11, 14, 17)$$

Podemos notar a seguinte relação:

$$a_6 - a_5 = 17 - 14 = 3$$
$$a_5 - a_4 = 14 - 11 = 3$$
$$a_4 - a_3 = 11 - 8 = 3$$
$$a_3 - a_2 = 8 - 5 = 3$$
$$a_2 - a_1 = 5 - 2 = 3,$$

ou seja, a sequência apresentada acima é uma PA. Nela, temos 6 termos com os seguintes valores: $a_1 = 2$, $a_2 = 5$, $a_3 = 8$, $a_4 = 11$, $a_5 = 14$ e $a_6 = 17$. Além disso, a razão r desta PA vale 3.

Após essa análise, podemos notar uma propriedade que serve para qualquer Progressão Aritmética. Veja:

$$a_2 = a_1 + r$$
$$a_3 = a_2 + r = a_1 + 2r$$
$$a_4 = a_3 + r = a_1 + 3r$$
$$a_5 = a_4 + r = a_1 + 4r$$
$$a_6 = a_5 + r = a_1 + 5r$$
$$\vdots$$
$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

Esta última relação é conhecida como **a fórmula do termo geral da PA**. Com ela, podemos descobrir qualquer termo de qualquer PA apenas sabendo o primeiro termo (a_1) e a razão (r). Imagine por exemplo uma PA com $a_1 = 3$ e $r = 4$. Qual seria o décimo termo (a_{10}) da sequência? Simples, basta aplicar a fórmula do termo geral que deduzimos anteriormente:

$$a_{10} = a_1 + 9r$$
$$a_{10} = 3 + 9 \cdot 4$$
$$a_{10} = 3 + 36$$
$$a_{10} = 39$$

Fácil não é? Aliás, dependendo da razão, podemos ter três tipos de Progressão Aritmética:

» **PA crescente**: quando $r > 0$. Seus termos estarão em ordem crescente.

» **PA constate**: quando $r = 0$. Neste tipo de PA todos os termos terão valores iguais.

» **PA decrescente**: quando $r < 0$. Seus termos estarão em ordem decrescente

Se você entendeu a dedução da fórmula geral, com o exemplo dado e os três tipos possíveis de PA, vai entender também a soma dos termos da PA. Vamos lá?

Gostaria que imaginasse uma PA com n termos. Note que uma característica interessante dessa e de qualquer outra PA é a seguinte:

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{(n-1)} = a_3 + a_{(n-2)} \cdots \text{ e assim por diante!}$$

Vamos utilizar a mesma PA (2, 5, 8, 11, 14, 17) do começo do texto para mostrar a você como isso ocorre. Como já vimos, nela há seis termos. Tente fazer as seguintes contas:

$$a_1 + a_6 = 2 + 17 = ?$$
$$a_2 + a_5 = 5 + 14 = ?$$
$$a_3 + a_4 = 8 + 11 = ?$$

Não é interessante o fato de todas essas contas darem sempre 19? Construa você mesmo(a) uma PA qualquer e tente observar isso. Notou?

Inclusive, por esta propriedade, podemos deduzir **a fórmula da soma dos termos de uma PA** de n termos (S_n). Basta pegar a soma de um par $(a_1 + a_n)$ e multiplicar pela quantidade de pares $(n/2)$. Assim, teremos:

$$S_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2}$$

ou seja, tendo apenas o primeiro termo (a_1), o enésimo termo (a_n) e o número de termos de uma PA, podemos calcular a soma de todos seus elementos. Como exemplo vamos obter a soma dos termos da PA usada de exemplo neste texto. Primeiro, vamos fazer da maneira tradicional:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$$
$$S_n = 2 + 5 + 8 + 11 + 14 + 17$$
$$S_n = 57$$

Agora, aplicando a fórmula, teríamos:

$$S_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2}$$
$$S_n = (2 + 17) \cdot \frac{6}{2}$$
$$S_n = 19 \cdot 3$$
$$S_n = 57.$$

Percebeu como a aplicação da fórmula é fácil e rápida? Em exemplos com muitos termos, ela é a saída ideal.

Enfim, mostramos que uma PA é uma sequência numérica em que o termo seguinte é sempre o anterior acrescido da razão. Qualquer termo da PA pode ser calculado com a fórmula: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$.

Já a soma S_n dos termos da PA, pode ser calculada da seguinte maneira: $S_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2}$.

Ainda tem mais... Se você deseja aprimorar o conteúdo, sugerimos que faça alguns exercícios, discuta com outros colegas e tire dúvidas com seu professor e/ou em fóruns de debate sobre Matemática na internet.

No nosso site, na secção listas por assunto, você encontra listas de questões sobre esse conteúdo. Acesse: http://www.professorjhonnes.com/listasporassunto.