



# E.E. Dona Antônia Valadares

# MATEMÁTICA

## 1º ANO

## CONJUNTOS

**PROFESSOR: ALEXSANDRO DE SOUSA**

Dos 42 alunos de uma sala de primeiro ano do Ensino Médio, 37 foram aprovados em matemática, 32 foram aprovados em matemática e língua portuguesa, e 36 foram aprovados em língua portuguesa. Quantos alunos foram aprovados em apenas uma das matérias?



# Conjuntos:

Não existe uma definição formalizada do que vem a ser um conjunto. O que temos é uma ideia ou uma noção do que vem a ser um conjunto.

De uma maneira geral, temos que um conjunto é tudo aquilo que nos dá uma ideia de lista, coleção, agrupamento ou classe de objetos bem definidos

**Objetos:** Qualquer coisa: números, pessoas, letras, rios, etc... .



**Elementos ou membros de um conjunto**



# Elementos e Conjuntos



Uma coleção de revistas é um **conjunto**

cada revista é um **elemento** desse conjunto





Um time de futebol é um **conjunto**



Cada jogador do time é um **elemento** desse conjunto



## Exemplo

1. Os números 1, 3, 7 e 10
2. As vogais do alfabeto: a, e, i, o e u
3. As pessoas que habitam a Terra
4. Os alunos que faltaram à aula
5. Os times de futebol do estado de Minas Gerais
6. Os números 2, 4, 6, 8, ...



# Notação:

Conjuntos: Letras **maiúsculas**: A, B, X, Y, ...

$$A = \{a, b, c, d\}$$

Elementos: Letras **minúsculas**: a, b, c, d ...

**Por Extensão, Tabular ou Enumerativa:**

**Descrição pela citação dos elementos:**

$$\begin{cases} A = \{a, e, i, o, u\} \\ B = \{1, 3, 7, 10\} \\ X = \{2, 4, 6, 8, \dots\} \end{cases}$$



## Por Propriedade Característica:

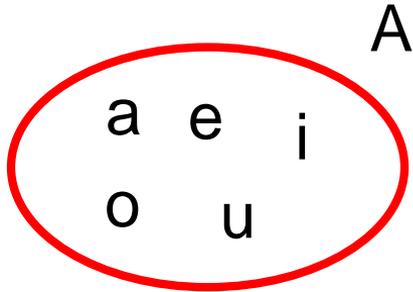
Representamos o conjunto através de uma propriedade característica de seus elementos.

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \{ x \mid x \text{ é uma pessoa que habita a Terra} \} \\ B = \{ x \mid x \text{ é um rio do Brasil} \} \\ X = \{ x \mid x \text{ é um número primo positivo} \} \\ V = \{ x \mid x \text{ é vogal} \} \\ S = \{ x \in R \mid 5x - 10 = 0 \} \end{array} \right.$$

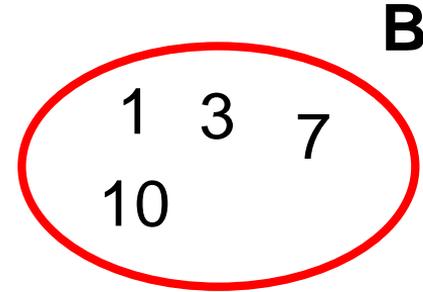


## Diagrama de Euler - Venn:

$$A = \{a, e, i, o, u\}$$



$$B = \{1, 3, 7, 10\}$$



# Exercício resolvido

Escrever uma propriedade que defina cada conjunto.

a)  $L = \{A, R\}$

b)  $M = \{0, 10, 20, 30, 40, \dots\}$

## Resolução

a)  $L$ : letras da palavra ARARA.

b)  $M$ :  $x$  tal que  $x$  é um número natural múltiplo de 10.



# RELAÇÃO DE PERTENÊNCIA

Para indicar que um elemento pertence a um conjunto se usa o símbolo:  $\in$

Se um elemento não pertence a um conjunto se usa o símbolo:  $\notin$

## Exemplo:

Seja  $M = \{2; 4; 6; 8; 10\}$

$2 \in M$  ... se lê 2 pertence ao conjunto M

$5 \notin M$  ... se lê 5 não pertence ao conjunto M



$$A = \{a, e, i, o, u\}$$

a  $\in$  A

• a pertence ao conjunto A

b  $\notin$  A

• b NÃO pertence ao conjunto A

e  $\in$  A

w  $\notin$  A



$X = \{ x \mid x \text{ é um número primo positivo} \}$

- 2  $\in$  X
- 8  $\notin$  X
- 13  $\in$  X
- 1  $\notin$  X

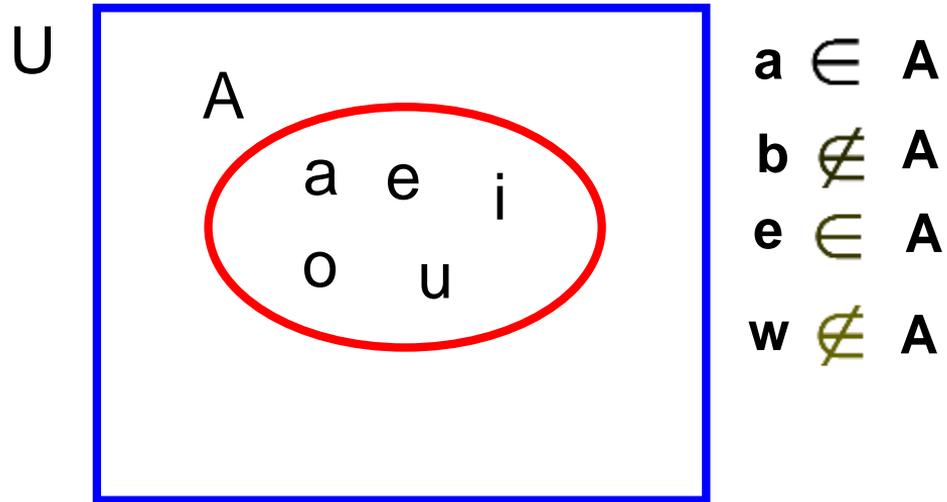
 **1 Não é um número primo**



# Conjunto Universo

É o conjunto mais amplo em que está inserido o conjunto em estudo

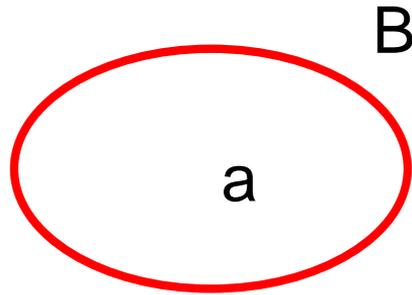
Ex: U é o conjunto das letras do alfabeto e A o conjunto das vogais



- **Conjunto Unitário :**

**Aquele que possui um único elemento**

$$A = \{ 2 \}$$



## • Conjunto Vazio :

Aquele que não possui nenhum elemento

$$A = \{ \} \quad \text{ou} \quad A = \emptyset$$

$$A = \{ x / x \text{ é natural e } 2 < x < 3 \} \rightarrow A = \emptyset$$

**OBS:**  $A = \{ \emptyset \}$  Conjunto unitário da letra norueguesa  $\emptyset$



Não representa um conjunto vazio



## • Conjunto finito:

Conjunto finito é aquele que conseguimos chegar ao “fim” da contagem de seus elementos

### Exemplos:

$$B = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$D = \{x/x \text{ é jogador da seleção brasileira de futebol}\}$$

$$D = \{x/x \text{ é aluno da escola Dona Antônia Valadares}\}$$



## • Conjunto infinito:

Conjunto infinito é aquele que, se contarmos seus elementos um a um, jamais chegaremos ao “fim” da contagem.

### Exemplos:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

$$A = \{x/x \text{ é número par}\}$$



# Igualdade de conjuntos

Dizemos que um conjunto é igual a outro se todos os elementos de um conjunto forem iguais a todos os elementos do outro conjunto.

•  $A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$

$B = \{ 3, 1, 4, 2 \}$

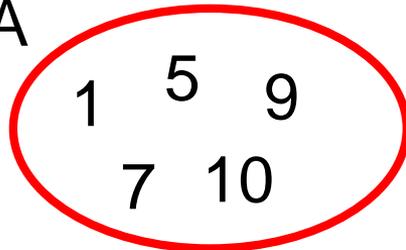
$A = B$

•  $C = \{ 5, 6, 5, 7 \}$

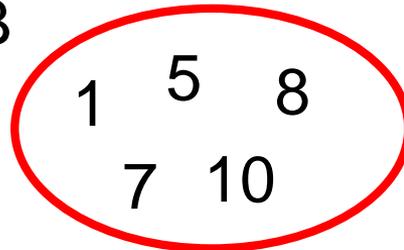
$D = \{ 7, 5, 7, 6 \}$

$C = D$

• A



B



$A \neq B$



# Exercício resolvido

Considerando o conjunto universo  $U$ , resolver a equação  $x + 3 = 0$ .

- a)  $U$  é o conjunto dos números naturais.
- b)  $U$  é o conjunto dos números inteiros.

## Resolução

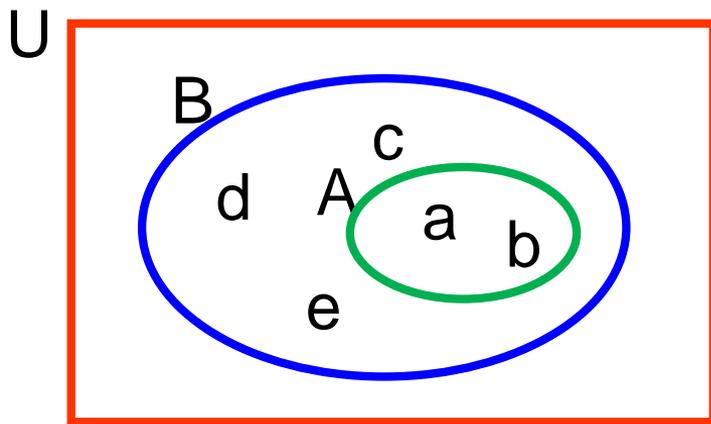
- a) Considerando o conjunto dos números naturais como o conjunto universo, a equação não tem solução, ou seja,  $S = \emptyset$ .
- b) Considerando o conjunto dos números inteiros como o conjunto universo, a equação tem solução  $-3$ , ou seja,  $S = \{-3\}$



## • Subconjuntos:

A é subconjunto de B se cada elemento do conjunto A é também elemento do conjunto B .

$$A \text{ é subconjunto de } B \iff (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$$



A é subconjunto de B

$A \subset B \rightarrow$  A está contido em B

$B \supset A \rightarrow$  B contém A



## Subconjuntos:

A é subconjunto de B se cada elemento do conjunto A é também elemento do conjunto B .

$$A \text{ é subconjunto de } B \iff (\forall x)(x \in A \implies x \in B)$$

$C = \{ 5, 6, 2 \}$        $D = \{ 3, 5, 7, 6 \}$   $\longrightarrow$  C **não** é subconjunto de D

$C \not\subset D \longrightarrow$  C **não** está contido em D



## Exercício resolvido

Considerar os conjuntos  $U$ : conjunto dos números naturais,  $A = \{x \in U/x \text{ é um número múltiplo de } 2\}$  e  $B = \{x \in U/x \text{ é um número múltiplo de } 10\}$ .

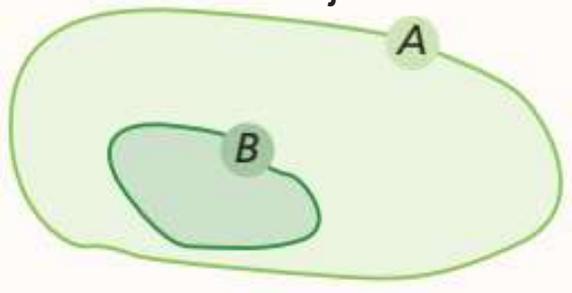
a) Há múltiplos de 2 que também são múltiplos de 10?

**Sim, há múltiplos de 2 que também são múltiplos de 10. Por exemplo: 10, 20 e 30.**

b) Há múltiplo de 10 que não é múltiplo de 2?

**Não, todo múltiplo de 10 é um número par; logo, é múltiplo de 2 também, ou seja,  $B \subset A$ .**

c) Construir um diagrama que ilustre a relação entre os conjuntos  $A$  e  $B$ .



d) Todos os múltiplos de 2 também são múltiplos de 10?

**Nem todo múltiplo de 2 é múltiplo de 10. Há múltiplos de 2, como o 6, que não são múltiplos de 10.**



## Conjunto das Partes:

Chamamos de conjunto das Partes do conjunto A e representamos por  $P(A)$ , o conjunto de todos os subconjuntos do conjunto A.

$$\text{a) } X = \{2, 4\} \quad P(X) = \{\emptyset, \{2\}, \{4\}, \{2, 4\}\}$$

$$\text{b) } Y = \{1, 3, 5\} \quad P(Y) = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{5\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{3, 5\}, \{1, 3, 5\}\}$$

$$\text{c) } W = \{3\} \quad P(W) = \{\emptyset, \{3\}\}$$

$$\text{c) } S = \{ \quad \} \quad P(W) = \{\emptyset\}$$

**Conclui-se que:**

- Se  $n(X) = 0$ , então  $n(P(X)) = 1$ .
- Se  $n(X) = 1$ , então  $n(P(X)) = 2$ .
- Se  $n(X) = 2$ , então  $n(P(X)) = 4$ .
- Se  $n(X) = 3$ , então  $n(P(X)) = 8$ .
- ...
- Se  $n(X) = a$ , então  $n(P(X)) = 2^a$



Se o número de elementos do conjunto das partes do conjunto A é 1024, calcule o número de elementos de A.

$$2^n = 1024$$

$$2^n = 2^{10}$$

$$n(x) = 10$$

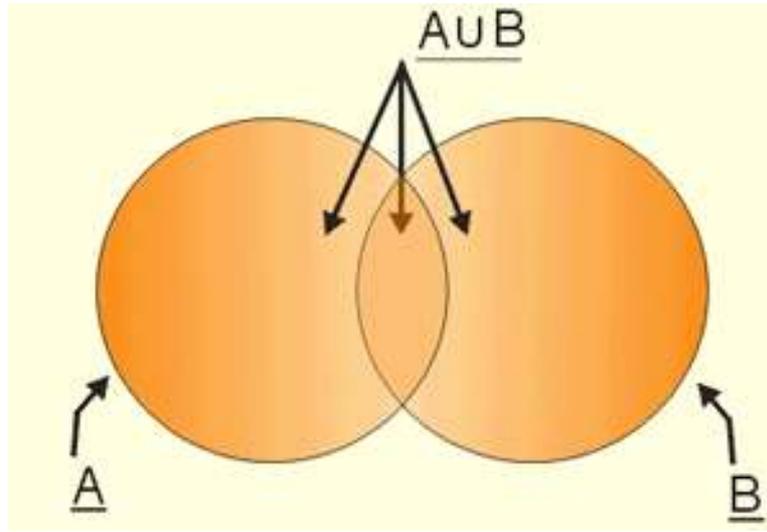


# OPERAÇÕES ENTRE CONJUNTOS

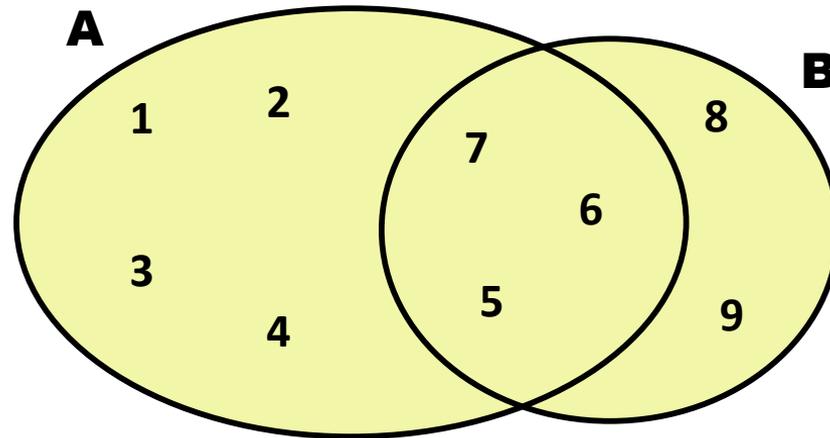


# União de conjuntos.

O conjunto “A união B” que se representa  $A \cup B$  é o conjunto formado por todos os elementos que pertencem a A, a B ou a ambos os conjuntos.



**Exemplo:**  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  e  $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$

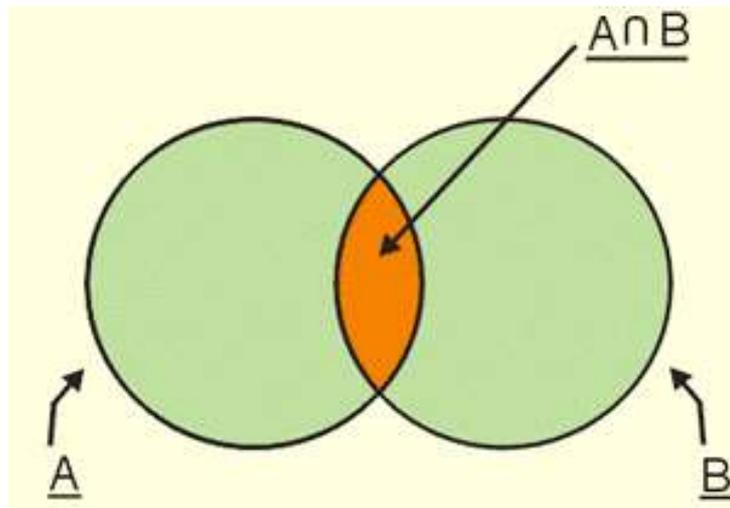


$$\mathbf{A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}}$$



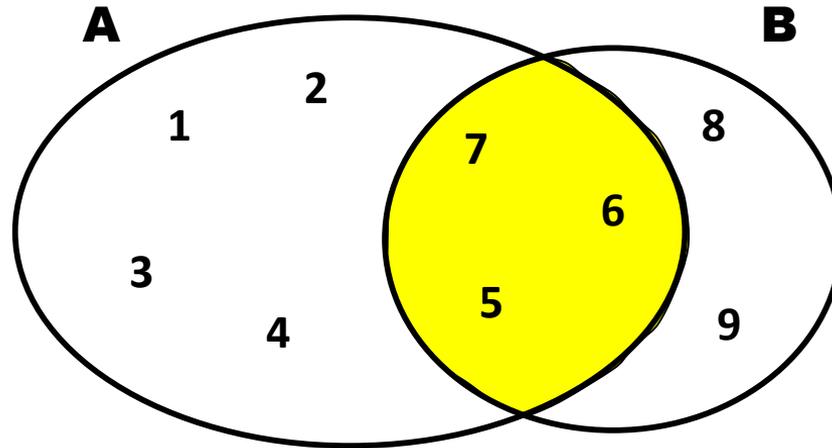
## Intersecção de conjuntos

O conjunto “A intersecção B” que se representa  $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$  é o conjunto formado por todos os elementos que pertencem a A e pertencem a B.



**$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  e  $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$**

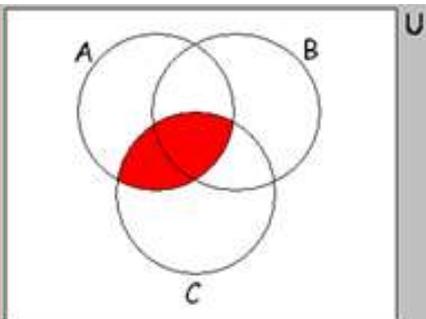
**$A \cap B$**



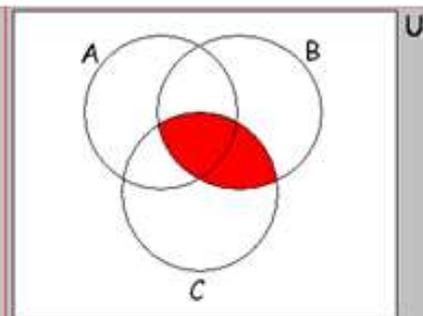
**$A \cap B = \{5; 6; 7\}$**



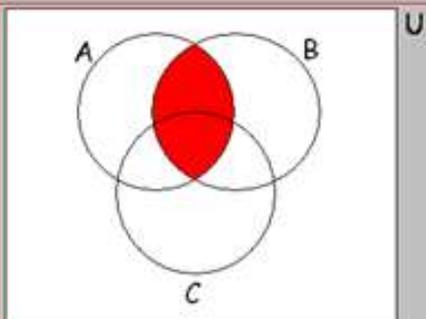
$$A \cap C$$



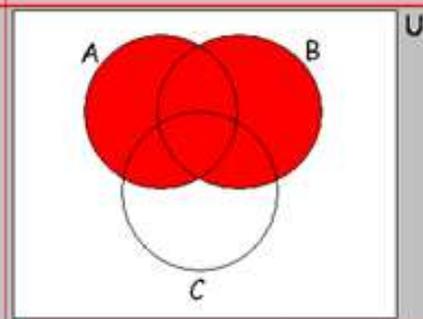
$$B \cap C$$



$$A \cap B$$

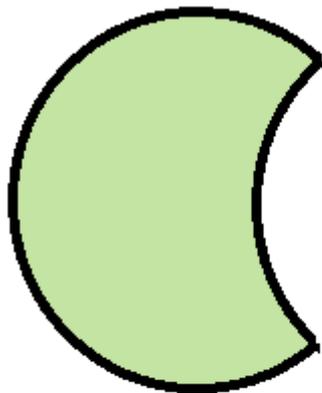


$$A \cup B$$



## Diferença de conjuntos

O conjunto “A menos B” que se representa  $A - B$  é o conjunto formado por todos os elementos que pertencem a A e não pertencem a B.



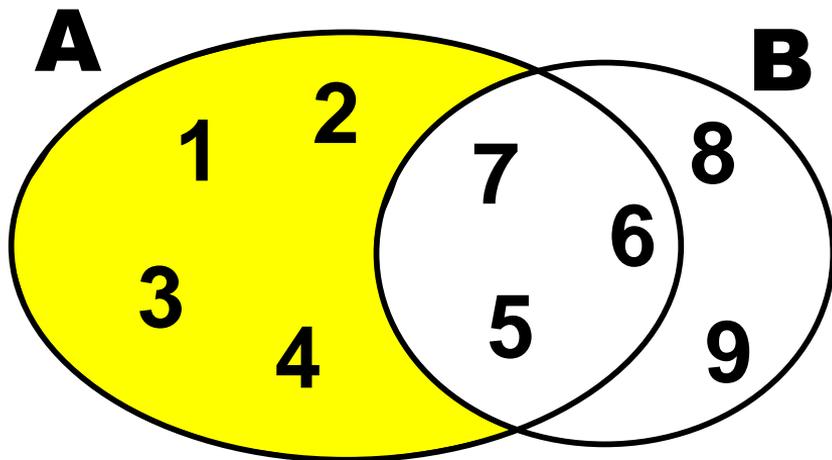
$A - B$



## Exemplo:

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  e  $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$

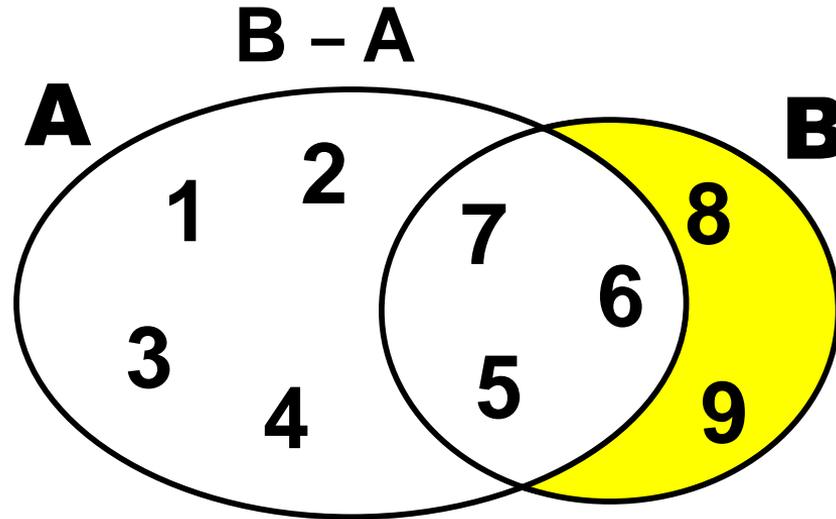
$A - B$



$$A - B = \{1; 2; 3; 4\}$$



$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  e  $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$



$$B - A = \{8; 9\}$$



## Exercício resolvido

Em uma escola técnica de Agronomia, os estudantes pesquisavam como alguns fatores de um ambiente interno influenciavam as plantas. Eles submeteram alguns espécimes aos seguintes fatores: cor da sala (C), altura da planta em relação ao solo (A) e ventilação do ambiente (V). Depois do experimento, tabularam o número de plantas que apresentaram alteração em relação à planta-controle. Os resultados estão no quadro ao lado.

a) Calcular o número de plantas que apresentaram alteração em relação à planta-controle.

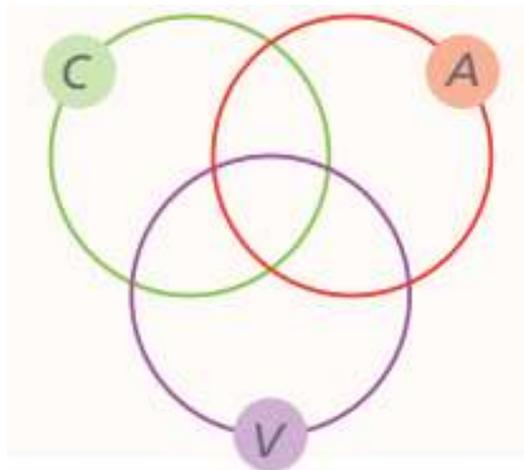
b) Indicar quantas plantas não sofreram alterações quando expostas ao fator “cor da sala”.

Fator(es)	Número de plantas
C	11
A	8
V	12
C e A	5
A e V	5
V e C	4
C, A e V	3



## Resolução

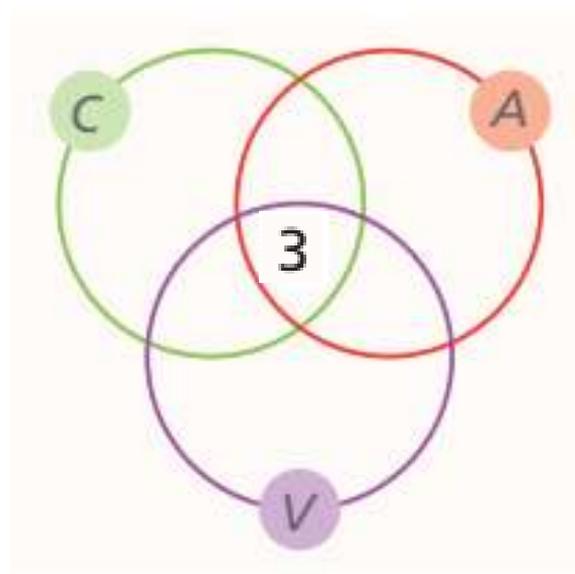
Uma das formas práticas de resolver problemas como esse é a representação dos conjuntos por meio de diagrama.



Para calcular o número de elementos de cada conjunto, podemos seguir estes passos.

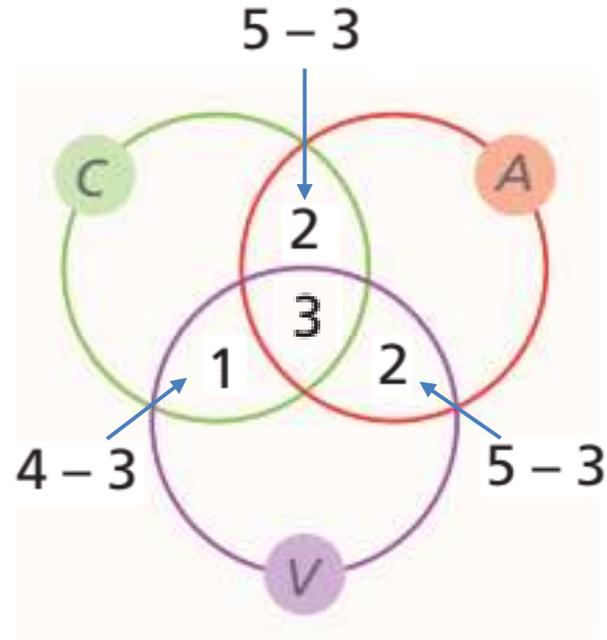
1º) Indicar o número de plantas afetadas pelos três fatores (cor, ventilação do ambiente e altura em relação ao solo) na região do diagrama que representa a intersecção dos três conjuntos.

Fator(es)	Número de plantas
C	11
A	8
V	12
C e A	5
A e V	5
V e C	4
C, A e V	3



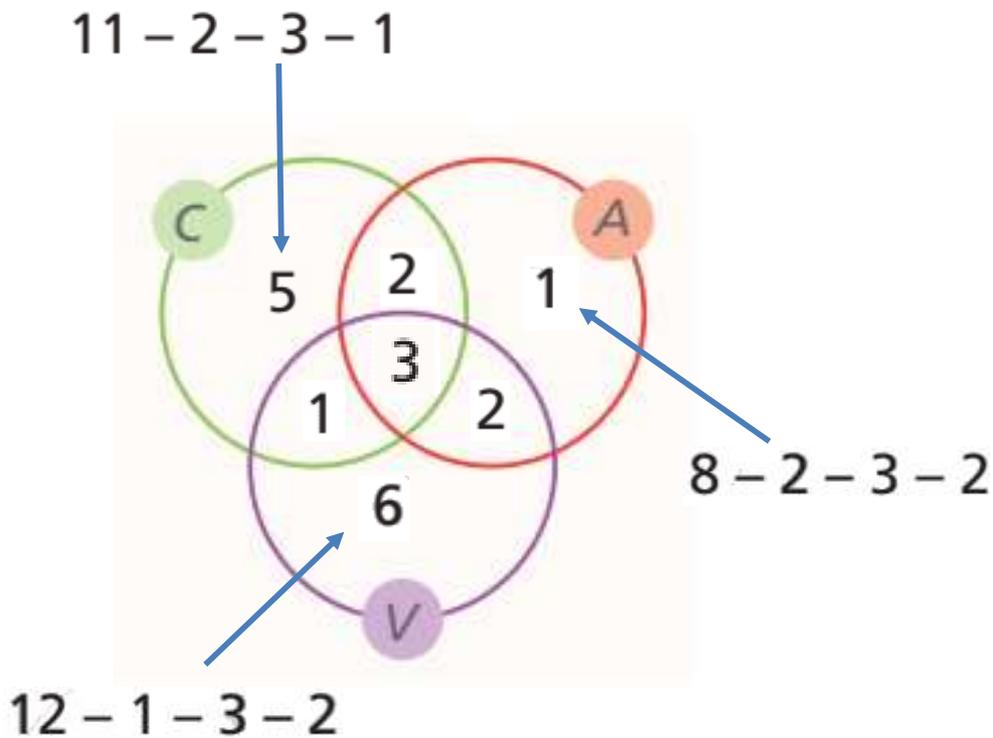
2º) Completar as regiões que representam a intersecção de apenas dois conjuntos.

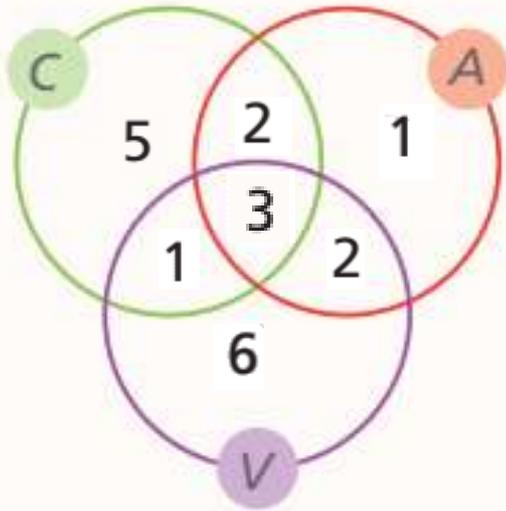
Fator(es)	Número de plantas
C	11
A	8
V	12
C e A	5
A e V	5
V e C	4
C, A e V	3



3º) Completar as regiões que representam apenas um dos conjuntos.

Fator(es)	Número de plantas
C	11
A	8
V	12
C e A	5
A e V	5
V e C	4
C, A e V	3





a) Calcular o número de plantas que apresentaram alteração em relação à planta-controle.

$$5 + 1 + 2 + 3 + 1 + 2 + 6 = 20$$

Portanto, o experimento foi realizado com 20 plantas.

b) Indicar quantas plantas não sofreram alterações quando expostas ao fator “cor da sala”

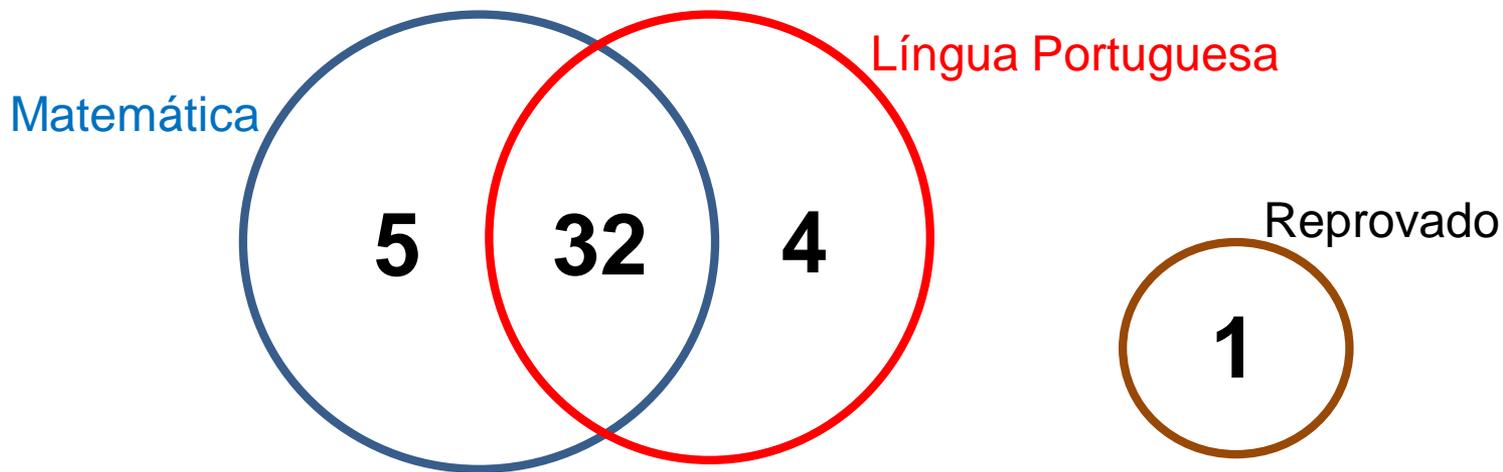
Observando o diagrama completo, estamos interessados no conjunto  $(A \cup V) - C$ .

$$\text{Cujo total de elementos é: } 1 + 2 + 6 = 9$$

Logo, 9 plantas não sofreram alterações quando expostas ao fator “cor da sala”.



Dos 42 alunos de uma sala de primeiro ano do Ensino Médio, 37 foram aprovados em matemática, 32 foram aprovados em matemática e língua portuguesa, e 36 foram aprovados em língua portuguesa. Quantos alunos foram aprovados em apenas uma das matérias? Vamos resolver este exemplo usando o diagrama de Venn.

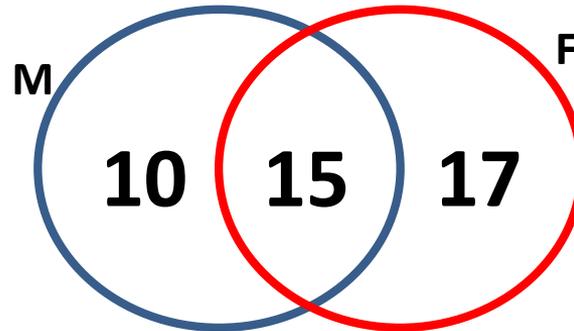


9 alunos aprovados apenas em uma das matérias.



As provas de recuperação em Matemática e Física de uma escola foram feitas no mesmo dia e durante a prova, observou-se a presença de 42 alunos. Sabendo-se que 25 alunos fizeram a prova de Matemática e 32 fizeram a de Física, determine:

- a) O número de alunos que fizeram as duas provas; **15**
- b) O número de alunos que fizeram apenas a prova de Matemática; **10**
- c) O número de alunos que fizeram apenas a prova de Física. **17**



Numa pesquisa sobre a qualidade dos serviços oferecidos pelas empresas de fornecimento de água (A), energia elétrica (E) e TV por assinatura (T) de um bairro, obteve-se um grande número de reclamações. A tabela a seguir expressa o número de reclamações de 300 entrevistados durante a pesquisa.

Serviços	A	E	T	A e E	E e T	A e T	A, E e T
Reclamações	160	180	190	120	100	110	90

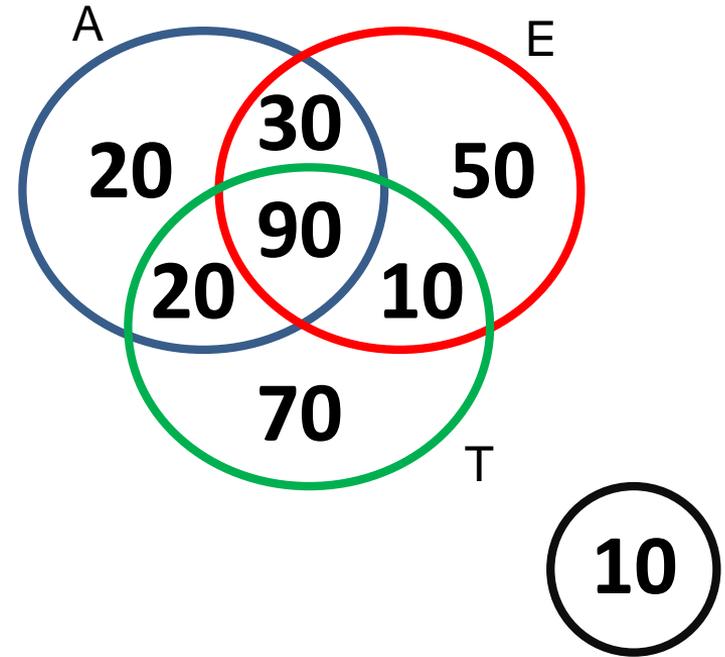
Com base na tabela, determine:

- O número de pessoas que não reclamaram de nenhum serviço;
- O número de entrevistados que reclamaram apenas do serviço oferecido pela empresa de fornecimento de água;
- O número de entrevistados que reclamaram de apenas um serviço;
- O número de entrevistados que reclamaram de pelo menos dois serviços.

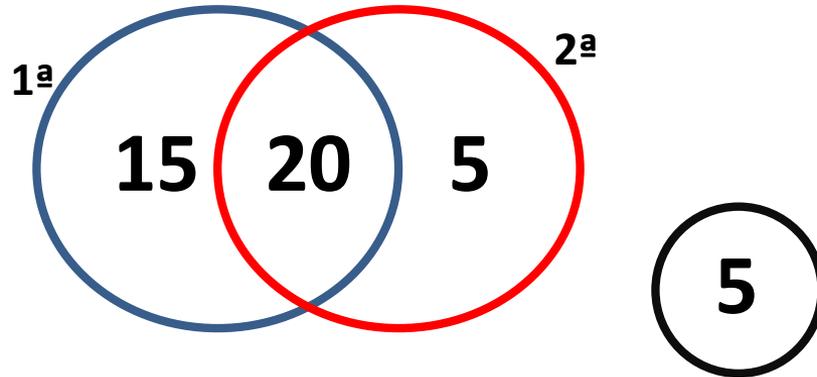


Serviços	A	E	T	A e E	E e T	A e T	A, E e T
Reclamações	160	180	190	120	100	110	90

- a) O número de pessoas que não reclamaram de nenhum serviço; **10**
- b) O número de entrevistados que reclamaram apenas do serviço oferecido pela empresa de fornecimento de água; **20**
- c) O número de entrevistados que reclamaram de apenas um serviço; **140**
- d) O número de entrevistados que reclamaram de pelo menos dois serviços. **150**



Uma atividade com duas questões foi aplicada em uma classe de 45 alunos. Os resultados apontaram que 20 alunos haviam acertado as duas questões, 35 acertaram a primeira questão e 25, a segunda. Quantos alunos erraram as duas questões.



5 alunos erraram as duas questões



10 – O professor de Literatura do *Cursinho Mil* sugeriu a leitura dos livros *Helena*, *Senhora* e *A Moreninha*. Foi constatado que nos 1000 alunos consultados:

Alunos	Leitura
600	A Moreninha
400	Helena
300	Senhora
200	A Moreninha e Helena
150	A Moreninha e Senhora
100	Senhora e Helena
20	A Moreninha, Senhora e Helena

Calcule:

- Quantos alunos leram somente “A Moreninha”?
- Quantos alunos leram “Helena” ou “A Moreninha”?
- Quantos alunos leram apenas uma das obras?
- Quantos alunos não leram nenhuma das três obras?

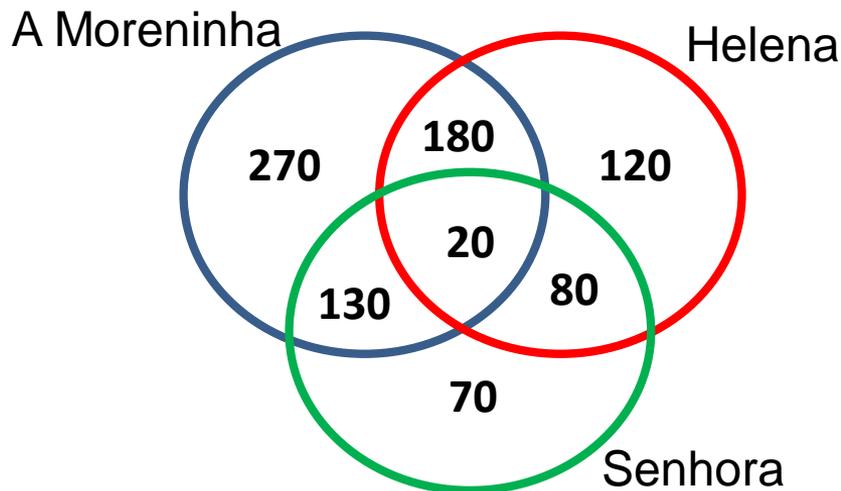


Alunos	Leitura
600	A Moreninha
400	Helena
300	Senhora
200	A Moreninha e Helena
150	A Moreninha e Senhora
100	Senhora e Helena
20	A Moreninha, Senhora e Helena

Calcule:

- Quantos alunos leram somente “A Moreninha”? **270**
- Quantos alunos leram “Helena” ou “A Moreninha”? **800**
- Quantos alunos leram apenas uma das obras? **460**
- Quantos alunos não leram nenhuma das três obras? **130**

**130**



## Complementar:

Sejam dois conjuntos  $A$  e  $B$  tais que  $B \subset A$ , chama-se complementar de  $B$  em relação a  $A$  ao conjunto  $A - B$ .

$$C_A^B = A - B, \text{ se } B \subset A$$

### Exemplo:

$$A = \{0, 2, 4, 6, 7, 8\}$$

$$B = \{4, 6, 7\}$$

$$C_A^B = A - B = \{0, 2, 8\}$$



## Exercício resolvido

Dados os conjuntos  $U = \{V, I, A, G, E, M\}$ ,  $A^C = \{V, I, A\}$  e  $B^C = \{E, M\}$ , determinar:

a) A

b) B

## Resolução

a) Como  $A^C = \{V, I, A\}$ , são os elementos de  $U$  que não pertencem ao conjunto A.

Portanto,  $A = \{G, E, M\}$

b) Como  $B^C = \{E, M\}$ , são os elementos de  $U$  que não pertencem ao conjunto B.

Portanto,  $B = \{V, I, A, G\}$ .

