E.E. Dona Antônia Valadares

MATEMÁTICA

1º ANO

FUNÇÃO AFIM

PROFESSOR: ALEXSANDRO DE SOUSA

FUNÇÃO AFIM

Em matemática uma função é como uma máquina que faz sempre um mesmo processo: adicionando-se um número x, ocorrerão operações matemáticas que transformarão esse valor em y. Isso significa que os valores de x são variáveis, assim como os resultados y.

Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama -se **função afim** quando existem números reais *a* e *b* tais que $\boldsymbol{f(x) = ax + b}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Os números reais ***a*** e ***b*** são os coeficientes da função afim.

DEFINIÇÃO: Toda função do tipo: $f(x) = ax + b$ ($x \in$ IR)

São funções afim:

$f(x) = 2x + 1$ $\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$

$f(x) = -4x$ $\begin{cases} a = -4 \\ b = 0 \end{cases}$

$f(x) = -3x - 11$ $\begin{cases} a = -3 \\ b = -11 \end{cases}$

$f(x) = 7$ $\begin{cases} a = 0 \\ b = 7 \end{cases}$

Não são funções afim:

- ✓ $f(x) = 2x^2 + 1$
- ✓ $f(x) = -4x^3$
- ✓ $f(x) = \frac{1}{x}$
- ✓ $f(x) = \frac{1}{x^2}$

Prof: Alexsandro de Sousa

VALOR DA FUNÇÃO AFIM

O **valor de uma função afim** $f(x)\ \ ax + b$ para $x = x_0$ é dado por $f(x_0)\ \ ax_0 + b$.

Exemplo: Seja a função afim $f(x) = 3x + 7$

✓ Seu valor para $x = 5$:
$f(5) = 3 \cdot 5 + 7 = 22$

o valor numérico da função quando x é igual a 5 é f(5) = 22

✓ Seu valor para $x = -4$:
$f(-4) = 3 \cdot (-4) + 7 = -5$

o valor numérico da função quando x é igual a – 4 é f(– 4) = – 5

✓ Seu valor para $x = 0$:
$f(0) = 3 \cdot 0 + 7 = 7$

o valor numérico da função quando x é igual a 0 é f(0) = 7

Prof: Alexsandro de Sousa

VAMOS DE EXEMPLO:

Observe, a seguir, um exemplo de questão que envolve função afim.

Dada a função definida por **$y = -7x + 5$,** vamos determinar a imagem do número real **(-3)** por essa função.

Para determinar essa imagem, substituímos ***x*** por **(-3)** na lei de formação dessa função:

$$y = -7x + 5 \rightarrow y = -7 \cdot (-3) + 5$$

$$y = 21 + 5 \rightarrow y = 26$$

Logo, **26** é a imagem do número – **3** pela função dada.

Prof: Alexsandro de Sousa

CASOS PARTICULARES DE FUNÇÃO AFIM

A função afim pode ser:

constante

- $n(x) = -5$
- $g(x) = 3$
- $f(x) = \frac{1}{10}$
- $f(x) = \sqrt{7}$

Função Identidade
b = 0 e a = 1

linear

- $h(x) = -7x$
- $h(x) = 3x$
- $g(x) = -6x$
- **$f(x) = x$**

Uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é função constante se é definida por $f(x) = b$, com $b \in \mathbb{R}$, para todo x do domínio.

Uma função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é função linear é definida por f(x) = ax, com a ≠ 0 e b = 0.

CASOS ESPECIAIS

Função linear b = 0, ex.: $f(x) = 3x$

Função Identidade b = 0 e a = 1, ou seja, $f(x) = x$

Função constante a = 0, ex.: $f(x) = 3$

Dada a função afim *g* tal que $g(x) = \frac{1}{3}x - 1$ calcular:

a) $g\left(\frac{1}{2}\right)$

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} - 1$$

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} - 1$$

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6} - 1$$

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1-6}{6}$$

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-5}{6}$$

b) x, para $g(x) = 4$

$$\frac{1}{3}x - 1 = 4$$

$$\frac{1}{3}x = 4 + 1$$

$$\frac{1}{3}x = 5$$

$$x = 5 \cdot 3$$

$$x = 15$$

Uma pessoa vai escolher um plano de saúde entre duas opções: A e B. Condições dos planos:
Plano A: cobra um valor fixo mensal de R$ 180,00 e R$ 30,00 por consulta num certo período.
Plano B: cobra um valor fixo mensal de R$ 100,00 e R$ 50,00 por consulta num certo período.
Temos que o gasto total de cada plano é dado em função do número de consultas x dentro do período pré-estabelecido. Vamos determinar:

a) A função correspondente a cada plano. **Plano A: $f(x) = 180 + 30x$**

Plano B: $f(x) = 100 + 50x$

b) Em qual situação o plano A é mais econômico; o plano B.

Plano A < Plano B

$$180 + 30x < 100 + 50x$$

$$30x - 50x < 100 - 180$$

$$-20x < -80$$

$$20x > 80 \rightarrow x > 4$$

PLANOS DE SAÚDE

Prof: Alexsandro de Sousa

Na produção de peças, uma fábrica tem um custo fixo de R$ 16000,00 mais um custo variável de R$ 3,00 por unidade produzida. Cada peça é vendida por R$ 5,00. Sendo x o número de peças unitárias produzidas, determine a quantidade de peças que devem ser produzidas e vendidas para a empresa ter lucro.

$c(x) = 16000 + 3x$

$v(x) = 5x$

$L(x) = v(x) - c(x)$

$L(x) > 0$

$v(x) - c(x) > 0$

$5x - (1600 + 3x) > 0$

$5x - 1600 - 3x > 0$

$2x > 16000$

$x > 8000$

Prof: Alexsandro de Sousa

Fazer exercício é importante para se manter saudável. Seja qual for a sua idade, o exercício físico regular traz grandes benefícios a saúde, à aparência e ao bem estar.

Francisco foi se matricular numa academia e aproveitou uma promoção e pagou R$ 950,00.

Matrícula - R$ 50,00
Mensalidade - R$ 75,00

Durante quanto tempo ele poderá frequentar a academia?

$f(x) = 50 + 75x$

$50 + 75x = 950$

$75x = 950 - 50$

$75x = 900$

$x = 12$

Prof: Alexsandro de Sousa

Um carro está localizado no Km 16 de uma rodovia retilínea no instante t = 0.

Ele está se movendo a uma velocidade constante de 80 km/h. Determine:

a) a função horária do movimento do carro. **$f(x) = 16 + 80x$**

b) a posição que o carro estará no instante t = 2,5

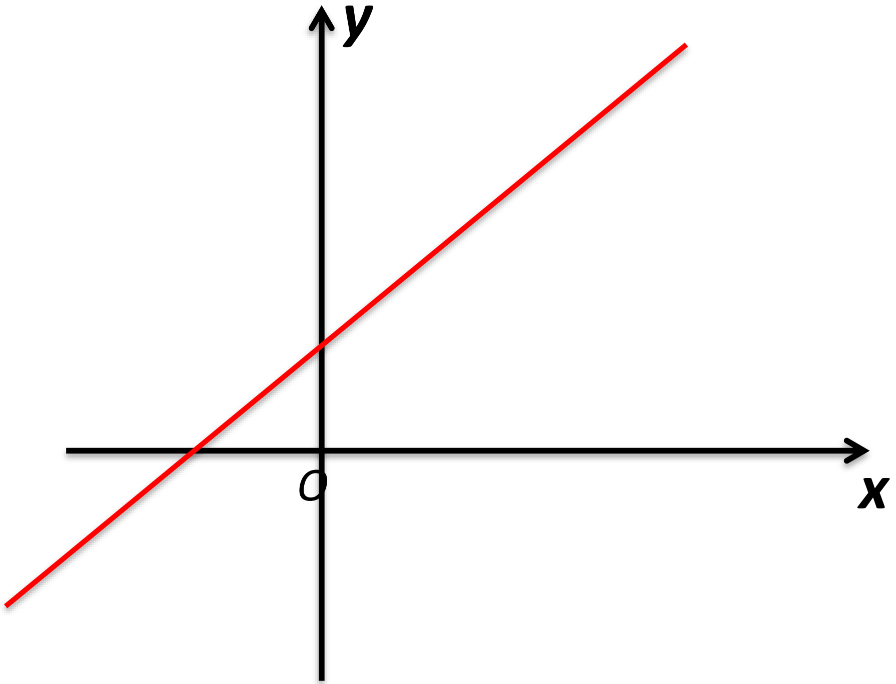
$f(x) = 16 + 80 \cdot 2,5$

$f(x) = 16 + 200$

$f(x) = 216$

GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO AFIM

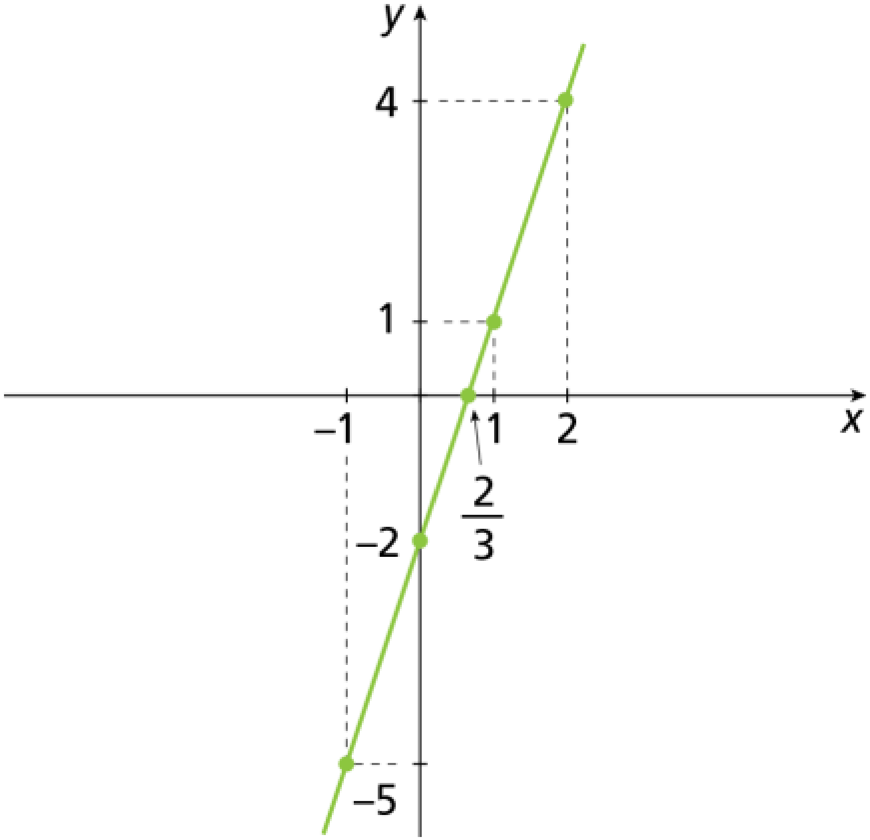
É sempre uma reta não vertical.



Prof: Alexsandro de Sousa

Vamos construir o gráfico da função $f(x) = 3x - 2$.

x	$f(x)$
-1	-5
0	-2
$\frac{2}{3}$	0
1	1
2	4

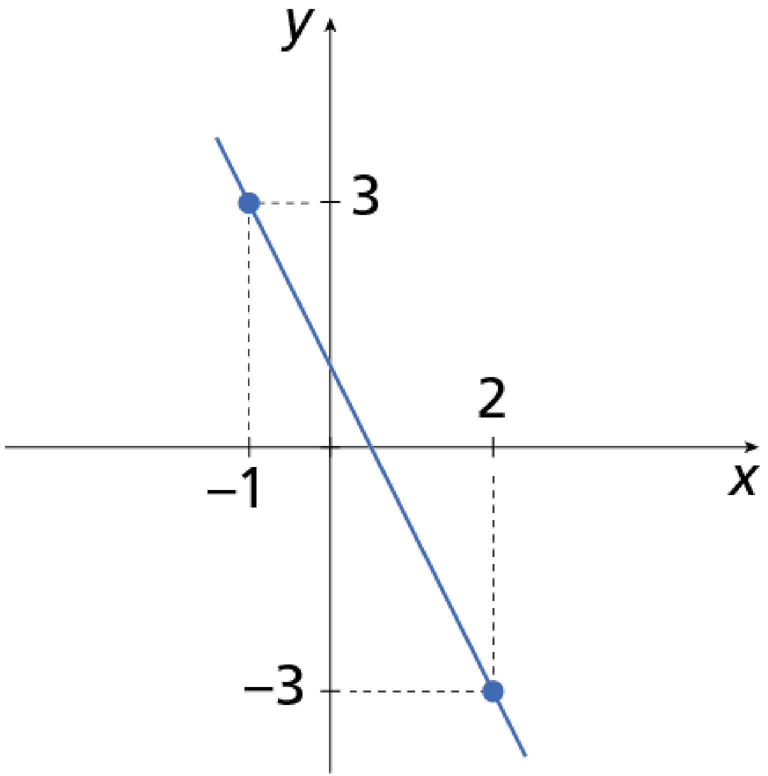


Prof: Alexsandro de Sousa

Dois pontos distintos são suficientes para determinar uma reta.

- $g(x) = -2x + 1$

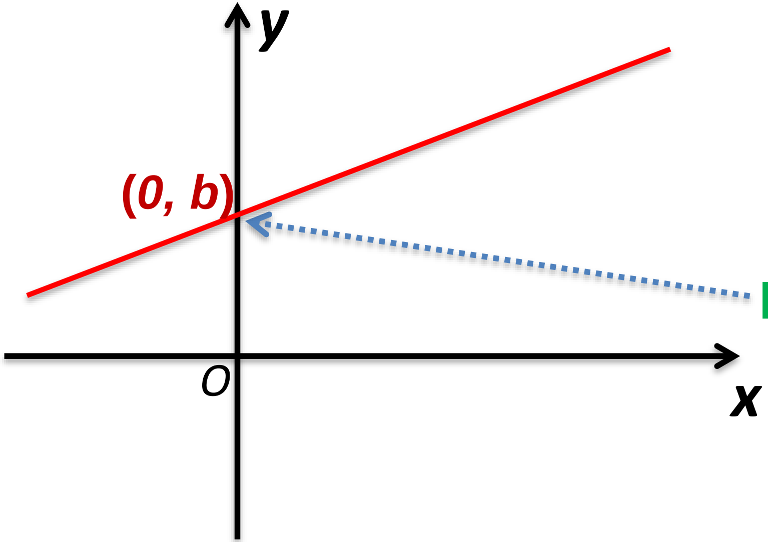
x	$g(x)$
−1	3
2	−3



Prof: Alexsandro de Sousa

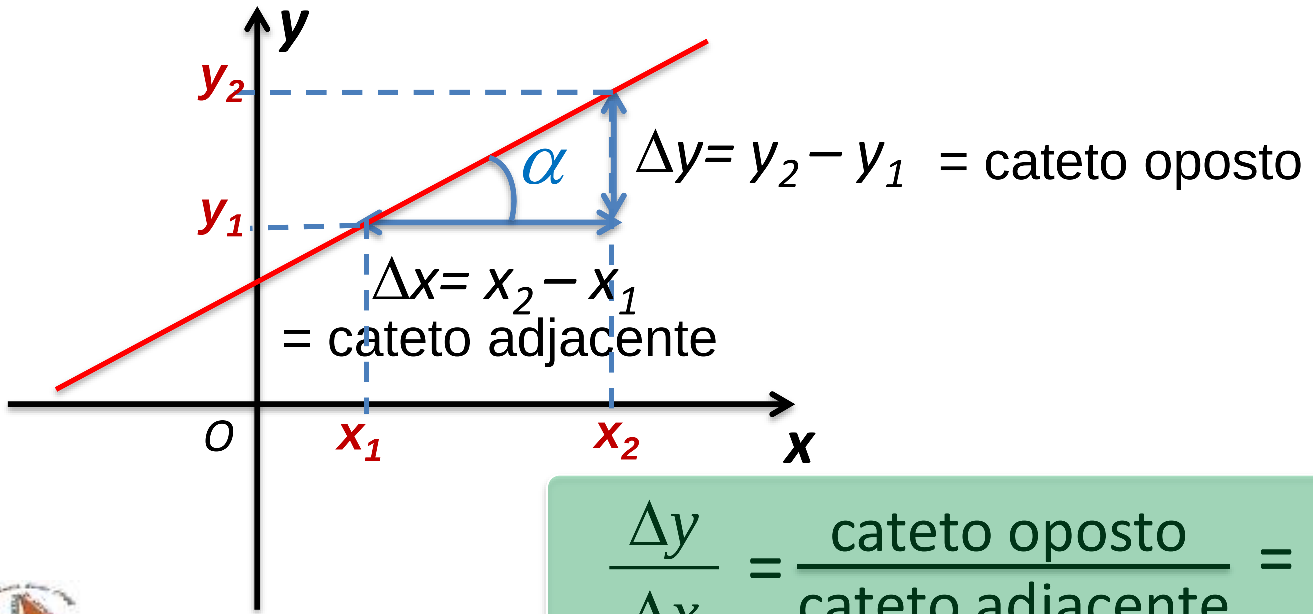
COEFICIENTE LINEAR

A ordenada ***y*** onde a reta do gráfico intersecta o eixo *Oy* é o coeficiente linear (***b***) da função: $f(x) = ax + b$



Este $y = b$ = coeficiente linear da reta

A taxa de variação (***a***) da função afim também é chamada de coeficiente angular da reta: ***f*(*x*) = *a**x* + *b***



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \operatorname{tg}\alpha = a$$

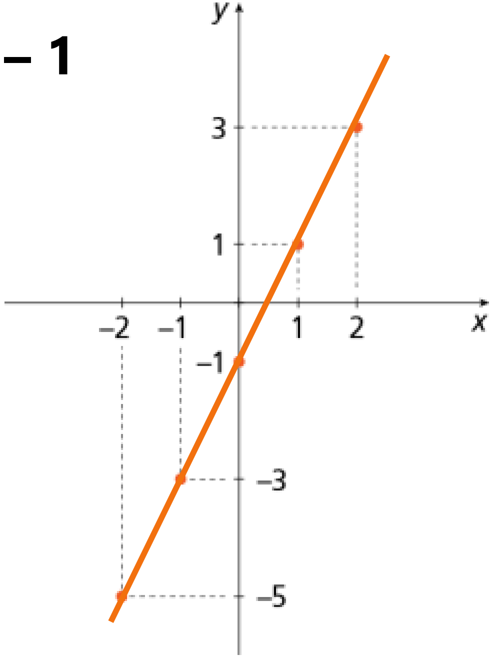
Prof: Alexsandro de Sousa

CRESCIMENTO E DECRESCIMENTO DE UMA FUNÇÃO AFIM

$$y = ax + b$$

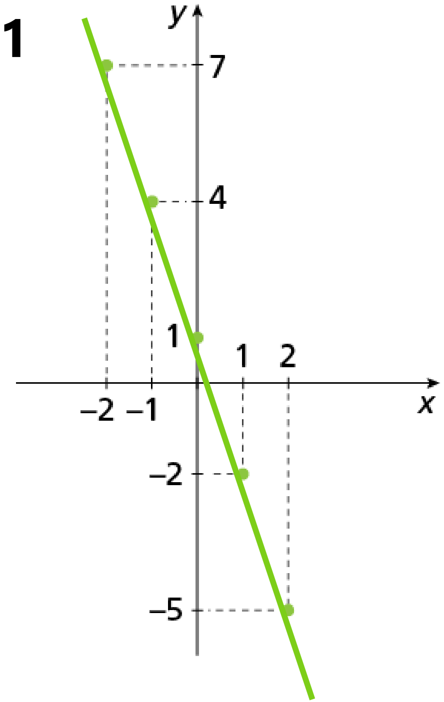
$a > 0$ **Função crescente**

$f(x) = 2x - 1$



$a < 0$ **Função decrescente**

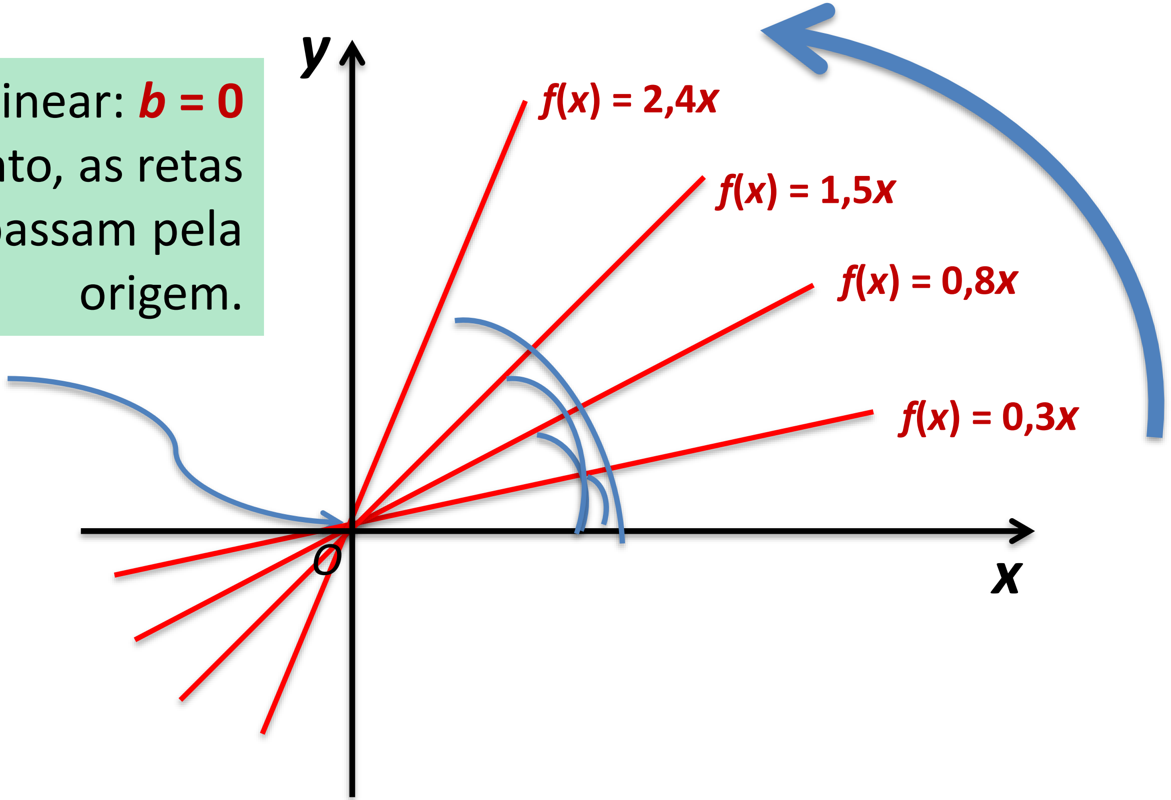
$g(x) = -3x + 1$



Prof: Alexsandro de Sousa

Função linear: $f(x) = ax$

Coeficiente linear: $b = 0$
Portanto, as retas sempre passam pela origem.



Quanto maior o coeficiente angular (a), maior o ângulo (α)

Prof: Alexsandro de Sousa

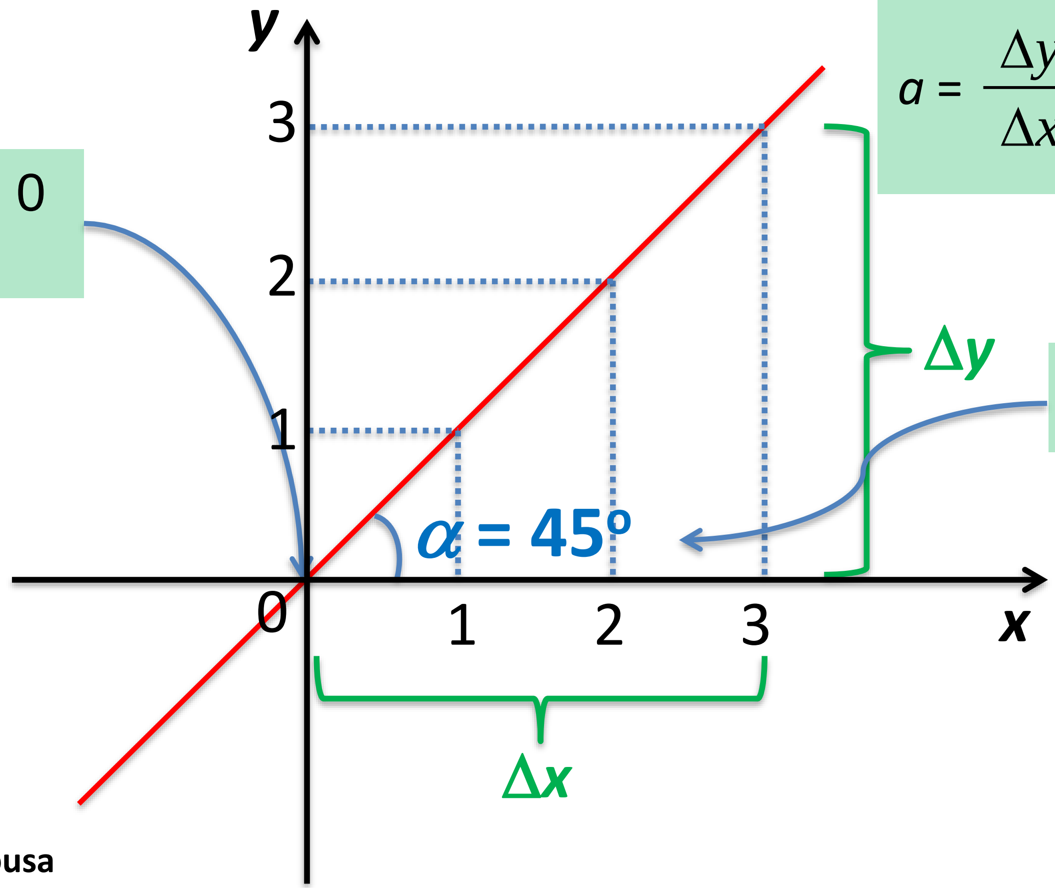
Função identidade: $f(x) = x$

Coeficiente angular:

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{tg}\ \alpha = 1$$

$\alpha = 45^{\circ}$

Coeficiente linear: $b = 0$
Passa pela origem

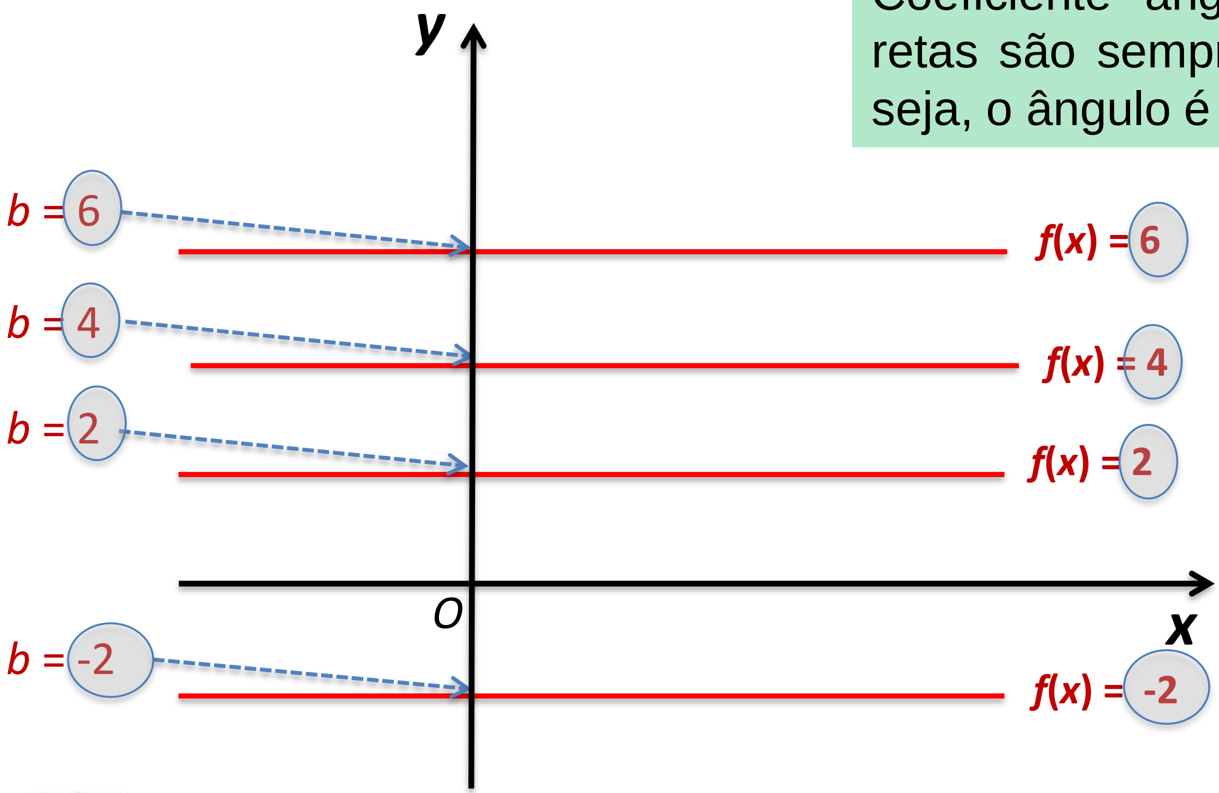


O gráfico de uma função linear é uma reta que passa pela origem (0,0).

Prof: Alexsandro de Sousa

Função constante: *f*(*x*) = *b*

Coeficiente angular: ***a* = 0**. Portanto, as retas são sempre paralelas ao eixo *Ox*, ou seja, o ângulo é α **= 0** para todas elas.



O gráfico de uma função constante é uma reta paralela ao eixo *x*, por isso podemos traçá-la conhecendo um único ponto.

Prof: Alexsandro de Sousa

ZERO OU RAIZ DA FUNÇÃO:

Definição: Valor de ***x*** para o qual a função $f(x)$ se anula.

Exemplo: $f(x) = 2x - 10$

$$2x - 10 = 0$$

$$2x = 10$$

$$\boxed{x = 5}$$

Zero da função

$$f(x) = ax + b$$

$$ax + b = 0$$

$$ax = -b$$

$$\boxed{x = -\frac{b}{a}}$$

Zero da função

ZERO OU RAIZ DA FUNÇÃO:

GEOMETRICAMENTE: É a interseção da reta com o eixo x

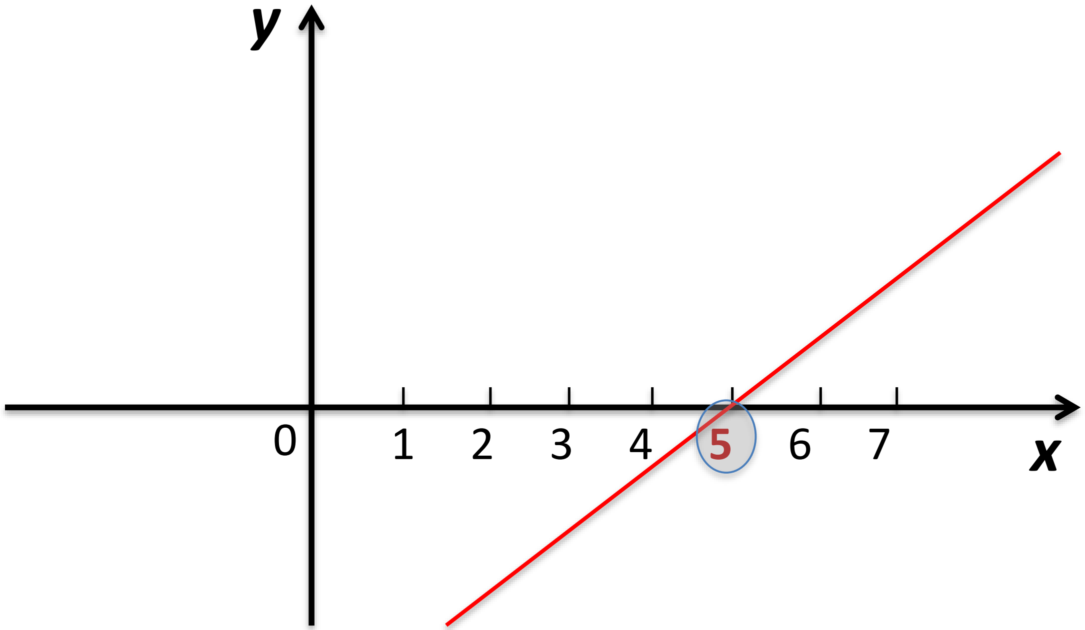
Exemplo: $f(x) = 2x - 10$

$2x - 10 = 0$

$2x = 10$

$\boxed{x = 5}$

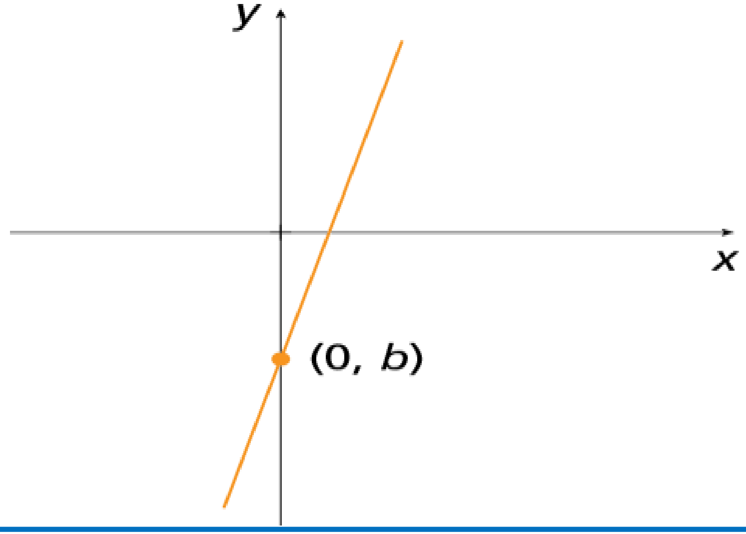
Zero da função



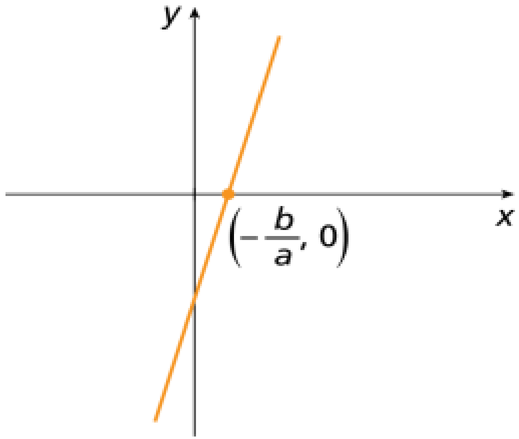
Análise do gráfico da função afim

Intersecção da reta...

... com o eixo *y*: coeficiente *b*



... com o eixo *x*: zero da função



Prof: Alexsandro de Sousa

CARACTERÍSTICAS IMPORTANTES DA FUNÇÃO AFIM

- Conjunto domínio: o domínio da função afim é o conjunto dos números reais: D(f)=R;
- Conjunto imagem: o conjunto imagem da função afim é o conjunto dos números reais: Im(f) = R;
- Coeficiente **a** é denominado coeficiente angular;
- Coeficiente **b** é denominado coeficiente linear;
- A função afim é crescente em R quando $a > 0$ e decrescente em R quando $a < 0$.

Prof: Alexsandro de Sousa

Exemplo 1:

Para a função f(x) = 2x + 4

- Coeficiente angular = 2
- Coeficiente linear = 4
- Como a > 0, a função é crescente em R.

Exemplo 2:

Para a função f(x) = -3x + 1

- Coeficiente angular = -3
- Coeficiente linear = 1
- Como a < 0, a função é decrescente em R.

EXERCÍCIOS

1 – Dada a função afim $f(x) = (-3 + m)x + 7$, discutir para quais valores de m a função é crescente, decrescente ou constante.

Resolução

Observe que o coeficiente de x nessa função é $(-3 + m)$.

A função é crescente se:

$-3 + m > 0 \Rightarrow m > 3$

A função é decrescente se:

$-3 + m < 0 \Rightarrow m < 3$

Para esses casos temos uma função do tipo $ax + b$, com $a \neq 0$.

A função é constante se:

$-3 + m = 0 \Rightarrow m = 3$

2 – Considere a função $g(x) = (m - 2)x + 1$, com m real.

a) Calcule m de modo que g seja crescente.

b) Determine m para que o ângulo entre o eixo x e a reta de g seja obtuso.

Resolução:

a) Para que f seja crescente, $m - 2 > 0$. Logo, $m > 2$.

b) Se o ângulo é obtuso, então o gráfico é decrescente.
Logo, $m - 2 < 0$. Conclui-se que $m < 2$.

3 – Determinar o valor de m para que o gráfico da função $j(x) = (-3 + 6m)x + 5$ intercepte o eixo das abscissas no ponto (1, 0).

Resolução

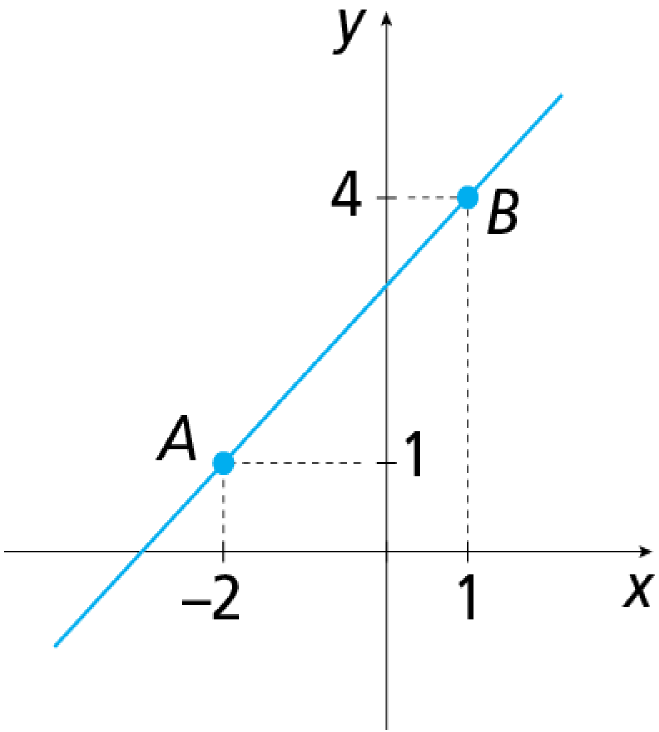
Como o ponto (1, 0) pertence ao gráfico da função j, então $j(1) = 0$.

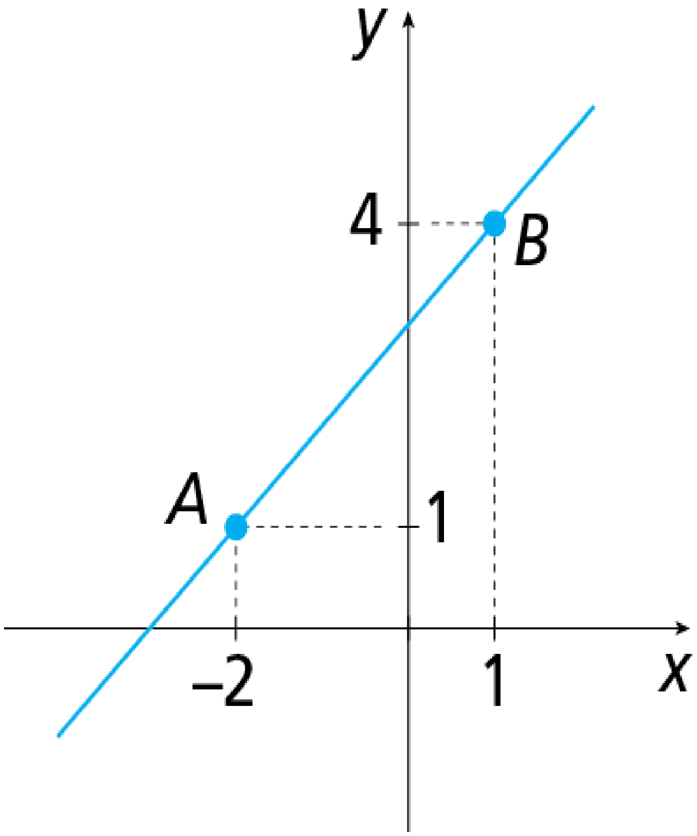
Assim: $0 = (-3 + 6m) \cdot 1 + 5 \Rightarrow 6m = -2 \Rightarrow m = -\dfrac{1}{3}$

Logo, para $m = -\dfrac{1}{3}$, o gráfico da função interceptará o eixo das abscissas no ponto (1, 0).

DETERMINAÇÃO DE UMA FUNÇÃO A PARTIR DO SEU GRÁFICO

4 – Dado o gráfico de uma função afim, vamos determinar a lei de formação dessa função.





$$y = ax + b$$

$A(-2, 1) \rightarrow \; x = -2$ e $y = 1 \rightarrow \; 1 = a \cdot (-2) + b$

$B(1, 4) \rightarrow \; x = 1$ e $y = 4 \rightarrow \; 4 = a \cdot (1) + b$

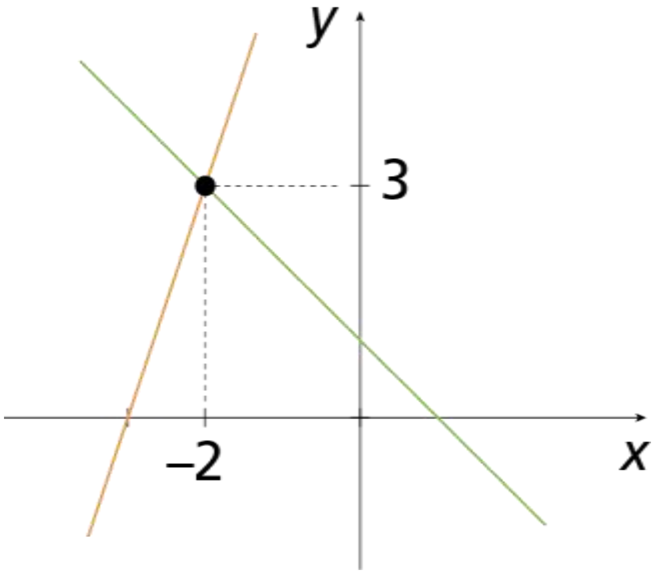
Então:

$$\begin{cases} -2a + b = 1 \\ a + b = 4 \end{cases} \Rightarrow a = 1 \text{ e } b = 3$$

Portanto: $f(x) = x + 3$

5 – Determinar o ponto de intersecção das retas correspondentes aos gráficos das funções afins $f(x) = 4x + 11$ e $g(x) = -x + 1$.

Para que as retas tenham um ponto em comum, deve existir um valor de x de modo que as imagens desse valor pelas duas funções coincidam, ou seja, $f(x) = g(x)$.



$4x + 11 = -x + 1 \quad \Rightarrow \quad 5x = -10 \Rightarrow x = -2$

Para $x = -2$, temos: $f(-2) = g(-2) = 3$

Logo, o ponto de intersecção é $(-2, 3)$.

6 – Construa o gráfico de cada uma das funções polinomiais do 1º grau

b

a) $f(x) = 2x + 3$

A reta intercepta o eixo y no ponto (0, b)

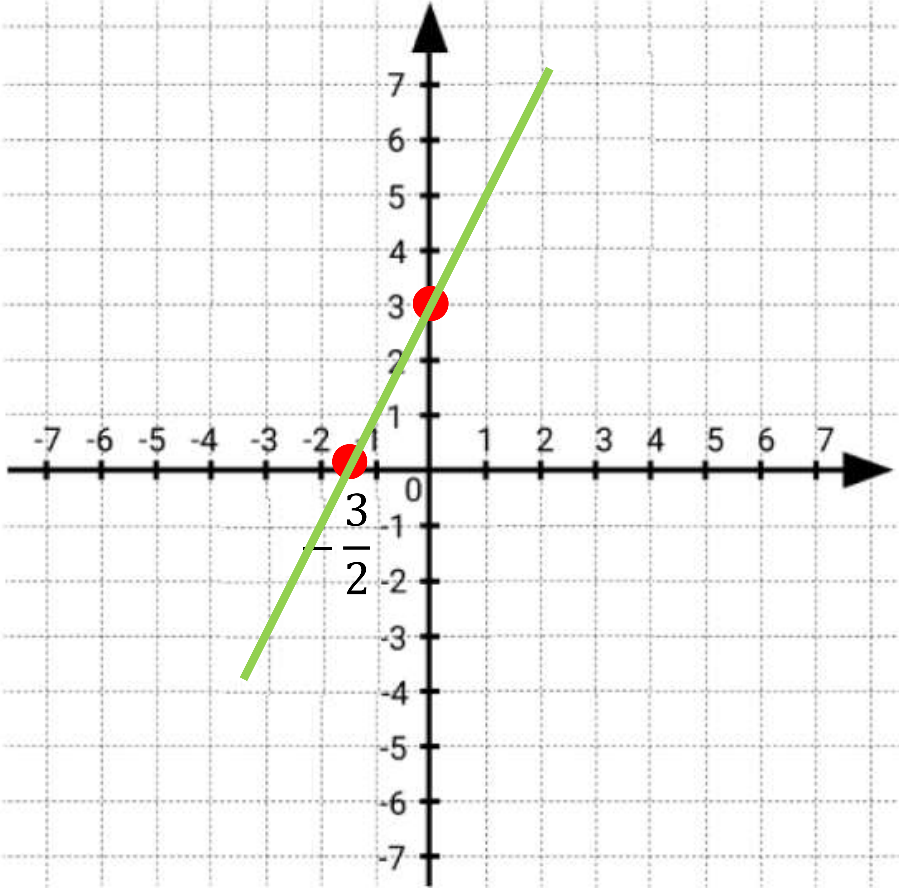
(0, 3)

A reta intercepta o eixo x no zero da função

$$x = -\frac{b}{a}$$

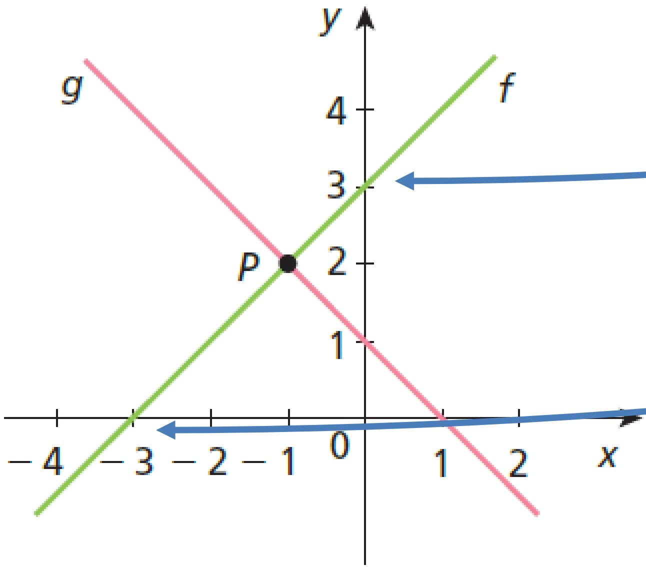
$$x = -\frac{3}{2}$$

$$\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$$



Prof: Alexsandro de Sousa

7 – Dê a lei de formação das funções polinomiais do 1º grau correspondentes às retas *f* e *g*. Determine o ponto de intersecção dessas duas retas.



$f(x) = ax + b$

$$x = -\frac{b}{a}$$

$f(x) = ax + 3$

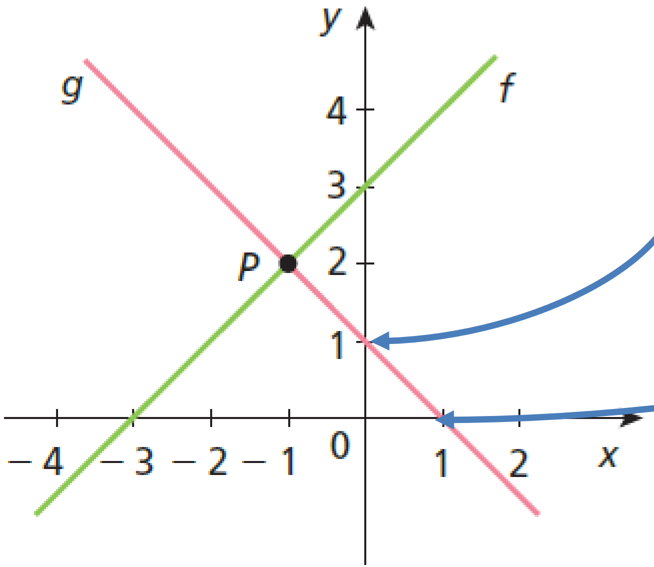
$$-3 = -\frac{3}{a}$$

$a = 1$

$f(x) = x + 3$

Prof: Alexsandro de Sousa

7 – Dê a lei de formação das funções polinomiais do 1º grau correspondentes às retas *f* e *g*. Determine o ponto de intersecção dessas duas retas.



$g(x) = ax + b$

$x = -\dfrac{b}{a}$

$g(x) = ax + 1$

$1 = -\dfrac{1}{a}$

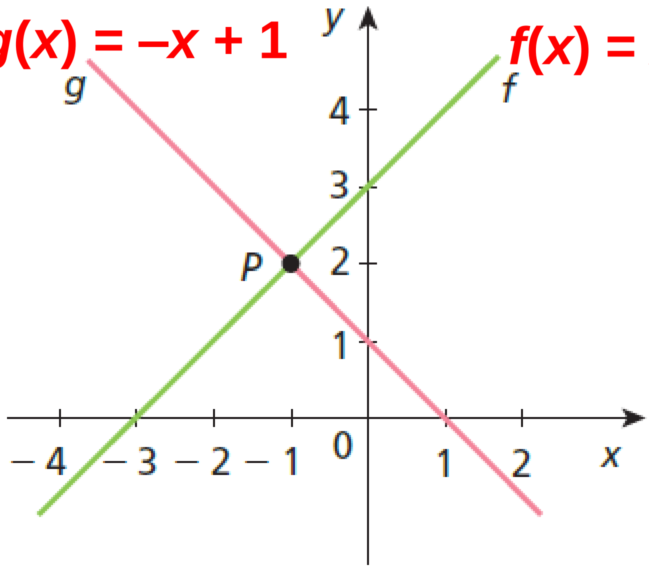
$a = -1$

$\mathbf{g(x) = -x + 1}$

7 – Dê a lei de formação das funções polinomiais do 1º grau correspondentes às retas *f* e *g*. Determine o ponto de intersecção dessas duas retas.

$g(x) = -x + 1$

$f(x) = x + 3$



$f(x) = g(x)$

$x + 3 = -x + 1$

$x + x = -3 + 1$

$2x = -2$

$\boxed{x = -1}$

$f(-1) = -1 + 3$

$\boxed{f(-1) = 2}$

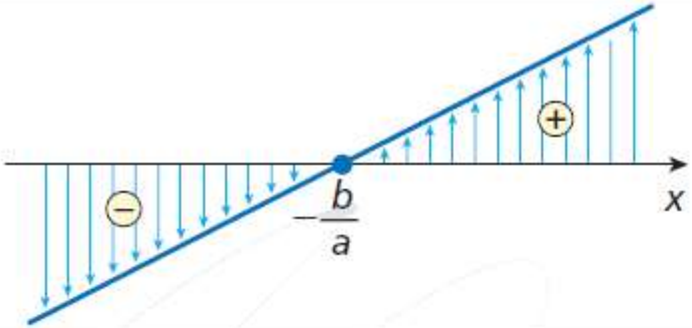
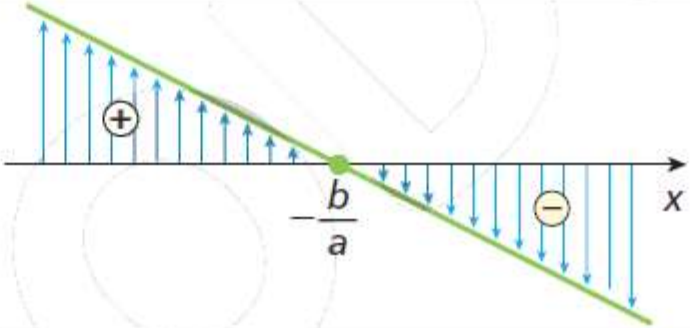
$\boxed{(-1, 2)}$

Prof: Alexsandro de Sousa

Estudo do sinal da função pelo gráfico

Para estudar o sinal da função polinomial do 1º grau dada por $f(x) = ax + b$, temos de determinar para quais valores de x a função é positiva, nula ou negativa.

Podemos fazer esse estudo esboçando o gráfico da função. Para isso, analisamos se a função é crescente ou decrescente.

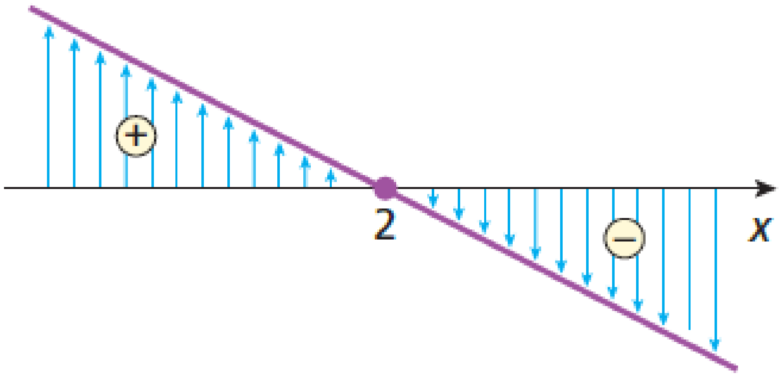
Função crescente (a > 0)	Função decrescente (a < 0)
	
$f(x) = 0$ para $x = -\frac{b}{a}$ $f(x) > 0$ para $x > -\frac{b}{a}$ $f(x) < 0$ para $x < -\frac{b}{a}$	$f(x) = 0$ para $x = -\frac{b}{a}$ $f(x) > 0$ para $x < -\frac{b}{a}$ $f(x) < 0$ para $x > -\frac{b}{a}$

Exemplo

Vamos estudar o sinal da função polinomial do 1º grau f dada por $f(x) = -3x + 6$.

Primeiro, determinamos o zero de f: $-3x + 6 = 0 \Rightarrow x = 2$

Como o coeficiente de x é negativo, temos o esboço do gráfico.



Então:

$f(x) = 0$ para $x = 2$;

$f(x) > 0$ para $x < 2$;

$f(x) < 0$ para $x > 2$.