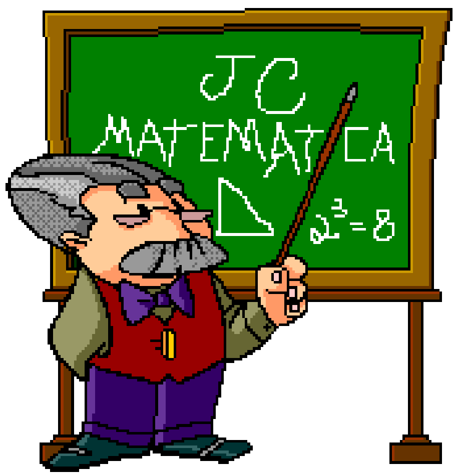
JC MATEMÁTICA



Volume 2

Conteúdo

Capítulo 3

Funções

Função de 1º grau

Chama-se **função polinomial do 1º grau**, ou**função afim**, a qualquer função *f* de IR em IR dada por uma lei da forma f(x) = ax + b, onde a e b são números reais dados e a ≠ 0.

Na função f(x) = ax + b, o número **a** é chamado de coeficiente de x e o número **b** é chamado termo constante.

Veja alguns exemplos de funções polinomiais do 1º grau:

f(x) = 5x - 3, onde a = 5 e b = - 3
f(x) = -2x - 7, onde a = -2 e b = - 7
f(x) = 11x, onde a = 11 e b = 0

Gráfico

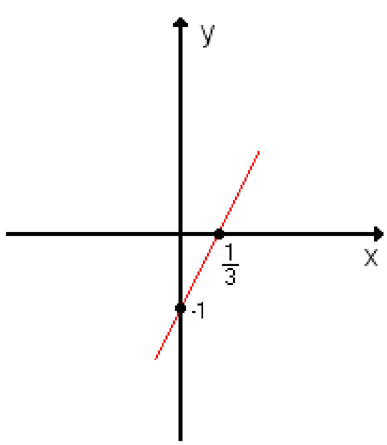
O gráfico de uma função polinomial do 1º grau, y = ax + b, com a ≠ 0, é uma reta oblíqua aos eixos Ox e Oy. Por exemplo, vamos construir o gráfico da função y = 3x - 1:

Como o gráfico é uma reta, basta obter dois de seus pontos e ligá-los com o auxílio de uma régua:

a) Para x = 0, temos y = 3 · 0 - 1 = -1; portanto, um ponto é (0, -1).

b) Para y = 0, temos 0 = 3x - 1; portanto, $x = \frac{1}{3}$ e outro ponto é $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$.

Marcamos os pontos (0, -1) e $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ no plano cartesiano e ligamos os dois com uma reta.



x	*y*
0	-1
$\frac{1}{3}$	0

Já vimos que o gráfico da função afim $y = ax + b$ é uma reta.

O coeficiente de x, **a**, é chamado **coeficiente angular da reta** e, como veremos adiante, está ligado à inclinação da reta em relação ao eixo O*x*.

O termo constante, **b**, é chamado coeficiente linear da reta.

Para x = 0, temos $y = a \cdot 0 + b = b$. Assim, o coeficiente linear é a ordenada do ponto em que a reta corta o eixo O*y*.

Chama-se zero ou raiz da função polinomial do 1º grau $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, o número real *x*tal que $f(x) = 0$. Temos:

$f(x) = 0 \Rightarrow ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$

Vejamos alguns exemplos:

Obtenção do zero da função $f(x) = 2x - 5$:

$f(x) = 0 \Rightarrow 2x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$

Cálculo da raiz da função $g(x) = 3x + 6$:
$g(x) = 0 \Rightarrow 3x + 6 = 0 \Rightarrow x = -2$

Cálculo da abscissa do ponto em que o gráfico de $h(x) = -2x + 10$ corta o eixo das abscissas:

O ponto em que o gráfico corta o eixo dos *x* é aquele em que $h(x) = 0$; então:
$h(x) = 0 \Rightarrow -2x + 10 = 0 \Rightarrow x = 5$

Função crescente ou decrescente

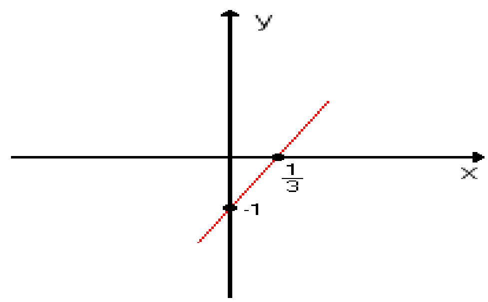
Consideremos a função do 1º grau $y=3x-1$. Vamos atribuir valores cada vez maiores a **x** e observar o que ocorre com **y**:

x aumenta →

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-10	-7	-4	-1	2	5	8

y aumenta →

Perceba que, quando aumentamos o valor de x, os valores correspondentes de y também aumentam. Dizemos então que a função y = 3x - 1 é crescente. Observe o seu gráfico:



Regra geral:

- a função do 1º grau f(x) = ax + b é **crescente** quando o coeficiente de x é positivo (a > 0);
- a função do 1º grau f(x) = ax + b é **decrescente** quando o coeficiente de x é negativo (a < 0);

Justificativa:

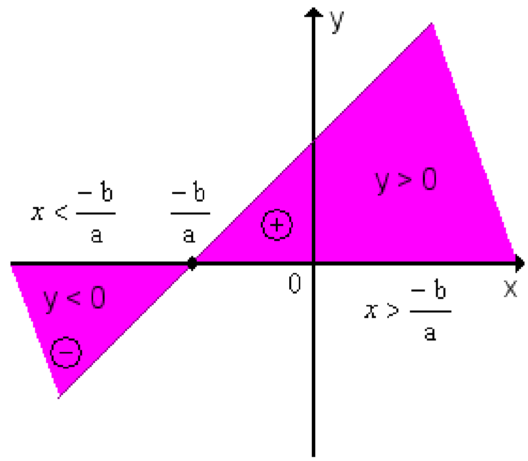
- para a > 0: se $x_1 < x_2$, então $ax_1 < ax_2$. Daí, $ax_1 + b < ax_2 + b$, de onde vem $f(x_1) < f(x_2)$.
- para a < 0: se $x_1 < x_2$, então $ax_1 > ax_2$. Daí, $ax_1 + b > ax_2 + b$, de onde vem $f(x_1) > f(x_2)$.

Sinal da função do 1º grau

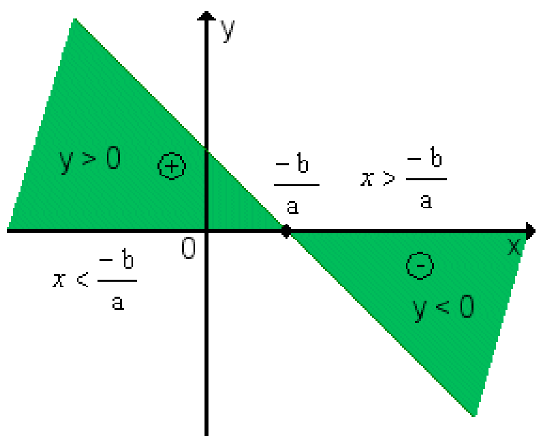
Estudar o sinal de qualquer função y = f(x) é determinar os valor de x para os quais y é positivo, os valores de x para os quais y é zero e os valores de x para os quais y é negativo.

- Considerando uma função afim y = f(x) = ax + b, vamos estudar seu sinal. Já vimos que essa função se anula pra raiz $x = \frac{-b}{a}$. Há dois casos possíveis:
- 1º) a > 0 (a função é crescente)

- $y > 0 \quad \Rightarrow \quad ax + b > 0 \quad \Rightarrow \quad x > \dfrac{-b}{a}$
- $y < 0 \quad \Rightarrow \quad ax + b < 0 \quad \Rightarrow \quad x < \dfrac{-b}{a}$
- Conclusão: y é positivo para valores de x maiores que a raiz; y é negativo para valores de x menores que a raiz



- 2º) a < 0 (a função é decrescente)
- $y > 0 \quad \Rightarrow \quad ax + b > 0 \quad \Rightarrow \quad x < \dfrac{-b}{a}$
- $y < 0 \quad \Rightarrow \quad ax + b < 0 \quad \Rightarrow \quad x > \dfrac{-b}{a}$
- Conclusão: y é positivo para valores de x menores que a raiz; y é negativo para valores de x maiores que a raiz.



Exercícios

1) Dada a função $f(x) = 4x + 5$, determine x tal que $f(x) = 7$.

2) O preço a pagar por uma corrida de táxi depende da distância percorrida. A tarifa P é composta por duas partes: uma parte fixa, denominada bandeirada e uma parte variável que depende do número d de quilômetros rodados. Suponha que a bandeirada esteja custando R$ 6,00 e o quilômetro rodado, R$ 1,20.

a) Expresse o preço P em função da distância d percorrida.

b) Quanto se pagará por uma corrida em que o táxi rodou 10 km?

c) Sabendo que a corrida custou R$ 20,00, calcule a distância percorrida pelo táxi.

3) Em uma corrida de táxi, o usuário ou cliente deve pagar R$ 5,00 de "bandeirada" (valor inicial que se paga fixado no taxímetro) e R$ 2,00 por cada quilômetro rodado. Seja x a distância percorrida por um táxi e y o preço a ser pago pela corrida; responda:

a) Que função matemática representa essa situação?

b) Quanto pagaria um cliente ou usuário de um táxi, se fizesse uma corrida de 3,5 km ?

4) Dada a função f(x) = -2x + 3, determine f(1).

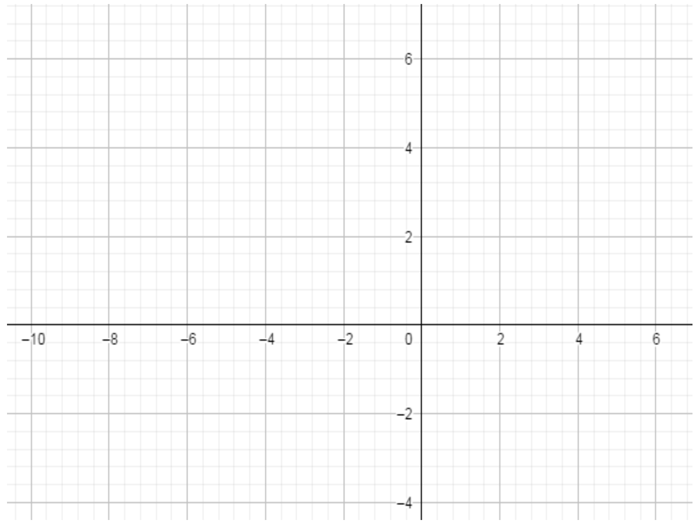
5) Determine a lei da função cuja reta intersecta os eixos em (-8, 0) e (0, 4) e verifique:

a) Se a função é crescente ou decrescente

b) A raiz da função

c) o gráfico da função

d) Calcule f(-1).



6) Classifique cada uma das funções seguintes em crescente ou decrescente e justifique sua responsta:

a) $y = 4x + 6$

b) $f(x) = - x + 10$

7) Estude a variação de sinal ($f(x) > 0$, $f(x) = 0$ e $f(x) < 0$) das seguintes funções do 1º grau:

a) $f(x) = x + 5$

b) $f(x) = -3x + 9$

c) $f(x) = 2 - 3x$

d) $f(x) = -2x + 10$

e) $f(x) = - 5x$

8) Em determinada região, apenas atuam as empresas A e B de telefonia celular. Para os serviços básicos, a tarifa mensal cobrada pela empresa A é composta de um valor fixo de R$ 64,00 mais R$ 2,00 para cada chamada efetuada. Na empresa B, esses valores são R$ 56,00 e R$ 2,40, respectivamente. Com relação a essas empresas, julgue a afirmação que se segue.

Se o usuário souber que fará mais de 20 chamadas por mês, para ele será mais vantajoso ser cliente da empresa A.

9) Um comerciante teve uma despesa de R$ 230,00 na compra de certa mercadoria. Como vai vender cada unidade por R$ 5,00, o lucro final **L** será dado em função das **x** unidades vendidas. Responda:

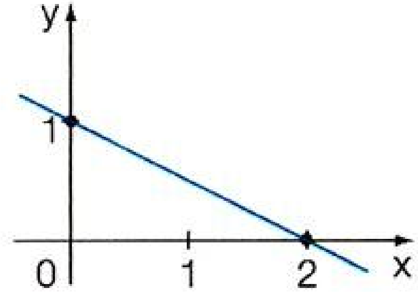
a) Qual a lei dessa função f ?

b) Para que valores de x têm f(x) < 0? Como podemos interpretar esse caso?

c) Para que valores de x haverá um lucro de R$ 315,00?

d) Para que valores de x o lucro será maior que R$280,00?

10) Examinando a gráfico da função do 1º grau f(x) , da figura abaixo, classifique cada afirmativa em verdadeira (V) ou em falsa (F) :



a) ( ) Se $x > 2$, então $f(x) < 0$

b) ( ) Se $x < 0$, então $f(x) < 0$

c) ( ) Se $x = 0$, então $f(x) = 1$

d) ( ) Se $x > 0$, então $f(x) < 0$

e) ( ) Se $x < 0$, então $f(x) > 1$

f) ( ) Se $x < 2$, então $f(x) > 0$

11) Em uma determinada loja, o salário mensal fixo de um vendedor é de R$ 240,00. Além disso, ele recebe R$ 12,00 por unidade vendida.

a) Expresse o ganho mensal (S) desse vendedor em função do número (u) de unidades vendidas.

b) Quantas unidades ele deve vender para receber um salário de R$ 696,00?

c) Determine o domínio e a imagem desta função.

12) Um vendedor recebe mensalmente um salário composto de duas partes: R$ 1.000 a parte fixa, e uma parte variável que corresponde a uma com comissão de 18% do total de vendas que ele fez durante o mês.

a) Expressar a função que representa seu salário mensal.

b) calcular o salário do vendedor durante um mês, sabendo-se que vendeu R$ 10.000 em produtos.

13) Na produção de peças, uma indústria tem um custo fixo de R$ 8,00 mais um custo variável de R$ 0,50 por unidade produzida. Sendo x o número de unidades produzidas:

a) escreva a lei da função que fornece o custo total de x peças.

b) calcule o custo para 100 peças.

14) A reta, gráfico de uma função afim, passa pelos pontos (-2, -63) e (5, 0). Determine essa função e calcule f(16).

Gabarito

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
a	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	v	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]
b	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	v	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]
c	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	v	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]
d	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	v	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]
e	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	v	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]
f	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	v	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]

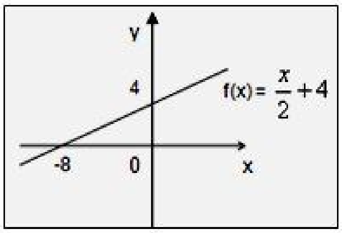
1) S = { 1/2}

2) a) P = 1,2d + 6   b) R$ 18,00   c) 11,66 km

3) a) y = 2x + 5   b) Pagaria R$ 12,00

4) f(1) = 1

5) a) função crescente   b) x = -8   d) f(-1) = 7/2



6) a) Crescente   b) Decrescente

$$a)\begin{cases} f<0 \rightarrow \{x \in I\!R \,/\, x<-5\} \\ f=0 \rightarrow x=-5 \\ f>0 \rightarrow \{x \in I\!R \,/\, x>-5\} \end{cases} \quad b)\begin{cases} f<0 \rightarrow \{x \in I\!R \,/\, x>3\} \\ f=0 \rightarrow x=3 \\ f>0 \rightarrow \{x \in I\!R \,/\, x<3\} \end{cases} \quad c)\begin{cases} f<0 \rightarrow \left\{x \in I\!R \,/\, x>\frac{2}{3}\right\} \\ f=0 \rightarrow x=\frac{2}{3} \\ f>0 \rightarrow \left\{x \in I\!R \,/\, x<\frac{2}{3}\right\} \end{cases}$$

7) $$d)\begin{cases} f<0 \rightarrow \{x \in I\!R \,/\, x>5\} \\ f=0 \rightarrow x=5 \\ f>0 \rightarrow \{x \in I\!R \,/\, x<5\} \end{cases} \quad e)\begin{cases} f<0 \rightarrow \{x \in I\!R \,/\, x>0\} \\ f=0 \rightarrow x=0 \\ f>0 \rightarrow \{x \in I\!R \,/\, x<0\} \end{cases}$$

8) Correto

9) a) L(x) = 5x - 230   b) x < 46   c) x = 109   d) x = 102

11) a) S = 12q + 240   b) 38 unidades   c) D = {q ∈ R / q ≥ 0}   I = {S ∈ R / s ≥ 240}

12) a) S = 1000 + 0,18V   b) S = R$ 2800,00

13) a) C(x) = 0,5x + 8   b) R$ 58,00

14) f(x) = 9x - 45   f(16) = 99

Função quadrática ou função do 2º grau

Chama-se função quadrática, ou função polinomial do 2º grau, qualquer função *f* de IR em IR dada por uma lei da forma **$f(x) = ax^2 + bx + c$**, onde a, b e c são números reais e $a \neq 0$. Vejamos alguns exemplos de funções quadráticas:

- $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$, onde a = 3, b = - 4 e c = 1
- $f(x) = x^2 - 1$, onde a = 1, b = 0 e c = -1
- $f(x) = 2x^2 + 3x + 5$, onde a = 2, b = 3 e c = 5
- $f(x) = -x^2 + 8x$, onde a = -1, b = 8 e c = 0
- $f(x) = -4x^2$, onde a = - 4, b = 0 e c = 0

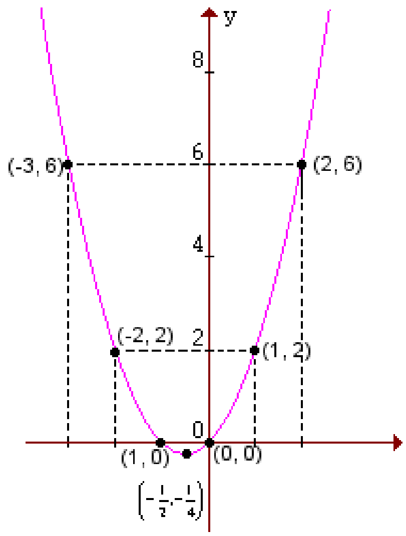
Gráfico

O gráfico de uma função polinomial do 2º grau, $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, é uma curva chamada **parábola**.

Por exemplo, vamos construir o gráfico da função $y = x^2 + x$:

Primeiro atribuímos a x alguns valores, depois calculamos o valor correspondente de y e, em seguida, ligamos os pontos assim obtidos.

x	y
-3	6
-2	2
-1	0
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$
0	0
1	2
2	6



Observação:

Ao construir o gráfico de uma função quadrática y = ax^2 + bx + c, notaremos sempre que:

- se **a > 0**, a parábola tem a **concavidade voltada para cima**;
- se **a < 0**, a parábola tem a **concavidade voltada para baixo**;

Zeros ou raízes da função do 2º grau

hamam-se zeros ou raízes da função polinomial do 2º grau f(x) = ax^2 + bx + c , a ≠ 0, os números reais x tais que f(x) = 0.

Então as raízes da função f(x) = ax^2 + bx + c são as soluções da equação do 2º grau ax^2 + bx + c = 0, as quais são dadas pela chamada fórmula de Bhaskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

Temos:

$$f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad ax^2 + bx + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

Observação:

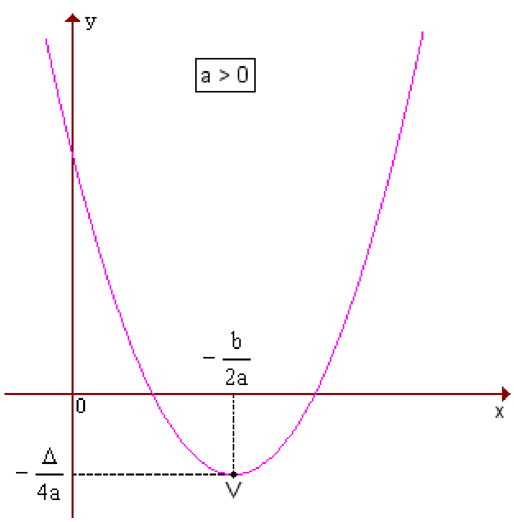
A quantidade de raízes reais de uma função quadrática depende do valor obtido para o radicando $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$, chamado discriminante, a saber:

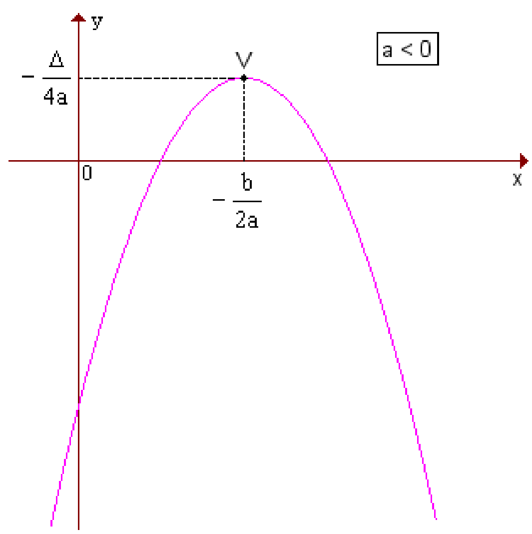
- quando Δ é positivo, há duas raízes reais e distintas;
- quando Δ é zero, há só uma raiz real (para ser mais preciso, há duas raízes iguais);
- quando Δ é negativo, não há raiz real.

Coordenadas do vértice da parábola

Quando a > 0, a parábola tem concavidade voltada para cima e um ponto de mínimo **V**; quando a < 0, a parábola tem concavidade voltada para baixo e um ponto de máximo **V**.

Em qualquer caso, as coordenadas de V são $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$. Veja os gráficos:





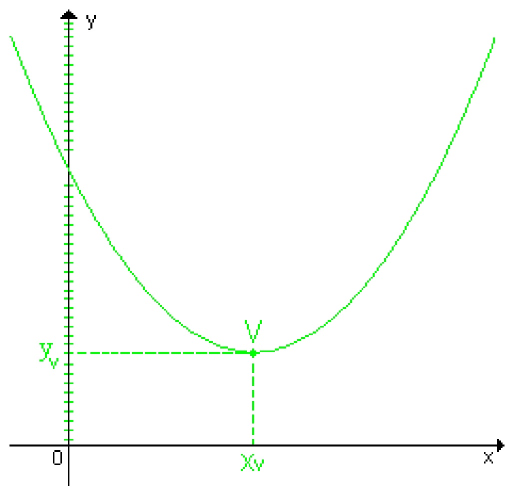
Imagem

O conjunto-imagem Im da função $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, é o conjunto dos valores que y pode assumir. Há duas possibilidades:

1ª - quando a > 0,

$$Im = \left\{ y \in \mathbb{R} \middle| y \geq y_v = \frac{-\Delta}{4a} \right\}$$

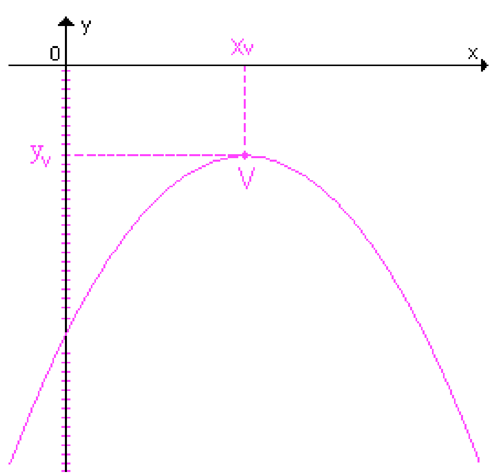
a > 0



2ª quando a < 0,

$$Im = \left\{ y \in \mathbb{R} \middle| y \leq y_v = \frac{-\Delta}{4a} \right\}$$

a < 0



Construção da parábola

É possível construir o gráfico de uma função do 2º grau sem montar a tabela de pares (x, y), mas seguindo apenas o roteiro de observação seguinte:

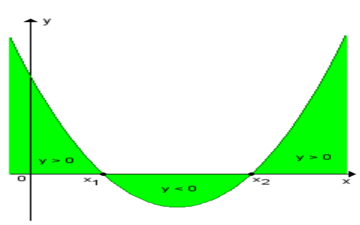
1. O valor do coeficiente **a** define a concavidade da parábola;
2. Os zeros definem os pontos em que a parábola intercepta o eixo dos x;
3. O vértice V $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ indica o ponto de mínimo (se a > 0), ou máximo (se a< 0);
4. A reta que passa por V e é paralela ao eixo dos y é o eixo de simetria da parábola;
5. Para x=0 , temos $y = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$; então (0, c) é o ponto em que a parábola corta o eixo dos y.

Sinal da função quadrática

Considere uma função quadrática $y = f(x) = ax^2 + bx + c$. Vamos determinar os valores de x para os quais y é negativo e os valores de x para os quais y é positivo.

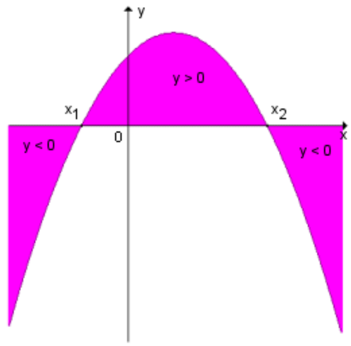
Conforme o sinal do discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$, podemos ocorrer os seguintes casos:

1º - $\Delta > 0$
Nesse caso a função quadrática admite dois zeros reais distintos ($x_1 \neq x_2$). A parábola intercepta o eixo Ox em dois pontos e o sinal da função é o indicado nos gráficos abaixo:



quando a > 0

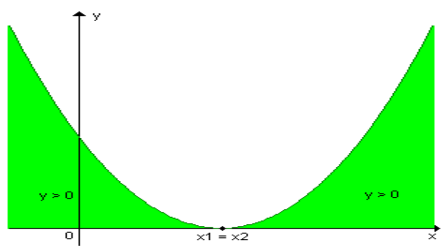
$y > 0 \Leftrightarrow (x < x_1 \text{ ou } x > x_2)$
$y < 0 \Leftrightarrow x_1 < x < x_2$



quando a < 0

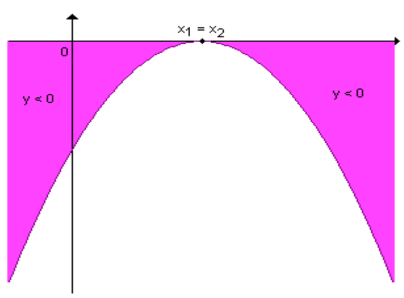
$$y > 0 \Leftrightarrow x_1 < x < x_2$$
$$y < 0 \Leftrightarrow (x < x_1 \text{ ou } x > x_2)$$

2º - $\Delta = 0$



quando a > 0

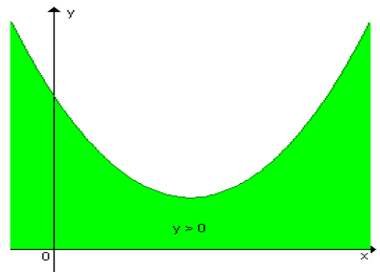
$$y > 0, \ \forall x \neq x_1$$
$$\nexists x \text{ tal que } y < 0$$



quando a < 0

$$y < 0, \ \forall x \neq x_1$$
$$\nexists x \text{ tal que } y > 0$$

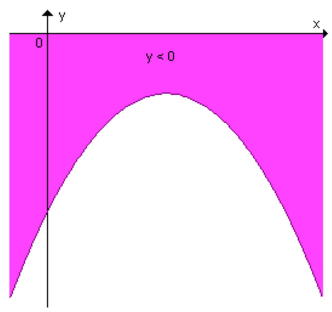
3º - $\Delta < 0$



quando a > 0

$y > 0, \forall x$

$\nexists\ x$ tal que $y < 0$



quando a < 0

$y < 0, \forall x$

$\nexists\ x$ tal que $y > 0$

Exercícios

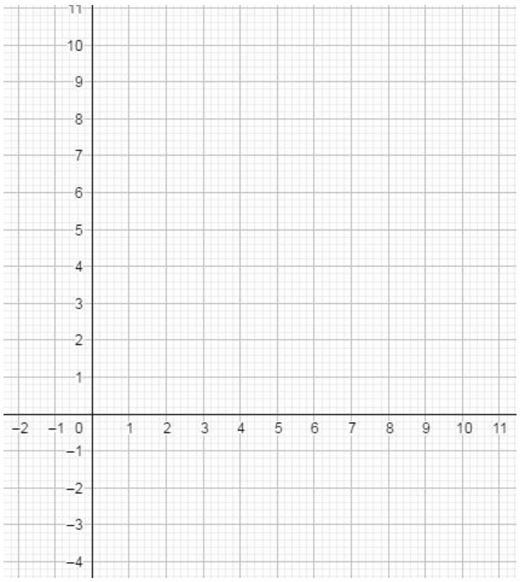
1) Qual é o valor de m para que $f(x) = (2m + 4)x^2 - 5x + 17$ tenha por gráfico uma parábola com concavidade voltada para cima?

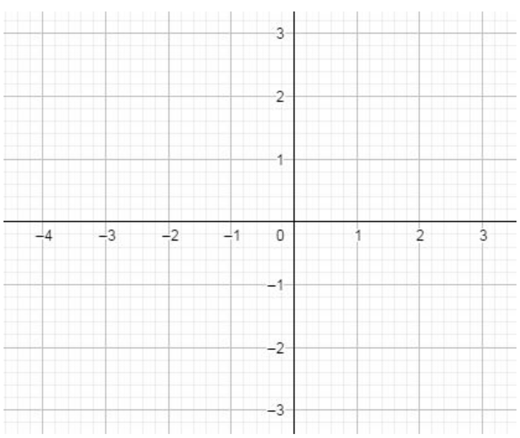
2) O número de ocorrências registradas das 12 às 18 horas em um dia do mês de janeiro, em uma delegacia do interior de Minas Gerais, é dado por $f(t) = -t^2 + 30t - 216$, em que $12 \leq t \leq 18$ é a hora desse dia. Pode-se afirmar que o número máximo de ocorrências nesse período do dia foi?

3) Dê o valor de **p**, de modo que $\mathbf{y = x^2 + 2x + p}$ tenha raizes iguais

4) Esboce o gráfico das funções:

a) $y = x^2 - 6x + 9$ b) $y = x^2 + x + 1$





5) Dada a função quadrática $f(x) = -2.x^2 + 4.x - 9$, as coordenadas do vértice do gráfico da parábola definida por f(x), é:

6) (**UFPE**) A área máxima de um retângulo de 12 m de perímetro é

a) 3 m

b) 6 m

c) 9 m

d) 12 m

e) nda

7) (**UFSE**) O gráfico de y = $-2x^2 - x$ é uma parábola com vértice em

a) $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$

b) $\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$

c) $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}\right)$

d) $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right)$

e) $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right)$

8) (**UF-AM**) Um goleiro chuta uma bola e a trajetória obedece a lei y = -4x2 + 24x. A altura máxima é

a) 36

b) 34

c) 30

d) 28

e) 24

9) (PUC) A trajetória de um projétil se dá por $y = -\frac{x^2}{64} + \frac{x}{16}$, unidades em km, a altura máxima atingida pelo projétil é

a) 40 m

b) 64 m

c) 16,5 m

d) 32 m

e) 62,5 m

10) (Fumarc) O Sr. João é um economista aposentado que resolveu melhorar sua qualidade de vida comprando uma pousada com 40 suítes em uma bela região praiana. Com base em dados do proprietário anterior, ele deduziu duas funções para gerenciar seu negócio: a função do preço (p) por diária da suíte (x) e a da receita (R). As funções foram definidas, respectivamente, por:

$P(x) = -5x + 350$ e **$R(x) = -5x^2 + 350x$**.

Considerando essas funções, o preço que o Sr. João deve cobrar para maximizar a receita é

a) R$ 150,00

b) R$ 175,00

c) R$ 190,00

d) R$ 200,00

e) R$ 225,00

11) A função f definida por $\mathbf{f(x) = - x^2 + ax + b}$ tem valor máximo igual a 4 para x = 1. Então, os valores dos parâmetros reais **a** e **b** são:

a) a = 2 e b = 4

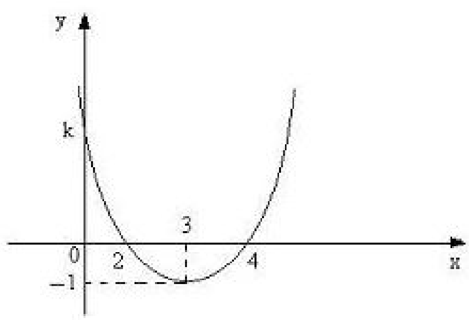
b) a = 1 e b = 5

c) a = -1 e b = 5

d) a = -2 e b = 4

e) a = -2 e b = -4

12) Qual é o valor de k no gráfico a seguir, considerando que o mesmo é de uma função do 2º grau?



a) 5

b) 7

c) 10

d) 9

e) 8

13) (Cesgranrio) A raiz da função **f(x) = 2x - 8** é também raiz da função quadrática **g(x) =** $\mathbf{ax^2 + bx + c}$. Se o vértice da parábola, gráfico da função g(x), é o ponto V(-1, -25), a soma a + b + c é igual a

a) -25

b) -24

c) -23

d) -22

e) -21

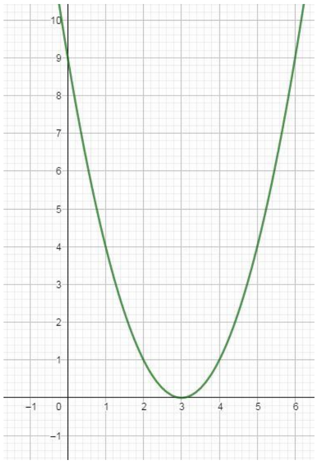
Gabarito

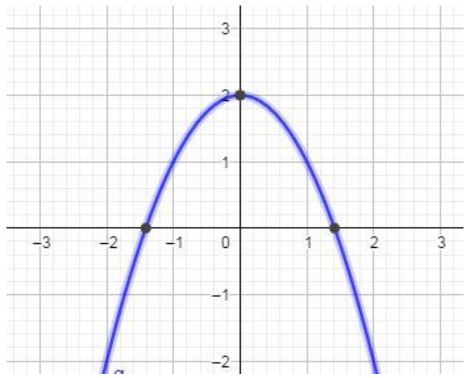
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
a								x					
b										x			
c						x							
d													
e							x		x			x	x

1) m > - 2

2) 9 ocorrências

3) p = 1

4) 



5) V(1, -7)