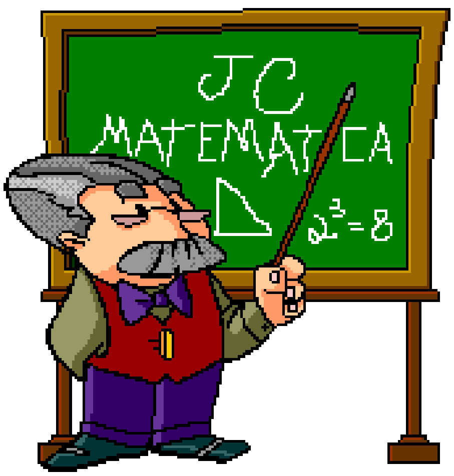
JC MATEMÁTICA



Volume 4

Conteúdo

Capítulo 6

Probabilidade

Na matemática, a probabilidade permite obter o **cálculo das ocorrências possíveis num experimento aleatório** (fenômeno aleatório). Em outras palavras, a probabilidade analisa as “chances” de obter determinado resultado.

A teoria das probabilidades inclui conceitos matemáticos que foram explorados já na antiguidade. O termo derivado do latim “*probare*” corresponde ao verbo provar ou testar.

Experimento Aleatório

O experimento ou evento aleatório é aquele que pode ocorrer e resultar de diferentes maneiras cada vez que é lançado. Ou seja, não sabemos seu resultado, porém podemos calcular quais resultados possíveis podemos obter.
Por exemplo, podemos citar um dado, com 6 faces, donde cada face é um número de 1 a 6.

Fórmula da Probabilidade

Assim, se num fenômeno aleatório as possibilidades são igualmente prováveis, a probabilidade de ocorrer um evento é medida pela divisão entre o número de eventos favoráveis e o número total de resultados possíveis:

$$P = \frac{na}{n}$$

Donde
P: probabilidade
$\mathbf{n_a}$: número de casos (eventos) favoráveis
n: número de casos (eventos) possíveis

Espaço Amostral

Representado pela letra S, o **espaço amostral** corresponde ao conjunto de resultados possíveis obtidos a partir de um evento ou fenômeno aleatório.

Por exemplo num baralho de cartas, onde o espaço amostral corresponde às 52 cartas que compõem o baralho.

Da mesma forma, o espaço amostral no lançamento de um dado, são as seis faces que o compõem: S = {1, 2, 3, 4, 5 e 6}.

Note que os subconjuntos de um espaço amostral são denominados “**eventos**”, ou seja, no conjunto de cartas, há 52 eventos possíveis, enquanto no dado há seis.

Assim, podemos concluir que a probabilidade é calculada pela divisão de eventos pelo espaço amostral.

<u>Exercícios Resolvidos</u>

1. Se lançarmos um dado de 6 faces, qual a probabilidade de sair o número seis?
Segundo a teoria da probabilidade, ela é calculada pela divisão entre o número de eventos favoráveis e o número de eventos possíveis, nesse caso:

$$P = \frac{na}{n}$$

n_a (casos favoráveis): 1 lado (lado seis)
n (casos possíveis) : 6 lados
Logo,
P = 1/6
P = **0,166** ou **16,6%**

2. O baralho de cartas é formado por 52 cartas divididas em quatro naipes (copas, paus, ouros e espadas) sendo 13 cartas de cada naipe. Dessa forma, se retirar uma carta do baralho, qual a probabilidade de sair uma carta do naipe de paus?
Segundo a teoria da probabilidade, devemos obter o número de evento favoráveis e possíveis, para assim, calcular, através da fórmula:

$$P = \frac{na}{n}$$

n_a: 13 (total de cartas do naipe de paus)
n: 52 (total de cartas do baralho)
Logo,
P = 13/52
P = **0,25** ou **25%**

Exercícios

1) Observe o quadro de funcionários da empresa **FAZ BEM**.

Empresa FAZ BEM	
Setor	Número de trab.
Administração	32
Limpeza	48
Cozinha	20
Produção	400
Controle de qualidade	20
Vendas	280

Em um sorteio aleatório de um funcionário desta empresa, qual é a probabilidade de ele ser do setor:

a) de produção?___________________

b) de cozinha?__________________

2) Uma bola será retirada de uma sacola contendo 5 bolas verdes e 7 bolas amarelas. Qual a probabilidade dessa bola ser verde?

3) Qual é a probabilidade de sair coroa em três lançamentos seguidos de uma moeda?

4) De um pacote de cartões numerados de 1 a 26, é retirado um cartão ao acaso. Qual a probabilidade de o cartão retirado apresentar um número ímpar ou múltiplo de 3?

5) Uma urna contém bolas numeradas de 1 a 50. Serão sorteadas, simultaneamente, duas delas. Qual é a probabilidade de sairem as bolas 13 e 23?

6) Retirando-se ao acaso uma carta de um baralho comum, qual é a probabilidade de sair um rei?

7) Numa classe de 32 alunos a professora sorteia um número de chamada de um deles. Qual a probabilidade de que o número sorteado seja maior do que 19 ou um número ímpar?

8) Num jogo de barlho comum, com 52 cartas, temos: 13 cartas de ouro, 13 cartas de copas, 13 cartas de paus e 13 cartas de espadas. Se alguém disser "**vai sair um rei de ouros**" estará apostando em um acontecimento (evento) pouco provável.

Nesse caso, o número de elementos do evento é muito menor que o número de elementos do espaço amostral?

Justifique sua resposta com uma contagem.

9) No lançamento de um dodecaedro regular (poliedro de 12 faces pentagonais congruentes), cujas faces estão numeradas de 1 a 12, considera-se que "*saiu o número 5*" se, após o lançamento, a face com o número 5 estiver voltada para cima.

Calcule a probabilidade de, em um lançamento, sair:

a) um número par.

b) um número maior que 4.

c) Um número divisível por 3.

d) Um número múltiplo de 5.

e) Um número menor que 1.

10) Uma moeda é viciada de tal modo que a probabilidade de sair cara é duas vezes maior do que a de sair coroa. Calcule a probabilidade de ocorrer coroa no lançamento dessa moeda.

11) Qual é a probabilidade de, no lançamento de 4 moedas, obtermos cara em todos os resultados?

a) 2,0%

b) 2,2%

c) 6,2%

d) 4,0%

e) 4,2%

12) Em um pacote de balas há 5 de sabor morango e 10 de sabor abacaxi. Se 3 balas forem retiradas ao acaso e simultaneamente qual é a probabilidade de serem, todas, de sabor morango?

13) Em uma urna, há 5 bolas brancas 3 bolas pretas e 7 bolas vermelhas. retirando-se uma bola ao acaso, escreva a probabilidade de ela ser.

a) branca

b) preta

c) branca ou preta

d) vermelha ou branca

14) De uma urna com 5 bolas amarelas, 7 vermelhas e 3 azuis, são retiradas, simultaneamente e ao acaso, 3 bolas. Qual é a probabilidade de as 3 bolas serem:

a) amarelas

b) azuis

c) vermelhas

d) da mesma cor

Restpostas

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
a	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]		[redacted]	[redacted]	[redacted]
B	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]		[redacted]	[redacted]	[redacted]
c	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	x	[redacted]	[redacted]	[redacted]
D	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]		[redacted]	[redacted]	[redacted]
e	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]		[redacted]	[redacted]	[redacted]

1) **Questão**

a) 50%

b) 2,5%

2) 5/12

3) 1/8 ou 12,5%

4) 65,38%

5) Em qualquer ordem 0,0816%   Obedecendo uma ordem 0,04%

6) 4/52 ou 7,69%

7) 71,85%

8) Sim. O número de elementos do evento é muito menor do que o número de elementos do espaço amostral.

Justificativa:

Baralho com 52 cartas.

13 de ouros

13 de copas

13 de paus

13 de espada

U = espaço amostral (conjunto universo)

E = rei de ouro (evento) .

Número de elementos do evento = 1

Probabilidade de acerto no palpite

P = E / U

No baralho temos apenas 1 rei de ouros

Então a probabilidade de retirar um rei é de 1 / 52 = 1,92% (baixíssima probabilidade).

Número do espaço amostral = 52

9) **Questão**

a) 1/2 ou 50%

b) 2/3 ou 66,66%

c) 1/3 ou 33,33%

d) 1/6 ou 16,6%

e) 0 ou 0% (evento impossível)

10) P(co) = 1/3

12) 2/91 ou 2,197%

13) **Questão**

a) 1/3 ou 33,33%

b) 1/5 ou 20%

c) 8/15 ou 53,33%

d) 4/5 ou 80%

14) **Questão**

a) 2/91 ou 2,20%

b) 1/455 ou 0,22%

c) 7/91 ou 7,69%

d) 276/2730 ou 10,11%

Capítulo 7

Análise combinatória

Fatorial

O conceito de **fatorial** é muito utilizado no estudo de arranjos e permutações, a fim de facilitar os cálculos. A ideia é bastante simples e de fácil compreensão.

O fatorial de um número inteiro *m* não negativo, é indicado por *m!* (lê-se “m fatorial”) e é definido pela relação:

$m! = m\cdot(m-1)\cdot(m-2).(m-3)...3.2.1$, para $m \geq 2$.

Algumas definições são:

- $1! = 1$
- $0! = 1$

Exemplos:

- $3! = 3 . 2 . 1 = 6$
- $4! = 4 . 3 . 2 . 1 = 24$
- $6! = 6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 720$

Veja que o cálculo do fatorial se torna trabalhoso à medida que *m* aumenta, veja:

- $10! = 10 . 9 . 8 . 7 . 6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 3.628.800$

Assim, podemos simplificar alguns cálculos, usando o artifício de não calcular totalmente o fatorial, mas sim uma parte dele:

$(n+1)! = (n+1) . n . (n-1) . (n-2) ... 3 . 2 . 1 = (n+1) . n!$

Por exemplo:

$10! = 10 . 9 . 8 . 7!$

Exemplos

1. Calcule $\frac{10!}{8!} = \frac{10*9*8!}{8!} = 10.9 = 90$

Cuidado

As seguintes operações não são válidas:

- n! + x! = (n + x)!
- n! - x! = (n - x)!
- n! . x! = (n . x)!

Referências:

RIBEIRO, Paulo Vinícius; PAULO, Luiz. Matemática: Princípio fundamental da contagem e arranjos. Vol. 4. São Paulo: Bernoulli.

HAZZAN, Samuel. Fundamentos de Matemática Elementar. Combinatória. Probabilidade. Vol. 5. São Paulo: Atual, 1997.

Arranjo

Utilizamos o **arranjo simples** para obter a quantidade de agrupamentos possíveis de serem realizados com os elementos de um conjunto finito. No arranjo os elementos trocam de posição, ou seja, ordem. Com isso os agrupamentos tornam-se distintos, por possuírem seus elementos organizados em uma ordem diferente. Veja a seguir um exemplo de arranjo simples.

Exemplo: Mostre os agrupamentos possíveis de serem realizados com o conjunto A ={5,6,7,8}; cada agrupamento deve possuir 3 elementos distintos.

Reposta:

(5,6,7) (5,6,8) (5,7,8) (6,7,8)

(5,7,6) (5,8,6) (5,8,7) (6,8,7)

(6,5,7) (6,5,8) (7,5,8) (7,6,8)

(6,7,5) (6,8,5) (7,8,5) (7,8,6)

(7,6,5) (8,5,6) (8,5,7) (8,7,6)

(7,6,5) (8,6,5) (8,7,5) (8,6,7)

Observe que as sequências formadas com 3 elementos são diferentes entre si, em alguns casos o conjunto possui os mesmo termos que outro conjunto, o que muda é a posição dos elementos. Como é o caso de (5,6,7) e (5,7,6); observe que os elementos 6 e 7 trocaram de posição, as sequências obtidos com três elementos referentes ao conjunto A ={5,6,7,8}; são chamadas de arranjo simples.

Do exemplo acima obtemos que de um conjunto com 4 elementos distintos, podemos obter 24 arranjos simples. Podendo ser representar da seguinte forma:

$\boldsymbol{A_{4,3} = 24}$

Para encontramos a quantidade de arranjos possíveis sem precisarmos expressas cada arranjo individualmente, podemos utilizar o Princípio Fundamental da Contagem.

Definição: Dado um com A = {a_1, a_2, a_3, ..., a_n} com *n* elementos distintos, chamaremos de arranjo simples toda a sequência formada por uma quantidade delimitada de elementos, sendo todos esses elementos pertencentes ao conjunto A.

Formula Geral para calcular o Arranjo Simples

$$\boldsymbol{A_{n,p} = \frac{n}{(n-p)!}}$$

- n = Quantidade total de elementos no conjunto.
- P =Quantidade de elementos por arranjo

Exemplos:

Dado o conjunto B = {d,e,f,g}, responda:

a) Quantos são os arranjos simples dos elementos de B tomados de 2 a 2?

Para calcular a quantidade de arranjos, basta aplicar a fórmula:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Nessa questão temos que:

n = 4 (Quantidade total de elementos do conjunto B)

p = 2 (Quantidade de elementos por arranjo)

Substitua na equação *n* por 4 e *p* por 2

$$A_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)!}$$

$$A_{4,2} = \frac{4!}{2!}$$

$$A_{4,2} = \frac{4.3.2!}{2!} \Rightarrow A_{4,2} = 4.3 \Rightarrow A_{4,2} = 12$$

Tomando os elementos do conjunto B de 2 a 2, será possível formar 12 arranjos.

b) Quantos são os arranjos simples dos elementos de B tomados de 3 a 3?

Aplicaremos a fórmula para arranjo simples:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Nessa questão temos que:

n = 4 (Quantidade total de elementos do conjunto B)

p = 3 (Quantidade de elementos por arranjo)

Substitua na equação n por 4 e p por 3

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

$$A_{4,3} = \frac{4!}{(4-3)!}$$

$$A_{4,3} = \frac{4!}{1!}$$

$$A_{4,3} = 4!$$

$$A_{4,3} = 4.3.2.1$$

$$A_{4,3} = 24$$

Tomando os elementos do conjunto B de 3 a 3, será possível formar 24 arranjos.

Combinação

A **combinação simples** pode ser definida como sendo um agrupamento dos elementos de um conjunto em subconjuntos. Na combinação a ordem dos elementos não é considerada na formação dos subconjuntos, ou seja, o subconjunto {A, B} e {B, A} são iguais, devendo ser considerado uma única vez na contagem da quantidade de combinações. A fórmula geral para encontrar as quantidades de combinações simples de um conjunto é representada por:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!\,.\,p!}$$

- n = Número de elementos do conjunto.
- P = Quantidade de elementos por subconjunto.

Exemplo 1: Utilizando a combinação simples e considerando o conjunto J ={A, B, C, D} encontre quantos subconjuntos e possível formar tomando os elementos de 2 em 2.

- Conjunto: J = {A, B, C, D}
- n = 4
- p = 2

$$C_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$$

$C_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)!2!}$ $\quad C_{4,2} = \frac{4!}{2!2!}$ $\quad C_{4,2} = \frac{4.3.2!}{2!2!}$ $\quad C_{4,2} = \frac{4.3}{2!}$ $\quad C_{4,2} = \frac{12}{2}$ $\quad \boldsymbol{C_{4,2} = 6}$

Tomando os elementos do conjunto J ={A, B, C, D} de 2 em 2 é possível formar 6 subconjuntos.

Representação dos subconjuntos por extenso:

J = { AB, AC, AD, BC, BD, CD}

Exemplo 2: Seja I um conjunto formado por {a, b, c, d}, tomando os elementos de 3 em 3, encontre quantos combinações simples podemos obter.

- Conjunto: I = {a, b, c, d}
- n = 4
- p = 3

$C_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$ $\quad C_{4,3} = \frac{4!}{(4-3)!3!}$ $\quad C_{n,p} = \frac{4.3!}{1!3!}$ $\quad \boldsymbol{C_{n,p} = 4}$

Tomando os elementos do conjunto I ={a, b, c, d} de 3 em 3 é possível formar 4 subconjuntos.

Representação dos subconjuntos por extenso: J = { (abc), (abd), (acd), (bcd) }

Exercícios

1) Calcule o valor de:

$a)\ \frac{7!}{4!} =$ _______________

$b)\ \frac{3!\ .7!}{4!\ .\ 6!} =$ ____________

2) Simplifique/;

$a)\ \frac{n!}{(n-2)!} =$

$b)\ \frac{(n+1)!}{(n+2)!} =$

$c)\ \frac{(n+3)!}{(n-2)!} \cdot \frac{(n-1)!}{(n+2)!} =$

3) Calcule o valor de/;

$a)\ \dfrac{7!}{4!} =$

$b)\ \dfrac{3!.5!}{4!.61} =$

$c)\ \dfrac{12!}{10! + 9!} =$

$d)\ \dfrac{12! - 13!}{12!} =$

4) Quantos números de dois algarismos distintos podemos formar com os dígitos: 2, 4, 6 e 8?

a) 15

b) 10

c) 12

d) 18

e) 20

5) De quantas maneiras diferentes um cliente poderá se servir em um restaurante que apresenta os seguintes pratos: 10 tipos de massas, 4 de carnes, 6 saladas e 2 sobremesas.

6) Considerando os algarismos 1, 4, 7, 8 e 2.

a) Quantos números de quatro algarismos podemos formar?

b) Quantos números de quatro algarismos distintos?

7) Um restaurante oferece três tipos de entrada, dois pratos principais e quatro tipos de sobremesas. Quantas opções uma pessoa terá se decidir comer uma entrada, um prato principal e uma sobremesa?

8) De quantos modos três pessoas pode sentar num sofá de cinco lugares?

9) Uma família com cinco pessoas possui um automóvel com cinco lugares. Sabendo que somente duas pessoas sabem dirigir, de quantos modos poderão se acomodar para uma viagem?

10) Com três tipos de macarrão e dois tipos de molho, quantos pratos diferentes podem ser preparados com um tipo de macarrão e um tipo de molho?

11) Em uma sala há 8 cadeiras e 4 pessoas. O número de modos distintos das pessoas ocuparem as cadeiras é:

a) 1680

b) 8!

c) 8.4!

d) 8!/4

e) 32

12) Uma sala possui seis portas. De quantas maneiras uma pessoa pode entrar por uma porta e sair por outra diferente?

13) Cinco cavalos disputam um páreo qual o numero de resultado possíveis para as três primeiras colocações?

14) Dispondo de 8 cores, querendo pintar uma bandeira de 5 listras com cores diferentes, cada lista de uma cor. De quantas formas isso pode ser feito ?

Respostas

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
a											x			
b														
c				x										
d														
e														

1)

$a)\ 210$

$b)\ \frac{7}{4}$

2) a) $n^2 - n$ b) $1/(n + 2)$ c) $n^2 + 2n - 3$

3) a) 210   b) 1/24   c) 120   d) -12

5) 480 possibilidades

6) a) 625   b) 120

7) 24 opões

8) 60 modos

9) 48 modos

10) 6 pratos diferentes

12) 30 maneiras

13) 60 resultados possíveis

14) 6720 maneiras