LISTA DE EXERCÍCIOS DE LOGARITMOS

1. Se $\log_3 \frac{1}{27}$ = x, calcule o valor de x.

Solução. Aplicando o conceito de logaritmo, temos: $3^x = \frac{1}{27} \Rightarrow 3^x = \frac{1}{3^3} = 3^{-3}$**. Igualando o 1º membro e o último, temos:** $\boxed{3^x = 3^{-3} \Rightarrow x = -3.}$

2. Se log (2x -5) = 0, calcule o valor de x.

Solução. Lembrando que $\log_{10}$ = log e aplicando o conceito de logaritmo, temos:

$2x - 5 = 10^0 \Rightarrow 2x - 5 = 1 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3.$

3. Se $\begin{cases} 27^x = 9^y \\ \log_y x = 2 \end{cases}$, calcule x + y.

Solução. Utilizando exponenciais e logaritmos, temos:

$\begin{cases} 27^x = 9^y \\ \log_y x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (3^3)^x = (3^2)^y \\ x = y^2 \end{cases}$ **. Substituindo o valor de "x", vem:**

$\begin{cases} (3^3)^x = (3^2)^y \\ x = y^2 \end{cases} \Rightarrow (3^3)^{y^2} = (3^2)^y \Rightarrow 3y^2 = 2y$ **. Resolvendo para "y",**

$$\boxed{\begin{array}{l} 3y^2 - 2y = 0 \Rightarrow y(3y - 2) = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{3} \to (y \neq 0). \\ x = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow x + y = \frac{4}{9} + \frac{2}{3} = \frac{4+6}{9} = \frac{10}{9}. \end{array}}$$

4. Calcule o valor numérico real da expressão $\dfrac{-(-3)^3+\sqrt[3]{-27}}{2+\log_3 81}$.

Solução. Se x = $\log_3 81$, então 3^x = 81= 3^4. Logo, x = 4. Reescrevendo a expressão, temos:

$$\frac{-(-3)^3+\sqrt[3]{-27}}{2+\log_3 81}=\frac{-(-27)+\sqrt[3]{(-3)^3}}{2+4}=\frac{27+(-3)}{6}=\frac{24}{6}=4.$$

5. Se x + y = 20 e x - y = 5 calcule $\log(x^2 - y^2)$.

Solução. Na fatoração, $(x^2 - y^2) = (x + y).(x - y)$. Aplicando a propriedade do produto de logaritmos, temos: $\log(x^2-y^2)=\log[(x+y).(x-y)]=\log[20.5]=\log 100=\log 10^2$. **Pela propriedade da potência, vem:** $\log(x^2-y^2)=\log 10^2=2\log 10=2.1=2$

6. O número real x, tal que $\log_x \dfrac{9}{4}=\dfrac{1}{2}$ é:

Solução. Aplicando o conceito de logaritmo, vem: $\log_x \dfrac{9}{4}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow \dfrac{9}{4}=x^{\frac{1}{2}}$. **Elevando ambos os termos ao quadrado, temos:** $\left(\dfrac{9}{4}\right)^2=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2\Rightarrow \dfrac{81}{16}=x^{\frac{1}{2}.2}\Rightarrow x=\dfrac{81}{16}$.

7. Se k = $\log_5(6+\sqrt{35})$, calcule $5^k + 5^{-k}$.

Solução. Pelo conceito de logaritmo, se k = $\log_5(6+\sqrt{35})$ então, $5^k=6+\sqrt{35}$. **Da mesma forma temos:**

$$-k=-\log_5(6+\sqrt{35})=\log_5(6+\sqrt{35})^{-1}\Rightarrow 5^{-k}=(6+\sqrt{35})^{-1}=\frac{1}{6+\sqrt{35}}$$

Logo,

$$5^k+5^{-k}=(6+\sqrt{35})+\frac{1}{6+\sqrt{35}}=\frac{(6+\sqrt{35})^2+1}{6+\sqrt{35}}=\frac{36+12\sqrt{35}+35+1}{6+\sqrt{35}}=\frac{12(6+\sqrt{35})}{6+\sqrt{35}}=12$$

8. Sendo log 2 = 0,30 e log 3 = 0,47, calcule log 60.

Solução. Decompondo 60 em fatores primos, temos: 60 = 2^2 x 3 x 5. Aplicando as propriedades do logaritmo, e expressando $\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2$ calculamos:

$$\log 60 = \log(2^2.3.5) = 2\log 2 + \log 3 + \log 10 - \log 2 = \log 2 + \log 3 + 1.$$

Substituindo os valores iniciais, encontramos:

$$\boxed{\log 60 = \log 2 + \log 3 + 1 = 0{,}30 + 0{,}47 + 1 = 1{,}77.}$$

9. Sendo log 2 = 0,301 e log 7 = 0,845, qual será o valor de log 28?

Solução. Decompondo 28 em fatores primos, temos: 28= 2^2 x 7. Aplicando as propriedades do logaritmo e substituindo os valores iniciais, encontramos:

$$\boxed{\log 28 = \log(2^2.7) = \log 2^2 + \log 7 = 2\log 2 + \log 7 = 2(0{,}301) + 0{,}845 = 1{,}447\ .}$$

10. Se $\log_2 b$ - $\log_2 a$ = 5, calcule o quociente $\frac{b}{a}$.

Solução. Aplicando a propriedade do quociente, vem: $\log_2 b - \log_2 a = \log_2 \frac{b}{a} = 5$**. Logo, pela definição, temos:** $\log_2 \frac{b}{a} = 5 \Rightarrow \frac{b}{a} = 2^5 = 32.$

11. Dado o sistema $\begin{cases} \log x - \log y = \log 3 \\ 3^{2(x-y)} = 81 \end{cases}$ calcule x + y.

Solução. Utilizando propriedades, temos:

$$\begin{cases} \log x - \log y = \log 3 \\ 3^{2(x-y)} = 81 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log \dfrac{x}{y} = \log 3 \\ 3^{2(x-y)} = 3^4 \end{cases}$$

Igualando os logaritmandos da 1ª equação e os expoentes da 2ª, vem:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} = 3 \Rightarrow x = 3y \\ 2(x-y) = 4 \Rightarrow 2(3y-y) = 4 \Rightarrow 4y = 4 \Rightarrow y = 1 \end{cases}$$

Logo x = 3(1) =3. Então, x + y = 4.

12. Sendo log 2 = 0,30 e log 3 = 0,47, então $\log \dfrac{6\sqrt{2}}{5}$.

Solução. Aplicando

$\log 5 = \log \dfrac{10}{2} = \log 10 - \log 2$, $\log 6 = \log(2.3) = \log 2 + \log 3$ **e** $\log \sqrt{2} = \log 2^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}\log 2$ **temos:**

$$\log \frac{6\sqrt{2}}{5} = \log 6\sqrt{2} - \log 5 = \log 6 + \log 2^{\frac{1}{2}} - \log \frac{10}{2} = \log 2 + \log 3 + \frac{1}{2}\log 2 - (\log 10 - \log 2).$$

Substituindo os valores iniciais, encontramos:

$$\log \frac{6\sqrt{2}}{5} = 0{,}30 + 0{,}47 + (0{,}5)(0{,}30) - 1 + 0{,}30 = 0{,}30 + 0{,}47 + 1 = 0{,}22.$$

13. Dado log 4 = 0,602, calcule o valor de log 32^5.

Solução. A informação sugere que escrevamos 32 = 4 x 8 = 4 x 4 x 2. Aplicando as propriedades, temos:

$$\boxed{\log 32^5 = 5\log(4.4.2) = 5[\log 4 + \log 4 + \log 2) = 5(0{,}602 + 0{,}602 + 0{,}301) = 5(1{,}505) = 7{,}525.}$$

14. Se log 2 = x e log 3 = y, calcule log 375.

Solução. Decompondo 375 em fatores primos, temos: 375= 3 x 5^3. Aplicando as propriedades do logaritmo, e expressando $\log 5 = \log\frac{10}{2} = \log 10 - \log 2$ calculamos:

$$\log 375 = \log(3.5^3) = \log 3 + 3\log 5 = \log 3 + 3\log\frac{10}{2} = \log 3 + 3(\log 10 - \log 2).$$

Substituindo os valores iniciais, encontramos:

$$\log 375 = y + 3(1 - x) = y - 3x + 3.$$

15. Calcule a expressão $\log_{\frac{1}{3}} 81$ + log 0,001 + $\log\sqrt[3]{10}$.

Solução. Calculando cada termo separadamente, temos:

i) $$\log_{\frac{1}{3}} 81 = x \Rightarrow 81 = \left(\frac{1}{3}\right)^x \Rightarrow 3^4 = (3^{-1})^x \Rightarrow 3^4 = 3^{-x} \Rightarrow -x = 4 \Rightarrow x = -4.$$

ii) $$\log 0{,}001 = x \Rightarrow 0{,}001 = (10)^x \Rightarrow \frac{1}{1000} = (10)^x \Rightarrow (10)^{-3} = (10)^x \Rightarrow x = -3.$$

iii) $$\log\sqrt[3]{10} = x \Rightarrow \sqrt[3]{10} = (10)^x \Rightarrow (10)^{\frac{1}{3}} = (10)^x \Rightarrow x = \frac{1}{3}.$$

Substituindo, temos: $\log_{\frac{1}{3}} 81$ + log 0,001 + $\log\sqrt[3]{10}$ = $\boxed{-4 - 3 + \frac{1}{3} = \frac{-12 - 9 + 1}{3} = \frac{-20}{3}.}$

16. Calcule a expressão $\log\frac{2}{3}$ + $\log\frac{3}{4}$ + $\log\frac{4}{5}$ - $\log\frac{14}{55}$.

Solução. Expressando cada termo de acordo com as propriedades, temos:

i) $\log\frac{2}{3} = \log 2 - \log 3.$

ii)
$$\log\frac{3}{4} = \log 3 - \log 4$$
$$\log 3 - \log 2^2$$
$$\log 3 - 2\log 2.$$

iii)
$$\log\frac{4}{5} = \log 4 - \log 5$$
$$\log 2^2 - \log\frac{10}{2}$$
$$2\log 2 - \log 10 + \log 2$$
$$3\log 2 - 1.$$

iv)
$$\log\frac{14}{55} = \log 14 - \log 55$$
$$\log(2.7) - \log(5.11)$$
$$\log 2 + \log 7 - \log\frac{10}{2} - \log 11$$
$$\log 2 + \log 7 - \log 10 + \log 2 - \log 11$$
$$2\log 2 - 1 + \log 7 - \log 11$$

Substituindo na soma dos três primeiros termos, temos:

$\log\frac{2}{3}$ + $\log\frac{3}{4}$ + $\log\frac{4}{5}$ = $\boxed{\log 2 - \log 3 + \log 3 - 2\log 2 + 3\log 2 - 1 = 2\log 2 - 1}$

Resolvendo a subtração, vem:

$$2\log 2 - 1 - (2\log 2 - 1 + \log 7 - \log 11) = 2\log 2 - 1 - 2\log 2 + 1 - \log 7 + \log 11$$
$$-\log 7 + \log 11 = -(\log 7 - \log 11) = -\log\frac{7}{11} = \log\left(\frac{7}{11}\right)^{-1} = \log\frac{11}{7}.$$