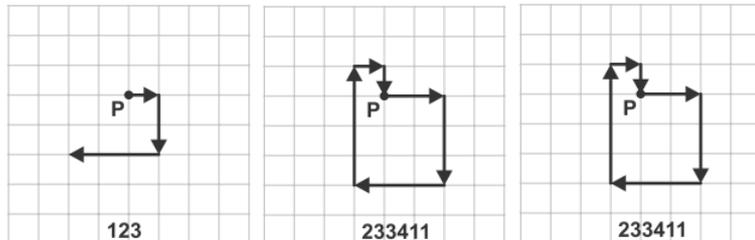
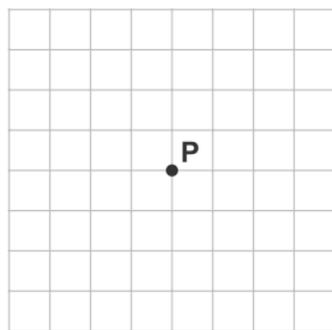


QUESTÕES:

01. A assinatura geométrica de um número natural formado por algarismos diferentes de 0 é uma sequência de segmentos traçados sobre um quadriculado cujos quadradinhos têm 1 cm de lado. Os segmentos são traçados a partir de um ponto fixo P, para a direita, para baixo, para a esquerda, para cima, para a direita e assim por diante. O tamanho dos segmentos depende dos algarismos do número, como exemplificado a seguir.



Para obter a assinatura geométrica do número 334524, traça-se um segmento de 3 cm para a direita a partir de P, outro de 3 cm para baixo, outro de 4 cm para a esquerda, outro de 5 cm para cima, outro de 2 cm para a direita e outro de 4 cm para baixo. Na figura, vemos as assinaturas geométricas dos números 123, 233411 e 334524.



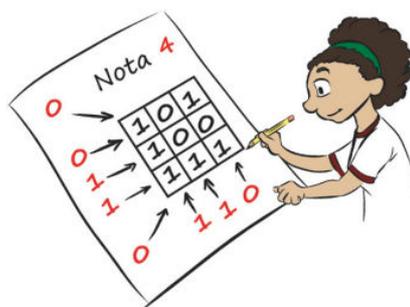
A) Trace no quadriculado a assinatura geométrica do número 123456.

B) Quantos são os números de quatro algarismos que têm assinatura geométrica fechada, isto é, começando e terminando em P?

C) Quantos são os números de cinco algarismos que têm assinatura geométrica fechada?

02. Helena brinca com tabuleiros 3 x 3, preenchidos com os algarismos 0 ou 1, da seguinte maneira:

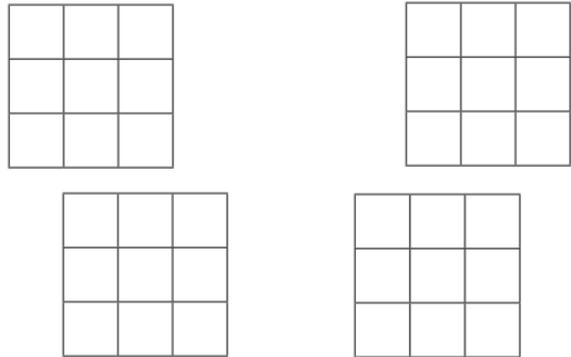
- ela atribui o número 0 a cada linha, coluna ou diagonal cuja soma de seus algarismos seja par e o número 1 a cada linha, coluna ou diagonal para a qual essa soma seja ímpar;
- em seguida, ela calcula a nota do tabuleiro, que é a soma dos números que ela atribuiu. Por exemplo, a nota do tabuleiro na ilustração é $0 + 0 + 1 + 1 + 0 + 1 + 1 + 0 = 4$.



A) Qual é a nota do tabuleiro mostrado ao lado?

| | | |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |

B) Preencha os tabuleiros abaixo de quatro maneiras diferentes e de modo que todos tenham nota 8.



C) Explique por que, quando se troca o número de um dos cantos de um tabuleiro de nota ímpar, sua nota torna-se par.

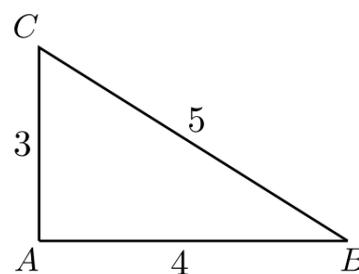
D) De quantas maneiras diferentes um tabuleiro pode ser preenchido de modo que sua nota seja ímpar?

03. Mirtes trabalha num setor com mais sete colegas, sendo portanto oito ao todo. No dia 1º de janeiro, Mirtes comenta que neste ano dois dos funcionários do setor farão aniversário no mesmo dia da semana, pois há sete dias em uma semana e oito colegas.

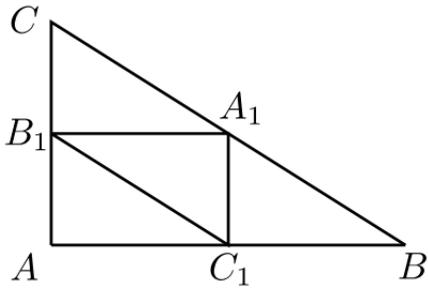
A) Usando esta ideia de Mirtes, descubra qual é o número mínimo de funcionários que o setor precisaria ter para garantir que duas pessoas tenham o mesmo signo.

B) Qual o número mínimo de funcionários que o setor precisaria ter para garantir que pelo menos quatro deles fizessem aniversário no mesmo dia da semana neste ano?

04. Dona Bete desenha um triângulo de lados 3, 4 e 5, como mostra a figura abaixo:

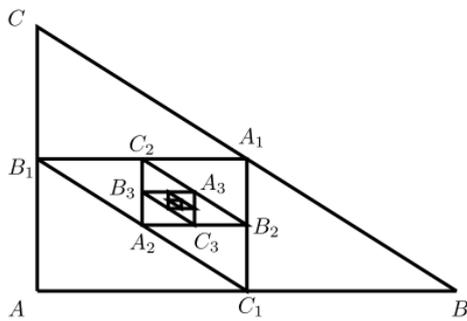


Em seguida, Dona Bete marca os pontos médios de cada lado e desenha um novo triângulo como mostra a figura abaixo.



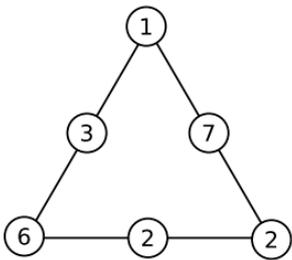
A) Calcule a área do triângulo $A_1B_1C_1$.

B) Seu Maurício nota um interessante padrão e repete o processo, como mostra a figura, sempre marcando e ligando os pontos médios de cada novo triângulo. Calcule a área do triângulo $A_2B_2C_2$.



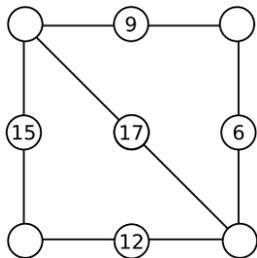
C) Calcule a área do triângulo $A_{2014}B_{2014}C_{2014}$.

05. Amanda desenhou a seguinte figura:

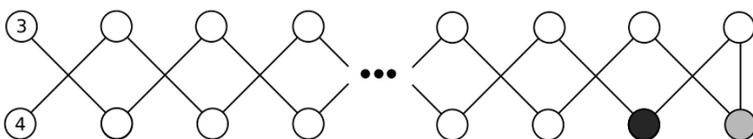
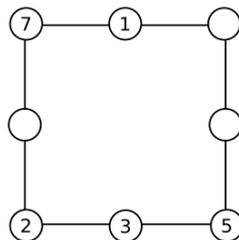


Observe que a soma ao longo de qualquer lado do triângulo acima é sempre a mesma, pois, como podemos verificar $1 + 3 + 6 = 6 + 2 + 2 = 1 + 7 + 2$.

A) Complete os números que faltam nos círculos da figura abaixo de modo que as somas ao longo de qualquer lado do quadrado sejam sempre as mesmas.

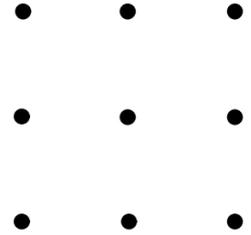


B) Encontre uma maneira de colocar os números nos círculos de maneira que as somas ao longo de qualquer linha sejam sempre as mesmas. Há mais de uma solução?



C) Na figura anterior, que foi desenhada apenas parcialmente (por falta de espaço!), também vale que a soma ao longo de cada segmento é sempre a mesma. Entretanto, Amanda apagou todos os números exceto os dois números mostrados na figura (3 e 4). Sabe-se que há 40 círculos no desenho. É possível descobrir quais números estavam nos círculos pintados de cinza claro e cinza escuro?

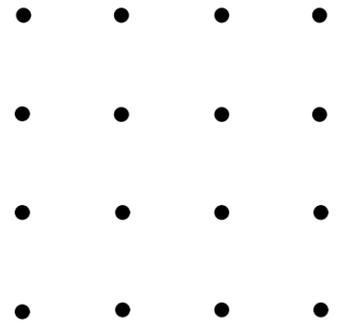
06. O grande pintor Kandinskemílio desenhou os seguintes pontos ao lado no papel.



A) Sem levantar o lápis do papel, desenhe quatro linhas retas que passem por todos os nove pontos da figura desenhada por Kandinskemílio.

B) Explique por que não é possível fazer o mesmo, descrito no item anterior, com apenas três linhas retas.

C) Sem levantar o lápis do papel, desenhe seis linhas retas que passem por todos os dezesseis pontos da figura abaixo.



07. Qual número é maior, 2^{300} ou 3^{200} ? Bem, calcular explicitamente tais números é algo bem difícil, mesmo com a ajuda de uma calculadora ou de um computador. Entretanto, podemos descobrir sem calculá-los explicitamente! Observe:

$$2^{300} = (2^3)^{100} = 8^{100}$$

$$3^{200} = (3^2)^{100} = 9^{100}$$

Como $8^{100} < 9^{100}$ conclui-se que 3^{200} é maior que 2^{300} .

A) Qual número é maior, 2^{40} ou 3^{28} ?

B) Qual número é maior, 31^{11} ou 17^{14} ?

08. Renato tem trinta melancias, Leandro tem dezoito melancias e Marcelo tem vinte e quatro jacas. Ao contrário de Leandro e Renato, Marcelo não gosta de jaca. Por outro lado, os três gostam de melancia. Os três fazem então um acordo: Marcelo dá as suas vinte e quatro jacas para Leandro e Renato, e as melancias de Leandro e Renato são divididas igualmente entre os três, ou seja, dezesseis para cada. Qual é a divisão justa de jacas entre Renato e Leandro?