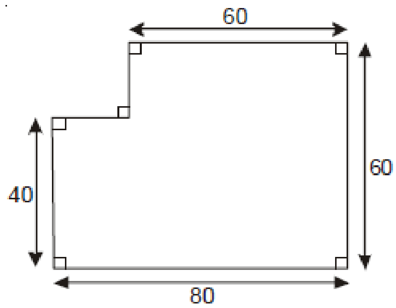
QUESTÕES DE GEOMETRIA - OBMEP - 2005

OBMEP 2005 - Nível 1

1. **(2005 - N1Q8 - 1ª fase)** Daniela quer cercar o terreno representado pela figura. Nessa figura dois lados consecutivos são sempre perpendiculares e as medidas de alguns lados estão indicadas em metros. Quantos metros de cerca Daniela terá que comprar?

   (a) 140
   (b) 280
   (c) 320
   (d) 1800
   (e) 4800

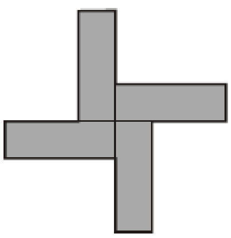


2. **(2005 - N1Q12 - 1ª fase)** Uma folha quadrada foi cortada em quadrados menores da seguinte maneira: um quadrado de área 16 cm^2, cinco quadrados de área 4 cm^2 cada um e treze quadrados de área 1 cm^2 cada um. Qual era a medida do lado da folha, antes de ela ser cortada?

   (a) 3 cm
   (b) 4 cm
   (c) 5 cm
   (d) 7 cm
   (e) 8 cm

3. **(2005 - N1Q1 - 2ª fase)** Tia Anastácia uniu quatro retângulos de papel de 3 cm de comprimento por 1 cm de largura, formando a figura ao lado.

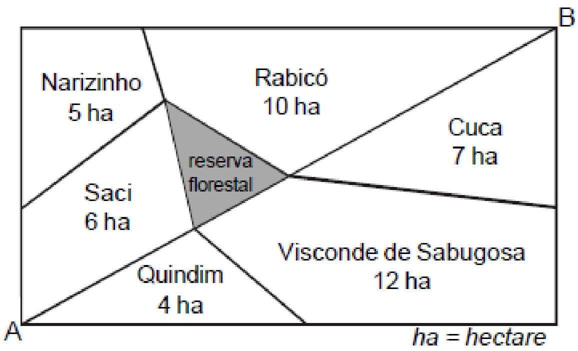
   (A) Qual é o perímetro da figura?
   (B) Qual é o menor número de retângulos de 3 cm de comprimento por 1 cm de largura que é necessário juntar a essa figura para se obter um quadrado? Faça um desenho ilustrando sua resposta.
   (C) Qual é a área do quadrado obtido no item anterior?



4. **(2005 - N1Q5 - 2ª fase)** Dona Benta dividiu o Sítio do Picapau Amarelo entre seis personagens, mantendo uma parte do Sítio como reserva florestal. A divisão está indicada na figura, onde a área de cada personagem é dada em hectares e a área sombreada é a reserva florestal. O Sítio tem formato retangular e AB é uma diagonal.

   (A) Qual é a área da reserva florestal?

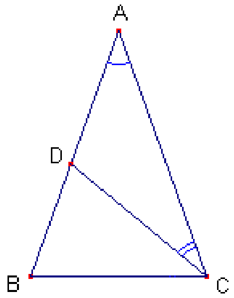
   (B) Para preparar os terrenos para o plantio, cada um dos seis personagens gastou uma quantia proporcional à área de seu terreno. O Quindim e a Cuca gastaram, juntos, R\$ 2.420,00. Quanto foi que o Saci gastou?



OBMEP 2005 - Nível 2

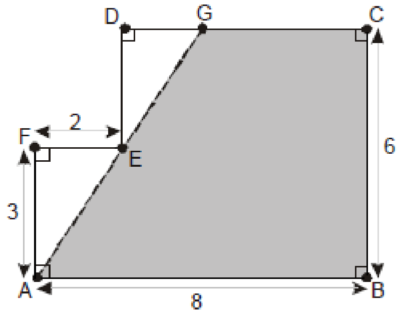
5. **(2005 - N2Q15 - 1ª fase)** O triângulo ABC é isósceles de base BC e o ângulo $B\hat{A}C$ mede 30^o. O triângulo BCD é isósceles de base BD. Determine a medida do ângulo $D\hat{C}A$.

   (a) 45^o
   (b) 50^o
   (c) 60^o
   (c) 75^o
   (e) 90^o



6. **(2005 - N2Q19 - 1ª fase)** A figura mostra um polígono $ABCDEF$ no qual dois lados consecutivos quaisquer são perpendiculares. O ponto G está sobre o lado CD e sobre a reta que passa por A e E. Os comprimentos de alguns lados estão indicados em centímetros. Qual é a área do polígono $ABCG$?

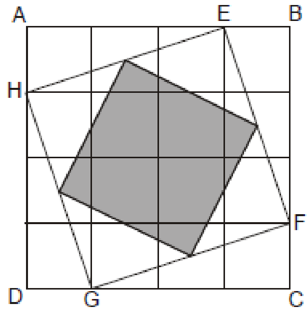
   (a) $36\ cm^2$
   (b) $37\ cm^2$
   (c) $38\ cm^2$
   (d) $39\ cm^2$
   (e) $40\ cm^2$



7. **(2005 - N2Q4 - 2^a fase)** O quadrado $ABCD$ da figura está dividido em 16 quadradinhos iguais. O quadrado sombreado tem os vértices sobre os pontos médios do quadrado $EFGH$.

   (A) A área do quadrado $EFGH$ corresponde a que fração da área do quadrado $ABCD$?

   (B) Se o quadrado $ABCD$ tem 80 cm^2 de área, qual é o lado do quadrado sombreado?



8. **(2005 - N2Q6 - 2^a fase)** A Princesa Telassim cortou uma folha de papel retangular em 9 quadrados de lados 1, 4, 7, 8, 9, 10, 14, 15 e 18 centímetros.

   (A) Qual era a área da folha antes de ser cortada?

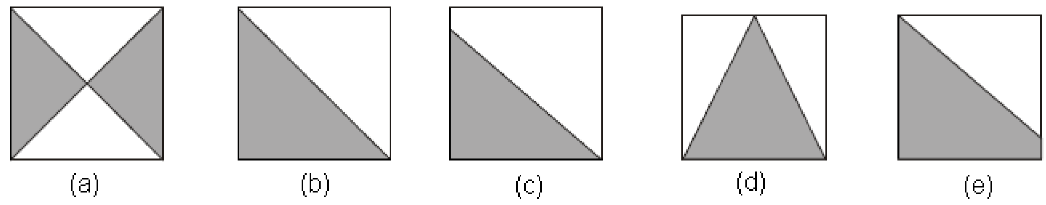
   (B) Quais eram as medidas da folha antes de ser cortada?

   (C) A Princesa Telassim precisa montar a folha de novo. Ajude-a mostrando, com um desenho, como fazer esta montagem.

QUESTÕES DE GEOMETRIA - OBMEP - 2006

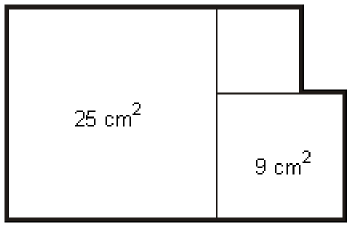
OBMEP 2006 - Nível 1

9. **(2006 - N1Q3 - 1ª fase)** Os quadrados abaixo têm todos o mesmo tamanho. Em qual deles a região sombreada tem a maior área?



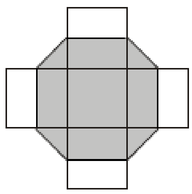
10. **(2006 - N1Q8 - 1ª fase)** A figura é formada por três quadrados, um deles com área de 25 cm^2 e o, outro com 9 cm^2. Qual é o perímetro da figura?

    (a) 20 cm
    (b) 22 cm
    (c) 24 cm
    (d) 26 cm
    (e) 38 cm



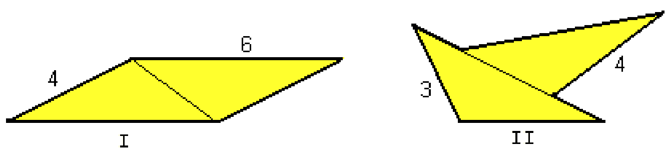
11. **(2006 - N1Q14 - 1ª fase)** Na figura, os cinco quadrados são iguais e os vértices do polígono sombreado são pontos médios dos lados dos quadrados. Se a área de cada quadrado é 1 cm^2, qual a área do polígono sombreado?

    (a) 2 cm^2
    (b) $2,5$ cm^2
    (c) 3 cm^2
    (d) $3,5$ cm^2
    (e) 4 cm^2



12. **(2006 - N1Q1 - 2ª fase)** Miguilim brinca com dois triângulos iguais cujos lados medem 3 cm, 4 cm e 6 cm. Ele forma figuras planas unindo um lado de um triângulo com um lado do outro, sem que um triângulo fique sobre o outro. Abaixo vemos duas das figuras que ele fez.

    (A) Quais os comprimentos dos lados que foram unidos nas figuras I e II?
    (B) Calcule os perímetros das figuras I e II.
    (C) Qual o menor perímetro de uma figura que Miguilim pode formar? Desenhe duas figuras que ele pode formar com esse perímetro.

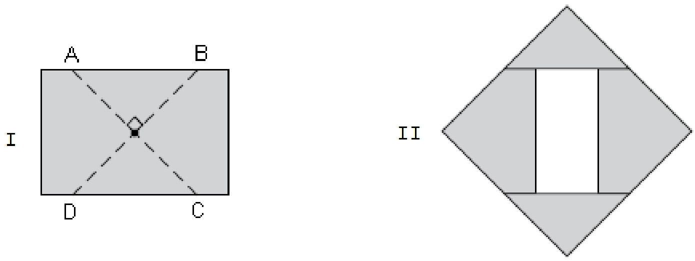


13. **(2006 - N1Q4 - 2^a fase)** Uma folha retangular de 20 cm por 30 cm foi cortada ao longo das linhas tracejadas AC e BD em quatro pedaçs: dois triângulos iguais e dois polígonos iguais de cinco lados cada um, como na figura I. Os segmentos AC e BD têm o mesmo comprimento e se encontram no centro do retângulo formando ângulos retos.

(A) Qual é o comprimento do segmento AB?

(B) Qual é a área de um pedaço triangular? E de um pedaço de cinco lados?

(C) Com os quatro pedaços podemos montar um quadrado com um buraco retangular, como na figura II. Qual é a área do buraco?



OBMEP 2006 - Nível 2

14. **(2006 - N2Q1 - 1^a fase)** No retângulo $ABCD$ da figura, M e N são os pontos médios dos lados AD e BC. Qual é a razão entre a área da parte sombreada e a área do retângulo $ABCD$?

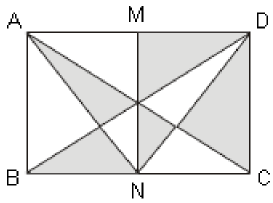
(a) $\frac{1}{5}$

(b) $\frac{1}{4}$

(c) $\frac{1}{3}$

(d) $\frac{1}{2}$

(e) $\frac{2}{3}$



15. **(2006 - N2Q4 - 1^a fase)** No retângulo da figura temos $AB = 6\ cm$ e $BC = 4\ cm$. O ponto E é o ponto médio do lado AB. Qual é a área da parte sombreada?

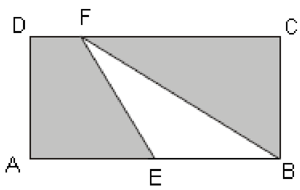
(a) 12 cm^2

(b) 15 cm^2

(c) 18 cm^2

(d) 20 cm^2

(e) 24 cm^2



16. **(2006 - N2Q13 - 1^a fase)** Uma tira de papel retangular é dobrada ao longo da linha tracejada, conforme indicado, formando a figura plana da direita. Qual a medida do ângulo x?

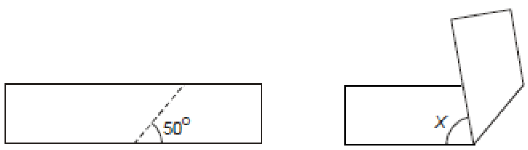
(a) 30^o

(b) 50^o

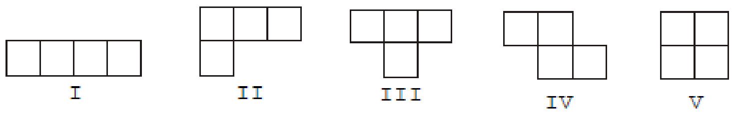
(c) 80^o

(d) 100^o

(e) 130^o

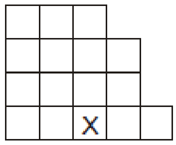


17. **(2006 - N2Q19 - 1ª fase)** Paulo usou quatro peças diferentes dentre as cinco abaixo para montar a figura indicada.



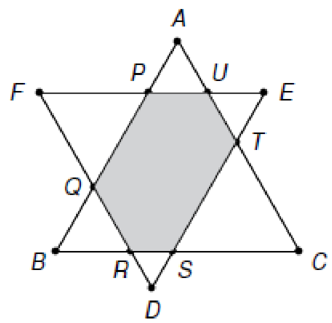
Em qual das peças está o quadradinho marcado com X?

(a) I
(b) II
(c) III
(d) IV
(e) V



18. **(2006 - N2Q4 - 2ª fase)** Na figura, os triângulos ABC e DEF são equiláteros de lados 14 cm e 13 cm, respectivamente, e os lados BC e EF são paralelos.

(A) Calcule a medida do ângulo $E\hat{U}T$.
(B) Calcule o perímetro do polígono $PQRSTU$.
(C) Se o segmento PQ mede 6 cm, qual é a medida do segmento ST?

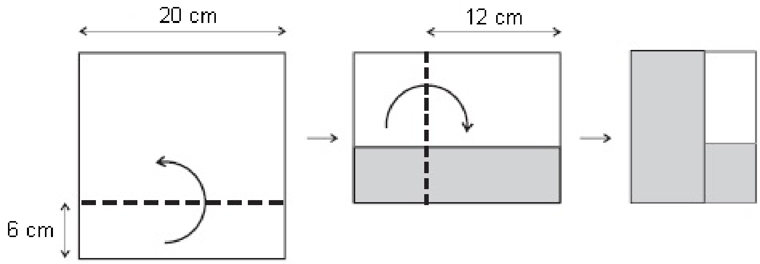


QUESTÕES DE GEOMETRIA - OBMEP - 2007

OBMEP 2007 - Nível 1

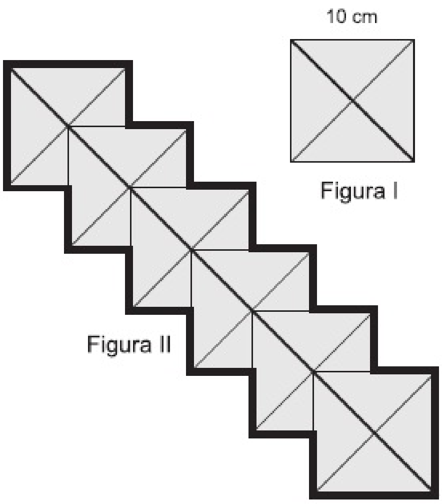
19. **(2007 - N1Q10 - 1ª fase)** Priscila tem uma folha de papel, branca de um lado e cinza do outro. A folha é quadrada e tem 20 cm de lado. Ela dobrou essa folha duas vezes, como indicado na figura. Depois disso, qual foi a área da parte branca que ficou visível?

    (a) 18 cm^2
    (b) 32 cm^2
    (c) 36 cm^2
    (d) 72 cm^2
    (e) 84 cm^2



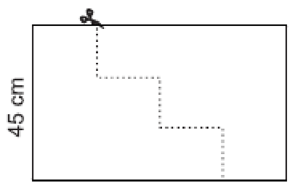
20. **(2007 - N1Q11 - 1ª fase)** Nanci tem 6 quadrados de cartolina iguais, como na figura I. Com esses cartões ela montou a figura II. Qual é a área dessa figura?

    (a) 450 cm^2
    (b) 475 cm^2
    (c) 525 cm^2
    (d) 540 cm^2
    (e) 600 cm^2

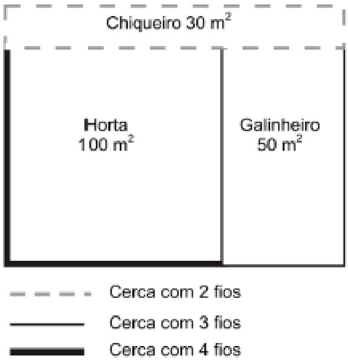


21. **(2007 - N1Q16 - 1ª fase)** Um retângulo de papelão com 45 cm de altura é recortado em dois pedaços iguais, como na figura. Com esses dois pedaços é possível montar um quadrado de lado maior que 45 cm. Qual é o comprimento da base do retângulo?

    (a) 65 cm
    (b) 70 cm
    (c) 75 cm
    (d) 80 cm
    (e) 85 cm



22. **(2007 - N1Q1 - 2ª fase)** João Grilo tem um terreno retangular onde há um galinheiro e um chiqueiro retangulares e uma horta quadrada, cujas áreas estão indicadas na figura.



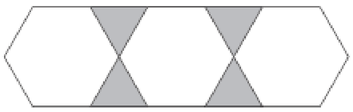
(A) Qual é a área do terreno do João Grilo?

(B) Quais são as medidas dos lados do galinheiro?

(C) João Grilo cercou a horta, o galinheiro e o chiqueiro com cercas feitas com diferentes números de fios de arame, como indicado na figura. Quantos metros de arame ele usou?

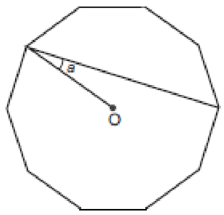
OBMEP 2007 - Nível 2

23. **(2007 - N2Q3 - 1ª fase)** A figura abaixo é formada por hexágonos regulares e triângulos equiláteros. Sua área total é 154 cm^2. Qual é a área da região sombreada?



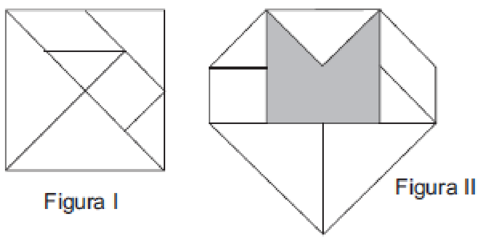
(a) 16 cm^2
(b) 24 cm^2
(c) 28 cm^2
(d) 32 cm^2
(e) 36 cm^2

24. **(2007 - N2Q12 - 1ª fase)** A figura mostra um polígono regular de dez lados com centro O. Qual é a medida do ângulo a?



(a) 15^o
(b) 18^o
(c) 20^o
(d) 30^o
(e) 36^o

25. **(2007 - N2Q13 - 1ª fase)** A figura I mostra um quadrado de 40 cm^2 cortado em cinco triângulos retângulos isósceles, um quadrado e um paralelogramo, formando as sete peças do jogo Tangran. Com elas é possível formar a figura II, que tem um buraco sombreado. Qual é a área do buraco?

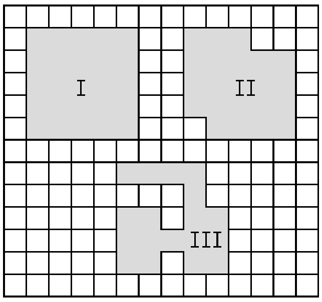


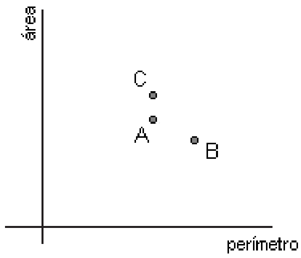
(a) 5 cm^2
(b) 10 cm^2
(c) 15 cm^2
(d) 20 cm^2
(e) 25 cm^2

26. **(2007 - N2Q14 - 1^a fase)** Juliana tem oito cartões de papel retangulares iguais. Se ela enfileirar todos os cartões juntando lados de mesma medida, ela pode obter um retângulo de perímetro 236 cm ou um retângulo de perímetro 376 cm. Qual é a área de cada cartão?

(a) 66 cm^2
(b) 132 cm^2
(c) 198 cm^2
(d) 264 cm^2
(e) 330 cm^2

27. **(2007 - N2Q15 - 1^a fase)** A figura mostra três polígonos desenhados em uma folha quadriculada. Para cada um desses polígonos foi assinalado, no plano cartesiano à direita, o ponto cujas coordenadas horizontal e vertical são, respectivamente, seu perímetro e sua área.

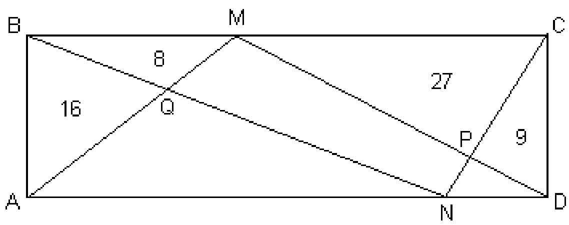




Qual é a correspondência correta entre os polígonos e os pontos?

(a) I → C, II → B, III → A
(b) I → B, II → A, III → C
(c) I → A, II → C, III → B
(d) I → A, II → B, III → C
(e) I → C, II → A, III → B

28. **(2007 - N2Q2 - 2^a fase)** Na figura $ABCD$ é um retângulo, M e N são pontos nos lados BC e AD, respectivamente, e os números representam as áreas dos triângulos ABQ, BQM, MPC e CPD em cm^2.



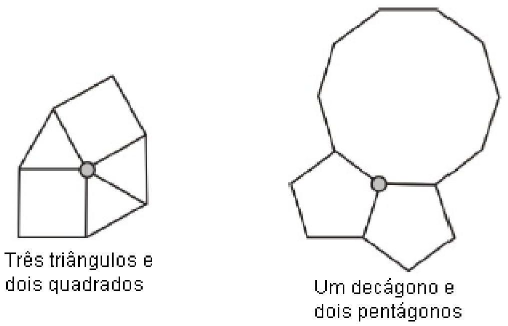
(A) Qual é a área do triângulo AMD? Por quê?
(B) Calcule a soma das áreas dos triângulos AQN e NPD.
(C) Calcule a área do quadrilátero $MPNQ$.

29. **(2007 - N2Q4 - 2^a fase)**

(A) Complete a tabela abaixo, lembrando que a soma de todos os ângulos internos de um polígono regular de n lados é $(n-2) \times 180^o$.

n	Soma dos ângulos internos	Ângulo interno
3	180^o	60^o
4	360^o	90^o
5		
6		
8		

Dizemos que três ou mais polígonos regulares se encaixam se é possível colocá-los em torno de um vértice comum, sem sobreposição, de modo que cada lado que parte desse vértice é comum a dois desses polígonos. Na figura vemos dois exemplos de polígonos que se encaixam.



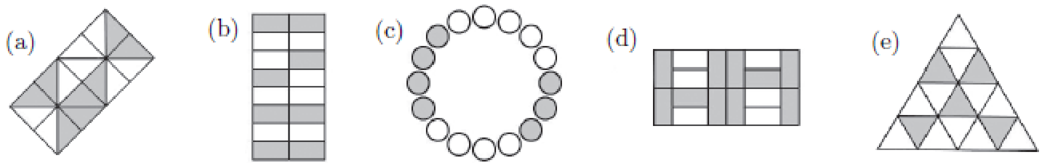
(B) Um quadrado e dois octógonos (polígonos regulares de oito lados) se encaixam? Justifique sua resposta.

(C) Um triângulo equilátero, um heptágono (polígono regular de sete lados) e um outro polígono se encaixam. Quantos lados tem esse polígono?

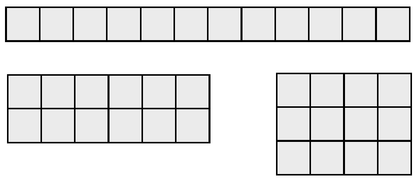
QUESTÕES DE GEOMETRIA - OBMEP - 2008

OBMEP 2008 - Nível 1

30. **(2008 - N1Q2 - 1^a fase)** Cada uma das figuras está dividida em 16 partes iguais. Em qual delas a parte cinza corresponde a $\frac{5}{8}$ da área total?

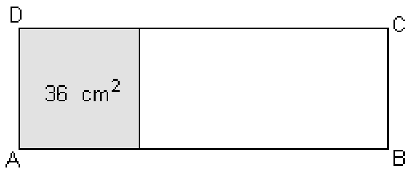


31. **(2008 - N1Q7 - 1^a fase)** A figura mostra os três retângulos diferentes que podem ser construídos com 12 quadradinhos iguais. Quantos retângulos diferentes podem ser construídos com 60 quadradinhos iguais?



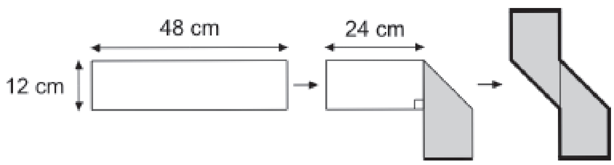
(a) 3
(b) 4
(c) 5
(d) 6
(e) 7

32. **(2008 - N1Q8 - 1^a fase)** A região cinza na figura é um quadrado de área 36 cm^2 que corresponde a $\frac{3}{8}$ da área do retângulo $ABCD$. Qual é o perímetro desse retângulo?



(a) 44 cm
(b) 46 cm
(c) 48 cm
(d) 50 cm
(e) 52 cm

33. **(2008 - N1Q11 - 1^a fase)** Uma tira retangular de cartolina, branca de um lado e cinza do outro, foi dobrada como na figura, formando um polígono de 8 lados. Qual é a área desse polígono?



(a) 216 cm^2
(b) 264 cm^2
(c) 348 cm^2
(d) 432 cm^2
(e) 576 cm^2

34. **(2008 - N1Q12 - 1^a fase)** A figura 1 mostra uma peça feita com quadradinhos. Com duas cópias dessa peça podemos construir um retângulo, como na figura 2.

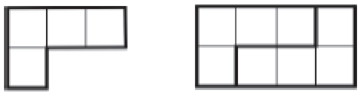
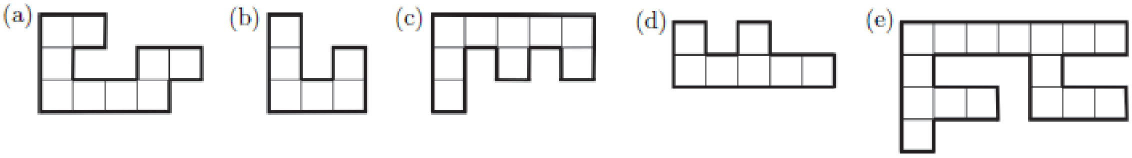


Figura 1 Figura 2

Com duas peças idênticas a cada uma das que aparecem nas alternativas também é possível montar um retângulo, **com exceção** de uma delas. Qual é essa peça?

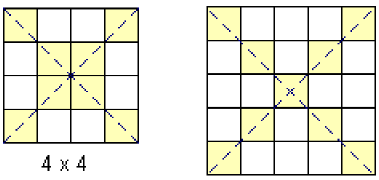


35. **(2008 - N1Q14 - 1^a fase)** A figura mostra as letras **V** e **Z**, ambas montadas com as mesmas duas peças de cartolina, uma branca e uma cinza, sem sobreposição. Qual das afirmativas abaixo é verdadeira?

(a) O **V** e o **Z** têm perímetros iguais e áreas iguais.
(b) O **V** e o **Z** têm perímetros iguais, mas a área do **Z** é menor do que a do **V**.
(c) O **V** e o **Z** têm perímetros iguais, mas a área do **Z** é maior do que a do **V**.
(d) O **V** e o **Z** têm áreas iguais, mas o perímetro do **Z** é maior do que o do **V**.
(e) O **V** e o **Z** têm áreas iguais, mas o perímetro do **Z** é menor do que o do **V**.

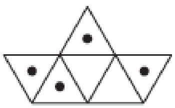
36. **(2008 - N1Q15 - 1^a fase)** Observe que no tabuleiro 4×4 as duas diagonais cortam 8 quadradinhos. Já no tabuleiro 5×5, as duas diagonais cortam 9 quadradinhos. Em qual tabuleiro as diagonais cortam 77 quadradinhos?

(a) 35×35
(b) 36×36
(c) 37×37
(d) 38×38
(e) 39×39



4 x 4 5 x 5

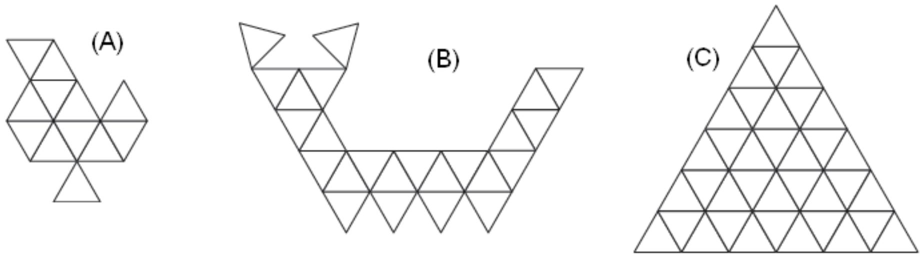
37. **(2008 - N1Q1 - 2^a fase)** Nesta questão todas as figuras são formadas por triângulos iguais. Veja como Chico Bento marcou $\frac{2}{3}$ dos triângulos da figura a seguir.



(A) Agora, marque você $\frac{3}{4}$ dos triângulos da figura (A). Quantos triângulos você marcou?

(B) Ajude Chico Bento marcando mais que $\frac{1}{4}$ e menos que $\frac{1}{3}$ dos triângulos da figura (B). Quantos triângulos você marcou?

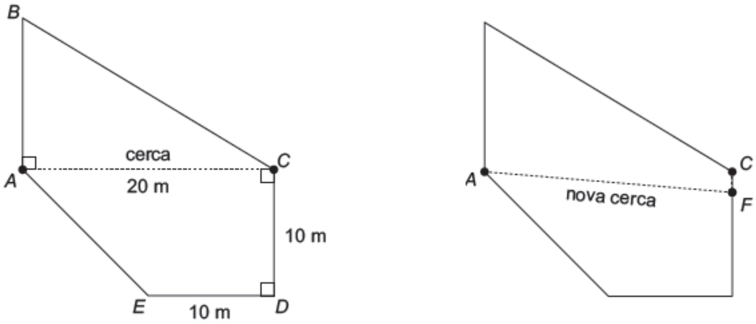
(C) Chico Bento marcou $\frac{7}{12}$ dos triângulos da figura (C) com a letra C e Doralina, por sua vez, marcou $\frac{3}{4}$ dos triângulos com a letra D, de modo que todos os triângulos ficaram marcados. O número de triângulos marcados com duas letras corresponde a qual fração do número total de triângulos?



38. **(2008 - N1Q2 - 2^a fase)** A figura da esquerda representa o terreno de Dona Idalina. Esse terreno é dividido em duas partes por uma cerca, representada pelo segmento AC. A parte triangular ABC tem área igual a 120 m^2.

(A) Qual é a área total do terreno?

(B) Dona Idalina quer fazer uma nova cerca, representada pelo segmento AF na figura da direta, de modo a dividir o terreno em duas partes de mesma área. Qual deve ser a distância CF?



OBMEP 2008 - Nível 2

39. **(2008 - N2Q15 - 1^a fase)** Numa folha quadrada de papel de 30 cm de lado, branca de um lado e cinza do outro, marcou-se um quadrado $ABCD$ em linhas pontilhadas, como na figura 1. A folha foi dobrada ao longo das linhas pontilhadas e o resultado está mostrado na figura 2, onde a parte cinza é um quadrado de área 144 cm^2. Qual é o comprimento do segmento PA?

(a) 21 cm
(b) 22 cm
(c) 23 cm
(d) 24 cm
(e) 25 cm

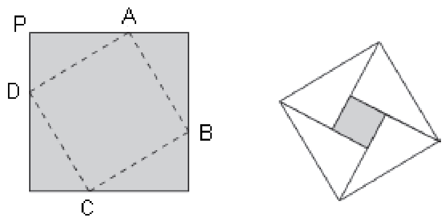
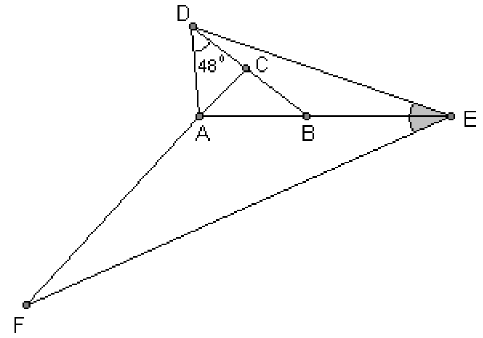


Figura 1 Figura 2

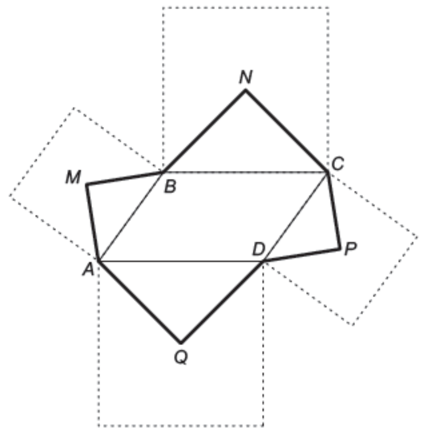
40. **(2008 - N2Q17 - 1ª fase)** Na figura o ângulo mede 48^o e os triângulos ACD, DBE e EAF são isósceles de bases AD, DE e EF, respectivamente. Quanto mede o ângulo $D\hat{E}F$?

(a) 36^o
(b) 40^o
(c) 42^o
(d) 48^o
(e) 58^o



41. **(2008 - N2Q5 - 2ª fase)** Na figura, $ABCD$ é um paralelogramo de área 20 cm^2 e lados medindo 4 cm e 6 cm. Os pontos M, N, P e Q são os centros dos quadrados construídos sobre os lados do paralelogramo.

(A) Calcule a área do polígono $AMBNCPDQ$.
(B) Mostre que os ângulos $M\hat{A}Q$ e $M\hat{B}N$ têm a mesma medida.
(C) Mostre que $MNPQ$ é um quadrado e calcule sua área.

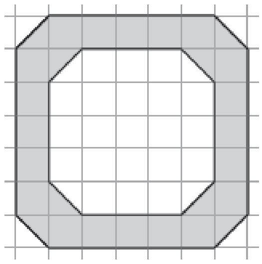


QUESTÕES DE GEOMETRIA - OBMEP - 2009

OBMEP 2009 - Nível 1

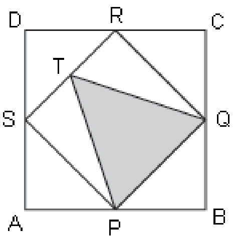
42. **(2009 - N1Q2 - 1^a fase)** O quadriculado da figura é feito com quadradinhos de 1 cm de lado. Qual é a área da região sombreada?

(a) 16 cm^2
(b) 18 cm^2
(c) 20 cm^2
(d) 24 cm^2
(e) 30 cm^2



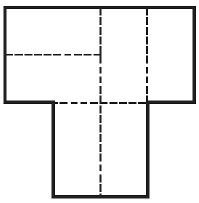
43. **(2009 - N1Q10 - 1^a fase)** Na figura, o quadrado $ABCD$ tem área 40 cm^2. Os pontos P, Q, R e S são pontos médios dos lados do quadrado e T é o ponto médio do segmento RS. Qual é a área do triângulo PQT?

(a) 10 cm^2
(b) 12 cm^2
(c) 14 cm^2
(d) 16 cm^2
(e) 18 cm^2



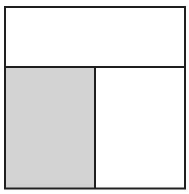
44. **(2009 - N1Q15 - 1^a fase)** A figura mostra um polígono em forma de T e uma maneira de dividi-lo em retângulos de lados 1 cm e 2 cm. De quantas maneiras distintas, incluindo a da figura, é possível fazer divisões desse tipo?

(a) 7
(b) 9
(c) 11
(d) 13
(e) 15

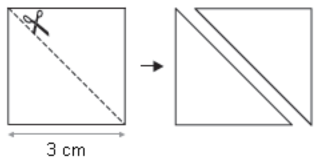


45. **(2009 - N1Q17 - 1^a fase)** A figura mostra um quadrado de lado 12 cm, dividido em três retângulos de mesma área. Qual é o perímetro do retângulo sombreado?

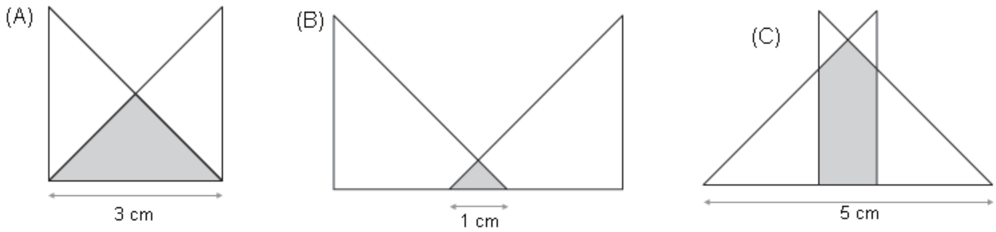
(a) 28 cm
(b) 26 cm
(c) 24 cm
(d) 22 cm
(e) 20 cm



46. **(2009 - N1Q2 - 2ª fase)** Um quadrado de lado 3 cm é cortado ao longo de uma diagonal em dois triângulos, como na figura.



Com esses triângulos formamos as figuras dos itens (A), (B) e (C), nas quais destacamos, em cinza, a região em que um triângulo fica sobre o outro. Em cada item, calcule a área da região cinza.



OBMEP 2009 - Nível 2

47. **(2009 - N2Q2 - 1ª fase)** A figura mostra cinco triângulos equiláteros. A que fração da área da figura corresponde a área sombreada?

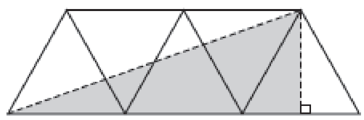
(a) $\frac{1}{3}$

(b) $\frac{2}{5}$

(c) $\frac{1}{2}$

(d) $\frac{3}{5}$

(e) $\frac{5}{8}$



48. **(2009 - N2Q8 - 1ª fase)** A figura mostra dois trechos de 300 km cada um percorridos por um avião. O primeiro trecho faz um ângulo de 18^o com a direção norte e o segundo, um ângulo de 44^o, também com a direção norte. Se o avião tivesse percorrido o trecho assinalado em pontilhado, qual seria o ângulo desse trecho com a direção norte?

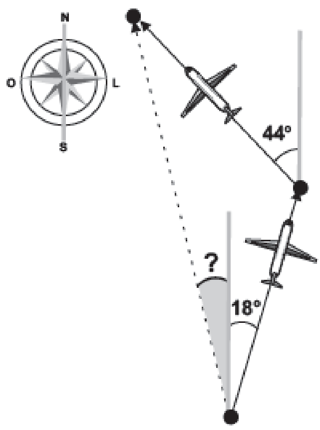
(a) 12^o

(b) 13^o

(c) 14^o

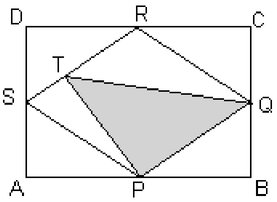
(d) 15^o

(e) 16^o



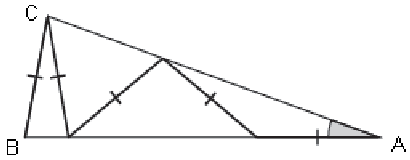
49. **(2009 - N2Q12 - 1^a fase)** Na figura o retângulo $ABCD$ tem área 40 cm^2. Os pontos P, Q, R e S são pontos médios dos lados do retângulo e T está no segmento RS. Qual é a área do triângulo PQT?

(a) 10 cm^2
(b) 12 cm^2
(c) 14 cm^2
(d) 16 cm^2
(e) 18 cm^2



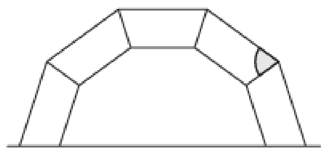
50. **(2009 - N2Q15 - 1^a fase)** No triângulo ABC temos $AB = AC$ e os cinco segmentos marcados têm todos a mesma medida. Qual é a medida do ângulo $B\hat{A}C$?

(a) 10^o
(b) 15^o
(c) 20^o
(d) 25^o
(e) 30^o



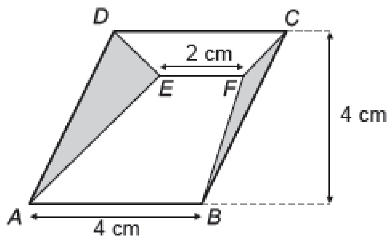
51. **(2009 - N2Q16 - 1^a fase)** A figura é formada por 5 trapézios isósceles iguais. Qual é a medida do ângulo indicado?

(a) 72^o
(b) 74^o
(c) 76^o
(d) 78^o
(e) 80^o

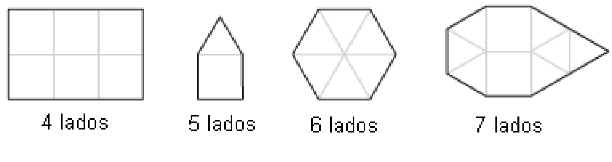


52. **(2009 - N2Q18 - 1^a fase)** Na figura, $ABCD$ é um paralelogramo e o segmento EF é paralelo a AB. Qual é a soma das áreas dos triângulos sombreados?

(a) 2 cm^2
(b) 4 cm^2
(c) 6 cm^2
(d) 8 cm^2
(e) 10 cm^2



53. **(2009 - N2Q3 - 2^a fase)** Um polígono convexo é **elegante** quando ele pode ser decomposto em triângulos equiláteros, quadrados ou ambos, todos com lados de mesmo comprimento. A seguir, mostramos alguns polígonos elegantes, indicando para cada um deles uma decomposição e o número de lados.



(A) Desenhe um polígono elegante de 8 lados, indicando uma decomposição.
(B) Quais são as possíveis medidas dos ângulos internos de um polígono elegante?
(C) Mostre que um polígono elegante não pode ter mais que 12 lados.
(D) Desenhe um polígono elegante de 12 lados, indicando uma decomposição.

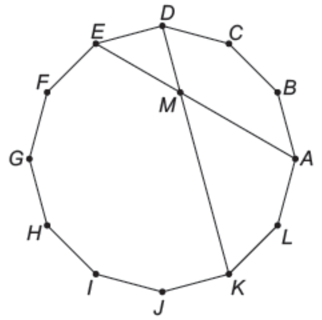
54. **(2009 - N2Q4 - 2^a fase)** O poligono $ABCDEFGHIJKL$ é regular e tem doze lados.

(A) Qual é a medida dos ângulos internos do polígono?

(B) O ponto M é a interseção dos segmentos AE e DK.
Quais são as medidas dos angulos $M\hat{D}E$ e $D\hat{M}E$?

(C) Qual é a medida do ângulo $C\hat{B}M$?

(D) Prove que os pontos B, M e F estão alinhados.

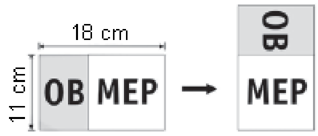


QUESTÕES DE GEOMETRIA - OBMEP - 2010

OBMEP 2010 - Nível 1

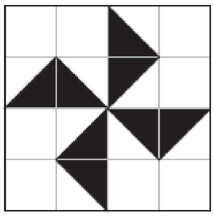
55. **(2010 - N1Q7 - 1ª fase)** Um cartão da OBMEP, medindo 11 cm por 18 cm, foi cortado para formar um novo cartão, como na figura. Qual é a área da parte com as letras O e B?

(a) 77 cm^2
(b) 88 cm^2
(c) 99 cm^2
(d) 125 cm^2
(e) 198 cm^2

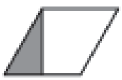


56. **(2010 - N1Q10 - 1ª fase)** A figura mostra um quadrado dividido em 16 quadradinhos iguais. A área em preto corresponde a que fração da área do quadrado?

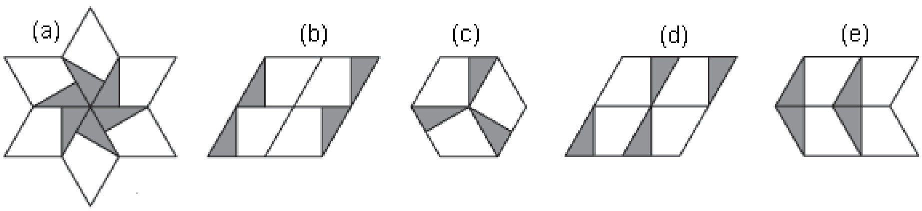
(a) $\frac{1}{2}$
(b) $\frac{1}{3}$
(c) $\frac{1}{4}$
(d) $\frac{1}{8}$
(e) $\frac{1}{16}$



57. **(2010 - N1Q12 - 1ª fase)** A figura mostra a superfície pintada de um azulejo em forma de losango.

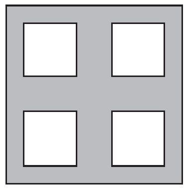


Dos cinco padrões abaixo, apenas um não pode ser montado com cópias desse azulejo. Qual é esse padrão?



58. **(2010 - N1Q14 - 1^a fase)** A figura mostra quatro quadrados iguais dentro de um quadrado maior. A área em cinza é 128 cm^2 e a área de cada quadrado menor é igual a 9% da área do quadrado maior. Qual é a área do quadrado maior?

(a) 128 cm^2
(b) 162 cm^2
(c) 200 cm^2
(d) 210 cm^2
(e) 240 cm^2

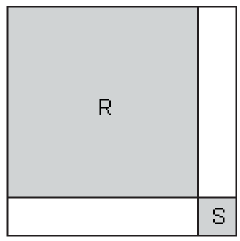


59. **(2010 - N1Q3 - 2^a fase)** A Professora Clotilde desenhou três figuras no quadro negro, todas com área igual a 108 cm^2.

(A) A primeira figura é um retângulo que tem um lado de comprimento igual a 12 cm. Qual é o perímetro desse retângulo?

(B) A segunda figura é um retângulo dividido em um retângulo branco e um quadrado cinzento de área igual a 36 cm^2, como na figura. Qual é o perímetro do retângulo branco?

(C) A terceira figura é um quadrado, que ela dividiu em dois retângulos brancos e dois quadrados cinzentos R e S, como na figura. O perímetro de um dos retângulos é três vezes o perímetro do quadrado S. Qual é a área do quadrado R?



60. **(2010 - N1Q5 - 2^a fase)** Marcelo cortou um quadrado de lado 6 cm em duas partes, como na figura 1. O corte foi feito em formato de escada, com segmentos de 1 cm paralelos aos lados do quadrado.

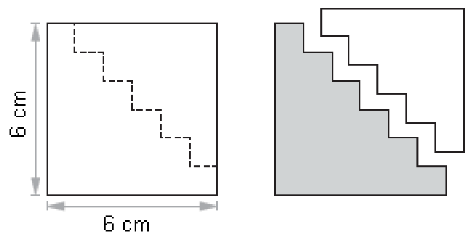


Figura 1

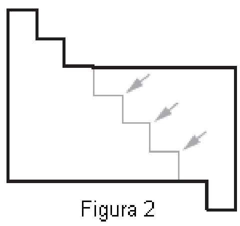


Figura 2

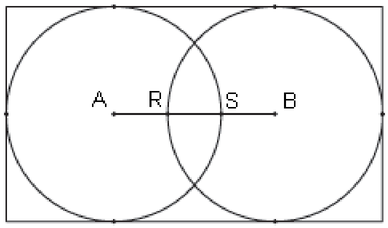
(A) Calcule o perímetro e a área da parte indicada com na figura 1.

(B) A figura 2 foi montada por Marcelo encaixando completamente três degraus (indicados com flechas) de uma das partes, na outra parte. Calcule o perímetro e a área dessa figura.

(C) Marcelo cortou da mesma maneira um quadrado de 87 cm de lado e montou uma figura encaixando 39 degraus de uma das partes na outra. Encontre o perímetro dessa nova figura.

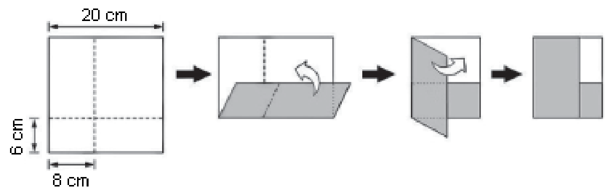
61. **(2010 - N2Q6 - 1ª fase)** Na figura as circunferências de centros A e B são tangentes aos lados do retângulo e têm diâmetros iguais a 4 cm. A distância entre os pontos R e S é 1 cm. Qual é o perímetro do retângulo?

(a) 16 cm
(b) 18 cm
(c) 20 cm
(d) 22 cm
(e) 24 cm



62. **(2010 - N2Q8 - 1ª fase)** Um quadrado de papel de 20 cm de lado, com a frente branca e o verso cinza, foi dobrado ao longo das linhas pontilhadas, como na figura. Qual é a área da parte branca que ficou visível?

(a) 18 cm^2
(b) 32 cm^2
(c) 36 cm^2
(d) 72 cm^2
(e) 84 cm^2

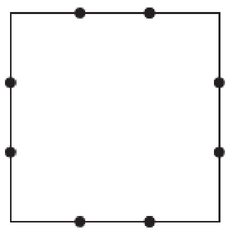


63. **(2010 - N2Q13 - 1ª fase)** A figura mostra um quadrado com suas diagonais e segmentos que unem os pontos médios de seus lados. A área em preto corresponde a que fração da área do quadrado?

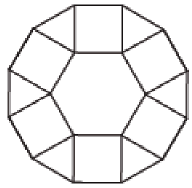
(a) $\frac{1}{2}$
(b) $\frac{2}{3}$
(c) $\frac{3}{4}$
(d) $\frac{3}{8}$
(e) $\frac{9}{16}$

64. **(2010 - N2Q17 - 1ª fase)** Os oito pontos destacados na figura dividem os lados do quadrado em três partes iguais. Quantos triângulos retângulos podem ser traçados com os três vértices nesses pontos?

(a) 8
(b) 12
(c) 16
(d) 24
(e) 32

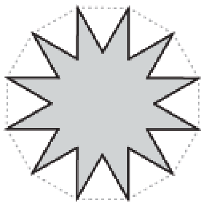


65. **(2010 - N2Q3 - 2^a fase)** A figura mostra um dodecágono regular decomposto em seis triângulos equiláteros, seis quadrados e um hexágono regular, todos com lados de mesma medida.

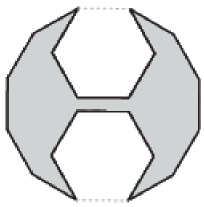


(A) Se cada triângulo da figura tem área igual a 1 cm^2, qual é a área do hexágono?

(B) A figura a seguir foi obtida retirando doze triângulos equiláteros de um dodecágono regular cujo lado mede 1 cm. Qual á a área dessa figura?



(C) A figura a seguir foi obtida retirando dois hexágonos regulares de um dodecágono regular cujo lado mede 1 cm. Qual é a área dessa figura?

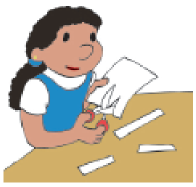


QUESTÕES DE GEOMETRIA - OBMEP - 2011

OBMEP 2011 - Nível 1

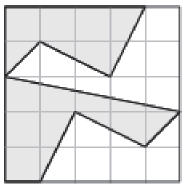
66. **(2011 - N1Q5 - 1^a fase)** Márcia cortou uma tira retangular de 2 cm de largura de cada um dos quatro lados de uma folha de papel medindo 12 cm por 20 cm. Qual é o perímetro do pedaço de papel que sobrou?

    (a) 48 cm
    (b) 50 cm
    (c) 52 cm
    (d) 54 cm
    (e) 56 cm



67. **(2011 - N1Q11 - 1^a fase)** Na figura, o lado de cada quadradinho mede 1 cm. Qual é a área da região cinza?

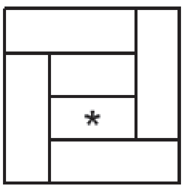
    (a) 10 cm^2
    (b) 12,5 cm^2
    (c) 14,5 cm^2
    (d) 16 cm^2
    (e) 18 cm^2



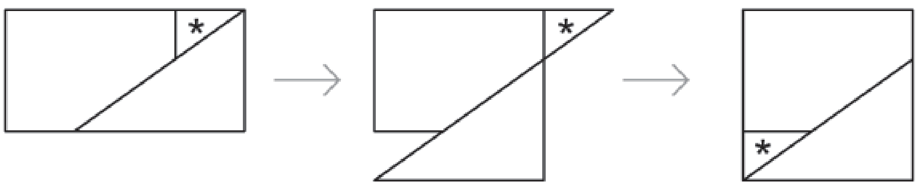
68. **(2011 - N1Q3 - 2^a fase)** Sara recortou três tiras retangulares diferentes de papel.

    (A) Ela recortou a primeira tira em três retângulos iguais, como na figura abaixo. Com esses retângulos, formou um quadrado de 36 cm^2 de área. Encontre as medidas dos lados dos retângulos que ela recortou.

    (B) Ela recortou a segunda tira em seis retângulos de mesma largura e com eles formou um quadrado de 36 cm^2 de área, como na figura. Encontre o perímetro e a área do retângulo indicado com $*$.



    (C) As medidas da terceira tira eram 4,5 cm e 2 cm. Sara recortou essa tira em três pedaços e com eles formou um quadrado, como na figura. Qual é a área do triângulo indicado com $*$?



69. **(2011 - N2Q4 - 1^a fase)** Na figura, os lados do quadrado foram divididos em oito partes iguais. Qual é a razão entre a área cinza e a área desse quadrado?

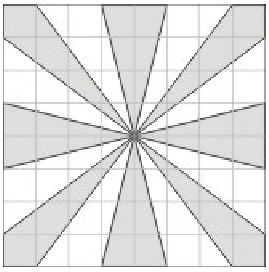
(a) $\frac{1}{2}$

(b) $\frac{3}{5}$

(c) $\frac{5}{8}$

(d) $\frac{3}{4}$

(e) 1



70. **(2011 - N2Q10 - 1^a fase)** Um triângulo equilátero e um hexágono regular têm o mesmo perímetro. A área do hexágono é 6 m^2. Qual é a área do triângulo?

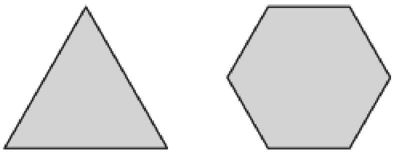
(a) 2 m^2

(b) 3 m^2

(c) 4 m^2

(d) 5 m^2

(e) 6 m^2



71. **(2011 - N2Q16 - 1^a fase)** Márcia cortou quatro tiras retangulares de mesma largura, cada uma de um dos lados de uma folha de papel medindo 30 cm por 50 cm. O perímetro do pedaço de papel que sobrou é 85% do perímetro da folha original. Qual é a largura das tiras?

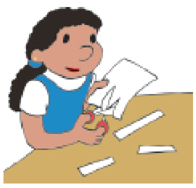
(a) 2 cm

(b) 2,5 cm

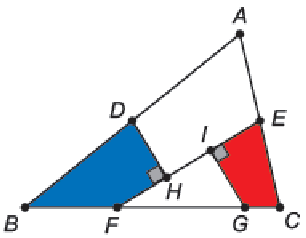
(c) 3 cm

(d) 3,2 cm

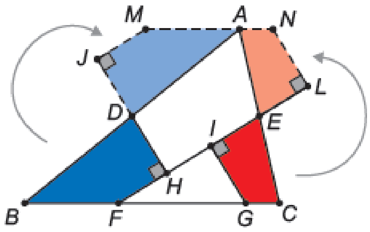
(e) 3,5 cm



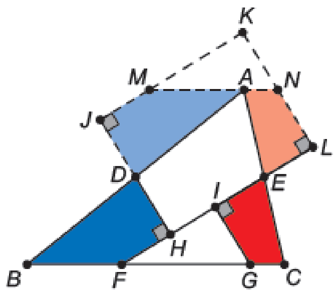
72. **(2011 - N2Q6 - 2ª fase)** Em todas as figuras desta questão, vemos um triângulo ABC dividido em quatro partes; nesses triângulos, D é ponto médio de AB, E é ponto médio de AC e FG mede $\frac{1}{2}BC$.



(A) Os quadriláteros $DJMA$ e $ELNA$ são obtidos girando de 180^o os quadriláteros $DHFB$ e $EIGC$ em torno de D e E, respectivamente. Explique por que os pontos M, A e N estão alinhados, ou seja, por que a medida do ângulo $M\hat{A}N$ é igual a 180^o.

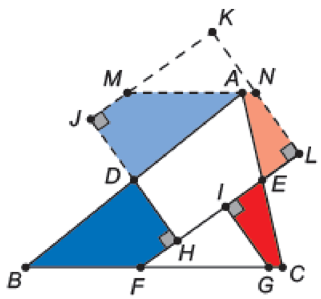


(B) Na figura, o ponto K é a interseção das retas JM e LN. Explique por que os triângulos FGI e MNK são congruentes.



(C) Os itens acima mostram que $HJKL$ é um retângulo formado com as quatro partes em que o triângulo ABC foi dividido. Agora mostre que $LH = EF$.

(D) Na figura o triângulo ABC tem área 9 e $HJKL$ é um quadrado. Calcule o comprimento de EF.

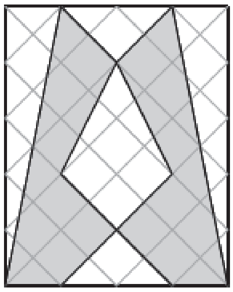


QUESTÕES DE GEOMETRIA - OBMEP - 2012

OBMEP 2012 - Nível 1

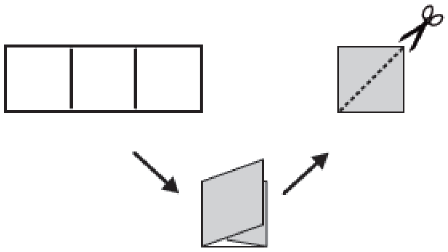
73. **(2012 - N1Q12 - 1^a fase)** O retângulo da figura, que foi recortado de uma folha de papel quadriculado, mede 4 *cm* de largura por 5 *cm* de altura. Qual é a área da região cinzenta?

(a) 10 cm^2
(b) 11 cm^2
(c) $12,5$ cm^2
(d) 13 cm^2
(e) $14,5$ cm^2



74. **(2012 - N1Q14 - 1^a fase)** Juliana cortou uma tira de papel de 4 *cm* por 12 *cm* e a dobrou do modo indicado na figura, obtendo assim um quadrado. Em seguida, ela cortou o quadrado diagonalmente, como mostra a figura. Com os pedaços obtidos, ela montou dois novos quadrados. Qual é a diferença entre as áreas desses quadrados?

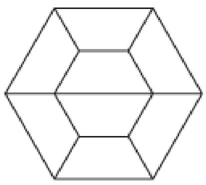
(a) 9 cm^2
(b) 12 cm^2
(c) 16 cm^2
(d) 18 cm^2
(e) 32 cm^2



OBMEP 2012 - Nível 2

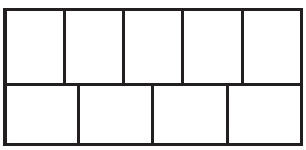
75. **(2012 - N2Q8 - 1^a fase)** A figura foi formada por oito trapézios isósceles idênticos, cuja base maior mede 10 *cm*. Qual é a medida, em centímetros, da base menor de cada um desses trapézios?

(a) 4
(b) 4,5
(c) 5
(d) 5,5
(e) 6



76. **(2012 - N2Q15 - 1^a fase)** A figura mostra um retângulo de área 720 cm^2, formado por nove retângulos menores e iguais. Qual é o perímetro, em centímetros, de um dos retângulos menores?

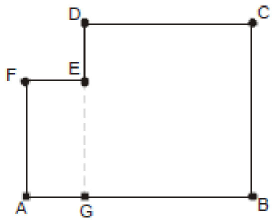
(a) 20
(b) 24
(c) 30
(d) 36
(e) 48



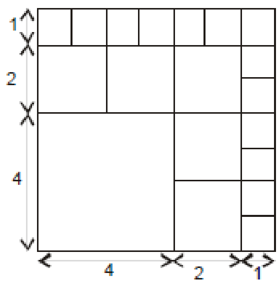
SOLUÇÕES DAS QUESTÕES DE GEOMETRIA - OBMEP - 2005

OBMEP 2005 - Nível 1

1. **(2005 - N1Q8 - 1ª fase)** Precisamos calcular o perímetro do polígono mostrado na figura, ou seja, queremos achar $AB + BC + CD + DE + EF + FA$. Nesta soma conhecemos as parcelas $AB = 80$, $BC = 60$, $CD = 60$ e $FA = 40$, e assim nosso problema é achar o comprimento de DE e EF. O ponto G na figura é construído prolongando-se o lado DE. Obtemos então os dois retângulos $AGEF$ e $BCDG$. Logo $EF = AB - CD = 80 - 60 = 20$ e $DE = BC - AF = 60 - 40 = 20$. Assim, o perímetro pedido é $80 + 60 + 60 + 20 + 20 + 40 = 280$ metros. Para justificar o raciocínio acima, notamos que $AGEF$ e $BCDG$ são retângulos porque dois quaisquer de seus lados consecutivos são perpendiculares. Como os lados opostos de um retângulo têm a mesma medida, podemos calcular EF e DE mais detalhadamente como $EF = AG = AB - BG = AB - CD = 80 - 60 = 20$ e $DE = DG - EG = BC - AF - 60 - 40 = 20$.



2. **(2005 - N1Q12 - 1ª fase)** Lembre que a área de um quadrado de lado L é igual a L^2. Deste modo, se conhecemos a área a de um quadrado então seu lado é $\sqrt{a}$. A área da folha cortada é a soma das áreas dos quadrados menores, que é $16 + 5 \cdot 4 + 13 \cdot 1 = 49\ cm^2$. Logo, antes de ser cortada, a folha tinha lado $\sqrt{49} = 7\ cm$. Outra solução deste problema é notar que os quadrados do enunciado podem ser agrupados de modo a formar um quadrado maior de lado 7, conforme indicado no desenho.



3. **(2005 - N1Q1 - 2ª fase)**

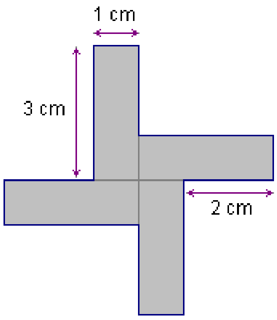
   (A) Solução 1. Ao juntar os retângulos, cada um "perdeu" um lado de 1 cm e mais 1 cm em um lado de comprimento 3 cm, ou seja, 2 cm no total. Como o perímetro de cada retângulo é 8 cm, o perímetro da figura é $4 \cdot 8 - 4 \cdot 2 = 24\ cm$.

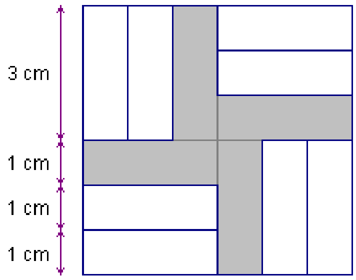
   Solução 2. A figura tem 4 lados de 3 cm, 4 lados de 2 cm e 4 lados de 1 cm, logo seu perímetro é $4 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 24\ cm$.

   (B) A resposta está na figura a seguir, onde vemos que basta juntar 8 retângulos à figura original para formar o quadrado.

   (C) Solução 1. Cada retângulo tem área igual a $3 \cdot 1 = 3\ cm^2$. Como o quadrado é composto de 12 retângulos, a sua área é igual a $12 \cdot 3 = 36\ cm^2$.

   Solução 2. Observando a figura, vemos que cada lado do quadrado tem comprimento igual a $3 \cdot 1 + 3 = 6\ cm$. Portanto, sua área é $6 \cdot 6 = 36\ cm^2$.





4. **(2005 - N1Q5 - 2^a fase)**

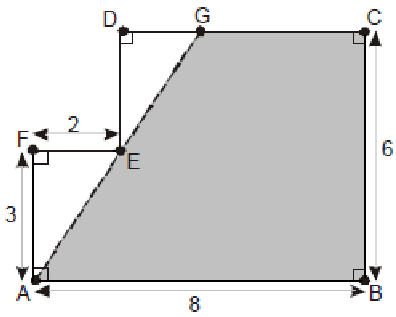
   (A) Um retângulo fica dividido em duas regiões de mesma área por sua diagonal. Logo os terrenos de Quindim, Visconde de Sabugosa e Cuca, juntos, têm área igual à metade da área do Sítio. Esses terrenos somam $4 + 7 + 12 = 23$ hectares. A outra metade do Sítio tem a mesma área e é igual à soma das áreas dos terrenos de Saci, Narizinho, Rabicó e da reserva florestal. Portanto $6 + 5 + 10 +$ (área da reserva) $= 23$ hectares, ou seja, a área da reserva é igual a $23 - 21 = 2$ ha.

   (B) Quindim e Cuca, juntos, possuem $4 + 7 = 11$ ha. Assim, gastaram $\dfrac{2420}{11} = 220$ reais por hectare. Como o terreno de Saci tem 6 ha, ele gastou $6 \cdot 220 = 1320$ reais.

OBMEP 2005 - Nível 2

5. **(2005 - N2Q15 - 1^a fase)** A soma dos três ângulos internos de um triângulo é igual a 180^o. Como o ângulo $\hat{A}$ do triângulo ABC mede 30^o, a soma dos ângulos $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$ é $180^o - 30^o = 150^o$. Por outro lado, como o triângulo é isósceles de base BC, os ângulos $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$ são iguais, logo cada um deles mede $150^o \div 2 = 75^o$. Como o triângulo BCD é isósceles de base BD, temos $B\hat{D}C = C\hat{B}D = 75^o$. O mesmo raciocínio usado acima mostra que $D\hat{C}B = 180^o - 2 \cdot 75^o = 30^o$. Segue que $D\hat{C}A = A\hat{C}B - D\hat{C}B = 75^o - 30^o = 45^o$.

6. **(2005 - N2Q19 - 1^a fase)** A área pedida é igual à área do polígono $ABCDEF$ menos a soma das áreas dos triângulos retângulos AEF e DEG. A área do triângulo AEF é $\dfrac{AF \times EF}{2} = \dfrac{3 \times 2}{2} = 3\ cm^2$.



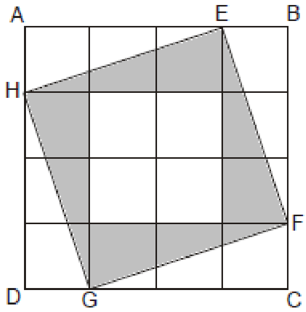
Vamos agora calcular a área do triângulo DEG. Para calcular DE prolongamos EF até o ponto H, obtendo assim os retângulos $ABHF$ e $CDEH$. Como os lados opostos de um retângulo são iguais, segue que $DE = CH = CB - BH = 6 - AF = 6 - 3 = 3$. Como os lados AF e DE são paralelos, então $E\hat{A}F = G\hat{E}D$. Além disso $AF = ED$, logo os triângulos AEF e DEG são congruentes (caso ALA) e portanto, têm a mesma área. A área do retângulo $ABHF$ é $AD \times AF = 8 \times 3 = 24\ cm^2$, e a do retângulo $CDEH$ é $DE \times CD = 3 \times (AB - EF) = 3 \times (8 - 2) = 18\ cm^2$. Portanto a área procurada é $24 + 18 - 2 \times 3 = 36\ cm^2$. Alternativamente, a área do trapézio $ABCG$, de altura $BC = 6$ e bases $AB = 8$ e $CG = CD - GD = 6 - 2 = 4$, pode ser calculada diretamente. Portanto a área é $\dfrac{8 + 4}{2} \times 6 = 36\ cm^2$.

7. **(2005 - N2Q4 - 2ª fase)**

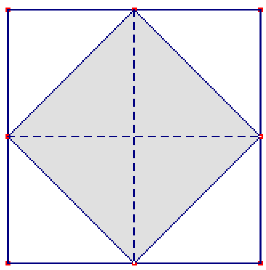
(A) A figura a seguir mostra que o quadrado $EFGH$ é formado por quatro triângulos iguais (AEH, EFB, FGC e GHD) e quatro quadradinhos. Cada um dos triângulos tem área igual à metade da área de três quadradinhos. Logo, a área do quadrado $EFGH$ é igual à área de $4 + 4 \times \frac{3}{2} = 4 + 6 = 10$ quadradinhos. Como a área do quadrado $ABCD$ é igual à área de 16 quadradinhos, a fração pedida é

$$\frac{\text{área do quadrado } EFGH}{\text{área do quadrado } ABCD} = \frac{\text{área de 10 quadradinho}}{\text{área de 16 quadradinho}} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}.$$

A área (em quadradinhos) do quadrado $EFGH$ também pode ser calculada subtraindo-se da área do quadrado $ABCD$ a área dos quatro triângulos externos ao quadrado $EFGH$. Cada um destes triângulos tem área igual à área de $\frac{3}{2}$ quadradinhos, donde a área do quadrado $EFGH$ é igual à área de $16 - 4 \times \frac{3}{2} = 16 - 6 = 10$ quadradinhos.



(B) Notamos primeiro que o quadrado sombreado tem metade da área do quadrado $EFGH$. Isto fica claro na figura a seguir, onde vemos que o quadrado $EFGH$ pode ser decomposto em oito triângulos iguais, quatro dos quais formam o quadrado sombreado. Usando o resultado do item (A), vemos que a área do quadrado $EFGH$ é $\frac{5}{8} = 50\ cm^2$, e segue que a área do quadrado sombreado é igual a $\frac{50}{2} = 25\ cm^2$. Como $25 = 5^2$ segue que o lado do quadrado sombreado mede $5\ cm$.



8. **(2005 - N2Q6 - 2ª fase)**

(A) A área da folha era igual a soma das áreas dos nove quadrados, que é

$$1^2 + 4^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 + 14^2 + 15^2 + 18^2 = 1056\ cm^2$$

(B) Sejam a e b as dimensões da folha, onde supomos $a \leq b$. Como a área de um retângulo é o produto de suas dimensões, temos $ab = 1056$. Além disso, como as medidas dos lados dos quadrados em que a folha foi cortada são números inteiros, segue que a e b devem ser números inteiros. Observamos, finalmente, que a e b devem ser maiores ou iguais a 18, pois um dos quadrados em que a folha foi cortada tem lado com esta medida.

Como a e b são divisores de 1056, a fatoração em fatores primos $1056 = 2^5 \times 3 \times 11$ nos mostra que a e b são da forma $2^x \times 3^y \times 11^z$, onde x, y e z são inteiros tais que $0 \leq x \leq 5$, $0 \leq y \leq 1$ e $0 \leq z \leq 1$. Lembrando que a e b são maiores que 18, obtemos as seguintes possibilidades:

a	b
$2 \times 11 = 22$	$2^4 \times 3 = 48$
$2^3 \times 3 = 24$	$2^2 \times 11 = 44$
$2^5 = 32$	$3 \times 11 = 33$

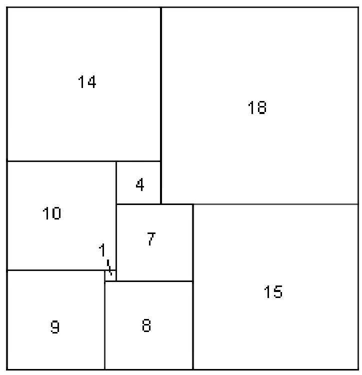
Temos agora que decidir quais destas possibilidades podem ocorrer como medidas da folha. Como o maior quadrado tem lado 18, que é menor que 22, 24 e 32, vemos que nenhum quadrado pode encostar nos dois lados de comprimento b da folha. Isto quer dizer que b pode ser expresso de duas maneiras como uma soma na qual as parcelas são medidas dos lados dos quadrados, sendo que (i) não há parcelas repetidas em nenhuma das duas expressões e (ii) não há parcelas comuns às duas expressões.

Este argumento mostra que $2b \leq 1+4+7+8+9+10+14+15+18$, ou seja, $2b \leq 86$. Logo $b \leq 43$ e a única possibilidade é $b = 33$. Segue que as dimensões da folha eram $a = 32$ e $b = 33$.

Existem outras maneiras de eliminar os pares $(22, 48)$ e $(24, 44)$, usando o argumento acima e mostrando, por exemplo, que não existem duas maneiras de escrever 22 e 24 como soma dos lados dos quadrados de duas maneiras com parcelas distintas e sem parcelas comuns.

Esta solução depende do fato de que, em qualquer decomposição de um retângulo em quadrados, os lados dos quadrados são necessariamente paralelos a um dos lados do retângulo. Um argumento intuitivo para demonstrar este fato consiste em selecionar um vértice do retângulo e observar que o quadrado ao qual este vértice pertence tem seus lados apoiados sobre os lados do retângulo. Qualquer quadrado que toca este primeiro quadrado (mesmo que em apenas um vértice) tem seus lados necessariamente paralelos aos lados do retângulo, pois caso contrário teríamos ângulos diferentes de 90^o ou 180^o na decomposição, e estes ângulos não podem ser preenchidos com quadrados.

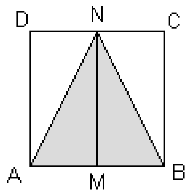
(C) A única possibilidade (a menos de rotações e simetrias) é mostrada abaixo:



SOLUÇÕES DAS QUESTÕES DE GEOMETRIA - OBMEP - 2006

OBMEP 2006 - Nível 1

9. **(2006 - N1Q3 - 1^a fase)** Na opção I o quadrado está dividido em quatro triângulos iguais, de modo que a área da região sombreada é a metade da área do quadrado. Na opção II, a diagonal divide o quadrado em dois triângulos iguais, e outra vez a área da região sombreada é metade da área do quadrado. Na opção III o triângulo sombreado tem área menor do que o triângulo sombreado da opção II, ou seja, menor que metade da área do quadrado. Na opção IV, observamos na figura a seguir que a perpendicular MN ao segmento AB divide o quadrado nos pares de triângulos iguais AMN, ADN e BMN, BCN; segue mais uma vez que a área da região sombreada é metade da área do quadrado. Finalmente, a área do triângulo sombreado na opção V é maior do que a área do triângulo sombreado da opção II, ou seja, é maior do que metade da área do quadrado. Comentário: observamos que na opção IV o ponto N não precisa ser o ponto médio do lado CD. De fato, o argumento usado acima para analisar essa opção não depende da posição de N ao longo de CD.



10. **(2006 - N1Q8 - 1^a fase)** Um quadrado de lado ℓ tem área ℓ^2. Os lados dos quadrados de áreas 25 cm^2 e 9 cm^2 medem respectivamente, 5 cm e 3 cm. Segue que o lado do quadrado menor mede $5-3=2$ cm. O contorno da figura é formado por 3 lados de 5 cm, 2 lados de 3 cm, 2 lados de 2 cm e um segmento que é a diferença entre um lado de 3 cm e outro de 2 cm, donde o perímetro é $3\times 5+2\times 3+2\times 2+(3-2)=26$ cm.

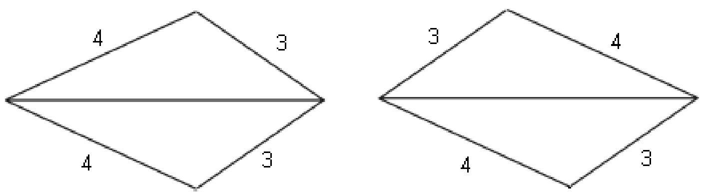
11. **(2006 - N1Q14 - 1^a fase)** A região sombreada é formada pelo quadrado central, quatro retângulos cada um com metade da área de um quadrado e quatro triângulos cada um com um oitavo da área de um quadrado. Logo a área da região sombreada é $1+4\times\dfrac{1}{2}+4\times\dfrac{1}{8}=3,5$ cm^2.

12. **(2006 - N1Q1 - 2^a fase)**

    (A) Na figura I, verificamos que as medidas de dois lados que não foram unidos são 4 cm e 6 cm. Como os dois lados unidos são do mesmo tamanho, eles não podem medir nem 4 cm nem 6 cm, logo medem 3 cm. Na figura II, o triângulo que está mais acima tem um lado livre de 4 cm e claramente o lado que foi unido ao triângulo de baixo é menor do que o lado livre não identificado. Portanto, o lado do triângulo superior que foi unido ao de baixo mede 3 cm. No triângulo de baixo, claramente o maior lado foi unido ao lado do triângulo de cima. Esse lado mede 6 cm.

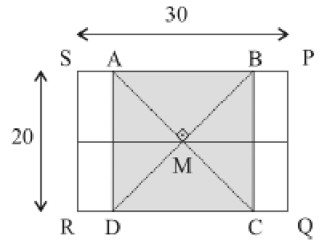
    (B) Os lados de medida 3 cm não fazem parte do perímetro da figura I. Logo o perímetro da figura I é igual a $2\cdot(4+6)=20$ cm. O lado de 3 cm de um triângulo e o pedaço de 3 cm do lado maior do outro triângulo não fazem parte do perímetro da figura II. Logo o perímetro da figura II é igual a $6+4+3+4+(6-3)=20$ cm.

    (C) O perímetro de uma figura obtida quando se unem lados dos dois triângulos é igual à soma dos perímetros dos dois triângulos menos duas vezes o comprimento do menor dos lados que foram unidos. Assim, o perímetro da figura é o menor possível quando unirmos os dois lados de 6 cm. Nesse caso o perímetro é igual a $2\cdot(3+4+6)-2\cdot 6=26-12=14$ cm. As duas figuras abaixo têm esse perímetro mínimo.



13. **(2006 - N1Q4 - 2^a fase)**

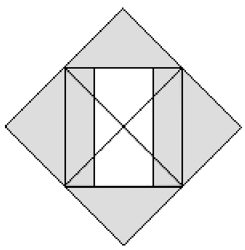
(A) Vamos representar a folha original pelo retângulo $PQRS$ na figura a seguir. Seja M o ponto onde os segmentos AC e BD se encontram.



Como o centro do retângulo é o centro de simetria da figura, concluímos que $AM = MC = \frac{1}{2}AC$ e, por outro lado, sabemos que $AC = BD$, donde $AM = BM = CM = DM$. Como os ângulos com vértice em M são todos retos, os triângulos AMB, BMC, CMD e DAM são iguais; em particular $AB = BC = CD = DA$ e os ângulos desses triângulos em A, B, C e D são iguais, donde $ABCD$ é um quadrado (alternativamente, podemos notar que $ABCD$ é um quadrilátero cujas diagonais são iguais, se cortam ao meio e são perpendiculares, donde $ABCD$ é um quadrado). Logo $BPCQ$ é um retângulo, e assim $BC = PQ = 20\ cm$, donde $AB = 20\ cm$.

(B) A área de cada um dos triângulos AMB, BMC, CMD e DAM é igual a $\frac{1}{4}$ da área do quadrado $ABCD$, que é $20 \times 20 = 400\ cm^2$; logo a área de um desses triângulos é $\frac{400}{4} = 100\ cm^2$. Como são os dois pedaços de cinco lados iguais, eles têm a mesma área. A folha original tem área igual a $20 \times 30 = 600\ cm^2$, e se subtrairmos dessa área as áreas dos dois pedaços triangulares ABM e DMC, restará a área dos dois pedaços de cinco lados. Portanto, a área de cada pedaço de cinco lados é igual a $\frac{600 - 2 \times 100}{2} = \frac{600 - 200}{2} = \frac{400}{2} = 200\ cm^2$.

(C) O quadrado formado pelos quatro pedaços e o buraco tem área igual a 8 vezes a área de cada pedaço triangular, conforme mostrado na figura a seguir. Portanto, sua área é igual a $8 \times 100 = 800\ cm^2$. Como a soma das áreas das quatro peças é igual à área da folha original, ou seja, $600\ cm^2$, concluímos que a área do buraco é igual a $800 - 600 = 200\ cm^2$.



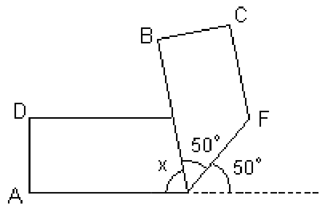
Alternativamente, o buraco é um retângulo cuja altura é igual à altura da folha original, ou seja, $20\ cm$. Seu comprimento é a diferença entre o comprimento da folha original e o segmento AB, ou seja, $30 - 20 = 10\ cm$. Portanto, a área do buraco é $20 \times 10 = 200\ cm^2$.

14. **(2006 - N2Q1 - 1^a fase)** Pela simetria da figura, vemos que para cada região sombreada existe uma igual em branco. Logo, a parte sombreada tem metade da área do retângulo.

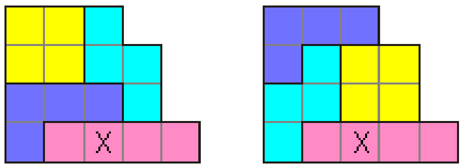
15. **(2006 - N2Q4 - 1^a fase)** A área do triângulo BEF é $\dfrac{BE \times BC}{2} = \dfrac{3 \times 4}{2} = 6\ cm^2$ e a área do retângulo $ABCD$ é $AB \times CD = 6 \times 4 = 24\ cm^2$. Logo, a área da parte sombreada é

$$\text{área do retângulo } ABCD \ - \ \text{área do triângulo } BEF \ = \ 24 \ - \ 6 \ = \ 18\ cm^2 \ .$$

16. **(2006 - N2Q13 - 1^a fase)** Observando a figura da fita dobrada vemos que $x + 50^o + 50^o = 180^o$, donde $x = 80^o$.

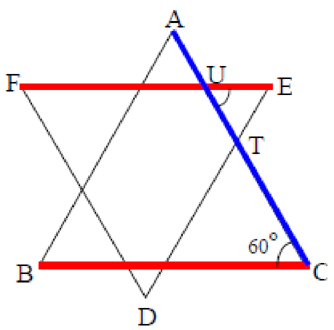


17. **(2006 - N2Q19 - 1^a fase)** Por tentativa e erro vemos que há apenas duas maneiras de cobrir a figura com quatro peças, conforme mostrado abaixo. Em ambas, a casa com o X é coberta pela peça I.



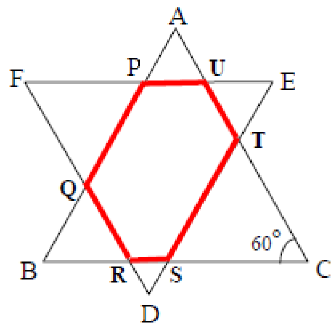
18. **(2006 - N2Q4 - 2^a fase)**

(A) Como o triângulo ABC é equilátero, todos seus ângulos internos medem 60^o. Como BC e EF são paralelos e cortados pela transversal AC, os ângulos $E\hat{U}T$ e $A\hat{C}B$ são alternos internos, donde $E\hat{U}T = A\hat{C}B = 60^o$.

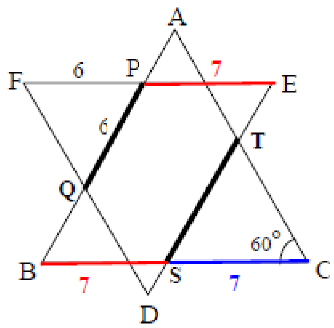


(B) Como DEF é um triângulo equilátero, temo que $U\hat{E}T = 60^o$, e do item (A) sabemos que $E\hat{U}T = 60^o$. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180^o segue que $U\hat{T}E = 180^o - 60^o - 60^o - 60^o$. Logo o triângulo EUT é equilátero, porque todos os seus ângulos internos medem 60^o. Da mesma forma, podemos concluir que todos os outros triângulos da figura são equiláteros. Dessse modo, temos $QP = FP$, $UT = UE$, $TS = CS$ e $RQ = RB$. Segue que o perímetro de $PQRSTU$ é

$$QP+PU+UT+TS+SR+RQ = (FP+PU+UE)+(CS+SR+RB) = FE+CB = 13+14 = 27\ cm$$



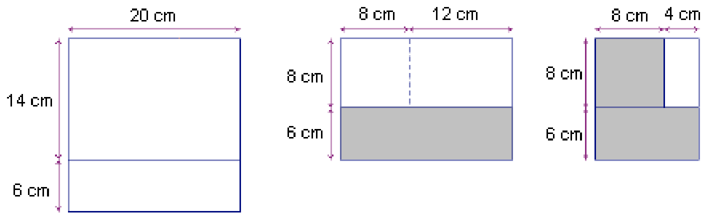
(C) De $PQ = 6\ cm$ segue que $FP = 6\ cm$, pois o triângulo QFP é equilátero, e concluímos que $PE = FE - FP = 13 - 6 = 7\ cm$. Como BC é paralelo a DE, o quadrilátero $PESB$ é um paralelogramo, donde $BS = PE = 7\ cm$. Finalmente, temos $SC = BC - BS = 14 - 7 = 7\ cm$. Logo $ST = SC = 7\ cm$, pois o triângulo TCS é equilátero.



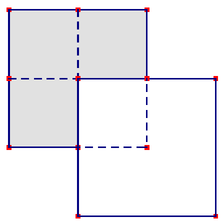
SOLUÇÕES DAS QUESTÕES DE GEOMETRIA - OBMEP - 2007

OBMEP 2007 - Nível 1

19. **(2007 - N1Q10 - 1^a fase)** A figura ilustra a seqüência de dobras e as medidas dos segmentos determinados por elas. Após a 1^a dobra, a parte branca visível é um retângulo de 20 cm por 8 cm. Após dobrar a 2^a vez, a parte branca visível é um retângulo de 4 cm por 8 cm. A área desse retângulo é $4 \times 8 = 32\ cm^2$. (comparar com a questão OBMEP - 2010 - N2Q8 - 1^a fase)



20. **(2007 - N1Q11 - 1^a fase)** A área de cada quadrado é $10 \times 10 = 100\ cm^2$. Na figura a seguir podemos ver que a área da parte sombreada é $\frac{3}{4}$ da área do quadrado, ou seja, é igual a $\frac{3}{4}100 = 75\ cm^2$. A figura II do enunciado é formada por cinco figuras iguais a essa parte sombreada e mais um quadrado, logo sua área é $5 \times 75 + 100 = 475\ cm^2$.



21. **(2007 - N1Q16 - 1^a fase)** Na figura I mostramos o retângulo antes de ser cortado e, na figura II, o modo como as peças se encaixam para formar o quadrado.

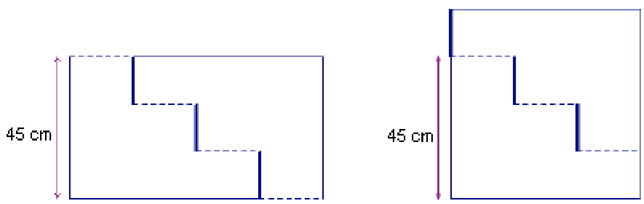


Figura I

Figura II

O encaixe mostra que os segmentos pontilhados são todos iguais, assim como os segmentos em traço mais grosso. Observando a figura I, vemos então que

$$3 \times (\text{comprimento de um segmento em traço grosso}) = 45\ cm,$$

donde o comprimento de um desses segmentos é $45 \div 3 = 15\ cm$. Da figura II temos

$$\text{lado do quadrado} = 45 + \text{comprimento do segmento em traço grosso} = 60\ cm.$$

Por outro lado, ainda observando a figura II, vemos que

$$3 \times (\text{comprimento de um segmento pontilhado}) = 60\ cm,$$

donde o comprimento de um desses segmentos é $60 \div 3 = 20\ cm$. Finalmente, voltando à figura I, temos

$$4 \times (\text{comprimento de um segmento em traço pontilhado}) = \text{base do retângulo},$$

e segue que a base do retângulo mede $4 \times 20 = 80\ cm$.

22. **(2007 - N1Q1 - 2^a fase)**

    (A) A área do terreno do João Grilo é igual à soma das áreas da horta, do galinheiro e do chiqueiro, ou seja, é igual a $30 + 100 + 50 = 180\ m^2$.

    (B) A área de um quadrado de lado a é a^2 e a área de um retângulo de lados a e b é ab. Como a horta é quadrada e tem $100\ m^2$ de área, concluímos que cada lado da horta mede $10\ m$, pois $100 = 10^2$. Assim, o lado comum do galinheiro e da horta mede $10\ m$. Como a área do galinheiro é igual a $50\ m^2$, a medida de outro lado é $5\ m$, pois $10 \times 5 = 50$. Logo as medidas dos lados do galinheiro são $10\ m$ e $5\ m$.

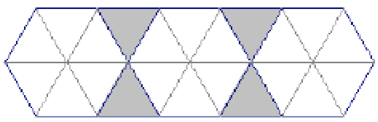
    (C) O chiqueiro tem um lado formado por um lado da horta e um dos lados menores do galinheiro. Logo esse lado mede $10 + 5 = 15\ m$; como a área do chiqueiro é $30\ m^2$, a medida de outro lado é $2\ m$, pois $15 \times 2 = 30\ m$. Observando a planta e a legenda indicando o número de fios de cada um dos lados cercados, concluímos que João Grilo usou

    - lados em traço grosso: $2 \times 4 \times 10 = 80$ metros de arame.
    - lados em traço fino: $2 \times 3 \times 10\ +\ 1 \times 3 \times 5 = 60 + 15 = 75$ metros de arame.
    - lados em pontilhado: $2 \times 2 \times (2 + 15) = 68$ metros de arame.

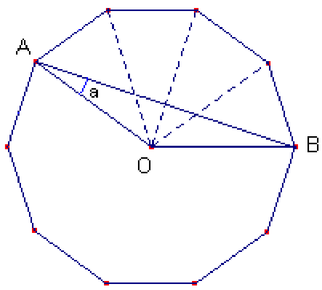
    Totalizando $80 + 75 + 68 = 223$ metros de arame.

OBMEP 2007 - Nível 2

23. **(2007 - N2Q3 - 1^a fase)** A faixa pode ser decomposta em 22 triângulos equiláteros congruentes aos triângulos sombreados, como mostra a figura. Logo, a área da parte sombreada é $\frac{4}{22}$ da área total, ou seja, $\frac{4}{22} \times 154 = 28\ cm^2$.



24. **(2007 - N2Q12 - 1^a fase)** O triângulo AOB é isósceles pois os lados OA e OB são iguais. Logo, os ângulos $O\hat{A}B$ e $O\hat{B}A$ também são iguais, ou seja, ambos têm medida a. Notamos agora que o ângulo central $A\hat{O}B$ mede $\frac{4}{10} \times 360^o = 144^o$. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo vale 180^o, segue que $2a + 144^o = 180^o$. Logo $a = \frac{180^o - 144^o}{2} = \frac{36^o}{2} = 18^o$.



25. **(2007 - N2Q13 - 1ª fase)** Observe as figuras a seguir.

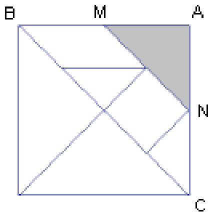


Figura I

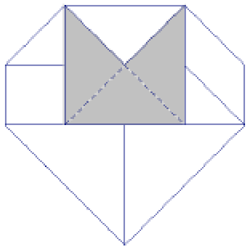


Figura II

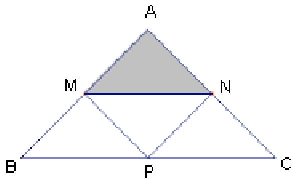
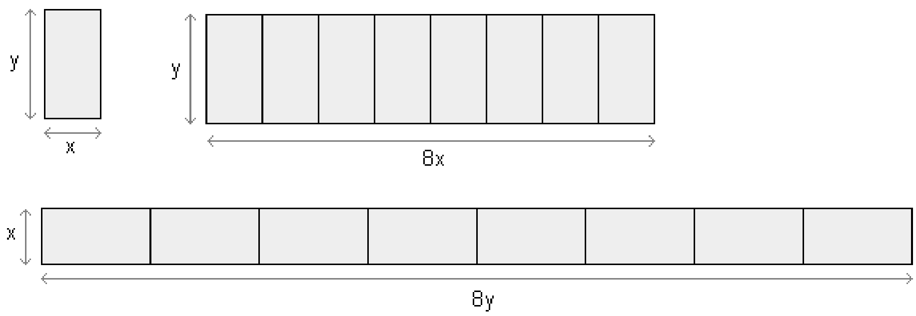


Figura III

A descrição das peças da figura I implica que os pontos M e N são pontos médios dos lados AB e AC. A figura III, onde P é o ponto médio de BC, mostra que a área do triângulo AMN é igual à quarta parte da área do triângulo ABC, que por sua vez tem área igual a metade da área do quadrado. Logo área$(AMN) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{2} \times 40 = 5\ cm^2$. A figura II mostra que o buraco consiste de três triângulos iguais ao triângulo AMN. Logo sua área é $3 \times 5 = 15\ cm^2$.

26. **(2007 - N2Q14 - 1ª fase)** A figura mostra um cartão com suas dimensões em centímetros indicadas por x e y, bem como os retângulos que Juliana pode fazer.



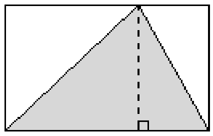
Segue que $2(8x+y) = 236$ e $2(x+8y) = 376$. Temos então $8x + y = 118$, donde $y = 118 - 8x$. Da segunda equação segue $x + 8y = 188$. Substituindo o valor de y temos $x + 8(118 - 8x) = x + 944 - 64x = 944 - 63x = 188$. Logo $63x = 756$, donde $x = 12$ e então $y = 118 - 8x = 118 - 96 = 22$. Portanto a área do cartão é $12 \times 22 = 264\ cm^2$.

27. **(2007 - N2Q15 - 1ª fase)** Usando o lado ℓ de um dos quadradinhos do quadriculado como unidade de comprimento, a contagem direta na figura nos dá as áreas e perimetros dos polígonos, conforme a tabela abaixo, em que o perímetro tem unidade ℓ e a área tem unidade ℓ^2.

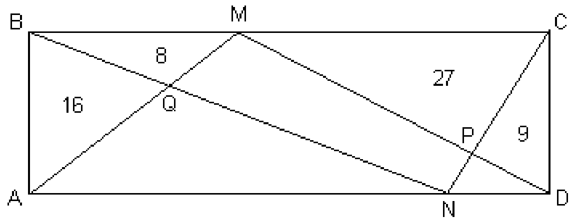
polígono	perímetro	área
I	20	$5 \times 5 = 25$
II	20	$25 - 3 = 22$
III	30	$25 - 7 = 18$

Desse modo, a correspondencia entre polígonos e pontos no plano cartesiano é I $\to$ $(20, 25)$, II $\to$ $(20, 22)$ e III $\to$ $(30, 18)$. Os pontos correspondentes a I e II tem a mesma abscissa (perímetro) logo estão na mesma vertical no plano cartesiano; como o ponto correspondente a I tem ordenada (área) maior, ele é o que esta mais acima. Logo I $\to$ C e II $\to$ A. Resta III $\to$ B.

28. **(2007 - N2Q2 - 2^a fase)** Lembramos que a área de um triângulo é dada pela fórmula $\dfrac{base \times altura}{2}$ e a área do retângulo por $base \times altura$. Na situação geral da figura a seguir, segue que a área do triângulo sombreado é metade da área do retângulo, pois ambos têm a mesma base e a mesma altura. Logo a soma das áreas dos dois triângulos brancos também é metade da área do retângulo, ou seja, igual à área do triângulo sombreado.



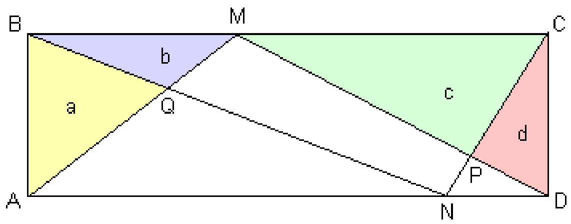
(A) Pelo visto acima, temos área(AMD) = área(ABM) + área$(MDC) = 16 + 8 + 27 + 9 = 60\ cm^2$.



(B) Como área(AMD) = área(BNC), temos área(AQN)+área(NDP) = área(AMD)−área$(MNPQ)$ = área(BNC) − área$(MNPQ)$ = área(BQM) + área$(MPC) = 8 + 27 = 35\ cm^2$.

(C) Temos área$(MQNP)$ = área(BNC) − área(BQM) − área$(MPC) = 60 - 8 - 27 = 25\ cm^2$.

Observação: As áreas dos triângulos nesse problema não foram escolhidas ao acaso. Fica como exercício mostrar que é possível construir a figura a seguir, onde a, b, c e d representam as áreas dos correspondentes triângulos sombreados, se e somente se, $\dfrac{a^2}{b} + \dfrac{d^2}{c} = b + c$.



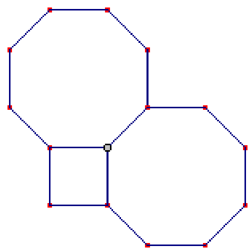
Solução alternativa para os itens (b) e (c): Podemos resolver primeiro o item (c), como segue. Como área(AMD) = área$(BNC) = 60\ cm^2$, temos área$(MNPQ)$ = área$(BNC) - 27 - 8 = 25\ cm^2$, obtendo então para o item (b) área(AQN) + área(NDP) = área(AMD) − área$(MNPQ) = 60 - 25 = 35\ cm^2$.

29. **(2007 - N2Q4 - 2^a fase)**

(A) Para completar a primeira coluna da tabela basta substituir os valores $n = 5, 6, 8$ na fórmula $(n-2) \times 180^o$. Para completar a segunda coluna, basta dividir os valores da primeira coluna pelo valor correspondente de n, ou seja, calcular $\dfrac{(n-2)\times 180^o}{n}$. A justificativa para essa expressão é que polígono de n lados tem n ângulos internos iguais, cuja soma é $(n-2) \times 180^o$. A tabela completa é dada abaixo.

n	soma dos ângulos internos	ângulo interno
3	180^o	60^o
4	360^o	90^o
5	540^o	108^o
6	720^o	120^o
8	1080^o	135^o

(B) O ângulo interno de um quadrado é 90^o e o de um octógono regular é 135^o. Para que alguns polígonos regulares se encaixem, a soma de seus ângulos internos deve ser 360^o. Como $90^o + 135^o + 135^o = 360^o$, segue que um quadrado e dois octógonos regulares se encaixam.



(C) O ângulo interno de um triângulo equilátero é 60^o e o de um heptágono regular é $\frac{7-2}{7} \times 180^o = \frac{5}{7} \times 180^o$. Seja n o número de lados do terceiro polígono; o ângulo interno desse polígono é então $\frac{n-2}{n} \times 180^o$. Como os três polígonos se encaixam, temos

$$60^o \; + \; \frac{5}{7} \times 180^o \; + \; \frac{n-2}{n} \times 180^o = 360^o.$$

Logo $1 \; + \; \frac{5}{7} \times 3 \; + \; \frac{n-2}{n} \times 3 = 6$. Isto implica que $7n + 15n + 21(n-2) = 42n$, donde $n = 42$.

SOLUÇÕES DAS QUESTÕES DE GEOMETRIA - OBMEP - 2008

OBMEP 2008 - Nível 1

30. **(2008 - N1Q2 - 1^a fase)** Todas as figuras são formadas por 16 partes iguais e $\frac{5}{8} = \frac{10}{16}$. Logo, a única figura que serve é a que tem 10 partes de cor cinza. (alternativa D)

31. **(2008 - N1Q7 - 1^a fase)** A figura dada no enunciado ilustra o seguinte fato: o número de retângulos que podem ser construídos com 12 quadradinhos corresponde ao número de maneiras de escrever 12 como produto de dois números naturais, que são três: 1×12, 2×6 e 3×4. Como podemos escrever 60 como produto de dois números de exatamente seis formas distintas, a saber, 1×60, 2×30, 3×20, 4×15, 5×12 e 6×10, segue que podemos construir 6 retângulos diferentes com 60 quadradinhos cada um.

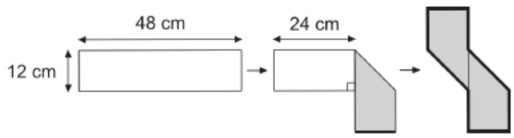
32. **(2008 - N1Q8 - 1^a fase)** Como a área de um quadrado de lado a é a^2 e o quadrado tem área 36 cm^2, segue que seu lado mede 6 cm. Temos que

    - $\frac{3}{8}$ área $\rightarrow$ 36 cm^2.
    - $\frac{1}{8}$ área $\rightarrow$ $36 \div 3 = 12$ cm^2.
    - 1 área $= \frac{8}{8}$ área $\rightarrow$ $12 \times 8 = 96$ cm^2.

    Logo, o retângulo tem 96 cm^2 de área e sua largura AD mede 6 cm, portanto $6 \times CD = 96$ e segue que $CD = 96 \div 6 = 16$ cm. Logo o perímetro do retângulo é $2 \times (6 + 16) = 44$ cm.

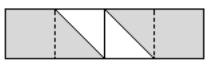
    Outra solução: Como a área de um quadrado de lado a é a^2 e o quadrado tem área 36 cm^2, segue que seu lado mede 6 cm, que deve ser igual a $\frac{3}{8}$ do lado AB. Logo AB mede $\frac{8}{3} \times 6 = 16$ cm. Segue que as dimensões do retângulo são 16 cm e 6 cm, e seu perímetro é $2 \times (6 + 16) = 44$ cm.

33. **(2008 - N1Q11 - 1^a fase)** Na figura dada, a parte cinza obtida depois da primeira dobradura pode ser dividida em duas partes: um quadrado de lado 12 cm e um triângulo de área igual a metade da área do quadrado. A área do quadrado é $12 \times 12 = 144$ cm^2, logo a área do triângulo é $\frac{144}{2} = 72$ cm^2. Assim, a área dessa parte cinza é $144 + 72 = 216$ cm^2. Depois da segunda dobradura, obtemos duas partes cinzas iguais, cuja área total é $2 \times 216 = 432$ cm^2.

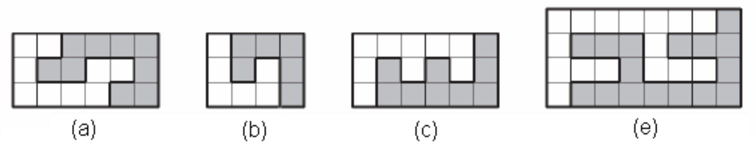
    

    Outra solução: note que a área do polígono formado pelo papel dobrado é igual à área original da tira menos as áreas das partes que se sobrepõem. Após a primeira dobra, a parte sobreposta é representada pelo triângulo mais escuro, e depois da segunda dobra forma-se outra parte sobreposta igual à primeira. Juntas essas partes têm área igual à de um quadrado de lado 12 cm. Conseqüentemente, a área do polígono é igual a $(12 \times 48) - (12 \times 12) = 576 - 144 = 432$ cm^2.

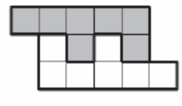
    Outra solução: observamos que a área do polígono formado pela cartolina dobrada é igual à área em cinza na figura a seguir (dois quadrados e dois triângulos) que representa $\frac{6}{8}$ da área da tira retangular. Logo, a área pedida é: $\frac{6}{8} \times (12 \times 48) = 6 \times 12 \times 6 = 432$ cm^2.

34. **(2008 - N1Q12 - 1^a fase)** Mostramos a seguir como formar retângulos com duas cópias de cada uma das peças das alternativas (a), (b), (c) e (e).



O único caso em que isso não é possível é o da alternativa (d), conforme indicado a seguir.



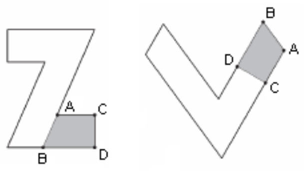
35. **(2008 - N1Q14 - 1^a fase)** As letras **V** e **Z** têm a mesma área porque são formadas com as mesmas peças de cartolina, logo podemos eliminar as opções (b) e (c). Para comparar os perímetros, notamos primeiro que em ambas as figuras o segmento AB é maior que o segmento CD. Ao juntar as peças para formar a letra **Z**, as peças branca e cinza se juntam ao longo de AB, e assim

- perímetro do **Z** = perímetro da peça branca + perímetro da peça cinza - 2 $\times$ (comprimento de AB).

Do mesmo modo, vemos que

- perímetro do **V** = perímetro da peça branca + perímetro da peça cinza - 2 $\times$ (comprimento de CD),

donde concluímos que o perímetro do **Z** é menor que o perímetro do **V**.



36. **(2008 - N1Q15 - 1^a fase)** Num tabuleiro quadrado $n \times n$, cada diagonal corta n quadradinhos. Por causa da simetria dos tabuleiros quadrados, temos dois casos:

(i) se n é par (por exemplo, no tabuleiro 4×4) as duas diagonais se cortam num vértice (o vértice central). Nesse caso as duas diagonais cortam exatamente $n + n = 2n$ quadradinhos.

(ii) se n é ímpar (por exemplo, no tabuleiro 5×5) as duas diagonais se cortam no centro de um quadradinho (o quadradinho central). Nesse caso o quadradinho central é cortado duas vezes, uma por cada diagonal. Logo, as duas diagonais cortam no total $n + n - 1 = 2n - 1$ quadradinhos.

Se o número de quadradinhos cortados pelas diagonais em um tabuleiro $n \times n$ é 77, temos duas possibilidades. A primeira é n par, mas aqui teríamos $77 = 2n$, o que não pode acontecer pois 77 é ímpar. Resta então a possibilidade n ímpar, quando temos $77 = 2n - 1$. Logo $n = 39$ e o nosso tabuleiro é 39×39.

37. **(2008 - N1Q1 - 2^a fase)**

(A) A figura é composta de 12 triângulos iguais. Como $\frac{3}{4}$ de 12 é $\frac{3}{4} \times 12 = 9$, devemos marcar 9 triângulos quaisquer.

(B) A figura é composta de 24 triângulos iguais. Como $\frac{1}{4}$ de 24 é igual 6 e $\frac{1}{3}$ de 24 é igual a 8, concluímos que o número de triângulos a serem pintados é um número maior do que 6 e menor do que 8. Logo devem ser marcados 7 triângulos quaisquer.

(C) A figura é composta de 36 triângulos iguais. Chico Bento escreveu C em $\frac{7}{12} \times 36 = 21$ triângulos e Doralina escreveu D em $\frac{3}{4} \times 36 = 27$ triângulos, totalizando assim $21 + 27 = 48$ marcas. Como todos os triângulos foram marcados e só existem 36 deles, concluímos que o número de triângulos marcados com duas letras é igual a $48 - 36 = 12$. Este número corresponde a $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$ dos triângulos.

38. **(2008 - N1Q2 - 2^a fase)**

(A) Podemos calcular a área do trapézio retângulo $ACDE$ pela fórmula usual $\frac{(AC+DE)\times CD}{2} = \frac{(20+10)\times 10}{2} = 150\ cm^2$. A área total do terreno é então área$(ACDE)+$área$(ABC) = 150+120 = 270\ m^2$.

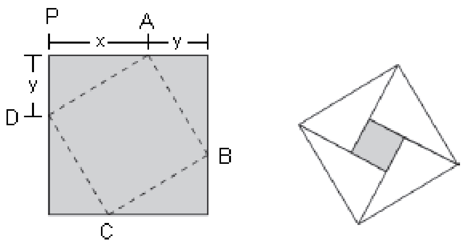
(B) Como o terreno tem $270\ m^2$, ao dividí-lo nas partes de mesma área $ABCF$ e $AFDE$, cada parte terá área de $\frac{270}{2} = 135\ m^2$. Notamos que $ABCF$ é um trapézio de bases $AB = 12$ e CF e de altura $AC = 20$. Logo

$$135 = \text{área}(ABCF) = \frac{(12+CF)\times 20}{2} = 120 + 10\times CF$$

e segue que $CF = 1,5$.

OBMEP 2008 - Nível 2

39. **(2008 - N2Q15 - 1^a fase)** Sejam x e y as medidas (em centímetros) de PA e PD, respectivamente. Vemos então que $x+y=30$ e que o lado do quadrado central da folha dobrada é $x-y$. Como a área desse quadrado é $144\ cm^2$, segue que seu lado mede $12\ cm$, ou seja, $x-y=12$. Dessas duas equações segue que $x=21$.

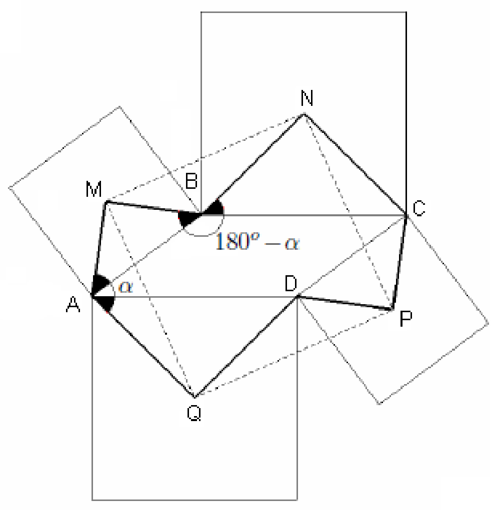


40. **(2008 - N2Q17 - 1^a fase)** Lembramos primeiro que em um triângulo um ângulo externo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes. Logo $A\hat{C}B = C\hat{A}D + C\hat{D}A = 2\times C\hat{D}A = 96^o$ onde notamos que $C\hat{A}D = C\hat{D}A$ pois o triângulo CAD é isósceles. Do mesmo modo obtemos $C\hat{B}A = 2\times D\hat{E}A$ e $B\hat{A}C = 2\times F\hat{E}A$. Somando essas três igualdades e lembrando que a soma dos ângulos internos do triângulo ABC é 180^o, obtemos $180^o = 96^o + 2\times(D\hat{E}A + F\hat{E}A) = 96^o + 2\times D\hat{E}F$, donde $D\hat{E}F = 42^o$.

41. **(2008 - N2Q5 - 2^a fase)**

(A) Para calcular a área do polígono $AMBNCPDQ$, basta observar que ele pode ser dividido no paralelogramo $ABCD$ e nos triângulos AMB, BNC, CPD e DQA. Como M, N, P e Q são centros de quadrados, a área de cada um desses triângulos é um quarto da área do quadrado correspondente. Como dois desses quadrados tem área $4^2=16$ e os outros dois tem area $6^2=36$, a área procurada é área$(ABCD)+$áreas dos triângulos $= 20 + \frac{1}{4}(16+16+36+36) = 46\ cm^2$.

(B) Seja α a medida do angulo $D\hat{A}B$. Como $ABCD$ é um paralelogramo, segue que $A\hat{B}C = 180^o - \alpha$. Por outro lado, como M, N e Q são centros dos quadrados correspondentes, os ângulos marcados em preto na figura a seguir são todos iguais a 45^o. Logo $M\hat{A}Q = Q\hat{A}D + D\hat{A}B + B\hat{A}M = 45^o + \alpha + 45^o = \alpha + 90^o$. e $M\hat{B}N = 360^o - (A\hat{B}M + A\hat{B}C + N\hat{B}C) = 360^o - [45^o + (180^o - \alpha) + 45^o] = \alpha + 90^o$ donde $M\hat{A}Q = M\hat{B}N$.



(C) Como os quadrados sobre AB e CD são iguais, bem como os quadrados sobre BC e AD, e como M, N, P e Q são centros desses quadrados, temos $AM = MB = CP = PD$ e $BN = NC = AQ = QD$. Por outro lado, segue do item anterior que $M\hat{A}Q = M\hat{B}N = N\hat{C}P = P\hat{D}Q$, donde os triângulos QAM, MBN, NCP e PDQ são congruentes. Como $MNPQ$ é obtido de $AMBNCPDQ$, retirando-se os triângulos QAM e NCP e adicionando-se os triângulos MBN e PDQ, temos área$(MNPQ) =$ área$(AMBNCPDQ) = 46\ cm^2$. A congruência dos triângulos QAM, NBM, NCP e QDP mostra que $QM = MN = NP = PQ$, ou seja, $MNPQ$ é um losango. Para mostrar que $MNPQ$ é um quadrado, basta então mostrar que um de seus ângulos internos é igual a 90^o; vamos fazer isso para $Q\hat{M}N$. Como M é o centro do quadrado sobre AB, temos que $A\hat{M}B = 90^o$; por outro lado, da congruência dos triângulos AMQ e MBN tiramos $Q\hat{M}A = B\hat{M}N$. Logo $Q\hat{M}N = B\hat{M}N + Q\hat{M}B = Q\hat{M}A + Q\hat{M}B = 90^o$ e segue que $MNPQ$ é um quadrado.

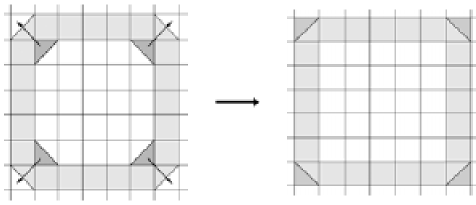
Alternativamente, basta mostrar que $QM = NP$ e que $Q\hat{M}N = 90^o$, como acima, e finalizar argumentando (por exemplo, por simetria) que a situação é idêntica nos outros vértices.

SOLUÇÕES DAS QUESTÕES DE GEOMETRIA - OBMEP - 2009

OBMEP 2009 - Nível 1

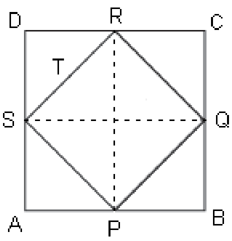
42. **(2009 - N1Q2 - 1^a fase)** A figura pode ser decomposta em 20 quadradinhos e 8 triângulos, de acordo com o quadriculado. Juntando dois desses pequenos triângulos formamos um quadradinho. Temos assim um total de $20 + \frac{8}{2} = 20 + 4 = 24$ quadradinhos.

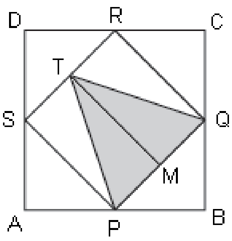
    Outra maneira de resolver a questão é mover os quatro triângulos destacados como indicado na figura. A área sombreada permanece a mesma e podemos contar diretamente 24 quadradinhos sombreados, à direita. Alternativamente, temos dois quadrados, um de lado 7 cm e outro de lado 5 cm, e a área da região sombreada é a diferença entre as áreas desses quadrados, ou seja, $7^2 - 5^2 = 49 - 25 = 24\ cm^2$.



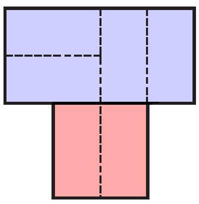
43. **(2009 - N1Q10 - 1^a fase)** Traçando os segmentos QS e PR, vemos que o quadrado $ABCD$ é composto de 8 triângulos retângulos iguais e que o quadrado $PQRS$ é formado por 4 desses triângulos. Portanto, a área do quadrado $PQRS$ é metade da área do quadrado $ABCD$, ou seja, $\frac{40}{2} = 20\ cm^2$.

    Traçando agora o segmento TM, onde M é o ponto médio de PQ, vemos que o quadrado $PQRS$ é composto de 4 triângulos retângulos iguais e o triângulo PQT é formado por 2 desses triângulos. Logo, a área do triângulo PQT é metade da área do quadrado $PQRS$, ou seja, $\frac{20}{2} = 10\ cm^2$.

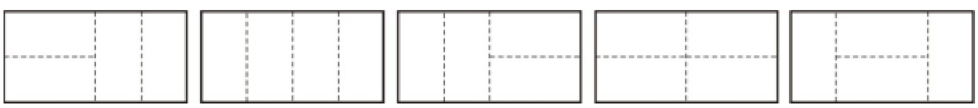




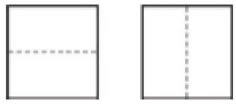
44. **(2009 - N1Q15 - 1^a fase)** O T é formado por um retângulo 4×2 na parte de cima e um quadrado 2×2 na parte de baixo, como mostrado na figura a seguir.



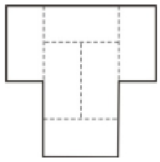
    Vamos primeiro contar de quantas maneiras é possível dividir o T com retângulos 2×1, dividindo primeiro o retângulo e depois o quadrado. O retângulo pode ser pode ser dividido de 5 maneiras diferentes, mostradas a seguir.



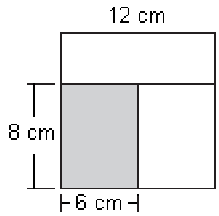
O quadrado pode ser dividido de 2 maneiras diferentes, mostradas a seguir.



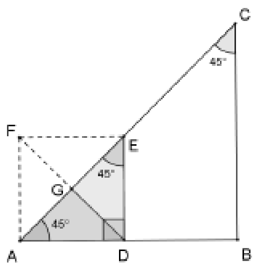
Pelo princípio fundamental da contagem, segue que o T pode ser dividido de $5 \times 2 = 10$ maneiras diferentes, quando preenchemos primeiro o retângulo e depois o quadrado. Há ainda outra maneira de dividir o T, ilustrada na figura a seguir. Esta não aparece na contagem acima, pois não pode ser obtida como uma divisão do retângulo seguida de uma divisão do quadrado. Logo, o número total de maneiras em que se pode dividir o T é $10 + 1 = 11$.



45. **(2009 - N1Q17 - 1^a fase)** O quadrado tem lado 12 cm, logo sua área é igual a $12^2 = 144\ cm^2$. Portanto, cada um dos três retângulos tem área igual a $\frac{144}{3} = 48\ cm^2$. Os dois retângulos inferiores são iguais, pois têm a mesma área e a mesma altura. Logo, têm a mesma largura, igual a $\frac{12}{2} = 6\ cm$ e, dessa forma, sua altura é $\frac{48}{6} = 8\ cm$. Assim, o perímetro do retângulo sombreado é $6 + 8 + 6 + 8 = 28\ cm$.

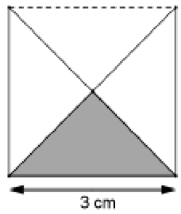


46. **(2009 - N1Q2 - 2^a fase)**O argumento geral para a resolução desta questão está ilustrado na figura a seguir.



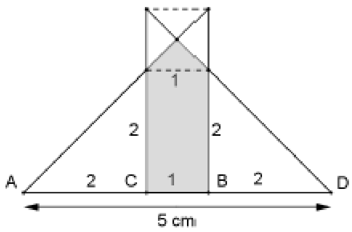
O triângulo ABC é um dos triângulos resultantes do corte do quadrado e D é um ponto qualquer no lado AB, com DE perpendicular a AB. O triângulo ADE também é retângulo com dois lados iguais, e sua área é igual a metade da área do quadrado $ADEF$. A área do triângulo ADG é então $\frac{1}{4}$ da área do quadrado $ADEF$.

(A) O argumento acima mostra que a região cinza da figura a seguir tem área igual a $\frac{1}{4}$ da área do quadrado de lado 3 cm, ou seja, $\frac{1}{4} \times 3^2 = \frac{9}{4} = 2,25\ cm^2$.



(B) Aqui a área da região cinza da figura a seguir é $\frac{1}{4} \times 1^2 = 0,25\ cm^2$.

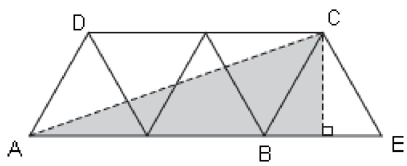
(C) Como $AB = CD = 3\ cm$ e $AD = 5\ cm$, vemos que $BC = 1\ cm$, e podemos então marcar os comprimentos indicados na figura a seguir. A região cinza é a união de um retângulo de base 1 cm e altura 2 cm com um triângulo cuja área já foi calculada no item anterior. Logo a área da região cinza é $1 \times 2\ +\ \frac{1}{4} = \frac{9}{4} = 2,25\ cm^2$.



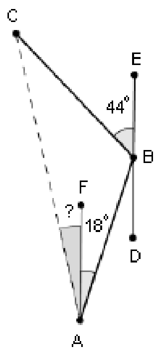
De modo alternativo, a região cinza é um retângulo de base 1 e altura 3 da qual se retiram três triângulos, cada um com área igual a $\frac{1}{4}$ da área de um quadrado de lado 1. A área procurada é então $3 \times 1\ -\ 3 \times \frac{1}{4} = 3 - \frac{3}{4} = \frac{9}{4} = 2,25\ cm^2$.

OBMEP 2009 - Nível 2

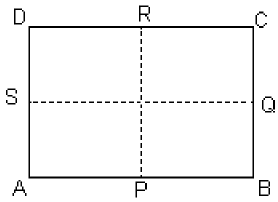
47. **(2009 - N2Q2 - 1^a fase)** Podemos decompor a figura no paralelogramo $ABCD$ e no triângulo BEC. Em cada uma destas figuras a área sombreada corresponde a metade da área, e assim a área sombreada é a metade da área total.

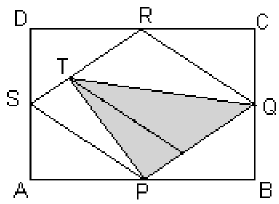


48. **(2009 - N2Q8 - 1^a fase)** Como os segmentos AF e ED apontam para o norte, eles são paralelos, e como AB é transversal a AF e a ED segue que $D\hat{B}A = F\hat{A}B = 18^o$. Logo $A\hat{B}C = 180^o - (44^o + 18^o) = 118^o$. Como $AB = BC$, o triângulo ABC é isósceles; os ângulos iguais $A\hat{C}B$ e $C\hat{A}B$ medem então $\frac{1}{2}(180^o - 118^o) = 31^o$. Concluímos então que $F\hat{A}C = B\hat{A}C - B\hat{A}F = 31^o - 18^o = 13^o$.

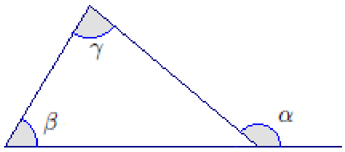


49. **(2009 - N2Q12 - 1^a fase)** A figura abaixo a esquerda mostra como decompor o retângulo $ABCD$ em oito triângulos congruentes. Concluímos que a área do quadrilátero $PQRS$ é metade da área do retângulo, ou seja, 20 cm^2. Voltamos agora para a figura do enunciado e traçamos uma paralela TU ao segmento PS. Os triângulos PST e UTP são congruentes, bem como os triângulos UTQ e RQT. Como o triângulo PQT é a união dos triângulos UTP e UTQ, segue que sua área é metade da área do quadrilátero $PQRS$, ou seja, 10 cm^2.

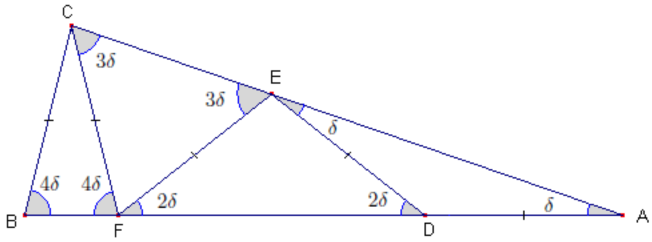




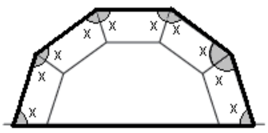
50. **(2009 - N2Q15 - 1^a fase)** Nesta solução vamos usar repetidamente o resultado de geometria elementar que diz que o ângulo externo de um triângulo é igual a soma dos dois ângulos internos não adjacentes. Este resultado esta ilustrado na figura a seguir e diz que $\alpha = \beta + \gamma$.



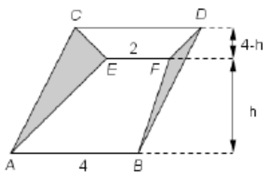
Vamos indicar por δ a medida do angulo $B\hat{A}C$. Como o triângulo ADE é isósceles, temos $D\hat{E}A = \delta$. O ângulo $E\hat{D}F$ é externo ao triangulo ADE, e pelo resultado mencionado acima temos $E\hat{D}F = \delta + \delta = 2\delta$. Como o triângulo DEF e isósceles temos tambem $E\hat{F}D = 2\delta$; o ângulo $F\hat{E}C$, externo ao triângulo FEA, mede então $2\delta + \delta = 3\delta$. Analogamente, concluímos que $C\hat{B}A = 4\delta$, e como o triângulo ABC é isósceles segue que $B\hat{C}A = 4\delta$. Logo $180^o = 4\delta + 4\delta + \delta = 9\delta$, donde $\delta = 20^o$.



51. **(2009 - N2Q16 - 1^a fase)** Lembramos que a soma dos ângulos internos de um polígono de n lados é $(n-2) \times 180^o$. Na figura a seguir vemos que o contorno da figura do enunciado da questão (em linha mais grossa) forma um polígono de 6 lados. A soma de seus ângulos internos é então $(6-2) \times 180^o = 720^o$. Por outro lado, como os trapézios são congruentes, a soma destes ângulos internos é igual a 10 vezes a medida do ângulo marcado, que vale então $\dfrac{720^o}{10} = 72^o$.

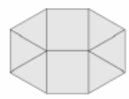


52. **(2009 - N2Q18 - 1^a fase)** Para achar a soma das áreas dos triângulos, basta calcular a área do paralelogramo $ABCD$ e subtrair as áreas dos trapézios $ABFE$ e $CDFE$. Seja h a altura do trapézio $ABFE$; sua área é então $\dfrac{AB+EF}{2}h = 3h$. Como a altura do paralelogramo $ABCD$ é 4 cm, a altura do trapézio $CDFE$ é $4-h$ e sua área é $\dfrac{CD+EF}{2}(4-h) = 12-3h$. A área do paralelogramo $ABCD$ é 16 cm^2; a soma das áreas dos triângulos é então $16-(3h+12-3h) = 4$ cm^2.



53. **(2009 - N2Q3 - 2^a fase)**

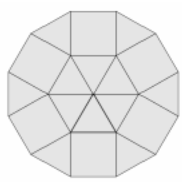
(A) Um exemplo de polígono elegante com oito lados aparece na figura a seguir.



(B) Como um polígono elegante é convexo e é formado colocando lado a lado quadrados e triângulos equiláteros, seus ângulos são somas de parcelas iguais a 60^o ou 90^o que não ultrapassem 180^o. Os valores possíveis são então 60^o, 90^o, $120^o = 60^o + 60^o$ e $150^o = 60^o + 90^o$.

(C) Sabemos que a soma dos ângulos internos de um polígono com n lados é $(n-2) \times 180^o$. Por outro lado, vimos no item (B) que o maior valor possível do ângulo interno de um polígono elegante é 150^o; logo, a soma dos ângulos internos de um polígono elegante de n lados é no máximo $n \times 150^o$. Temos então $180(n-2) \leq 150n$, e segue que $30n \leq 360$, ou seja, $n \leq 12$.

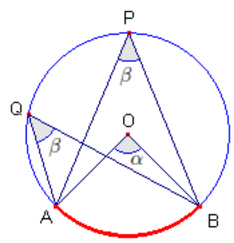
(D) A figura a seguir mostra um polígono elegante de 12 lados.



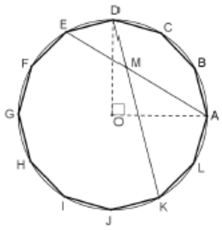
54. **(2009 - N2Q4 - 2^a fase)**

(A) Como a soma dos ângulos internos de um polígono de n lados é $(n-2) \times 180^o$, a soma dos ângulos internos do dodecágono é $(12-2) \times 180^o = 1800^o$. Logo cada um de seus ângulos internos mede $\dfrac{1800^o}{12} = 150^o$.

Antes de prosseguir, lembramos um resultado básico de geometria elementar. Dados uma circunferência de centro O e um arco $\widehat{AB}$ nesta circunferência (marcado em traço mais forte na figura a seguir), temos o ângulo central $A\hat{O}B$ associado a este arco. Seja P um ponto qualquer na circunferência que não pertence a $\widehat{AB}$. Então a medida do ângulo inscrito $A\hat{P}$B é a metade da medida do ângulo $O\hat{A}B$, independente da posição de P. A figura a seguir ilustra esta situação; nela temos $\beta = A\hat{P}B = A\hat{Q}B = \dfrac{1}{2}A\hat{O}B = \dfrac{1}{2}\alpha$

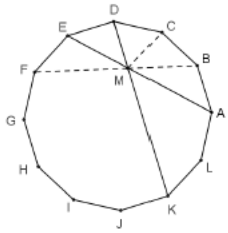


(B) Consideremos outra vez a circunferência de centro O circunscrita ao polígono. Como E e K são diametralmente opostos, o ângulo $E\hat{D}K$ está inscrito na semicircunferência e segue que $E\hat{D}K = 90^o$. Como o ângulo central correspondente a um lado do dodecágono regular é $\dfrac{180^o}{12} = 30^o$, o ângulo central $A\hat{O}D$ mede 90^o, e segue que $A\hat{E}D = 45^o$. Finalmente, o triângulo EDM tem ângulos $E\hat{D}M = 90^o$ e $M\hat{E}D = 45^o$; como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180^o, segue que $D\hat{M}E = 180^o - (90^o + 45^o) = 45^o$.



(C) Como o triângulo EDM tem dois ângulos de 45^o, ele é isósceles; logo $MD = DE$, ou seja, MD tem a mesma medida que os lados do polígono. Como $E\hat{D}C = 150^o$ e $E\hat{D}M = 90^o$, temos $M\hat{D}C = 60^o$; e como $MD = DC$ segue que o triângulo MDC é equilátero. Em particular, temos $M\hat{C}D = 60^o$ e segue que $M\hat{C}B = 90^o$. Finalmente, como $MC = CB$, o triângulo MCB é isósceles e então $M\hat{B}C = B\hat{M}C = \dfrac{90^o}{2} = 45^o$.

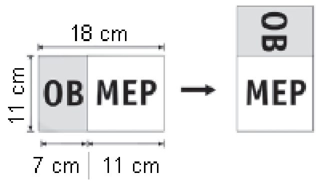
(D) Temos $F\hat{B}C = 45^o = M\hat{B}C$. Logo os segmentos FB e MB fazem o mesmo ângulo com o segmento BC, e segue que os pontos B, M e F estão alinhados.



SOLUÇÕES DAS QUESTÕES DE GEOMETRIA - OBMEP - 2010

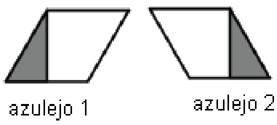
OBMEP 2010 - Nível 1

55. **(2010 - N1Q7 - 1^a fase)** Na figura a seguir vemos que o corte mede 11 cm, pois a parte com OB é um retângulo e os lados opostos de um retângulo são iguais. Também vemos que o lado superior da parte com MEP também mede 11 cm. Desse modo o lado menor da parte com OB mede $18 - 11 = 7$ cm e sua área é $7 \times 11 = 77$ cm^2.



56. **(2010 - N1Q10 - 1^a fase)** O quadrado está dividido em 16 quadradinhos. A área sombreada é a soma das áreas de 8 triângulos iguais, cada um com área igual a metade da área de um quadradinho. Portanto, a área sombreada é igual à área de $8 \times \frac{1}{2} = 4$ quadradinhos, o que corresponde a $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ da área do quadrado.

57. **(2010 - N1Q12 - 1^a fase)** Na figura a seguir mostramos dois azulejos. O azulejo 1 é o azulejo do enunciado, com o qual foram formadas as figuras das alternativas (a), (b), (c) e (d). A figura da alternativa E) foi feita com duas cópias do azulejo 1 e duas cópias do azulejo 2. Como não é possível obter o azulejo 2 por translação ou rotação do azulejo 1, segue que não podemos montar a figura da alternativa (e) com cópias do azulejo 1.



58. **(2010 - N1Q14 - 1^a fase)** A área de cada quadradinho corresponde a 9% da área do quadrado maior e assim a área dos 4 quadradinhos corresponde a $4 \times 9 = 36\%$ da área do quadrado maior. Logo a área em cinza corresponde, a $100 - 36 = 64\%$ da área total. Como essa área é 128 cm^2, concluimos que 1% dessa área é igual a $\frac{128}{64} = 2$ cm^2. Segue que a área do quadrado maior é $2 \times 100 = 200$ cm^2.

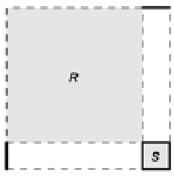
59. **(2010 - N1Q3 - 2^a fase)**

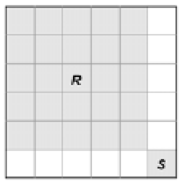
    (A) Primeiramente vamos lembrar que a área de um retângulo pode ser calculada como o produto dos comprimentos de dois lados adjacentes. No problema, como a área do retângulo é 108 cm^2 e um lado mede 12 cm, o comprimento do lado adjacente, deve ser um número que multiplicado por 12 tenha como resultado 108, ou seja, é $108 \div 12 = 9$. Assim, o perímetro do retângulo é $12+12+9+9 = 42$ cm.

    (B) Como o quadrado cinza tem área igual a 36 cm^2, o comprimento de seu lado é um número cujo quadrado é 36, ou seja, é igual 6 cm. Logo o retângulo maior tem um lado de comprimento 6 cm; como sua área é 108 cm^2, segue que seu outro lado mede $108 \div 6 = 18$ cm. Logo um lado do retângulo branco mede 6 cm e o outro mede $18 - 6 = 12$ cm, e assim seu perímetro é $12 + 12 + 6 + 6 = 36$ cm.
    Pode-se também argumentar que a área do retângulo branco é $108 - 36 = 72$ cm^2. Como um de seus lados mede 6 cm, o outro mede então $72 \div 6 = 1$ cm; o restante da solução segue como acima.

(C) Na figura a seguir marcamos os lados do quadrado R em pontilhado e os lados do quadrado S em traço mais grosso. Para simplificar, vamos nos referir ao comprimento de um segmento grosso apenas como "grossp", e do mesmo modo para "pontilhado". O perímetro do quadrado S é igual a quatro grossos. Observamos que os retângulos brancos são iguais, pois têm os mesmos lados, e seu perímetro é igual a dois grossos mais dois pontilhados. Por outro lado, o enunciado diz que o perímetro de um desses retângulos é igual a três vezes o perímetro de S, isto é, igual a doze grossos. Logo os dois pontilhados devem ser iguais a dez grossos, ou seja, cada pontilhado é igual a cinco grossos.

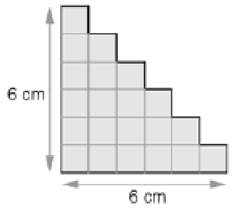
Notamos agora que um lado do quadrado grande é igual a um grosso mais um pontilhado, ou seja, é igual a seis grossos. Podemos então decompor o quadrado grande em $6 \times 6 = 36$ quadradinhos iguais ao quadrado S, como na figura a seguir. Como a área do quadrado maior é igual a 108 cm^2, a área de um desses quadradinhos é igual a $108 \div 36 = 3$ cm^2. Finalmente, o quadrado R consiste de $5 \times 5 = 25$ quadradinhos e então sua área é igual a $25 \times 3 = 75$ cm^2.



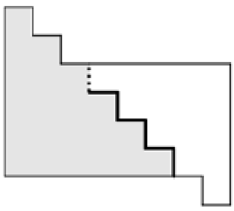


60. **(2010 - N1Q5 - 2^a fase)**

(A) Logo abaixo vemos que a figura cinzenta tem como contorno um segmento horizontal de 6 cm, um segmento vertical de 6 cm, seis segmentos horizontais de 1 cm e seis segmentos verticais de 1 cm; logo seu perímetro é $6+6+(6 \times 1)+(6 \times 1) = 4 \times 6 = 24$ cm. Vemos também que ela pode ser decomposta em $1+2+3+4+5+6 = 21$ quadradinhos de área 1; logo sua área é 21 cm^2.

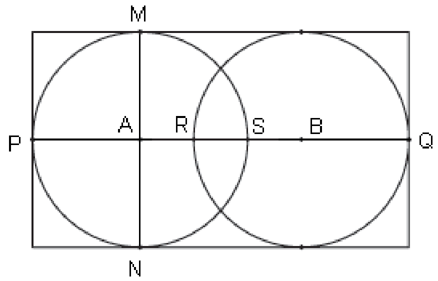


(B) A área da figura é a soma das áreas das partes branca e cinzenta. Como essas duas partes formam o quadrado original, sua área total é $6 \times 6 = 36$ cm^2. Agora vamos calcular o perímetro. O perímetro da parte cinza é $4 \times 6 = 24$ cm e o da parte branca é $4 \times 5 = 20$ cm; separadamente, essas peças teriam um perímetro total de $20+24 = 44$ cm. Ao encaixar as peças como no enunciado, elas passam a ter em comum dois segmentos em cada degrau encaixado, que indicamos com traço mais grosso, e um segmento indicado em pontilhado; o número de segmentos comuns é então $2 \times 3 + 1 = 7$. Para cada segmento comum "perdemos" 2 cm do perímetro total, num total de $2 \times 7 = 14$ cm. Logo o perímetro da figura é $44 - 14 = 30$ cm.

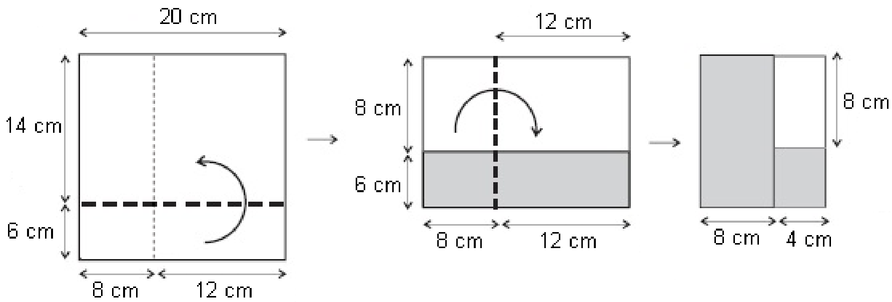


(C) Quando o comprimento do lado é 87 cm, a parte cinza tem perímetro igual a $4 \times 87 = 348$ cm e a parte branca tem perímetro $4 \times 86 = 344$ cm, num total de $348 + 344 = 692$ cm. O mesmo raciocínio da solução do item anterior mostra que o perímetro da figura obtida encaixando 39 degraus é então $692 - 2 \times (2 \times 39 + 1) = 534$ cm.

61. **(2010 - N2Q6 - 1^a fase)** Os segmentos AP, AS, BR e BQ são raios dos círculos, logo todos têm comprimento 2. Além disso, temos $BS = BR - RS = 1$, donde $PQ = PA + AS + SB + BQ = 2+2+1+2 = 7$ e vemos que os lados maiores do retângulo têm comprimento 7. Por outro lado, o comprimento dos lados menores do retângulo é igual ao comprimento de MN, que é um diâmetro do círculo, ou seja, tem comprimento 4. Logo o perímetro do retângulo é $7 + 7 + 4 + 4 = 22$ cm.



62. **(2010 - N2Q8 - 1^a fase)** A figura mostra os comprimentos de alguns segmentos ao longo da sequência de dobras. Ao final, vemos que a região branca é um retângulo de lados de comprimento 4 cm e 8 cm; sua área é então $4 \times 8 = 32$ cm^2. (comparar com a questão OBMEP - 2007 - N1Q10 - 1^a fase)



63. **(2010 - N2Q13 - 1^a fase)** O quadrado está dividido em quatro quadrados menores iguais. Cada um dos triângulos brancos tem um lado que é um lado de um quadrado menor e sua altura, relativa a este lado, é a metade do lado do quadrado menor; logo sua área é $\dfrac{1 \times \frac{1}{2}}{2} = \dfrac{1}{4}$ da área de um quadrado menor. Como são quatro desses triângulos, vemos que a área da parte branca é igual à área de $4 \times \dfrac{1}{4} = 1$ quadrado menor. Como área de um desses quadrados é $\dfrac{1}{4}$ da área do quadrado maior, segue que a área preta é igual a $1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$ da área do quadrado maior.

64. **(2010 - N2Q17 - 1^a fase)** Vamos escolher um ponto entre os pontos destacados; por exemplo, o primeiro ponto à esquerda no lado inferior do quadrado. A figura mostra os três triângulos retângulos que podemos construir com o vértice com o ângulo reto nesse ponto. Como o mesmo acontece com os outros pontos destacados, vemos que o número de triângulos retângulos com vértices nesses pontos é $8 \times 3 = 24$.

Devemos justificar a afirmativa de que esses triângulos são retângulos. Isso é claro para o triângulo da figura 1. Quanto ao da figura 2, notamos que os dois triângulos retângulos brancos são congruentes, logo seus ângulos com vértice no ponto escolhido somam 90^o e, consequentemente, o ângulo do triângulo cinza nesse vértice é também 90^o. Finalmente, o triângulo da figura 3 é retângulo pois seus lados menores são diagonais de quadrados, como indicado pelos segmentos mais claros; assim eles fazem ângulo de 45^o com o lado inferior do quadrado e o ângulo do triângulo cinza nesse vértice é também 90^o.

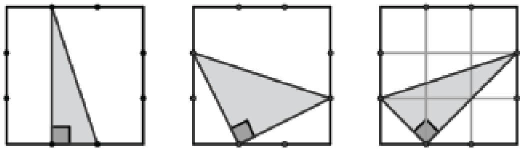
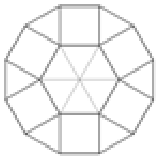


Figura 1 Figura 2 Figura 3

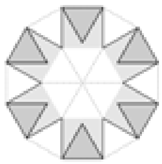
65. **(2010 - N2Q3 - 2^a fase)**

(A) A figura a seguir mostra que o hexágono pode ser decomposto em seis triângulos iguais aos triângulos que fazem parte do dodecágono. Como cada um desses triângulos tem área 1 cm^2, segue que o hexágono tem área 6 cm^2.

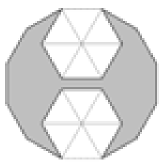


(B) Primeira solução. A figura do item anterior mostra que o dodecágono pode ser decomposto em doze triângulos equiláteros iguais e seis quadrados. Desse modo, ao retirar doze triângulos do dodecágono, a estrela que sobra tem área igual à área de seis quadrados. Como o lado do dodecágono mede 1 cm, cada quadrado tem área 1 cm^2 e assim a área da estrela é 6 cm^2.

Segunda solução. Podemos decompor o hexágono central da estrela em seis triângulos e “encaixá-los” como indicado na figura a seguir. A figura assim obtida tem a mesma área da estrela e consiste de seis quadrados de lado 1 cm; sua área é então 6 cm^2.



(C) A figura a seguir mostra que os dois hexágonos retirados têm a mesma área que doze triângulos equiláteros; como no item (B), a região cinza tem a mesma área que seis quadrados de lado 1 cm; sua área é então 6 cm^2.



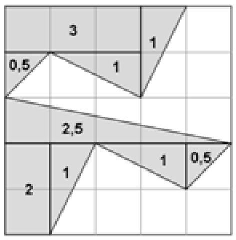
SOLUÇÕES DAS QUESTÕES DE GEOMETRIA - OBMEP - 2011

OBMEP 2011 - Nível 1

66. **(2011 - N1Q5 - 1ª fase)** Cortar uma tira de dois centímetros de largura de cada lado da folha faz com que cada lado da folha passe a medir 4 cm a menos. Logo o pedaço de papel que sobrou é um retângulo de dimensões $12 - 4 = 8\ cm$ e $20 - 4 = 16\ cm$, cujo perímetro é $8 + 8 + 16 + 16 = 48\ cm$.

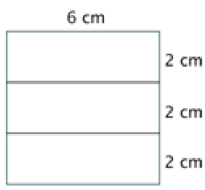
67. **(2011 - N1Q11 - 1ª fase)** Uma solução é observar que é possível sobrepor a região branca do quadrado à região cinza, bastando para isso girá-la 180^o ao redor do centro do quadrado. Logo elas têm a mesma área, que é igual à metade da área do quadrado, ou seja, $25 \div 2 = 12,5\ cm^2$.

    Outra solução é calcular a área da região cinza por partes, como na figura a seguir. Para isso, usamos repetidamente o fato de que a diagonal de um retângulo divide esse retângulo em dois triângulos de mesma área. Na figura, decompomos a região cinza em triângulos e retângulos, indicando em cada um sua área. Logo a área da região cinza é $1 + 1 + 3 + 0,5 + 2,5 + 2 + 1 + 1 + 0,5 = 12,5\ cm^2$.

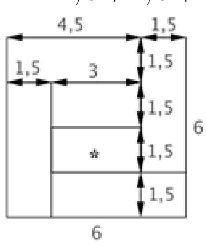


68. **(2011 - N1Q3 - 2ª fase)**

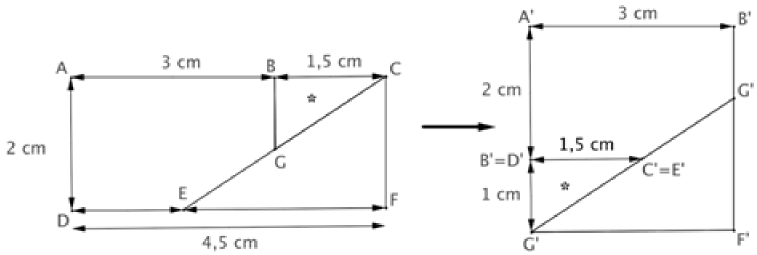
    (A) Como o quadrado formado com os três retângulos recortados da primeira tira tem área 36 cm^2, seu lado mede 6 cm. Logo o comprimento dos retângulos é 6 cm e sua largura é um terço de seu comprimento, ou seja, 2 cm.



    (B) Como no item anterior, o lado do quadrado formado com os seis retângulos recortados na segunda tira mede 6 cm. Como todos os retângulos tem a mesma largura, a observação da figura mostra que essa largura é um quarto da medida do lado, isto é, $1,5\ cm$. As medidas dos outros retângulos são então determinadas imediatamente, como indicado. Em particular, as dimensões do retângulo destacado são 3 cm e $1,5\ cm$; logo seu perímetro é $1,5 + 1,5 + 3 + 3 = 9\ cm$ e sua área é $1,5 \times 3 = 4,5\ cm^2$.



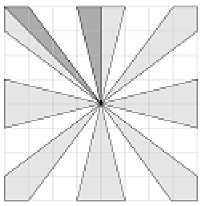
    (C) Na figura abaixo mostramos o retângulo e o quadrado; a justificativa para o cálculo das medidas indicadas é feita a seguir. Observamos que na figura à direita marcamos os pontos correspondentes da figura à esquerda com as mesmas letras; por exemplo, o segmento AB à esquerda é o segmento $A'B'$ à direita.



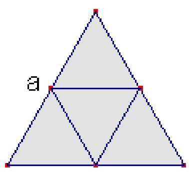
A área do retângulo é $2 \times 4,5 = 9\ cm^2$, que é também a área do quadrado; logo o lado do quadrado mede $3\ cm$. Desse modo, os segmentos $A'B'$ e $B'F'$ medem $3\ cm$ e vemos que AB também mede $3\ cm$. Como o lado do retângulo mede $4,5\ cm$, segue que BC mede $4,5 - 3 = 1,5\ cm$, que é então a medida de $B'C'$. Finalmente, a medida de $A'B$ é a mesma que a de AD, que é $2\ cm$; logo a medida de $B'C'$ é $3 - 2 = 1\ cm$. Assim obtemos as medidas $BG = 1\ cm$ e $BC = 1,5\ cm$ dos catetos do triângulo retângulo BCG, cuja área é então $\dfrac{1 \times 1,5}{2} = 0,75\ cm^2$.

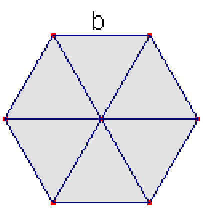
OBMEP 2011 - Nível 2

69. **(2011 - N2Q4 - 1^a fase)** Na figura vemos que a região cinza tem área igual à soma de oito vezes a área de cada um dos triângulos em cinza escuro. Denotando por ℓ a medida do lado de cada quadradinho, segue que cada um dos triângulos em cinza escuro tem área $\dfrac{\ell \times 4\ell}{2} = 2\ell^2$. Logo a área da região cinza é $16 \times 2\ell^2 = 32\ell^2$. Como a área do quadrado é $64\ell^2$, segue que a área da região cinza é metade da área do quadrado, ou seja, a razão entre a área da região cinza e a área do quadrado é $\dfrac{1}{2}$.



70. **(2011 - N2Q10 - 1^a fase)** Sejam a e b os lados do triângulo e do hexágono, respectivamente. Na figura a seguir vemos o triângulo decomposto em quatro triângulos equiláteros congruentes, formados pelos segmentos que ligam os pontos médios de seus lados; o lado de cada um desses triângulos menores é $\dfrac{a}{2}$. Vemos também o hexágono decomposto em seis triângulos equiláteros congruentes, cada um de lado b. Como o perímetro do hexágono e do triângulo são os mesmos, temos $3a = 6b$. Logo $b = \dfrac{a}{2}$ e todos os triângulos menores na figura são congruentes. Por outro lado, como a área do hexágono é $6\ m^2$, cada triângulo menor tem área 1. Logo a área do triângulo é $4\ m^2$.

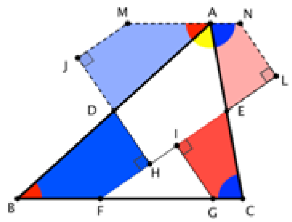




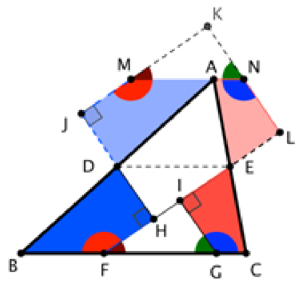
71. **(2011 - N2Q16 - 1^a fase)** Seja x a largura das tiras. Como o retângulo original tem dimensões 30 cm por 50 cm, após retirar um retângulo de largura x de cada lado da folha, vemos que cada uma das suas dimensões diminui de $2x$. Portanto, após os cortes das tiras, as dimensões do retângulo que sobrou são $30 - 2x$ e $50 - 2x$; seu perímetro é $2(30 - 2x) + 2(50 - 2x) = 160 - 8x$. Por outro lado, o enunciado nos diz que esse perímetro é 85% do perímetro da folha original, isto é, $0,85 \times (2 \times 30 + 2 \times 50) = 0,85 \times 160 = 136$. Temos então a equação $160 - 8x = 136$, cuja solução é $x = 3$.

72. **(2011 - N2Q6 - 2^a fase)**

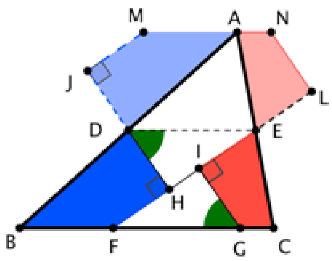
(A) Na figura a seguir marcamos, em vermelho, o ângulo em B do triângulo ABC e o ângulo correspondente no polígono $AMJD$; em azul, marcamos o ângulo em C do triângulo ABC e o ângulo correspondente do polígono $AELN$. Podemos observar na parte superior da figura que o ângulo $M\hat{A}N$ é a soma desses dois ângulos com o ângulo em A do triângulo ABC; como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180^o, segue que $M\hat{A}N = 180^o$. Logo M, A e N estão alinhados.



(B) Na figura os ângulos marcados em vermelho são congruentes, assim como os ângulos marcados em azul. Segue que os ângulos marcados em marrom também são congruentes, pois são ambos suplementos do ângulo vermelho; do mesmo modo, os ângulos verdes são também congruentes. Notamos agora que $MN = MA + AN = BF + CG = BC - FG = 2FG - FG = FG$. Segue pelo critério ALA que os triângulos FGI e MNK são congruentes.



(C) Na figura a seguir traçamos a base média DE do triângulo ABC. O teorema da base média nos diz que DE é paralelo a BC e que $DE = \frac{1}{2}BC = FG$. Segue que os triângulos FGI e EHD são congruentes, pois são retângulos, tem os ângulos verdes congruentes (pois são agudos de lados paralelos) e hipotenusas congruentes. Em particular, temos $FI = EH$, donde $FH = FI - HI = EH - HI = EI$. Logo $LH = LE + EI + IH = FH + HI + IE = EF$.

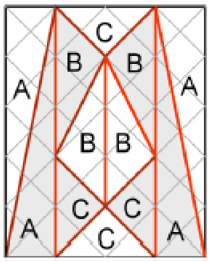


(D) A área do quadrado $HJKL$ é igual à área do triângulo ABC, que é 9; logo o lado do quadrado mede 3. Em particular, $LH = 3$ e segue do item anterior que $EF = 3$.

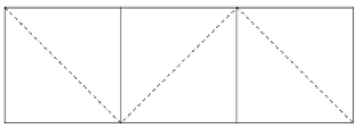
SOLUÇÕES DAS QUESTÕES DE GEOMETRIA - OBMEP - 2012

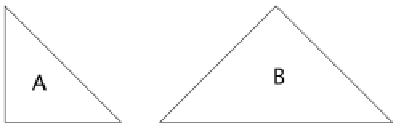
OBMEP 2012 - Nível 1

73. **(2012 - N1Q12 - 1^a fase)** Dividimos a figura em regiões indicadas pelas letras A, B e C, como mostrado ao lado. Regiões com a mesma letra são idênticas, e tanto a parte branca quanto a parte cinzenta consistem de duas regiões A, duas regiões B e duas regiões C; segue que a área da parte cinzenta é igual à área da parte branca. Cada uma dessas áreas é então a metade da área total do retângulo, que é $4 \times 5 = 20\ cm^2$. Logo a área da parte cinzenta é $10\ cm^2$.



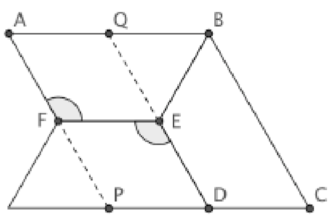
74. **(2012 - N1Q14 - 1^a fase)** A figura a seguir mostra a folha aberta, com os cortes determinados na tira em pontilhado. A tira fica dividida em quatro triângulos, dois do tipo A e dois do tipo B. Como um triângulo do tipo B é formado por dois triângulos do tipo A, a tira fica dividida em seis triângulos do tipo A. Por outro lado, a tira tem área $4 \times 12 = 48\ cm^2$, e segue que a área de um triângulo do tipo A tem área $\dfrac{48}{6} = 8\ cm^2$. Um dos novos quadrados é formado pelos dois triângulos do tipo A e o outro é formado pelos dois triângulos do tipo B; a diferença entre as áreas desses quadrados é então igual à área de dois triângulos do tipo A, que é $2 \times 8 = 16\ cm^2$.



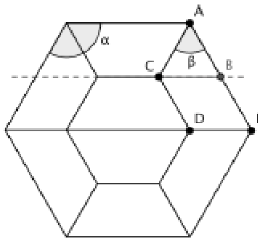


OBMEP 2012 - Nível 2

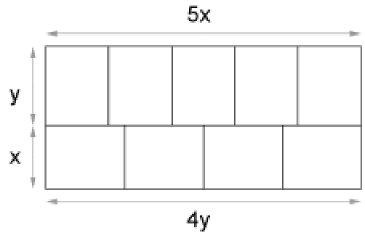
75. **(2012 - N2Q8 - 1^a fase)** A figura a seguir mostra uma parte do hexágono formada por três trapézios. Prolongamos os segmentos AF e DE para obter os pontos P e Q, como indicado. Como os trapézios são idênticos, os ângulos assinalados são iguais; segue que AP e QD são paralelos. Como PD e EF, sendo bases de um trapézio, também são paralelos, segue que $PDEF$ é um paralelogramo; em particular, temos $PF = DE$. Da igualdade dos trapézios temos $AF = DE = EF$ e concluímos que $AP = 2EF$. Notamos agora que $APCB$ também é um paralelogramo; logo $BC = AP = 2EF$ e como $BC = 10$ segue que $EF = 5$.



Outra solução é a seguinte. Como os trapézios são idênticos, o hexágono que eles formam é regular. Como o ângulo interno a desse hexágono mede 120^o, o ângulo β mede $\frac{120^o}{2} = 60^o$. Logo o triângulo ABC é equilátero; como $AC = CD$ temos $BC = CD$ e segue que o paralelogramo $BCDE$ é um losango. Assim, B é o ponto médio de AE e então $AC = BE = \frac{1}{2}AE = \frac{1}{2} \times 10 = 5\ cm$.



76. **(2012 - N2Q15 - 1^a fase)** Sejam x e y, respectivamente, as medidas do lado menor e do lado maior de um dos retângulos menores. As medidas dos dois lados do retângulo maior são então $x + y$ e $5x = 4y$; em particular, temos $y = \frac{5}{4}x$. Como a área do retângulo maior é 720 cm^2, temos $5x(x + y) = 5x\left(x + \frac{5}{4}x\right) = \frac{45}{4}x^2 = 720$. Logo $x = 8$ e $y = 10$; o perímetro de um dos retângulos menores é então $2 \times (8 + 10) = 36\ cm$.



- FIM -