Conjuntos

A riqueza da humanidade reside também em sua diversidade.
Ela deve ser protegida em todos os seus aspectos – cultural, biológico, filosófico, espiritual. Para isso a tolerância, a opinião do outro, a recusa das verdades definitivas devem ser sempre lembradas.

Texto de uma das medidas aprovadas na Conferência dos Prêmios Nobel, reunida no palácio do Eliseu - Paris

1. Revendo a teoria dos conjuntos

No estudo dos conjuntos numéricos utilizaremos uma linguagem matematicamente adequada. Por esse motivo, vamos rever alguns itens da Teoria dos Conjuntos.

Símbolos lógicos

Com o auxílio dos símbolos lógicos, como estes que descrevemos abaixo, a linguagem matemática torna-se mais simples e compreensível.

Símbolo lógico	Leitura
$\exists\ x$	existe pelo menos um x
$\nexists\ x$	não existe x algum
$\exists \mid x$	existe um único x
$\forall\ x$	para todo x ou qualquer que seja x
$\Rightarrow$	implica
$\Leftrightarrow$	equivalente
$\mid$	tal que

Pertinência

$a \in A$ lê-se: a pertence a A.

$a \notin B$ lê-se: a não pertence a B.

Exemplo:
Dado o conjunto $A = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$, temos:
$3 \in A$ e $-3 \notin A$

Representação

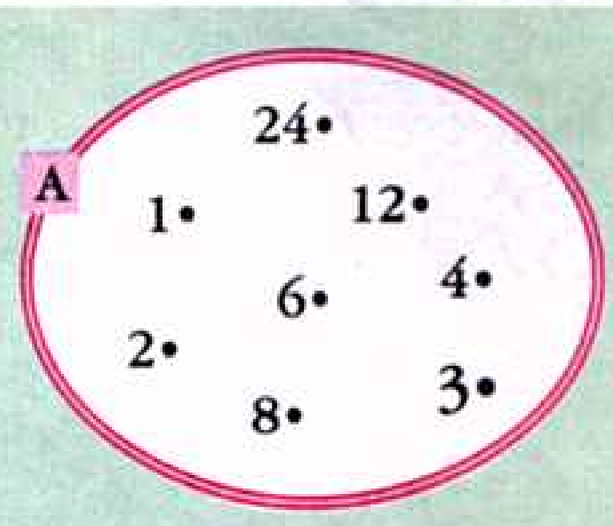
Um conjunto pode ser representado entre chaves de duas maneiras: por extenso, enumerando elemento por elemento ou abreviadamente, destacando uma propriedade comum apenas aos seus elementos.

Exemplo:
Os elementos do conjunto *A* são os divisores positivos de 24. A representação entre chaves pode ser feita:
por extenso: $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$ ou
abreviadamente: $A = \{x \mid x \text{ é divisor positivo de } 24\}$

Diagrama de Venn

É a representação de um conjunto com o auxílio de uma linha fechada e não-entrelaçada e seus pontos interiores.

Exemplo:
Seja o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$.



Igualdade

Dois conjuntos são iguais quando possuem os mesmos elementos.

$A = B$ lê-se: *A* é igual a *B*.

Exemplo:
Dados os conjuntos $A = \{1, 3, 5\}$ e $B = \{x \mid x \text{ é ímpar, positivo, menor que } 7\}$, temos que:
$A = B$.

Desigualdade

Dois conjuntos são diferentes quando existe pelo menos um elemento que pertence a um dos conjuntos e não pertence ao outro.

$A \neq B$ lê-se: *A* é diferente de *B*.

Exemplo:
Dados os conjuntos $A = \{9, 11, 13, \ldots\}$ e $B = \{x \mid x \text{ é ímpar, positivo, maior ou igual a } 7\}$, temos que:
$A \neq B$.

Exercícios

Resolvidos

1 Utilizar os símbolos $\in$ e $\notin$, relacionando os elementos com os conjuntos A = {a, e, i, o, u} e B = {b, c, d, f, g}.

a) *a* e *A* b) *u* e *B* c) *c* e *B* d) *d* e *A*

a) $a \in A$ b) $u \notin B$ c) $c \in B$ d) $d \notin A$

2 Representar, abreviadamente e por extenso o conjunto *A* dos múltiplos negativos de 3.

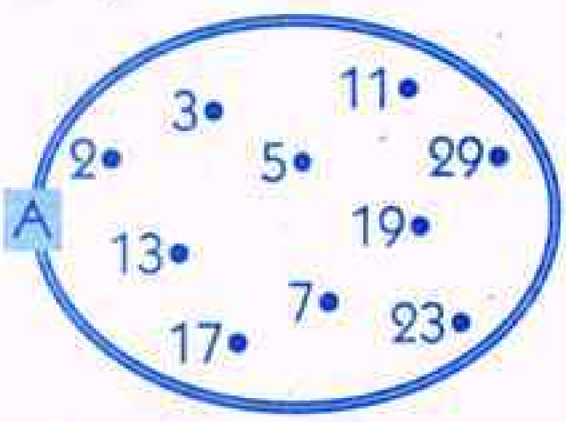
abreviadamente: $A = \{x \mid x < 0$ e *x* é múltiplo de $3\}$
por extenso: $A = \{-3, -6, -9, -12, -15, ...\}$

3 Relacionar os conjuntos utilizando os símbolos = ou $\neq$.

a) A = {1, 3, 5, 7} e B = {x | x é um número ímpar, positivo, menor que 9}
b) A = {verde, amarelo} e B = {x | x é uma cor da bandeira do Brasil}

a) A = {1, 3, 5, 7} e B = {1, 3, 5, 7}; portanto, A = B.
b) A = {verde, amarelo} e B = {verde, amarelo, azul, branco}; portanto, $A \neq B$.

4 Representar, usando um diagrama de Venn, o conjunto *A* dos números naturais primos menores do que 30.



Propostos

1 Utilizando os símbolos $\in$ ou $\notin$, relacione os elementos com os conjuntos A = {1, 3, 5, 7, ...} e B = {−1, −3, −5, −7, ...}.

a) 3 e *A* c) −1 e *A* e) −3 e *B*
b) 5 e *B* d) 7 e *A* f) −7 e *A*

2 Represente, abreviadamente e por extenso, o conjunto *A* dado que:

a) os elementos de *A* são as consoantes do nosso alfabeto
b) os elementos de *A* são números não-negativos cuja escrita termina em 0 ou 5, na ordem das unidades simples

3 Relacione os conjuntos utilizando os símbolos = ou $\neq$.

a) A = {0, −1, −2, −3} e B = {x | x é um número positivo}
b) A = {sábado, domingo} e B = {x | x é dia da semana}
c) A = {RS, SC, PR} e B = {x | x é sigla de um estado da região sul do Brasil}
d) A = {O, H} e B = {x | x é um elemento que compõe a molécula da água}

4 Use um diagrama de Venn para representar o conjunto dos números inteiros não-negativos menores do que 100 e que sejam múltiplos de 11.

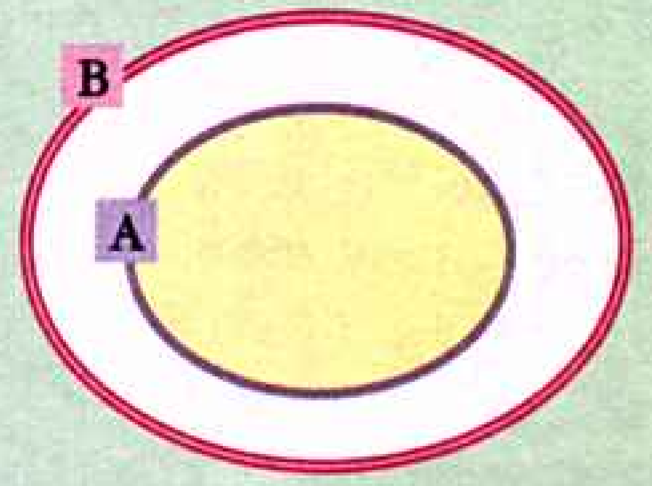
Inclusão — subconjuntos

Um conjunto *A* está contido em um conjunto *B* quando cada elemento de *A* também pertence a *B*. Neste caso dizemos que *A* é subconjunto de *B*.

$A \subset B$ lê-se: *A* está contido em *B*.

$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$

Exemplo:
Dados os conjuntos $A = \{1, 3, 5\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, temos:
$\{1, 3, 5\} \subset \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ou
$A \subset B$

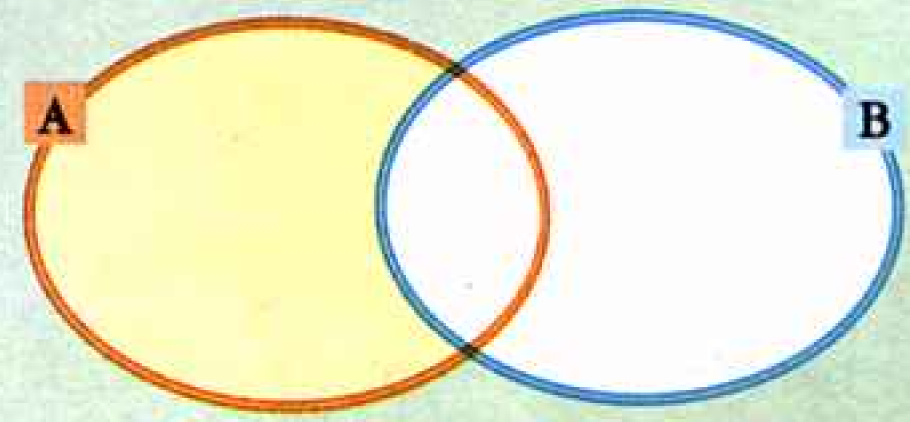


A negação da inclusão é representada por:

$A \not\subset B$ lê-se: *A* não está contido em *B*.

$A \not\subset B \Leftrightarrow \exists\, x \in A \mid x \notin B$

Exemplo:
Dados os conjuntos $A = \{0, 2, 4\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, temos:
$\{0, 2, 4\} \not\subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ou
$A \not\subset B$, pois $0 \in A$ e $0 \notin B$



Neste caso o conjunto *A* não é subconjunto de *B*.
Dizer que "*A* contém *B*" equivale a dizer que "*B* está contido em *A*".

$A \supset B$ lê-se: *A* contém *B*.

Exemplo:
Dados os conjuntos $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{-1, 1, 3\}$, temos:
$\{-1, 0, 1, 2, 3\} \supset \{-1, 1, 3\}$ ou
$A \supset B$

Dizer que "*A* não contém *B*" é o mesmo que dizer "*B* não está contido em *A*".

$A \not\supset B$ lê-se: *A* não contém *B*.

Exemplo:
Dados os conjuntos $A = \{-5, -3, -1\}$ e $B = \{-5, -4, -3, -2, -1\}$, temos:
$\{-5, -3, -1\} \not\supset \{-5, -4, -3, -2, -1\}$ ou
$A \not\supset B$

Exercícios

Resolvidos

1 Utilizar os símbolos $\subset$ ou $\not\subset$, relacionando os conjuntos: $A = \{x \mid x$ é letra do alfabeto latino$\}$; $B = \{a, e, i, o, u\}$ e $C = \{x \mid x$ é consoante do alfabeto latino$\}$

a) *A* e *B* b) *A* e *C* c) *B* e *A* d) *C* e *A*

a) $A \not\subset B$ (nem todo elemento de *A* pertence ao conjunto *B*)
b) $A \not\subset C$ (nem todo elemento de *A* pertence ao conjunto *C*)
c) $B \subset A$ (cada elemento de *B* também pertence ao conjunto *A*)
d) $C \subset A$ (cada elemento de *C* também pertence ao conjunto *A*)

2 Utilizar os símbolos $\supset$ ou $\not\supset$, relacionando os conjuntos: $A = \{1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...\}$, $B = \{3, 5, 8\}$ e $C = \{13, 21, 34\}$, de acordo com cada item:

a) *A* e *B* b) *B* e *A* c) *C* e *A* d) *A* e *C*

a) $A \supset B$ (todo elemento de *B* pertence ao conjunto *A*).
b) $B \not\supset A$ (nem todo elemento de *A* pertence ao conjunto *B*).
c) $C \not\supset A$ (nem todo elemento de *A* pertence ao conjunto *C*).
d) $A \supset C$ (todo elemento de *C* pertence ao conjunto *A*).

Propostos

5 Utilizando os símbolos $\subset$ ou $\not\subset$, relacione os conjuntos $A = \{0, -1, -3, -5\}$, $B = \{-3, -5\}$ e $C = \{0, -1\}$.

a) *A* e *B* c) *A* e *C*
b) *B* e *A* d) *C* e *A*

6 Utilizando os símbolos $\subset$ ou $\not\subset$, relacione os conjuntos $A = \{x \mid x$ é um estado físico da matéria$\}$, $B = \{$sólido, líquido$\}$ e $C = \{$líquido, gasoso$\}$.

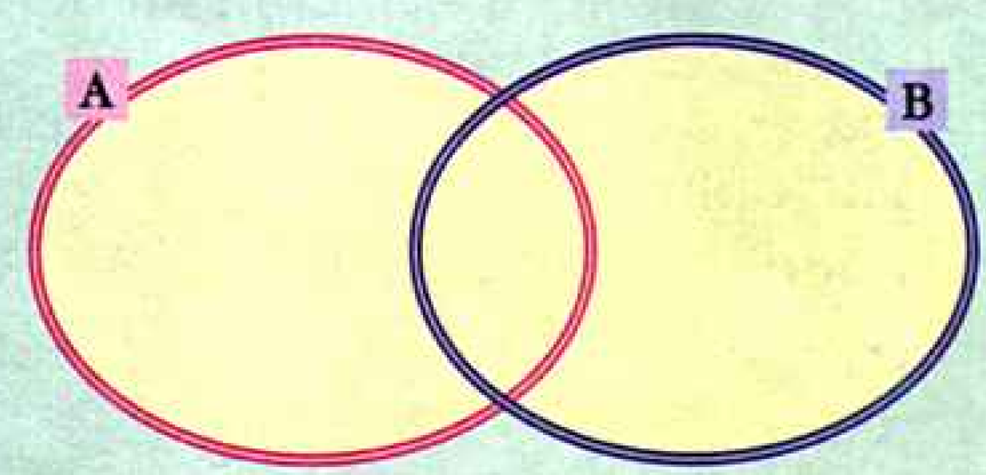
a) *A* e *B* c) *A* e *C*
b) *B* e *A* d) *C* e *A*

Reunião

O conjunto reunião de *A* com *B* é formado pelos elementos que pertencem a *A*, a *B* ou a ambos.

$A \cup B$ lê-se: *A* união *B*. **$A \cup B = \{x \mid x \in A$ ou $x \in B\}$**

Exemplo:
Dados os conjuntos $A = \{-3, -2, -1, 0\}$ e $B = \{-1, 0, 1\}$, temos:
$A \cup B = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$



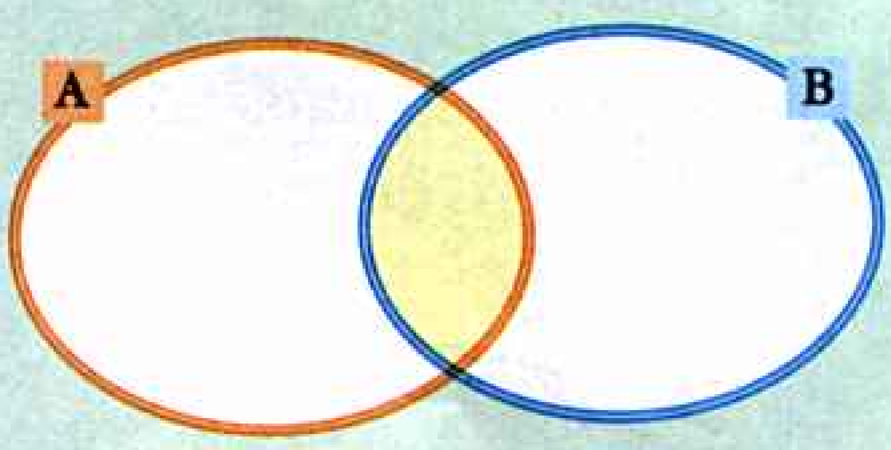
Intersecção

O conjunto intersecção de *A* com *B* é formado pelos elementos comuns a *A* e a *B*.

$A \cap B$ lê-se: *A* intersecção *B*.

$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$

Exemplo:
Dados os conjuntos $A = \{-3, -2, -1, 0\}$ e $B = \{-1, 0, 1\}$, temos:
$A \cap B = \{-1, 0\}$



Conjunto vazio

Conjunto vazio é o conjunto que não possui elemento.

$\varnothing$ ou $\{\ \}$ lê-se: conjunto vazio.

Exemplo:
Dados os conjuntos $A = \{0, -1, -2\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$, temos:
$A \cap B = \varnothing$

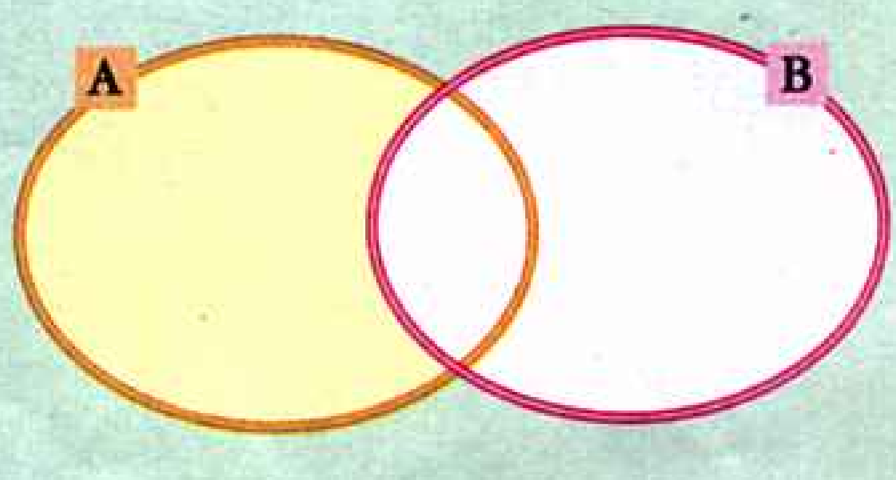
Diferença

O conjunto diferença de *A* e *B* é formado por elementos de *A* que não pertencem a *B*.

$A - B$ lê-se: *A* menos *B*.

$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$

Exemplo:
Dados os conjuntos $A = \{-4, -3, -2, -1, 0\}$ e $B = \{-2, -1, 0, 1\}$, temos:
$A - B = \{-4, -3\}$

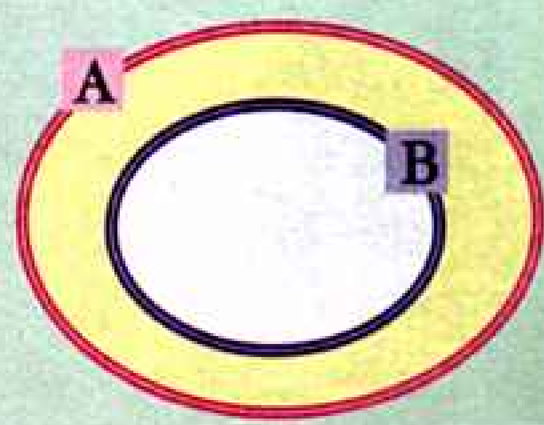


Complementar

O conjunto complementar de *B* em relação a *A* é dado por
$\complement_A B = A - B$ (Condição: $B \subset A$).

$\complement_A B$ **lê-se: complementar de *B* em relação a *A*.**

Exemplo:
Dados os conjuntos $A = \{-4, -3, -2, -1, 0\}$ e
$B = \{-2, -1, 0\}$, temos:
$\complement_A B = A - B = \{-4, -3\}$



Exercícios

Resolvidos

1 Dados os conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{0, 2, 4\}$ e $C = \{1, 3, 5\}$, determinar os seguintes conjuntos:

a) $A \cup B$ b) $A \cup C$ c) $B \cup C$ d) $A \cap B$ e) $A \cap C$ f) $B \cap C$

a) $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ (o conjunto reunião de *A* com *B* é formado pelos elementos que pertencem ao *A*, ao *B* ou a ambos)
b) $A \cup C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
c) $B \cup C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
d) $A \cap B = \{0, 2, 4\}$ (o conjunto intersecção de *A* com *B* é formado pelos elementos comuns ao *A* e ao *B*)
e) $A \cap C = \{1, 3, 5\}$
f) $B \cap C = \varnothing$

2 Dados os conjuntos $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{0, 1, 2\}$ e $C = \{0, -1, -2\}$, obter os conjuntos:

a) $\complement_A B$ b) $\complement_A C$ c) $\complement_B A$ d) $\complement_C A$

a) $\complement_A B = A - B = \{-2, -1\}$ (o conjunto diferença é formado por elementos do *A* que não pertencem ao *B*)
b) $\complement_A C = A - C = \{1, 2\}$
c) $\complement_B A = \varnothing$
d) $\complement_C A = \varnothing$

Propostos

7 Dados os conjuntos $A = \{a, e, i, o, u\}$, $B = \{a, e, i\}$ e $C = \{o, u\}$, determine os conjuntos abaixo:

a) $A \cup B$ c) $B \cup C$ e) $A \cap C$
b) $A \cup C$ d) $A \cap B$ f) $B \cap C$

8 Dados os conjuntos $A = \{0, -1, -2, -3, -4\}$, $B = \{0, -1\}$ e $C = \{-2, -3, -4\}$, escreva os conjuntos:

a) $\complement_A B$ b) $\complement_A C$ c) $\complement_B A$ d) $\complement_C A$

9 Dados os conjuntos A = {membrana celular, citoplasma, núcleo}, B = {membrana celular, citoplasma} e C = {núcleo}, escreva os conjuntos:

a) $\complement_A B$ b) $\complement_A C$ c) $\complement_B A$ d) $\complement_C A$

10 (Fatec-SP) O conjunto *A* tem 20 elementos; $A \cap B$ tem 12 elementos e $A \cup B$ tem 60 elementos. O número de elementos do conjunto *B* é:

a) 28 b) 36 c) 40 d) 48 e) 52

11 (UFAL) Se *A* e *B* são dois conjuntos não-vazios tais que:

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A - B = \{1, 3, 6, 7\}$ e $B - A = \{4, 8\}$

Então, $A \cap B$ é o conjunto:

a) $\varnothing$ b) {1, 4} c) {2, 5} d) {6, 7, 8} e) {1, 3, 4, 6, 7, 8}

12 (UCSal-BA) Três conjuntos não-vazios *A*, *B* e *C* são tais que $A = \{0, 1\}$, $B \cup C = \{0, 2, 3\}$, $A \cup B = \{0, 1, 2\}$ e $B \cap C = \{0\}$. Nessas condições, é verdade que *B* é o conjunto:

a) {0, 1} b) {0, 2} c) {0, 3} d) {1, 2} e) {1, 3}

2. Conjuntos numéricos

Os conjuntos numéricos, na forma como estão organizados atualmente, são o resultado de uma evolução científica e, como tal, podem sofrer inovações que atendam à adaptação do homem ao seu mundo.

Vamos analisar como evoluíram os números no decorrer da história.

Conjunto N dos números naturais

No estágio das civilizações primitivas (encontradas ainda hoje em alguns locais do planeta), as necessidades de contagem eram muito rudimentares, bastando a numeração que surgiu gradativa e naturalmente e que hoje representamos por 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9.

Posteriormente, a idéia de "não-existência" foi representada pelo zero, que alguns autores aceitam como número natural.

O mais importante é perceber quão maravilhosa foi essa criação do homem, pois com apenas dez símbolos conseguiu atender às necessidades da numeração escrita e, com isso, resolver os problemas de operação.

Atualmente esses algarismos combinados representam números que formam o que denominamos conjunto N dos números naturais.

$$\boxed{\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}}$$

Entre os subconjuntos de N, merece destaque:

$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

► O sinal * significa que o zero foi excluído do conjunto.

Exercícios

Resolvidos

1 Enumerar os elementos, escrevendo os conjuntos:

a) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } 7 \leq x < 11\}$ ou $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 7 \leq x < 11\}$

b) $B = \{x \mid x = 2n^3 - 1 \text{ e } 1 \leq n < 5 \text{ e } n \in \mathbb{N}\}$ ou $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2n^3 - 1 \text{ e } 1 \leq n < 5 \text{ e } n \in \mathbb{N}\}$

a) $A = \{7, 8, 9, 10\}$

b) Como $x = 2n^3 - 1$, $1 \leq n < 5$ e $n \in \mathbb{N}$, temos:

$n = 1 \Rightarrow x = 2(1)^3 - 1 = 1$

$n = 2 \Rightarrow x = 2(2)^3 - 1 = 15$

$n = 3 \Rightarrow x = 2(3)^3 - 1 = 53$

$n = 4 \Rightarrow x \Rightarrow 2(4)^3 - 1 = 127$

Logo: $B = \{1, 15, 53, 127\}$

2 Obter o valor numérico da expressão $y = \dfrac{a^3 + 3b}{(a - b)^2}$, para $a = 5$ e $b = 1$.

$$y = \frac{5^3 + 3 \cdot 1}{(5 - 1)^2} = \frac{125 + 3}{4^2} = \frac{128}{16} = 8$$

3 Determinar três números naturais e consecutivos cuja soma seja 33.

Considerando três números naturais e consecutivos (x, $x + 1$ e $x + 2$), temos:

$x + x + 1 + x + 2 = 33 \Rightarrow 3x = 30 \Rightarrow x = 10$

Assim: $x = 10$, $x + 1 = 11$ e $x + 2 = 12$

Portanto, os números são 10, 11 e 12.

Propostos

13 Enumerando os elementos, escreva os conjuntos:

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 5\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 5 \leq x \leq 9\}$

c) $C = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x \text{ é par}\}$

d) $D = \{x \mid x = 3n^2 - 1, 2 \leq n \leq 5 \text{ e } n \in \mathbb{N}\}$

14 Sendo $a = 2$ e $b = 1$, determine o valor numérico das expressões:

a) $y = a^2 + 2ab + b^2$

b) $y = (a - b)^3 + a^3 + b^3$

15 Calcule o valor da expressão $5x - 3y + xy$ para $x = 8$ e $y = 7$.

16 Dê o conjunto verdade das equações, no campo dos números naturais.

a) $3x - 9 = 0$

b) $4(x - 1) = 16$

c) $2x - 15 = 0$

d) $(x - x : 2) : 3 = 1$

e) $3x + 2[x + (x + 11) \cdot 3] = 88$

f) $x + 3[2x + 3(x + 4)] = 20$

17 Quantas raízes tem a equação $(a^2 - 4)x = a - 2$, quando $a = 2$?

18 Determine os números naturais ímpares x tais que $x > 5$ e $x < 12$.

19 Se a média aritmética de vários números é o quociente da soma desses números pela quantidade deles, determine a média aritmética dos números em cada item e indique as que representam números naturais.

a) 2 e 8

b) 3, 4 e 8

c) 8, 9, 10 e 5

d) 6 e 7

20 Se a média geométrica dos números a e b é $\sqrt{a \cdot b}$, a média geométrica dos números 50 e 18 é um número natural?

21 Se a soma das medidas dos lados de um triângulo retângulo é igual a 12 cm, calcule a área desse triângulo, sabendo que esses números são consecutivos.

22 A média aritmética das idades dos 30 alunos de uma classe é 18 anos. Qual é a soma dessas idades?

23 (UFCE) Um número positivo *N* de dois algarismos é tal que, ao inverterem-se os dois algarismos, o novo número formado excede *N* em 27 unidades. Se a soma dos algarismos de *N* é igual a 11, qual o valor de *N*?

24 (Santa Casa-SP) A média aritmética dos 100 números de um conjunto é 56. Retirando-se os números 48 e 64 desse conjunto, a média aritmética dos números restantes será:

a) 28
b) 28,5
c) 38
d) 48,5
e) 56

25 (Fuvest-SP) Um estudante terminou um trabalho que tinha *n* páginas. Para numerar todas essas páginas, iniciando com a página 1, ele escreveu 270 algarismos. Então o valor de *n* é:

a) 99
b) 112
c) 126
d) 148
e) 270

Conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros

Os números naturais começaram a ser insuficientes diante de casos como o das operações inversas. Na subtração, por exemplo, não havia possibilidade de se efetuar a operação quando o minuendo era menor que o subtraendo:

$$5 - 7 = -2$$

número negativo (não pertence ao conjunto dos naturais)

Podemos dizer que os primeiros vestígios de números negativos foram encontrados nos trabalhos de Diofanto de Alexandria por volta de 250 d.C. A idéia de negativo foi difícil de ser aceita, mas amadureceu com a colaboração de vários matemáticos, principalmente Descartes e Newton.

Os números negativos foram reunidos aos naturais, configurando o que chamamos modernamente de conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros.

$$\boxed{\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}}$$

Alguns subconjuntos de $\mathbb{Z}$ merecem destaque:

$\mathbb{Z}^* = \{..., -3, -2, -1, 1, 2, 3, ...\}$

$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ (conjunto dos números inteiros não-negativos)

$\mathbb{Z}_- = \{0, -1, -2, -3, ...\}$ (conjunto dos números inteiros não-positivos)

- Convencionaremos que o asterisco agregado ao símbolo de um conjunto numérico significa a supressão do zero desse conjunto; o sinal + indica a supressão dos números positivos; o sinal − indica a supressão dos números negativos; ainda podemos ter as combinações desses sinais: * com + e * com −.

Exercícios

Resolvidos

1 Relacionar os elementos e os conjuntos dados, utilizando os símbolos $\in$ ou $\notin$.

a) 4 e $\mathbb{N}$ b) -3 e $\mathbb{N}^*$ c) -6 e $\mathbb{Z}$ d) $\frac{2}{3}$ e $\mathbb{Z}_-$

a) $4 \in \mathbb{N}$ (o número 4 é um elemento do conjunto dos números naturais)
b) $-3 \notin \mathbb{N}^*$ (o número -3 não é um elemento do conjunto dos números naturais em que o zero é excluído)
c) $-6 \in \mathbb{Z}$ (o número -6 é um elemento do conjunto dos números inteiros)
d) $\frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}_-$ (o número $\frac{2}{3}$ não é um elemento do conjunto dos números inteiros não-positivos)

2 Determinar, no campo dos números inteiros, o conjunto verdade da equação:
$(2x - 1)^2 + 3(x + 1) = 7$

$(2x - 1)^2 + 3(x + 1) = 7$
$4x^2 - 4x + 1 + 3x + 3 = 7$
$4x^2 - x - 3 = 0$
$a = 4,\ b = -1$ e $c = -3$
$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-3) = 49$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{8} = \frac{1 \pm 7}{8} \Rightarrow x' = 1,\quad x'' = -\frac{3}{4}$$

Como $1 \in \mathbb{Z}$ e $-\frac{3}{4} \notin \mathbb{Z}$, então:
$V = \{1\}$

Propostos

26 Relacione os elementos e os conjuntos dados, utilizando os símbolos $\in$ ou $\notin$.

a) 6 e $\mathbb{N}$
b) $\frac{3}{5}$ e $\mathbb{Z}$
c) -12 e $\mathbb{N}^*$
d) $-\frac{1}{4}$ e $\mathbb{Z}_-$
e) 5 e $\mathbb{N}^*_+$
f) $(2 + 3)$ e $\mathbb{N}^*$
g) $(6 - 12)$ e $\mathbb{Z}^*_-$
h) -7 e $\mathbb{Z}_+$

27 Calcule o valor das expressões:

a) $2x + 6$, para $x = -3$
b) $3x^2 - 2x - 1$, para $x = -4$
c) $2\pi r(h + r)$, para $h = 2$ e $r = 5$
d) $\frac{3x^2y - 2xy^3 - xy}{2}$, para $x = -1$ e $y = -2$

28 (Fuvest-SP) O valor da expressão $a^3 - 3a^2x^2y^2$, para $a = 10$, $x = 2$ e $y = 1$, é:

a) 100
b) 50
c) 250
d) -150
e) -200

29 Determine, no campo dos números inteiros, o conjunto verdade das equações:

a) $x^2 - 2(x + 1) = -2x + 7$
b) $(x + 3) \cdot (x - 2) = 0$
c) $2x^2 + 1 = 3x$
d) $3 \cdot (2x - 1)^2 - (2x + 1) \cdot (2x - 1) = 2x + 1$
e) $\frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x} = \frac{13}{6}$, onde $x \neq 0$ e $x \neq -1$

30 Ache um número cujo produto por 12 seja igual ao mesmo número aumentado de 22.

31 A soma de três números inteiros e consecutivos é 36. Quais são esses números?

32 A soma de três números inteiros pares e consecutivos é 30. Quais são esses números?

Conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais

A idéia de medir está ligada à de comparar, ou seja, quantas vezes uma determinada distância ou superfície é maior ou menor do que determinada unidade adotada como padrão.

Se, por exemplo, tentarmos medir a altura de um prédio com uma unidade como o metro, podemos obter eventualmente um número não inteiro e estaríamos diante da idéia de uma fração de metro.

O conjunto dos números racionais é formado por todos os números que podem ser escritos na forma $\frac{a}{b}$, onde *a* é um número inteiro qualquer e *b*, um número inteiro qualquer diferente de zero. É indicado por $\mathbb{Q}$ e representado da seguinte forma:

$$\boxed{\mathbb{Q} = \left\{x \mid x = \frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^*\right\}}$$

Todo número racional também pode ser escrito na forma decimal, que pode ser:
Exata: quando conseguimos representá-lo por um número finito de algarismos.

Exemplos:

- 0,6 pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, isto é, $0{,}6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$; $3 \in \mathbb{Z}$ e $5 \in \mathbb{Z}^*$
- 7 pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, isto é, $7 = \frac{7}{1}$; $7 \in \mathbb{Z}$ e $1 \in \mathbb{Z}^*$
- 0,18 pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, isto é, $0{,}18 = \frac{18}{100}$; $18 \in \mathbb{Z}$ e $100 \in \mathbb{Z}^*$

Não-exata, periódica: quando sua representação é periódica e possui um número infinito de algarismos.

Exemplos:

- 0,777... pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, isto é, $0{,}777... = \frac{7}{9}$; $7 \in \mathbb{Z}$ e $9 \in \mathbb{Z}^*$
- 0,1313... pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, isto é, $0{,}1313... = \frac{13}{99}$; $13 \in \mathbb{Z}$ e $99 \in \mathbb{Z}^*$

Exercícios

Resolvidos

1 Calcular os valores racionais de:

a) $\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$

b) $0{,}2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{10}$

a) $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{8+3}{12} = \frac{11}{12}$

b) $0{,}2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{10} = \frac{2}{10} - \frac{1}{4} + \frac{1}{10} =$

$= \frac{4}{20} - \frac{5}{20} + \frac{2}{20} = \frac{1}{20}$

2 Determinar o número racional $\frac{x}{y}$ sendo:

$$x = \frac{0{,}3 + \frac{1}{4}}{0{,}1} \quad \text{e} \quad y = \frac{2 - \frac{1}{2}}{2 + \frac{1}{2}}.$$

$$x = \frac{0{,}3 + \frac{1}{4}}{0{,}1} = \frac{\frac{3}{10} + \frac{1}{4}}{\frac{1}{10}} = \frac{\frac{6+5}{20}}{\frac{1}{10}} = \frac{\frac{11}{20}}{\frac{1}{10}} = \frac{11}{2} \Rightarrow y = \frac{2 - \frac{1}{2}}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{4-1}{2}}{\frac{4+1}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{3}{5}$$

Logo: $\frac{x}{y} = \frac{\frac{11}{2}}{\frac{3}{5}} = \frac{55}{6}$

Propostos

33 Calcule os valores racionais de:

a) $\frac{3}{4} + \frac{1}{6}$

b) $\frac{2}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{2}$

c) $1 - 0{,}1$

d) $2 + 1{,}3 - 0{,}4$

e) $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{10}$

f) $\frac{1 + \frac{2}{5}}{2 - \frac{1}{4}} - 3$

34 (Fuvest-SP) Calcule:

a) $\frac{1}{10} - \frac{1}{6}$

b) $\frac{0{,}2 \cdot 0{,}3}{3{,}2 - 2{,}0}$

35 (Fuvest-SP) O valor da expressão $\frac{a+b}{1-ab}$, para $a = \frac{1}{2}$ e $b = \frac{1}{3}$ é:

a) 5
b) 1
c) 0
d) 3
e) 6

36 (FAAP-SP) Expresse $A = \frac{(-2)^0 \cdot [-(-2)^3] \cdot 5}{(-3)^{-1} \cdot [-(5^{-2})]}$ na forma de um número racional inteiro.

37 (Fuvest-SP) O valor de $(0{,}2)^3 + (0{,}16)^2$ é:

a) 0,0264
b) 0,0336
c) 0,1056
d) 0,2568
e) 0,6256

38 (Cesgranrio-RJ) Considere a expressão $0{,}999\ldots + \frac{\frac{1}{5} + \frac{1}{3}}{\frac{3}{5} - \frac{1}{5}}$. Efetuando as operações indicadas e simplificando, temos:

a) $\frac{9}{10}$
b) $\frac{7}{3}$
c) $\frac{19}{10}$
d) $\frac{15}{9}$
e) 1

39 (Fuvest-SP) Calcule $\dfrac{1-\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\right)}{\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}}$.

40 Simplifique:

$$\dfrac{\left(3-\frac{5}{4}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}}{\dfrac{\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\cdot 2}{3}}$$

41 Calcule o valor racional de $\dfrac{x}{x+\dfrac{1}{x+\frac{1}{x}}}$, para $x = 3$.

42 (Fuvest-SP) Ache a média aritmética dos números $\frac{3}{5}$, $\frac{13}{4}$ e $\frac{1}{2}$.

43 (Fuvest-SP) Calcule o valor numérico de $\dfrac{-x^2+xy}{y}$, para $x = -0{,}1$ e $y = 0{,}001$.

44 Determine, em $U = \mathbb{Q}$, o conjunto verdade das equações:

a) $3x + \frac{1}{2} = x - 1$

b) $\dfrac{27+x}{4} = x + 3$

c) $\dfrac{4x+1}{2} + \dfrac{x+3}{4} = \dfrac{3x+1}{4}$

d) $\dfrac{x+7}{4} - \dfrac{x-7}{2} = \dfrac{6x+1}{7} + 4$

45 (UFGO) Diminuindo-se 6 anos da idade de minha filha, obtém-se os $\frac{3}{5}$ de sua idade. A idade de minha filha, em anos, é:

a) 9 c) 12 e) 18
b) 10 d) 15

46 Qual é o número que devemos acrescentar a ambos os termos da fração $\frac{3}{7}$ para que ela se torne igual a $\frac{1}{2}$?

47 (FGV-SP) Um número de dois algarismos é tal que o algarismo das dezenas é igual a $\frac{3}{4}$ do algarismo das unidades. Se os algarismos forem permutados entre si, obtém-se um número que é 9 unidades maior do que o primeiro. Então, a soma dos dois algarismos é:

a) 8 c) 6 e) 7
b) 5 d) 9

48 (Cesgranrio-RJ) Um atleta, correndo com velocidade constante, completou a maratona em *M* horas. A fração do percurso que ele correu em 2M minutos foi:

a) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{15}$ e) $\frac{1}{120}$
b) $\frac{1}{6}$ d) $\frac{1}{30}$

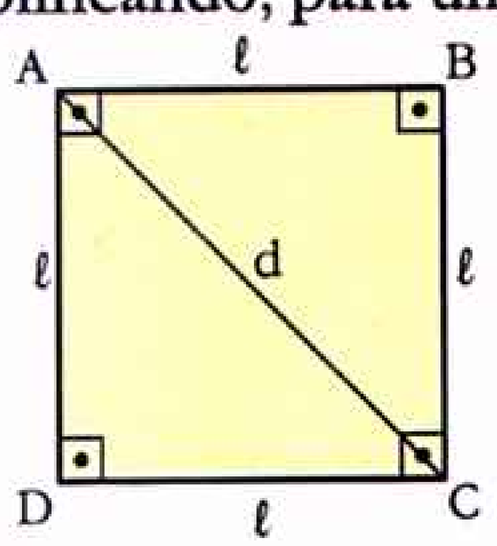
49 (Fuvest-SP) A diferença entre $\frac{1}{3}$ e seu valor aproximado 0,333 é igual a x% do valor exato. Então o valor de x é:

a) 0,0001 c) 0,01 e) 0,3
b) 0,001 d) 0,1

Conjunto $\mathbb{I}_R$ dos números irracionais

Os números racionais não solucionaram muitos problemas envolvendo a Geometria e a Aritmética. Em determinadas figuras, alguns segmentos não têm uma unidade de medida que caiba um número inteiro de vezes em cada um deles; são os chamados segmentos incomensuráveis. Os pitagóricos já haviam acusado essa dificuldade com relação à diagonal e ao lado do quadrado.

Exemplificando, para um quadrado de lado $\ell = 1$ e diagonal d, temos:



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ABC, obtemos:

$$d^2 = 1^2 + 1^2$$
$$d^2 = 2$$
$$d = \sqrt{2} = 1{,}4142\ldots \notin \mathbb{Q}$$

Fica evidente que nem sempre a raiz de um número racional é um número racional. Para que a teoria dos números racionais evoluísse foi necessário o avanço dos estudos sobre infinitos e geometria analítica. Foram gastos alguns séculos para que, entre tantas contribuições, chegássemos ao século XIX com Dedekind (J.W.R. Dedekind, 1831-1916) e Cantor (Georg Cantor, 1845-1918), dando um rigor científico a essa teoria.

O conjunto $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ dos números irracionais é formado por números cujas formas decimais não são exatas e nem periódicas.

Exemplos:

- O número $\pi = 3{,}141592...$, resultado da divisão da medida do comprimento de uma circunferência pela medida do seu diâmetro.
- O número **e** $= 2{,}718...$, conhecido como número de Euler (Leonhard Euler, 1707-1783).
- Radicais do tipo $\sqrt{2} = 1{,}4142...$; $\sqrt{3} = 1{,}7320...$; $\sqrt{5} = 2{,}2360...$

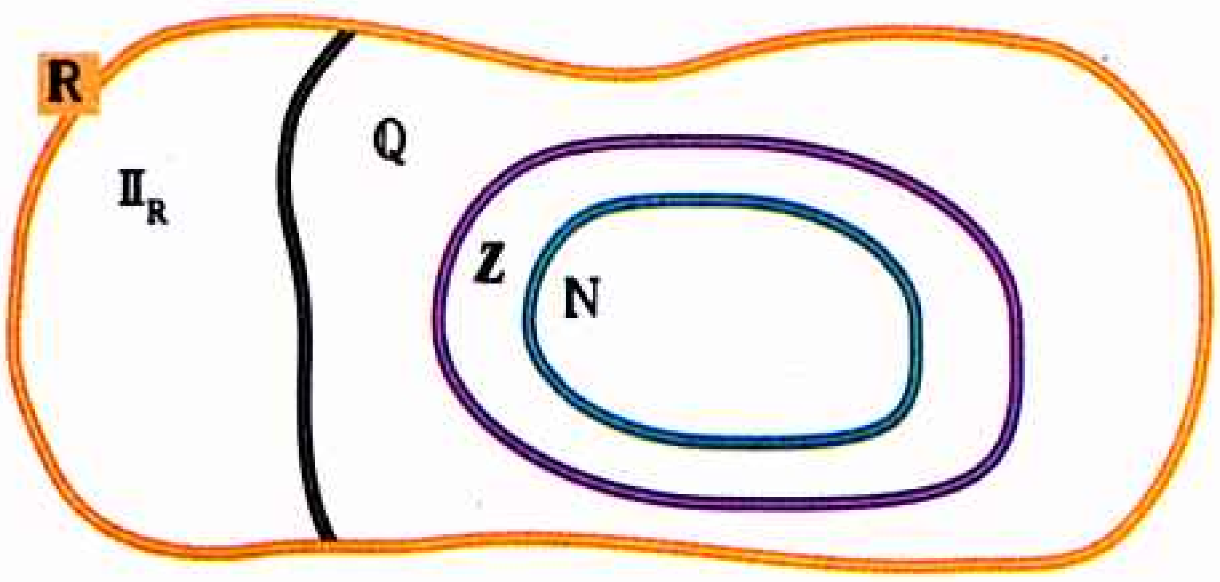
Conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais

O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é formado pela reunião do conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais com o conjunto $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ dos números irracionais.

Exemplos:

$0; -3; \frac{4}{5}; 0{,}13; 0{,}222...; 3{,}1010010001...; \sqrt{2}; -4\sqrt{259}; \mathbf{e}; -789; \pi$

Representação dos conjuntos numéricos através de diagramas:



Observe que o conjunto dos números irracionais é o complemento do conjunto dos números racionais em relação ao conjunto dos reais, e vice-versa.

Exercícios

Resolvidos

1 Relacionar os elementos e os conjuntos dados, utilizando os símbolos $\in$ ou $\notin$.

a) 0,4 e $\mathbb{Q}$ c) 0,444... e $\mathbb{Q}$
b) $\sqrt{2}$ e $\mathbb{Q}$ d) -1 e $\mathbb{R}^*$

a) $0{,}4 \in \mathbb{Q}$ (o número $0{,}4 = \frac{4}{10}$ é elemento do conjunto dos números racionais)

b) $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (o número $\sqrt{2}$ não pertence ao conjunto dos números racionais)

c) $0{,}444... \in \mathbb{Q}$ (o número $0{,}444... = \frac{4}{9}$ é elemento do conjunto dos números racionais)

d) $-1 \in \mathbb{R}^*$ (o número -1 é elemento do conjunto dos números reais, em que o zero é excluído)

2 Assinalar com *V* as sentenças verdadeiras e com *F*, as falsas.

a) $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}$ d) $\mathbb{Q}_- \subset \mathbb{Q}_+$
b) $\mathbb{N} \not\subset \mathbb{Z}$ e) $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$
c) $\mathbb{Z}_+ \not\subset \mathbb{Z}$ f) $\mathbb{Z}_+^* \subset \mathbb{Q}$

a) *V* (o conjunto dos números naturais sem o número zero *está contido* no conjunto dos números naturais)
b) *F* (o conjunto dos números naturais *está contido* no conjunto dos números inteiros)
c) *F* (o conjunto dos números inteiros não-negativos *está contido* no conjunto dos números inteiros)
d) *F* (o conjunto dos números racionais não-positivos *não está contido* no conjunto dos números racionais não-negativos)
e) *V* (o conjunto dos números naturais *está contido* no conjunto dos números reais)
f) *V* (o conjunto dos números inteiros positivos *está contido* no conjunto dos números racionais)

3 Representar os seguintes conjuntos por extensão de seus elementos:

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 6\}$
b) $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -4 < x \leq 2\}$
c) $C = \{x \in \mathbb{N} \mid 2x - 1 = 7\}$
d) $D = \{x \in \mathbb{Z}^* \mid x^2 - 2x = 0\}$
e) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x + 1 = 0\}$

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 6\}$
O conjunto *A* é formado pelos números naturais menores ou iguais a 6. Assim:
$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -4 < x \leq 2\}$
O conjunto *B* é formado pelos números inteiros compreendidos entre -4 e 2, exclusive o -4 e inclusive o 2. Desse modo:
$B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$

c) $C = \{x \in \mathbb{N} \mid 2x - 1 = 7\}$
O conjunto *C* é formado por um número natural, raiz da equação $2x - 1 = 7$:
$2x - 1 = 7 \Rightarrow 2x = 7 + 1 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4$
Então: $C = \{4\}$

d) $D = \{x \in \mathbb{Z}^* \mid x^2 - 2x = 0\}$

O conjunto *D* é formado pela raiz da equação $x^2 - 2x = 0$, elemento do conjunto dos números inteiros não-nulos.

$x^2 - 2x = 0$

$x \cdot (x - 2) = 0$ → $x' = 0$ (não convém, pois $x \in \mathbb{Z}^*$); $x'' = 2$

Então: $D = \{2\}$.

e) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x + 1 = 0\}$

O conjunto *E* é formado por números reais, raízes da equação $x^2 - x + 1 = 0$, onde $a = 1$, $b = -1$ e $c = 1$. Assim:

$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3$

Como $\Delta < 0$, a equação não admite raiz real; então o conjunto *E* é um conjunto vazio.

$E = \varnothing$

4 Racionalizar o denominador das frações:

a) $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ b) $\dfrac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$

a) $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

b) $\dfrac{(2 + \sqrt{3})}{(2 - \sqrt{3})} \cdot \dfrac{(2 + \sqrt{3})}{(2 + \sqrt{3})} = \dfrac{4 + 4\sqrt{3} + 3}{4 - 3} = 7 + 4\sqrt{3}$

5 Determinar, em $U = \mathbb{R}$, o conjunto verdade da equação $x^2 - 2x - 1 = 0$.

$a = 1$, $b = -2$ e $c = -1$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 8$

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \dfrac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$ → $x' = 1 + \sqrt{2}$; $x'' = 1 - \sqrt{2}$

$V = \{1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\}$

Propostos

50 Relacione os elementos e os conjuntos dados, utilizando os símbolos $\in$ ou $\notin$.

a) $\sqrt{2}$ e $\mathbb{R}$
b) 0,333 e $\mathbb{R}$
c) $\sqrt{-3}$ e $\mathbb{R}$
d) $(3 : 7)$ e $\mathbb{R}$
e) $(0{,}2 \cdot 0{,}1)$ e $\mathbb{Z}^*$
f) -234 e $\mathbb{Z}_-$
g) 0,777... e $\mathbb{R}_+$
h) $-\dfrac{1}{100}$ e $\mathbb{Q}_-$

51 Assinale com *V* as sentenças verdadeiras e, com *F*, as falsas.

a) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$
b) $\mathbb{N}^* \not\subset \mathbb{N}$
c) $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}$
d) $\mathbb{Z}_+ \subset \mathbb{Z}$
e) $\mathbb{Z}_- \not\subset \mathbb{Z}$
f) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
g) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$
h) $\mathbb{Z}_+ \subset \mathbb{Q}_+$
i) $\mathbb{N} \not\subset \mathbb{R}$
j) $\mathbb{R}_+^* \subset \mathbb{R}$

52 Represente cada um dos seguintes conjuntos por extensão de seus elementos:

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leqslant 4\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x < 6\}$

c) $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geqslant -3\}$

d) $D = \{x \in \mathbb{Z}^* \mid -3 \leqslant x \leqslant 1\}$

53 Considerando *A* e *B* como subconjuntos não-vazios de $\mathbb{R}$ mostre que é correto afirmar:

$C_{\mathbb{R}}(B \cup C_{\mathbb{R}}A) \cap C_{\mathbb{R}}(A - B) = \varnothing$

54 (UFU-MG) Sejam os conjuntos *A* e *B*. Assinale a proposição falsa.

a) $x \in A - B \Leftrightarrow x \in A$ e $x \notin B$

b) $\forall A, \forall B$ tem-se $A - B \subset A$

c) $A \subset B \Rightarrow \complement_A B = B - A$

d) $\nexists A \mid A \cup B = A$

e) $\forall A, \forall B$ tem-se $A \subset A$ e $B \subset B$

55 (Mack-SP) Dados os conjuntos *A*, *B* e *C*, não-vazios, sabe-se que $A \subset B$. Então sempre se tem:

a) $A \cap C = \varnothing$

b) $A \cap B = \varnothing$

c) $B \cap C = \varnothing$

d) $A \cap B \subset C$

e) $A \cap C \subset B$

56 Determine o valor das expressões:

a) $(5 - \sqrt{2})^2$

b) $(3 + \sqrt{2})^2 + (3 - \sqrt{2})^2$

c) $\sqrt[3]{1000} + \sqrt[4]{81} - 3\sqrt[4]{0{,}0016}$

d) $\sqrt{2} \cdot (\sqrt{50} - 3\sqrt{18} + 5\sqrt{98})$

e) $(2\sqrt{7} + 5\sqrt{3}) \cdot (2\sqrt{7} - 5\sqrt{3})$

f) $(1 - \sqrt{3}) \cdot (1 + \sqrt{2})$

g) $(3\sqrt{2} + \sqrt{3} + 1) \cdot (\sqrt{2} - 2\sqrt{3} - 1)$

h) $(\sqrt{m} - \sqrt{2} + x) \cdot (\sqrt{m} + \sqrt{2} - x)$, onde $m \geqslant 0$

57 Racionalize os denominadores das frações:

a) $\dfrac{4}{\sqrt{2}}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$

c) $\dfrac{\sqrt{7} + \sqrt{2}}{\sqrt{7} - \sqrt{2}}$

58 (Fuvest-SP) O valor da expressão $\dfrac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}$ é:

a) $\sqrt{2}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

c) 2

d) $\dfrac{1}{2}$

e) $\sqrt{2} + 1$

59 (Mack-SP) $\dfrac{1}{1 - \sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2} + 1}$ é igual a:

a) $\sqrt{2}$

b) -2

c) 2

d) $2 \cdot (\sqrt{2} + 1)$

e) $-2\sqrt{2}$

60 Racionalize o denominador da fração $\dfrac{1}{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}$.

61 (Fuvest-SP) Qual é o valor da expressão $\dfrac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} + \dfrac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$?

a) $\sqrt{3}$

b) 4

c) 3

d) 2

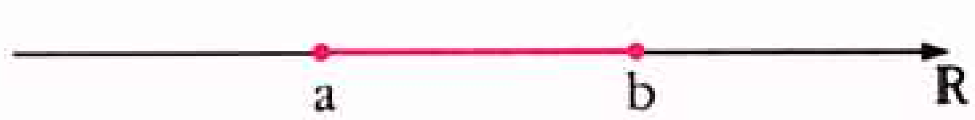
e) $\sqrt{2}$

Intervalos reais

Os intervalos reais são subconjuntos dos números reais. Serão caracterizados por desigualdades, conforme veremos a seguir.

Considerando dois números reais, *a* e *b*, sendo $a < b$, temos:

Intervalo fechado



Notação: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$

A este intervalo pertencem todos os números compreendidos entre *a* e *b*, inclusive *a* e *b*.

Exemplo:

Notação: $[2, 5] = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 5\}$

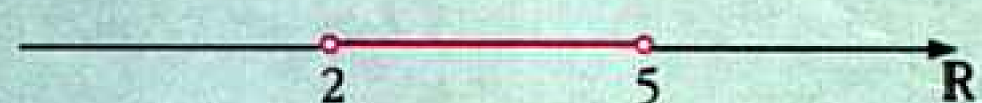
A este intervalo pertencem todos os números compreendidos entre 2 e 5, inclusive 2 e 5.

Intervalo aberto

Notação: $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

A este intervalo pertencem todos os números compreendidos entre *a* e *b*, não incluindo nem *a* nem *b*.

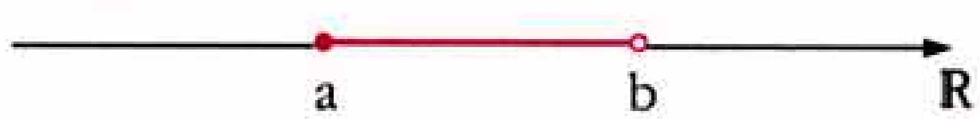
Exemplo:



Notação: $]2, 5[= \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 5\}$

A este intervalo pertencem todos os números compreendidos entre 2 e 5, não incluindo 2 e 5.

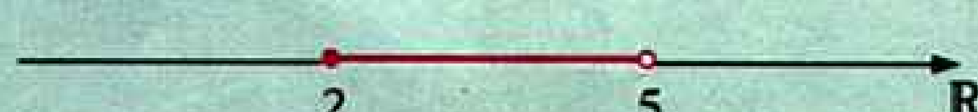
Intervalo fechado à esquerda e aberto à direita



Notação: $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

A este intervalo pertencem todos os números compreendidos entre *a* e *b*, incluindo *a* e não incluindo *b*.

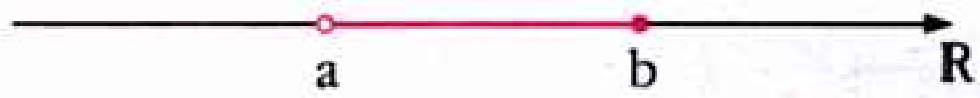
Exemplo:



Notação: $[2, 5[= \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x < 5\}$

A este intervalo pertencem todos os números compreendidos entre 2 e 5, incluindo o 2 e não incluindo o 5.

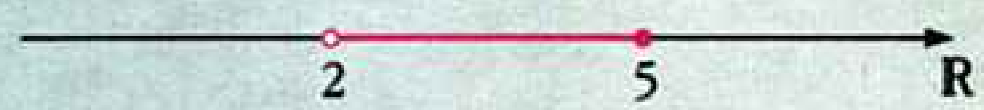
Intervalo aberto à esquerda e fechado à direita



Notação: $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

A este intervalo pertencem todos os números compreendidos entre *a* e *b*, não incluindo *a* e incluindo *b*.

Exemplo:



Notação: $]2, 5] = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq 5\}$

A este intervalo pertencem todos os números compreendidos entre 2 e 5, não incluindo o 2 e incluindo o 5.

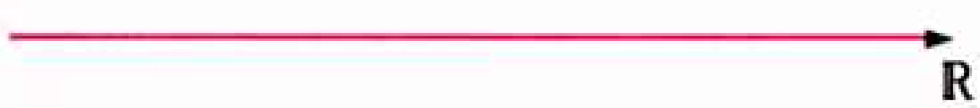
Intervalos indicados pelo símbolo ∞ (infinito)

Notação: $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$

Notação: $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$

Notação: $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$

Notação: $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$



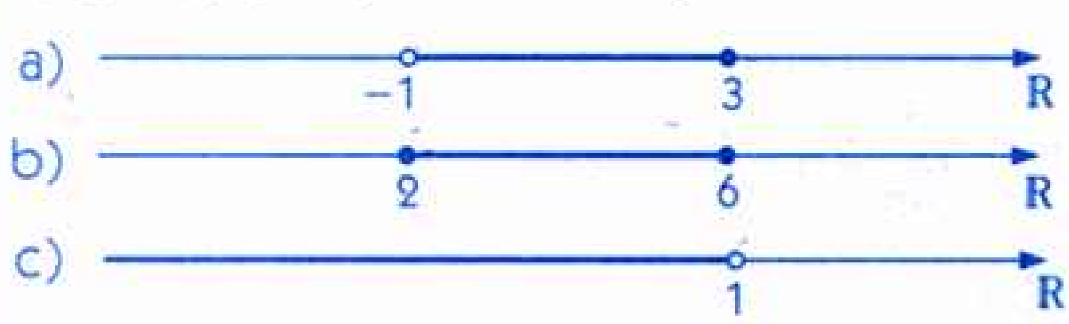
Notação: $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$

► — Os números reais *a* e *b* são denominados extremos dos intervalos.
— O intervalo é sempre aberto na indicação do infinito.

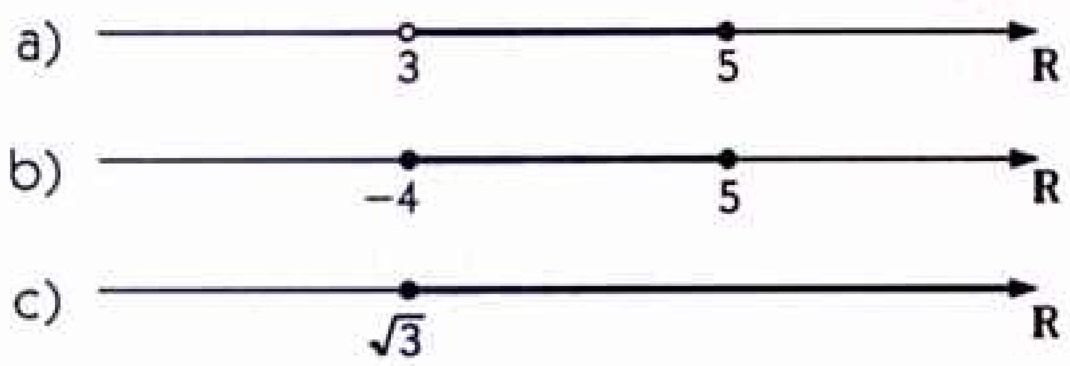
Exercícios

Resolvidos

1 Representar na reta real os intervalos:
a) $]-1, 3] = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 3\}$
b) $[2, 6] = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 6\}$
c) $]-\infty, 1[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$



2 Escrever a notação para os seguintes intervalos, representados na reta real:



a) $]3, 5] = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x \leq 5\}$

b) $[-4, 5] = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x \leq 5\}$

c) $[\sqrt{3}, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \sqrt{3}\}$

Propostos

62 Represente na reta real os intervalos:

a) $[6, 8] = \{x \in \mathbf{R} \mid 6 \leq x \leq 8\}$

b) $]-3, 5] = \{x \in \mathbf{R} \mid -3 < x \leq 5\}$

c) $]-2, 6[= \{x \in \mathbf{R} \mid -2 < x < 6\}$

d) $[-1, 5[= \{x \in \mathbf{R} \mid -1 \leq x < 5\}$

e) $]-\infty, 1] = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leq 1\}$

f) $]4, +\infty[= \{x \in \mathbf{R} \mid x > 4\}$

g) $\mathbf{R}_+^* =]0, +\infty[= \{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\}$

h) $\mathbf{R}_-^* =]-\infty, 0[= \{x \in \mathbf{R} \mid x < 0\}$

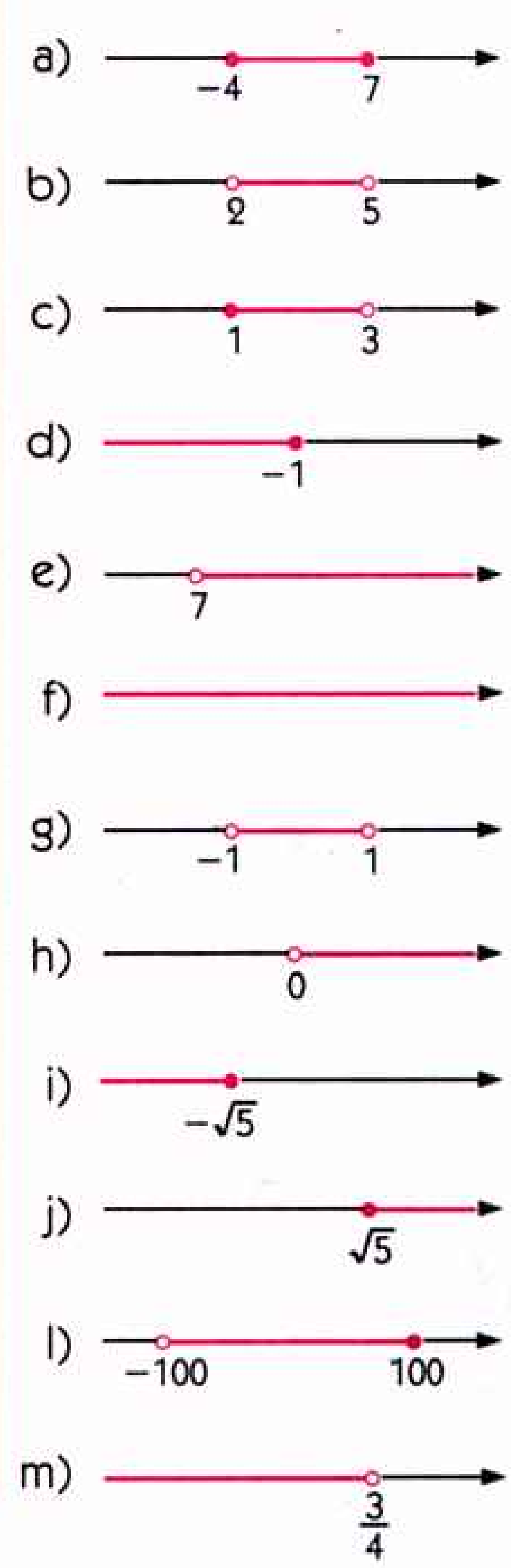
i) $\mathbf{R}_+ = [0, +\infty[= \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq 0\}$

j) $\mathbf{R}^* = \{x \in \mathbf{R} \mid x \neq 0\} = \mathbf{R} - \{0\}$

l) $\mathbf{R}$

m) $\mathbf{R} - \{1\}$

63 Escreva a notação para os seguintes intervalos, representados na reta $\mathbf{R}$.



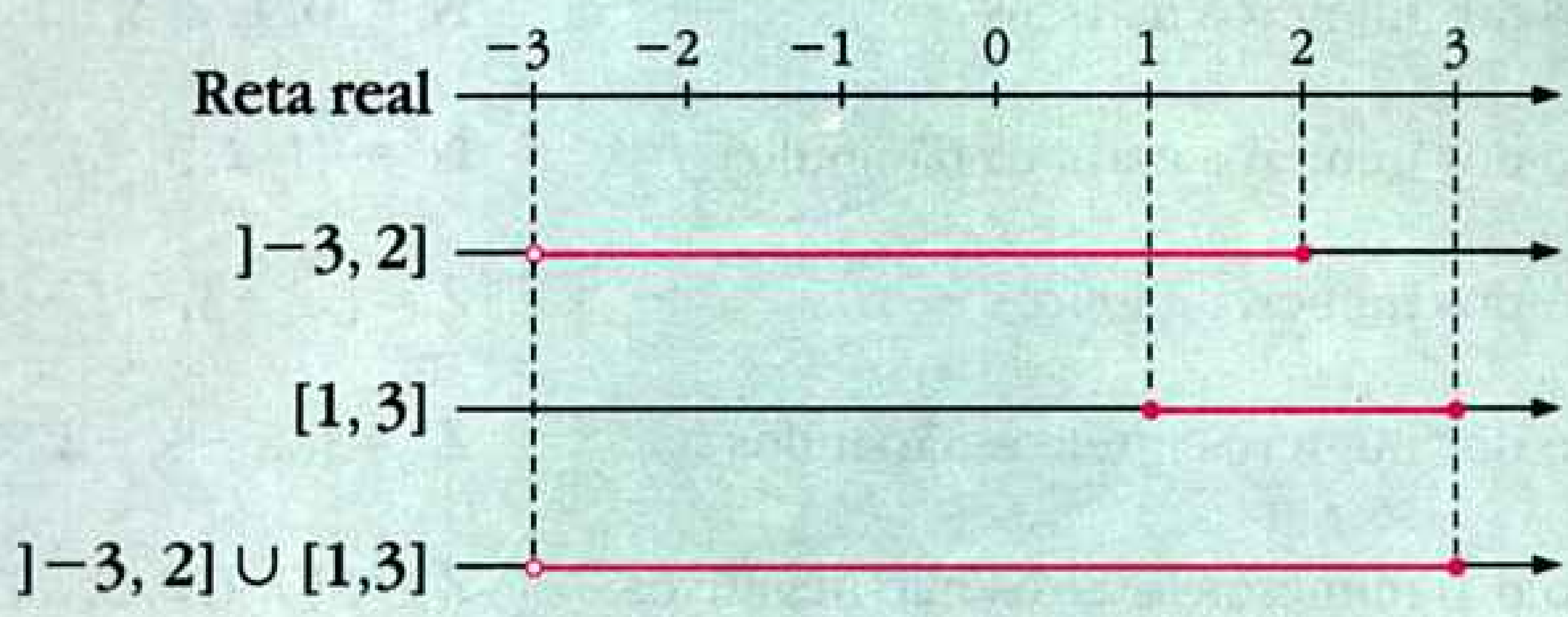
União e intersecção de intervalos

Aplicamos as definições de união e de intersecção de conjuntos na representação gráfica dos intervalos, projetando-os num mesmo eixo.

Exemplos:

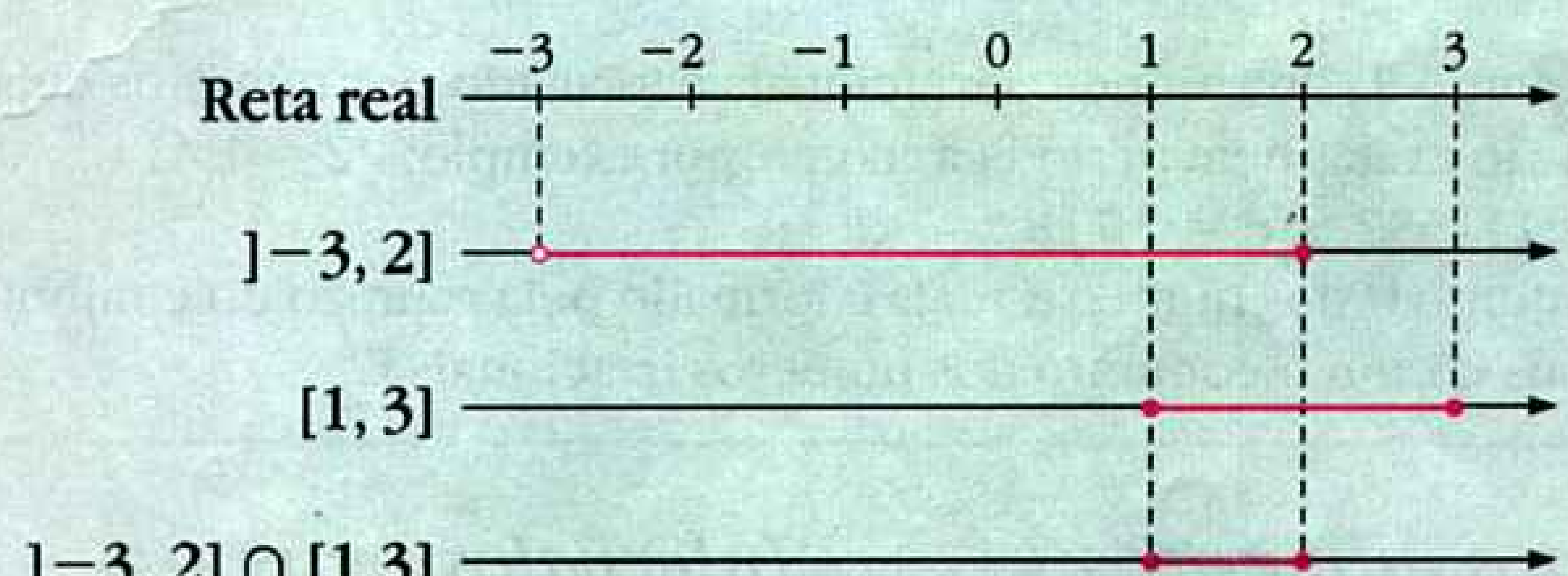
Sejam os intervalos $]-3, 2]$ e $[1, 3]$:

a) $]-3, 2] \cup [1, 3]$



Então: $]-3, 2] \cup [1, 3] =]-3, 3]$

b) $]-3, 2] \cap [1, 3]$



Então: $]-3, 2] \cap [1, 3] = [1, 2]$

Propostos

64 Determine a união dos seguintes intervalos:

a) $[1, 3] \cup [2, 5]$

b) $]-1, 4] \cup [3, 7]$

c) $]2, 4[\cup [1, 3[$

d) $[-5, 5] \cup [0, 3[$

e) $]-\infty, 1] \cup [1, 3]$

65 Determine a intersecção dos seguintes intervalos:

a) $[1, 3] \cap [2, 5]$

b) $[-2, 3] \cap [0, 6]$

c) $]-3, 2] \cap [2, 5]$

d) $]1, 3] \cap]-\infty, 8]$

e) $[-1, 3] \cap]0, +\infty[$

Ficha-resumo

Conjuntos: operações

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$

$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$

$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$

$\complement_A B = A - B$, onde $B \subset A$

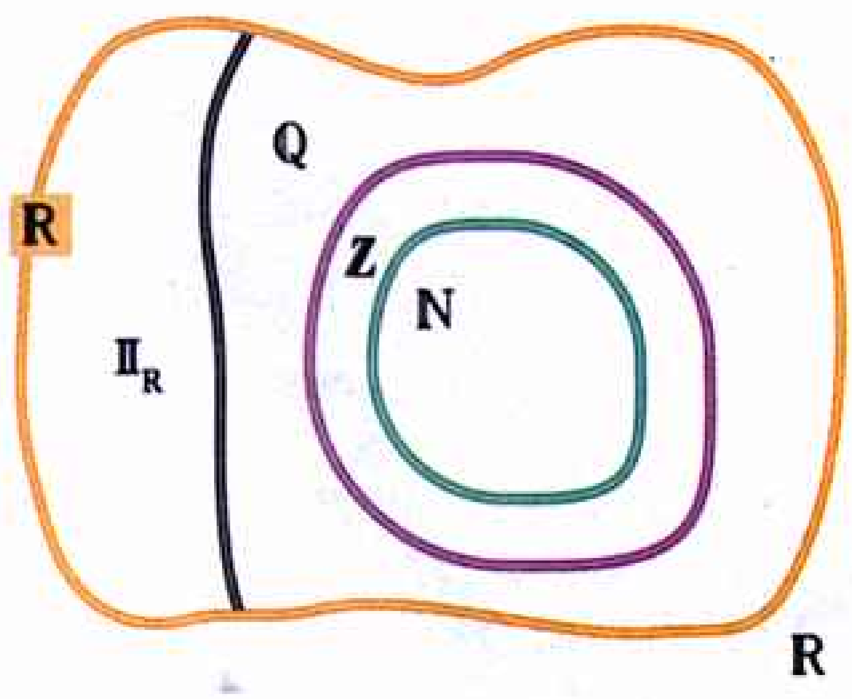
Conjuntos Numéricos

Conjunto dos números naturais	$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$
Conjunto dos números naturais não-nulos	$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ...\}$
Conjunto dos números inteiros	$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$
Conjunto dos números inteiros não-nulos	$\mathbb{Z}^* = \{..., -3, -2, -1, 1, 2, 3, ...\}$
Conjunto dos números inteiros não-negativos	$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, ...\}$
Conjunto dos números inteiros não-positivos	$\mathbb{Z}_- = \{..., -3, -2, -1, 0\}$
Conjunto dos números racionais	$\mathbb{Q} = \{x \mid x = \frac{a}{b};\ a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^*\}$

O conjunto $\mathbb{I}_R$ dos números irracionais é formado por números cujas formas decimais não são exatas nem periódicas como, por exemplo: $\sqrt{2} = 1{,}414...$; $\sqrt{3} = 1{,}732...$; $\pi = 3{,}141592...$; $e = 2{,}718...$

O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é formado pela reunião do conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ com o conjunto dos números irracionais $\mathbb{I}_R$.

Conjuntos numéricos: diagramas



Intervalos reais

Dados os números reais *a* e *b*, tais que $a < b$

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

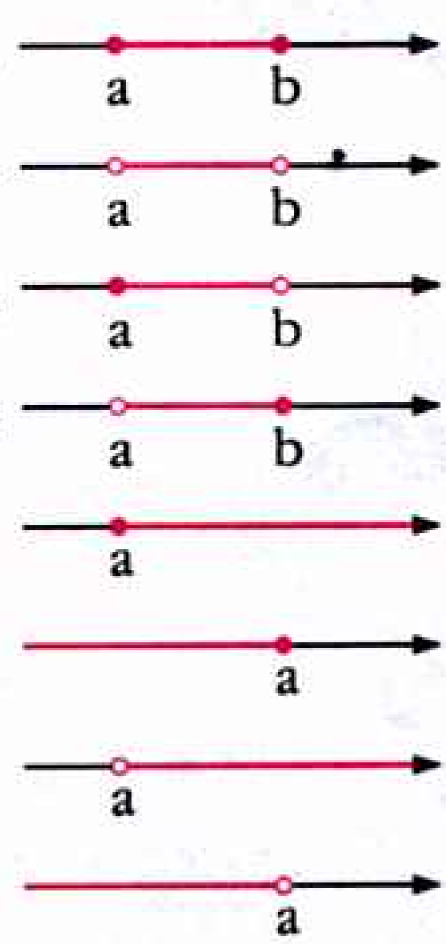
$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$

$]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$

$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$

$]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$



Exercícios

Complementares

66 Relacione os elementos e os conjuntos dados, utilizando os símbolos $\in$ ou $\notin$.

a) 4 e $\mathbb{N}$
b) -7 e $\mathbb{N}$
c) 0 e $\mathbb{N}^*$
d) $(5 - 8)$ e $\mathbb{Z}$
e) $\frac{6}{7}$ e $\mathbb{Z}$
f) 0,3 e $\mathbb{Q}$
g) $\sqrt{-5}$ e $\mathbb{R}$
h) $-0,1$ e $\mathbb{Q}$
i) $-\sqrt{2}$ e $\mathbb{R}$
j) 0 e $\mathbb{R}_+$

67 Assinale com *V* as sentenças que estão em concordância e, com *F*, as que estão em discordância:

a) $\mathbb{N} \not\subset \mathbb{Z}$
b) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}_+$
c) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
d) $\mathbb{N}^* \not\subset \mathbb{R}$
e) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$
f) $\mathbb{Q}_+ \subset \mathbb{R}_+$

68 (UFMG) Se $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{5}{8}\right\}$,

$B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{2}{3}\right\}$ e

$C = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{5}{8} \leq x \leq \frac{3}{4}\right\}$,

então $(A \cup C) \cap B$ é:

a) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{2}{3}\right\}$
b) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{3}{4}\right\}$
c) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{5}{8} \leq x < \frac{2}{3}\right\}$
d) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{5}{8}\right\}$
e) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{5}{8} \leq x \leq \frac{3}{4}\right\}$

69 (Santa Casa-SP) Sejam os conjuntos $X = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ e } |x + 1| < 3\}$ e $Y = \{y \mid y \in \mathbb{Z} \text{ e } |2y| > 1\}$. O número de elementos do conjunto $X \cap Y$ é:

a) 1
b) 3
c) 4
d) 5
e) maior que 5

70 (Cesgranrio-RJ) A intersecção do conjunto de todos os inteiros múltiplos de 6 com o conjunto de todos os inteiros múltiplos de 15 é o conjunto de todos os inteiros múltiplos de:

a) 3
b) 18
c) 30
d) 45
e) 90

71 (UFU-MG) Dados os conjuntos:
D = divisores de 24 (divisores positivos)
M = múltiplos de 3 (múltiplos positivos)
$S = D \cap M$
n = número de subconjuntos de *S*
Portanto, *n* é igual a:

a) 64
b) 16
c) 32
d) 8
e) 4

72 (Vest.Unif.RS) Dados os conjuntos: $M_a = \{n \cdot a \mid n \in \mathbb{N}\}$ e $M_b = \{n \cdot b \mid n \in \mathbb{N}\}$, com *a* e *b* naturais não-nulos, então M_a é subconjunto de M_b sempre que:

a) *a* for menor que *b*
b) *b* for menor do que *a*
c) *a* for divisor de *b*
d) *b* for divisor de *a*
e) *a* e *b* forem pares

73 (PUCCAMP-SP) Considerando $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ e, ainda, $A = \left\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{24}{x} = n, n \in \mathbb{N}\right\}$ $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 3x + 4 < 2x + 9\}$, podemos afirmar que:

a) $A \cup B$ tem 8 elementos
b) $A \cup B = A$
c) $A \cap B = A$
d) $A \cap B$ possui 4 elementos
e) n.d.a.

74 (UFRGS) A condição necessária e suficiente para que $A \subset B$, $B \subset C$ e $C \subset A$ é:

a) $A = B = C = \varnothing$
b) $A = C = \varnothing$
c) $A = B = C$
d) $C = \varnothing$
e) $A = C$

75 Represente os seguintes conjuntos por extensão de seus elementos:

a) $A = \{x \in \mathbf{N} \mid x \leq 4\}$
b) $B = \{x \in \mathbf{N} \mid 2 < x \leq 6\}$
c) $C = \{x \in \mathbf{Z} \mid -2 \leq x < 0\}$
d) $D = \{x \in \mathbf{N} \mid x^2 - 4x - 5 = 0\}$
e) $E = \{x \in \mathbf{R}_+ \mid 2x^2 + x = 0\}$
f) $F = \{x \in \mathbf{Q} \mid -3x^2 + 2x = 0\}$

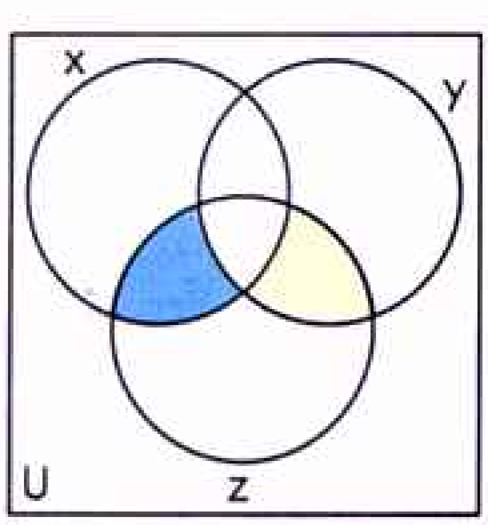
76 (MACK-SP) Sejam os conjuntos:
$A = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 \leq x \leq 3\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leq 3\}$ e $C = \{x \in \mathbf{R} \mid -2 \leq x \leq 3\}$
O conjunto $(B - A) \cap C$ é:

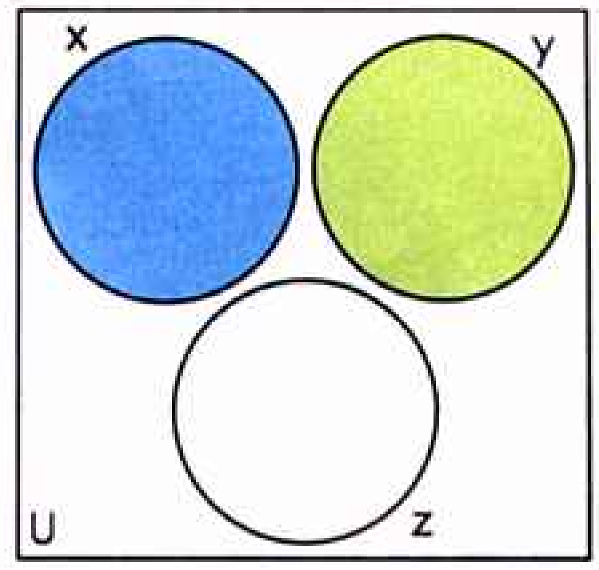
a) $\varnothing$
b) $\{x \in \mathbf{R} \mid x < 0\}$
c) $\{x \in \mathbf{R} \mid x > -2\}$
d) $\{x \in \mathbf{R} \mid -2 \leq x < 0\}$
e) $\{x \in \mathbf{R} \mid -2 < x < 3\}$

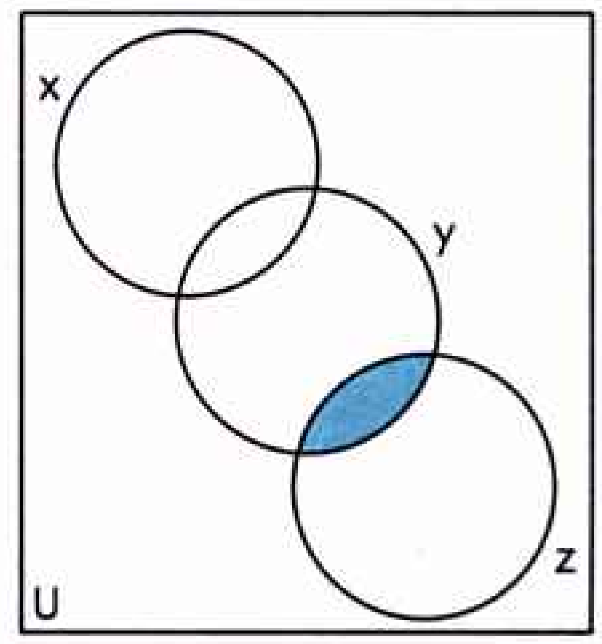
77 (UFU-MG) Sejam *A*, *B* e *C* três conjuntos em um universo *U*. Qual a alternativa falsa, dentre as seguintes relacionadas?

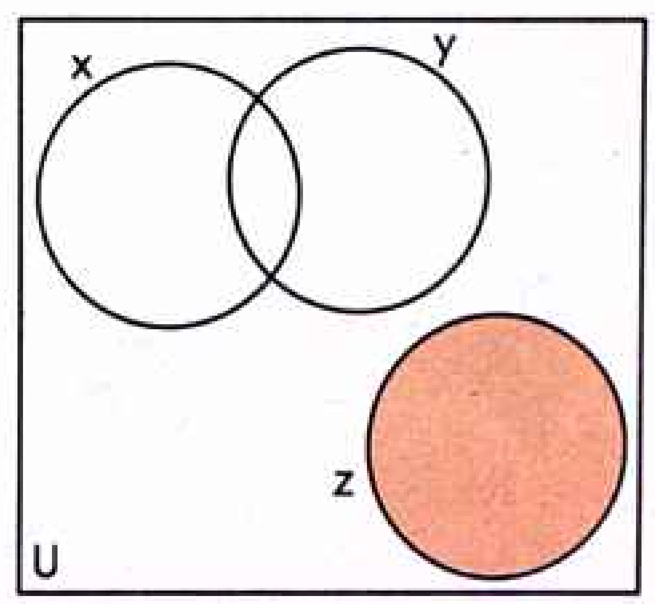
a) $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$
b) $A \cup (A \cap B) \subset A$
c) $A \cap (A \cup B) \subset B$
d) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
e) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

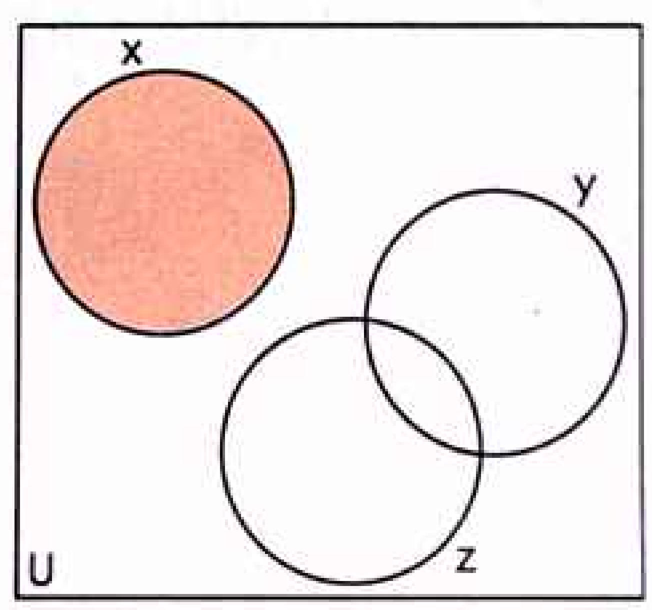
78 (Fatec-SP) Em cada uma das alternativas a seguir tem-se um universo *U* e seus subconjuntos, não-vazios, *X*, *Y* e *Z*. Assinale a alternativa onde a região colorida representa $(X \cup Y) \cap Z$.

a)


b)


c)


d)


e)


79 (Vunesp) Um técnico de laboratório manipula dois recipientes que contêm misturas das substâncias *A* e *B*. Embora os volumes das misturas sejam iguais, num dos recipientes a proporção de *A* para *B* é $\frac{1}{2}$ (uma parte de *A* para duas de *B*), e no outro é $\frac{3}{4}$. Se ele juntar os dois conteúdos num único recipiente, qual passará a ser a proporção de *A* para *B*?

80 (Fuvest-SP) $\dfrac{0{,}3 - \dfrac{1}{4}}{\sqrt[5]{-1}} + 0{,}036 : 0{,}04 =$

a) 8,95
b) 0,95
c) 0,85
d) 0,04
e) 8,85

81 (UFMG) O valor da expressão

$4 \cdot (0{,}5)^4 + \sqrt{0{,}25} + 8^{-\frac{2}{3}}$ é:

a) $\frac{1}{8}$
b) $\frac{1}{4}$
c) $\frac{1}{2}$
d) 1
e) 2

82 (FCC) A expressão $\sqrt{5\,000} + \sqrt{500}$ é igual a:

a) $60\sqrt{2}$
b) $60\sqrt{5}$
c) $10\sqrt{55}$
d) $5 \cdot (10\sqrt{2} + \sqrt{5})$
e) $10 \cdot (\sqrt{5} + 5\sqrt{2})$

83 (UEL-PR) O valor da expressão

$\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{1+\sqrt{2}} - \dfrac{1}{2+\sqrt{2}}$ é:

a) $-\sqrt{2}$
b) $-\frac{1}{2}$
c) 0
d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
e) 2

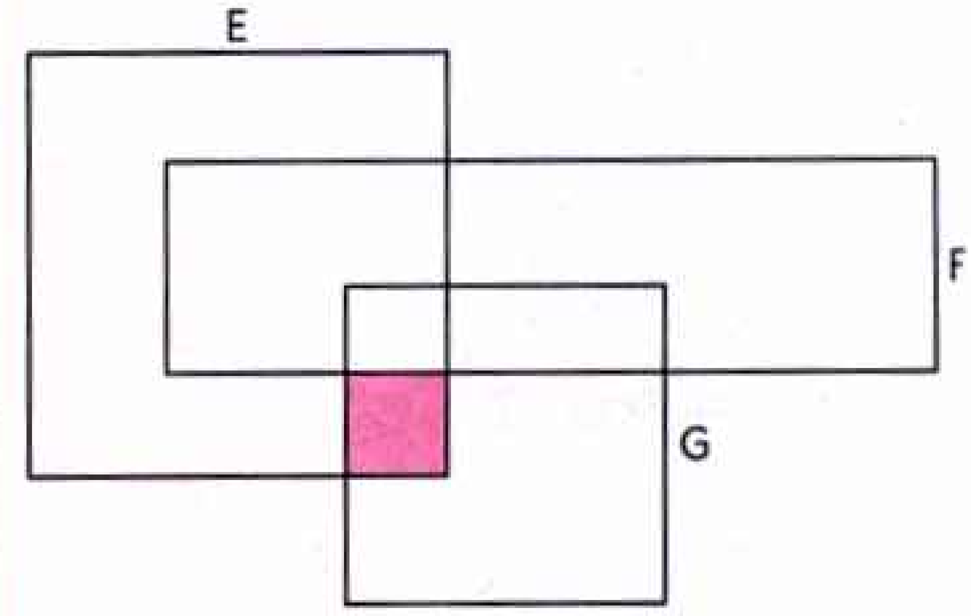
84 (Fuvest-SP) Dividir um número por 0,0125 equivale a multiplicá-lo por:

a) $\frac{1}{125}$
b) $\frac{1}{8}$
c) 8
d) 12,5
e) 80

85 (Fuvest-SP) Simplificar $\sqrt[3]{\dfrac{2^{28} + 2^{30}}{10}} =$

a) $\frac{2^8}{5}$
b) $\frac{2^9}{5}$
c) 2^8
d) 2^9
e) $\left(\frac{2^{58}}{10}\right)^{\frac{1}{3}}$

86 (UU-MG) No diagrama abaixo, a parte colorida representa:



a) $(E \cap F) \cap G$
b) $E \cap G$
c) $\complement_R E \cup F$
d) $(E \cap G) - F$
e) $E - G$

87 (Unicamp-SP) Após ter corrido $\frac{2}{7}$ de um percurso e, em seguida, caminhado $\frac{5}{11}$ do mesmo percurso, um atleta verificou que ainda faltavam 600 metros para o final do percurso.

a) Qual o comprimento total do percurso?
b) Quantos metros o atleta havia corrido?
c) Quantos metros o atleta havia caminhado?

88 (PUC-SP) Se $a = 16$ e $x = 1{,}25$, quanto vale a^x?

a) $\sqrt{2}$
b) 32
c) 20
d) $16\sqrt{2}$
e) 64

89 Simplificando a expressão $\dfrac{3^{2n+1} - 9^n}{3^{2n}}$, com $n \in \mathbb{N}$, obtemos o valor:

a) 1
b) 3
c) 2
d) 0
e) 9

90 (Mack-SP) O valor da expressão $(3^{-1} + 2^{-1})^{-1} \cdot 2^{-\frac{1}{2}}$ é:

a) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$
b) $\frac{3\sqrt{2}}{5}$
c) $\frac{5\sqrt{2}}{3}$
d) $\frac{5}{4}$
e) $\frac{5}{18}$

91 (UFSC-SC) O número 310 é dividido em 3 parcelas de modo que a segunda é igual a $\frac{3}{2}$ da primeira, e a terceira é igual a $\frac{5}{3}$ da segunda. Calcule a menor dessas parcelas.

92 (UEL-PR) Racionalizando $\frac{10}{\sqrt{18} + 2\sqrt{2}}$, obtém-se:

a) $\sqrt{2}$
b) $2\sqrt{2}$
c) $3\sqrt{2}$
d) $4\sqrt{2}$
e) $5\sqrt{2}$

93 (Fuvest-SP) $\frac{0{,}3 - \frac{1}{4}}{\sqrt[5]{-1}} + 0{,}036 : 0{,}04$ é igual:

a) 8,95
b) 0,95
c) 0,85
d) 0,04
e) 8,85

94 (Fuvest-SP) Calcule o valor numérico de $\frac{-x^2 + xy}{y}$, para $x = -0{,}1$ e $y = 0{,}001$.

95 (Fuvest-SP)

a) Qual a metade de 2^{22}?
b) Calcule $8^{\frac{2}{3}} + 9^{0{,}5}$.

96 (Fuvest-SP) Um nadador, disputando a prova dos 400 metros, nado livre, completou os primeiros 300 metros em 3 minutos e 51 segundos. Se este nadador mantiver a mesma velocidade média nos últimos 100 metros, completará a prova em:

a) 4 minutos e 51 segundos
b) 5 minutos e 8 segundos
c) 5 minutos e 28 segundos
d) 5 minutos e 49 segundos
e) 6 minutos e 3 segundos

97 (Fuvest-SP) Dados dois números reais *a* e *b* que satisfazem as desigualdades $1 \leq a \leq 2$ e $3 \leq b \leq 5$, pode-se afirmar que:

a) $\frac{a}{b} \leq \frac{2}{5}$
b) $\frac{a}{b} \geq \frac{2}{3}$
c) $\frac{1}{5} \leq \frac{a}{b} \leq \frac{2}{3}$
d) $\frac{1}{5} \leq \frac{a}{b} \leq \frac{1}{2}$
e) $\frac{3}{2} \leq \frac{a}{b} \leq 5$

98 (UCSal-BA) Sobre as sentenças

I. $\left(\frac{5\sqrt{8}}{2}\right)^2 = 50$

II. $3^{12} \cdot 3^6 = 3^{18}$

III. $\left(\left(\frac{2a}{3b^2}\right)^{10}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{32a^5}{243b^{10}}$, com $b \neq 0$

é correto afirmar que:

a) somente I é verdadeira.
b) somente II é verdadeira.
c) somente III é verdadeira.
d) somente I e II são verdadeiras.
e) I, II e III são verdadeiras.

Saiba um pouco mais

O corpo em números

Observar o corpo humano sob o aspecto numérico também é uma maneira de conhecê-lo melhor. Respeitando a individualidade de cada ser e considerando os valores médios podemos destacar alguns números do corpo humano.

Scott Camazine/Stock Photos

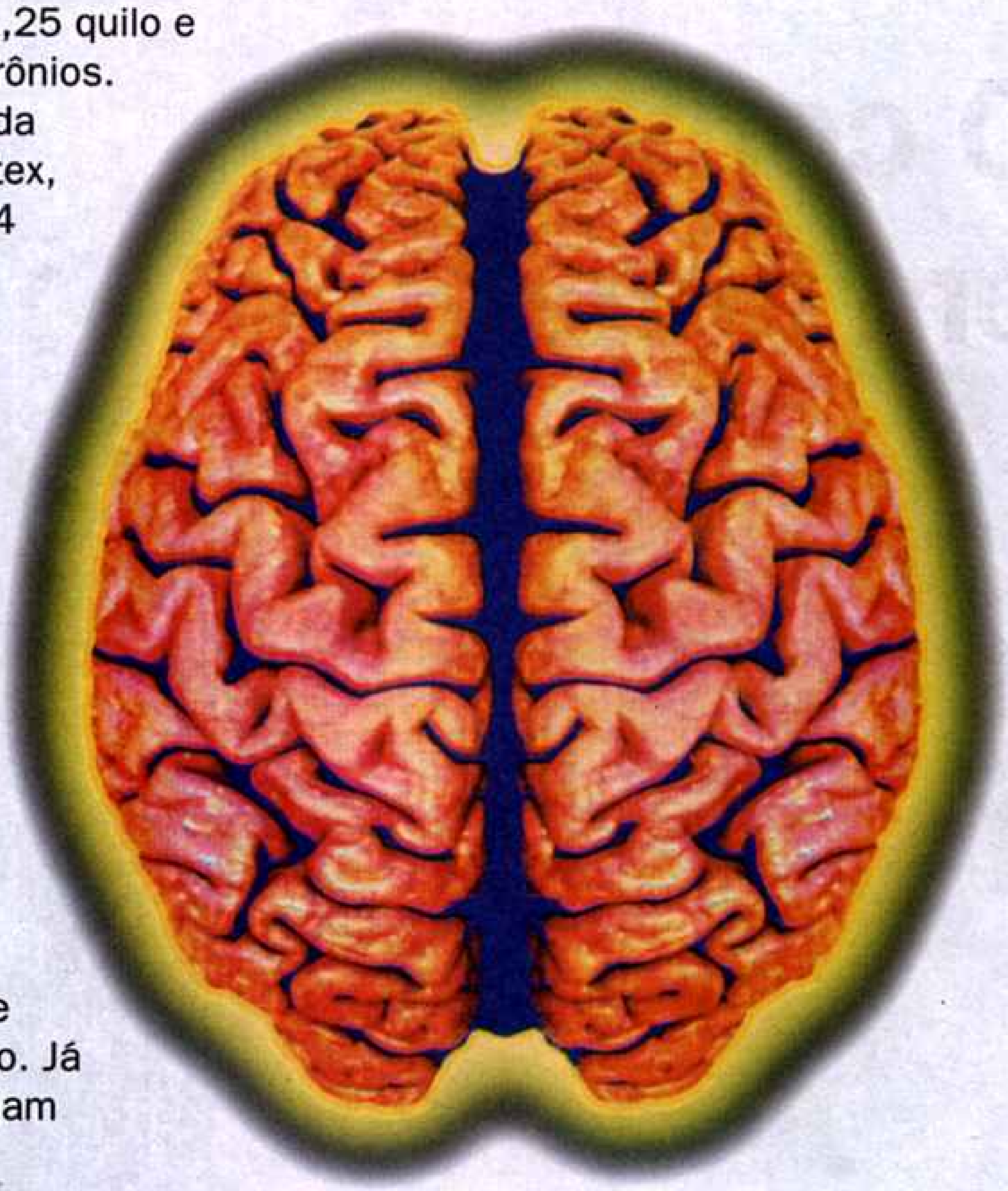
Silhueta humana mostrando o sistema circulatório

Veias e artérias

São 97 000 quilômetros de veias, artérias e vasos capilares. Se fossem alinhados, eles dariam 2,5 voltas em torno da Terra. As artérias menores se contraem e relaxam num período entre 2 e 8 segundos. As plaquetas sangüíneas — moléculas responsáveis pela coagulação — vivem apenas dez dias.

Cérebro e neurônios

O cérebro do homem pesa cerca de 1,4 quilo e o da mulher 1,25 quilo e abriga 25 bilhões de neurônios. Eles ficam fixos na camada superficial, chamada córtex, que tem apenas 1,3 a 1,4 milímetro de espessura. As suas "pernas" (axônios), que transmitem os sinais elétricos, podem ter até 1 metro. A velocidade do impulso nervoso varia conforme a espessura das fibras nervosas e sua função: as sensações de pressão e tato passam por fibras de 8 micrometros (1 metro dividido por 1 milhão), a uma velocidade de 50 metros por segundo. Já a dor e a temperatura viajam por fibras de apenas 3 micrometros, a 15 metros por segundo.



Mehau Kulyk/Stock Photos

Cérebro humano representado em um trabalho de computação gráfica

Adaptado da Revista *Superinteressante,* São Paulo, Abril, n. 10, ano 9, 1995, p. 41.