Funções

Pertencemos a uma comunidade única chamada espécie humana, cujo futuro é indivisível. Em todos os estágios da vida — ecologia, economia, saúde — esta comunidade de destino é uma realidade. Devemos traduzi-la agora em uma realidade cultural, assumi-la deliberadamente no que eu chamaria uma política da vida.

François Mitterrand (1916-1996)

1. Pré-requisitos para o estudo de funções

Produto cartesiano

Par ordenado

Entendemos por par ordenado um conjunto de dois elementos, sendo:

$$\boxed{(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d}$$

Note que $(a, b) = (b, a) \Rightarrow a = b$.

Exemplos:
a) $(3, b) = (a, -5)$ para $a = 3$ e $b = -5$
b) $(5, y + 1) = (x - 1, 4)$
para $x - 1 = 5$, ou seja, $x = 6$ e para $y + 1 = 4$, ou seja, $y = 3$

Considerando dois conjuntos, *A* e *B*, não-vazios, chamamos de produto cartesiano de *A* por *B* o conjunto indicado por $A \times B$, formado por todos os pares ordenados, nos quais o primeiro elemento pertence ao conjunto *A* e o segundo pertence ao conjunto *B*:

$$\boxed{A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}}$$

$$\begin{cases} \text{Notação: } A \times B \\ \text{Leitura: } A \text{ cartesiano } B \\ \text{Elemento: par ordenado } (x, y) \end{cases}$$

Exemplo:
Dados os conjuntos $A = \{5, 6\}$ e $B = \{2, 3, 4\}$, vamos determinar o produto cartesiano $A \times B$:
a) na forma tabular

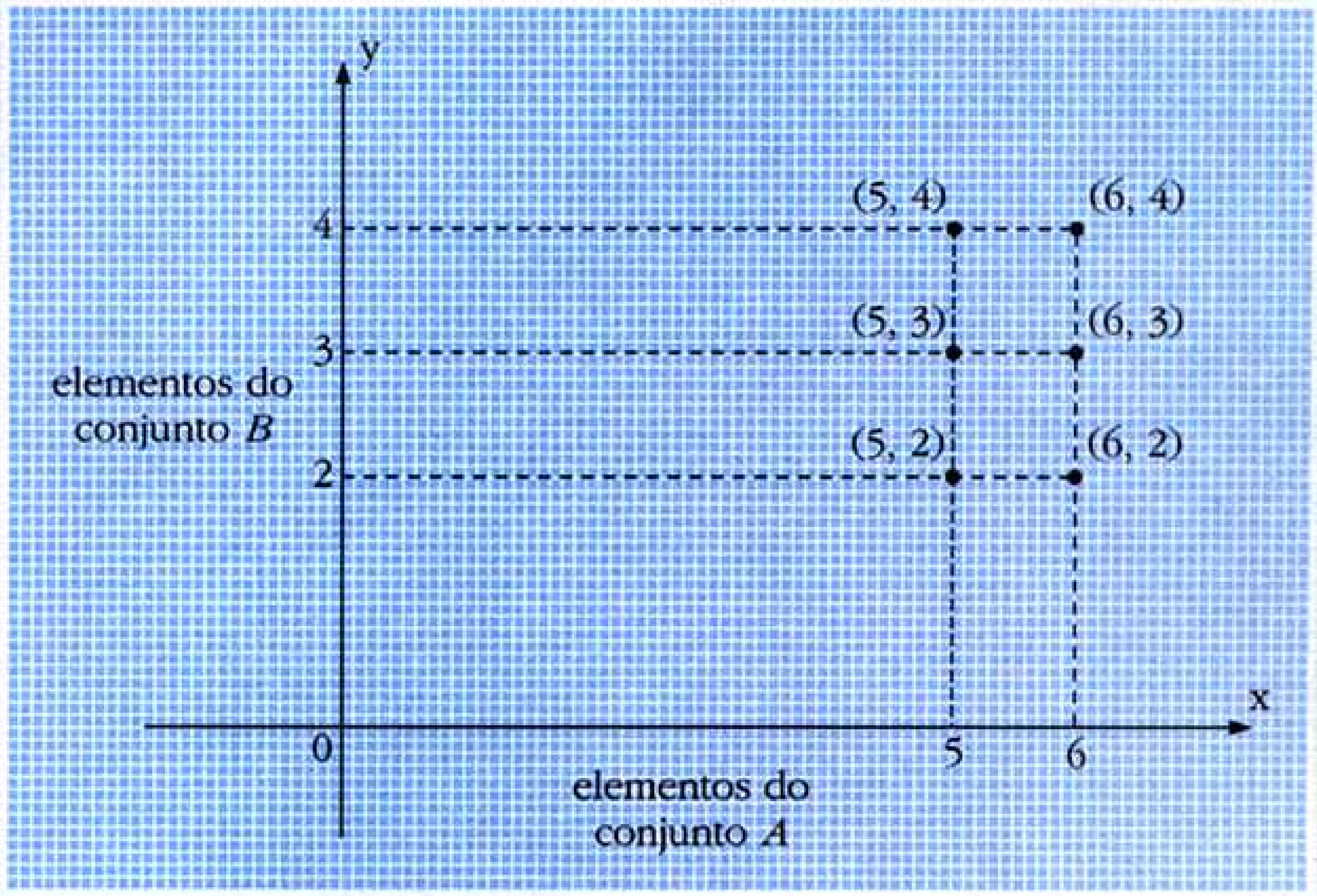
elementos do *A*

$$A \times B = \{(5, 2), (5, 3), (5, 4), (6, 2), (6, 3), (6, 4)\}$$

elementos do *B*

Observe que os primeiros elementos dos pares ordenados pertencem ao conjunto *A* e os segundos elementos pertencem ao conjunto *B*. Esta forma de representação é denominada forma tabular.

b) na forma gráfica



Observe que, para representar graficamente o produto cartesiano A × B, os elementos do conjunto *A* são dispostos no eixo das abscissas (horizontal) e os elementos do conjunto *B*, no eixo das ordenadas (vertical) estando, cada par ordenado do produto, associado a um único ponto do gráfico.

Exercícios

Resolvidos

1 Dados os conjuntos M = {1, 3, 5} e N = {2, 4}, determinar o produto cartesiano M × N e N × M nas formas:

a) tabular b) gráfica

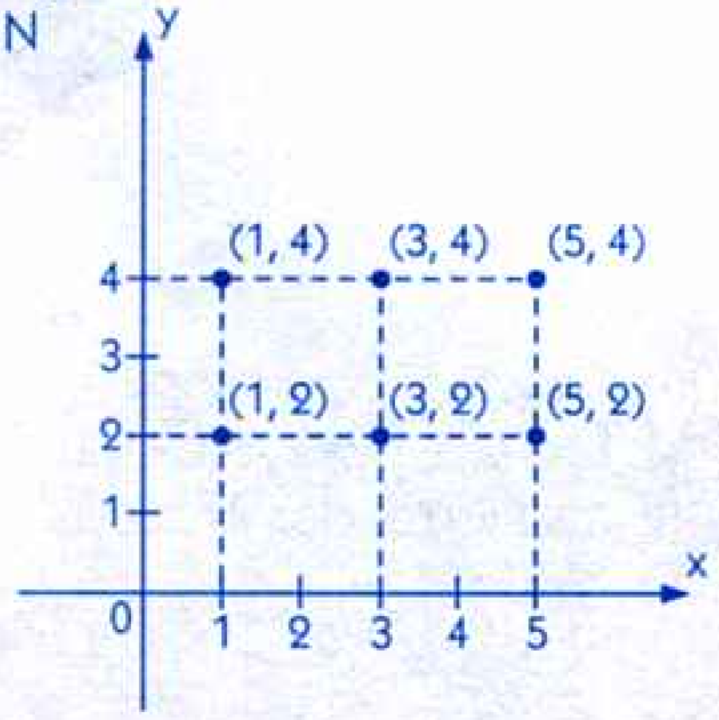
a) forma tabular

M × N = {(1, 2), (1, 4), (3, 2), (3, 4), (5, 2), (5, 4)}

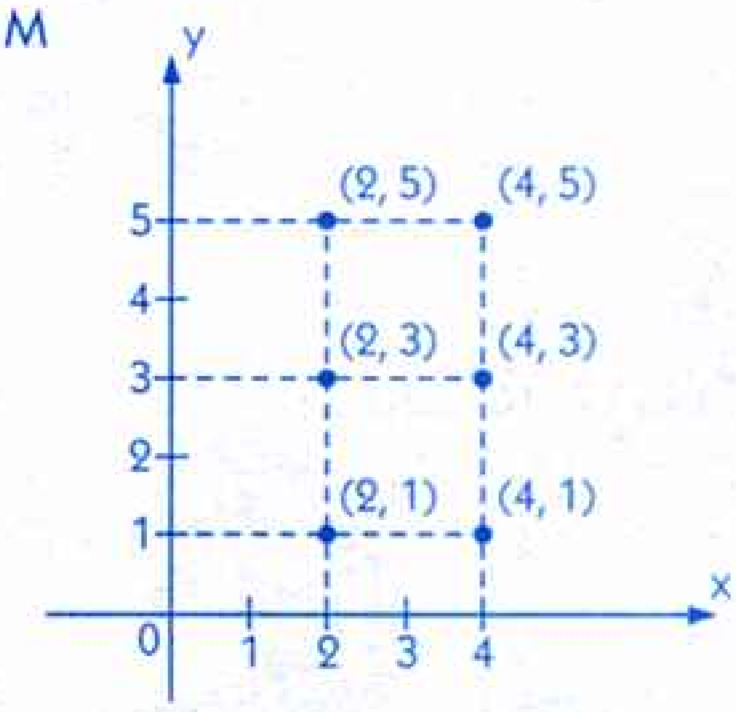
N × M = {(2, 1), (2, 3), (2, 5), (4, 1), (4, 3), (4, 5)}

b) forma gráfica

M × N



N × M



Note que M × N ≠ N × M.

2 Considerando os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq x \leq 1\}$ e $B = \{3, 4\}$, determinar $A \times B$ nas formas:

a) tabular b) gráfica

Inicialmente, enumeramos os elementos do conjunto *A*:

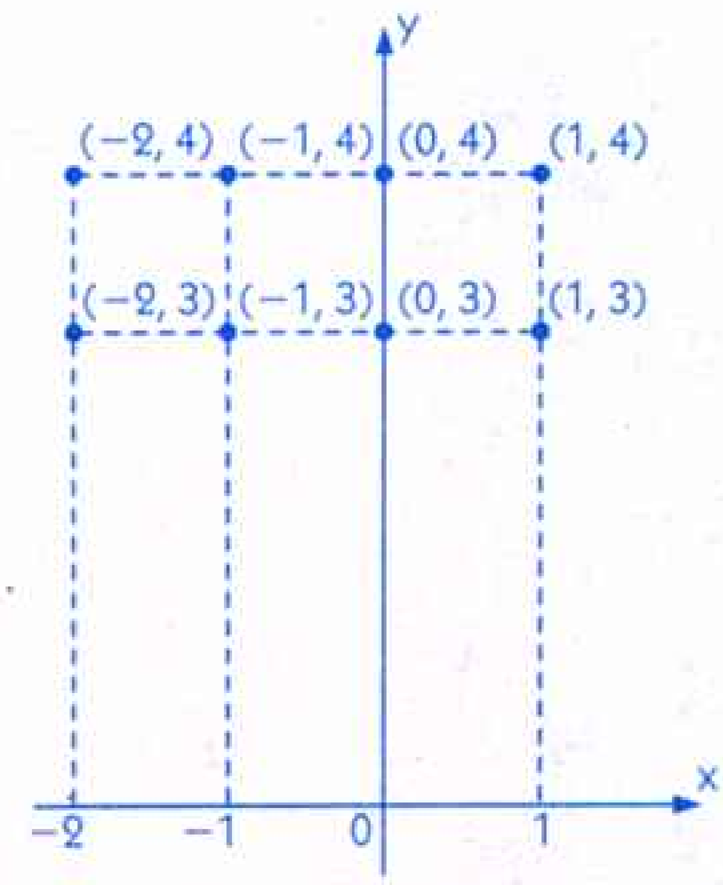
$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq x \leq 1\} \Rightarrow A = \{-2, -1, 0, 1\}$

$B = \{3, 4\}$

a) Na forma tabular, temos:

$A \times B = \{(-2, 3), (-2, 4), (-1, 3), (-1, 4), (0, 3), (0, 4), (1, 3), (1, 4)\}$

b) Na forma gráfica, temos:

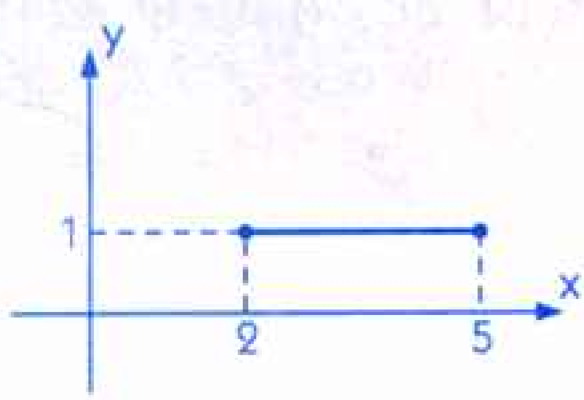


Note que os pontos de abscissa igual a zero pertencem ao eixo *y*.

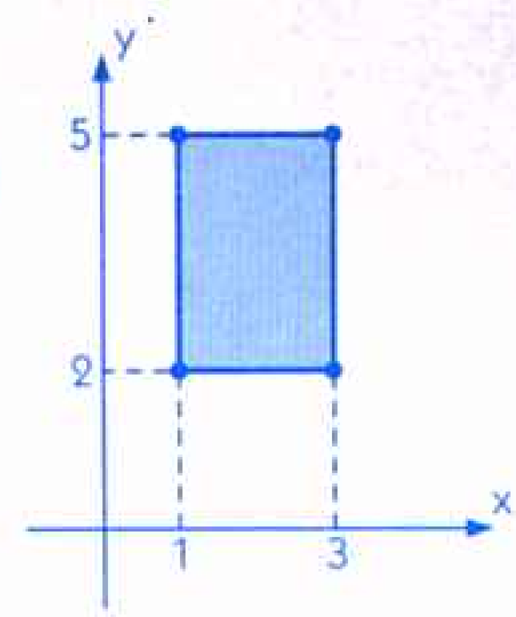
3 Determinar o produto cartesiano dos conjuntos:

a) $[2, 5] \times \{1\}$
b) $\{3, 4\} \times [-1, 3]$
c) $[1, 3] \times [2, 5]$
d) $]-2, 1] \times [3, 5[$

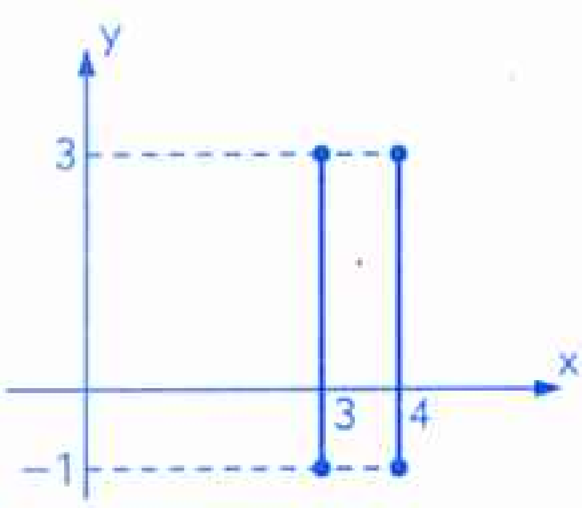
a)



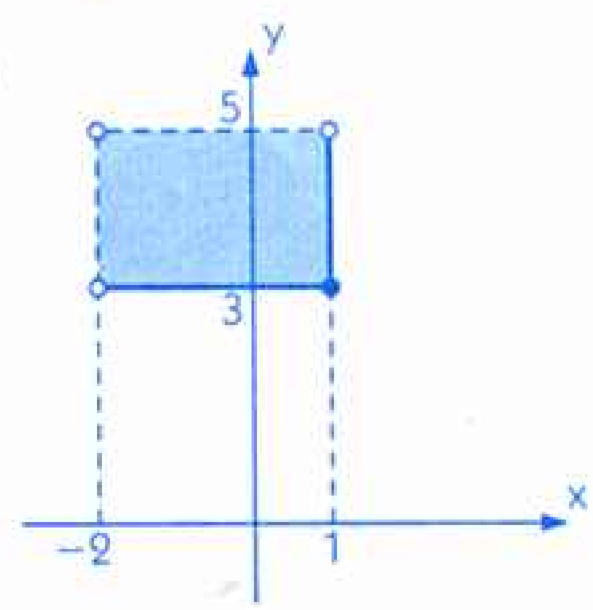
c)



b)



d)



Nos exemplos *c* e *d*, o produto cartesiano dos *intervalos* é representado pelo conjunto de pontos que formam a figura colorida.

Propostos

99 Dados os conjuntos $A = \{3, 5, 6\}$ e $B = \{1, 4\}$, determine a forma tabular dos produtos:

a) $A \times B$
b) $B \times A$

100 Dados os conjuntos $E = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 2\}$, $F = \{4, 5\}$ e $G = \{-1, 0\}$, determine a forma tabular dos produtos:

a) $E \times F$
b) $F \times E$
c) $F \times G$
d) $E \times G$

101 Considerando os conjuntos $C = \{1, 4, 5\}$ e $D = \{2, 3\}$, determine a forma gráfica dos produtos:

a) $C \times D$
b) $D \times C$

102 Considerando os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -5 \leqslant x \leqslant -2\}$ e $B = \{-1, 2, 3\}$, determine a forma gráfica dos produtos:

a) $A \times B$
b) $B \times A$

103 Sendo $C = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leqslant x \leqslant 4\}$ e $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 \leqslant x < 3\}$, determine a forma gráfica dos produtos:

a) $C \times D$ b) $D \times C$

104 Determine o produto cartesiano dos conjuntos:

a) $[-1, 4] \times \{6\}$
b) $\{2; 2{,}5; 3\} \times [1, 5[$
c) $[1, 4] \times [2, 6]$
d) $]-3, -1[\times]2, 6[$
e) $]1, 3] \times [3, 5[$

Relação binária

Considerando dois conjuntos, *A* e *B*, não-vazios, chamamos de relação binária de *A* em *B* qualquer subconjunto do produto cartesiano $A \times B$.

Por convenção, chamamos de *x* os elementos do conjunto *A* e de *y* os elementos do conjunto *B*.

Exemplo:

Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{4, 6, 8\}$, efetuando o produto cartesiano $A \times B$, temos:

$$A \times B = \{(1, 4), (1, 6), (1, 8), (2, 4), (2, 6), (2, 8), (3, 4), (3, 6), (3, 8)\}$$

Vamos considerar uma relação binária *R* do produto cartesiano $A \times B$, em que, por exemplo, *y* é o dobro de *x*.

Em símbolos:

$$R = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 2x\}$$

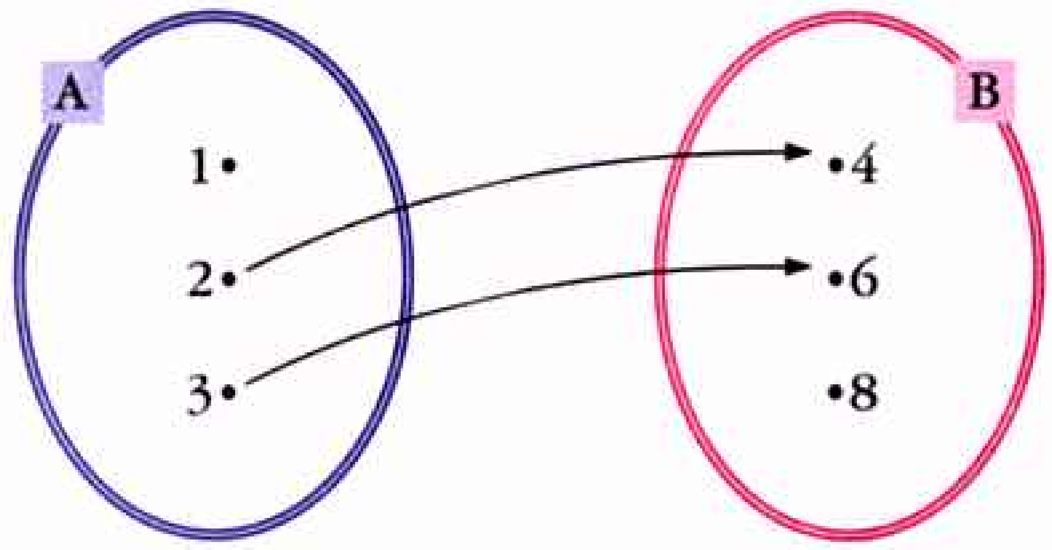
Lê-se: Relação *R* formada por pares ordenados (x, y), pertencentes ao produto cartesiano $A \times B$, tal que $y = 2x$.

$$R = \{(2, 4), (3, 6)\}$$

Quando é possível expressar genericamente os elementos *x* e *y* dos pares (x, y) de *R* através de uma equação como a do exemplo, $y = 2x$, chamamos essa equação de lei de correspondência ou simplesmente lei da relação *R*.

Esta relação pode ser representada por *diagrama de flechas*.

Diagrama de flechas



O conjunto *D* dos primeiros elementos dos pares de *R* recebe o nome de *domínio* da relação e o conjunto *B*, de *contradomínio* (CD):

D = {2, 3}

CD = {4, 6, 8}

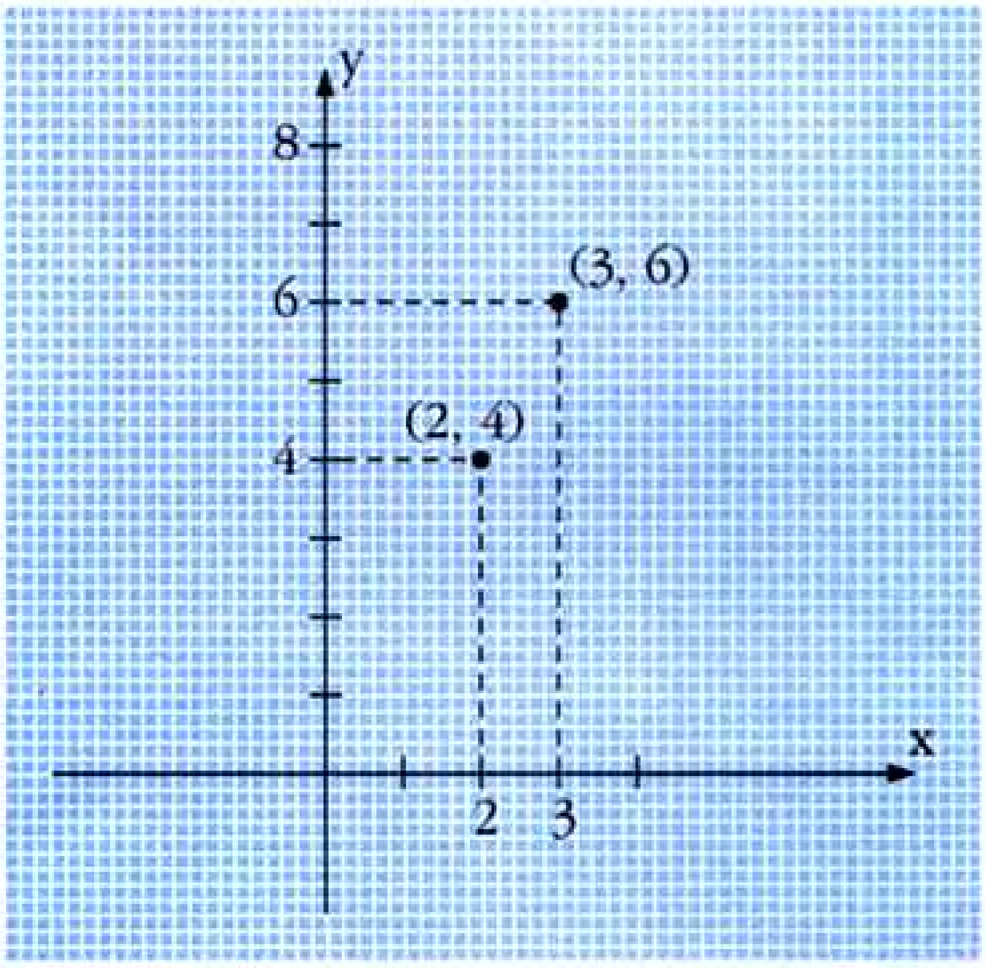
Os elementos do conjunto *B* que participam da relação formam um conjunto denominado conjunto *imagem* da relação (Im):

Im = {4, 6}

Gráfico cartesiano

O gráfico cartesiano dessa relação será constituído apenas pelos pontos correspondentes dos pares ordenados (2, 4) e (3, 6), estando cada par associado a um único ponto.

No eixo das abscissas (horizontal) marcamos os elementos do conjunto *A*; no eixo das ordenadas (vertical), os elementos do conjunto *B*.



Exercícios

Resolvidos

1 Dados os conjuntos A = {−1, 0, 1, 2} e B = {0, 1, 2, 3, 4, 5} e a relação R = {(x, y) ∈ A × B | y = x + 1}, determinar:

a) os pares ordenados da relação *R*

b) o conjunto domínio e o conjunto imagem

c) o diagrama de flechas

d) o gráfico cartesiano

a) Inicialmente, vamos determinar os pares ordenados (x, y), através da lei de correspondência dos elementos: $y = x + 1$, onde $x \in A$ e $y \in B$.

$x = -1 \Rightarrow y = -1 + 1 = 0 \in B$, então $(-1, 0) \in R$

$x = 0 \Rightarrow y = 0 + 1 = 1 \in B$, então, $(0, 1) \in R$

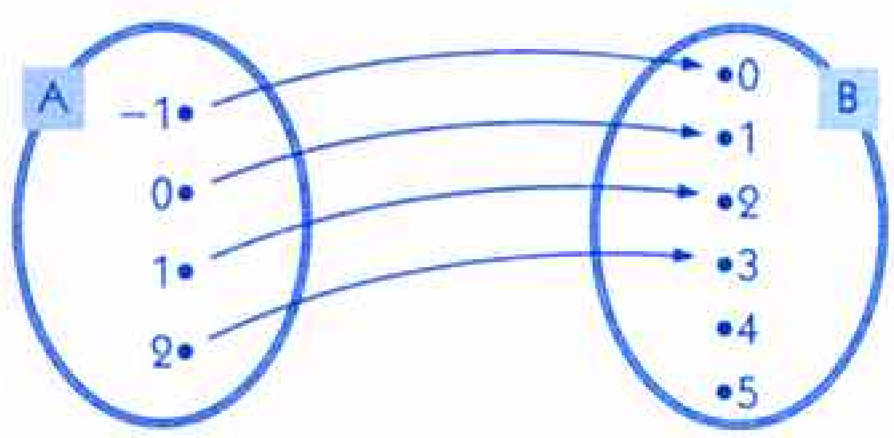
$x = 1 \Rightarrow y = 1 + 1 = 2 \in B$ então $(1, 2) \in R$

$x = 2 \Rightarrow y = 2 + 1 = 3 \in B$, então $(2, 3) \in R$

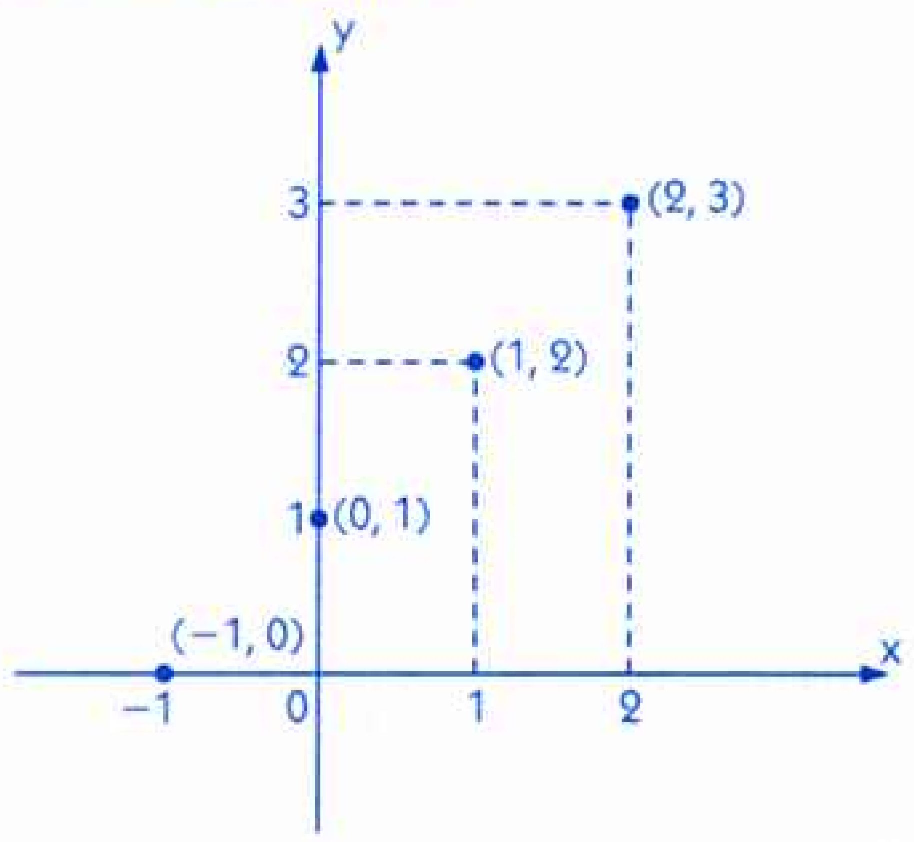
$R = \{(-1, 0), (0, 1), (1, 2), (2, 3)\}$

b) $D = \{-1, 0, 1, 2\}$ e $Im = \{0, 1, 2, 3\}$

c) Diagrama de flechas



d) Gráfico cartesiano



2 Dados os conjuntos $M = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$ e $N = \{1, 2, 3, 5, 6\}$ e a relação $R = \{(x, y) \in M \times N \mid y = x^2 + 1\}$, determinar:

a) os pares ordenados da relação *R*
b) o conjunto domínio e o conjunto imagem
c) o diagrama de flechas
d) o gráfico cartesiano

a) Determinação dos pares ordenados da relação:

$x = -3 \Rightarrow y = (-3)^2 + 1 = 9 + 1 = 10$, mas $(-3, 10) \notin R$, pois o número $y = 10$ não pertence ao conjunto *N*.

$x = -2 \Rightarrow y = (-2)^2 + 1 = 4 + 1 = 5 \in N$, então $(-2, 5) \in R$

$x = -1 \Rightarrow y = (-1)^2 + 1 = 1 + 1 = 2 \in N$, então $(-1, 2) \in R$

$x = 0 \Rightarrow y = (0)^2 + 1 = 0 + 1 = 1 \in N$, então $(0, 1) \in R$

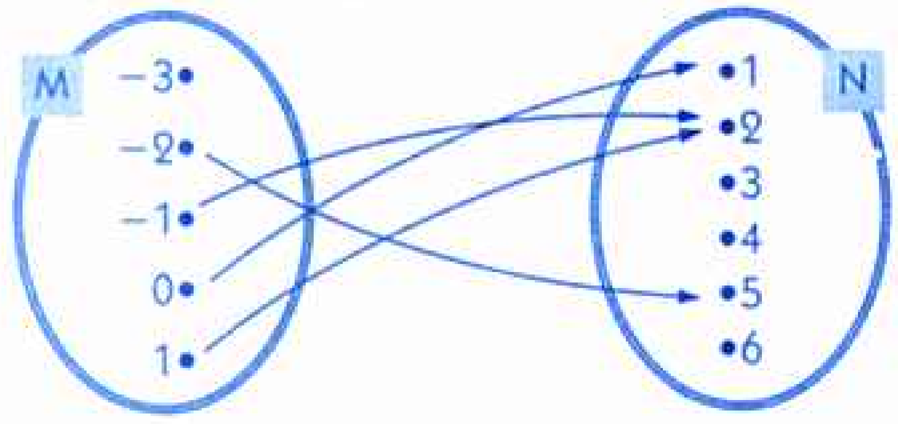
$x = 1 \Rightarrow y = (1)^2 + 1 = 1 + 1 = 2 \in N$, então $(1, 2) \in R$

Logo:

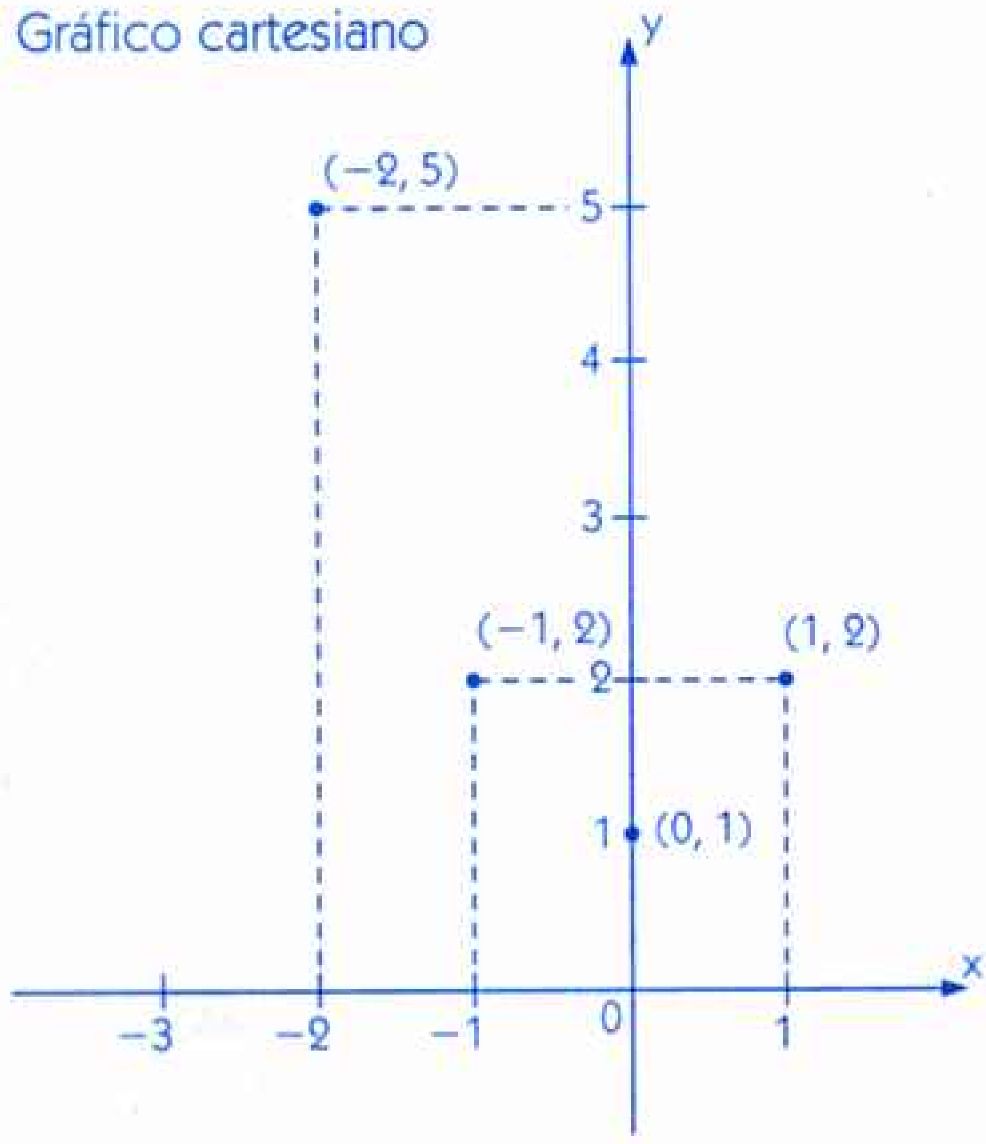
$R = \{(-2, 5), (-1, 2), (0, 1), (1, 2)\}$

b) $D = \{-2, -1, 0, 1\}$ e $Im = \{1, 2, 5\}$

c) Diagrama de flechas



d) Gráfico cartesiano



Propostos

105 Dados os conjuntos
$A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e
$B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e a relação
$R = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x + 2\}$,
determine:

a) os pares ordenados da relação *R*
b) o conjunto domínio e o conjunto imagem
c) o diagrama de flechas
d) o gráfico cartesiano

106 Dados os conjuntos
$M = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ e
$N = \{-1, 0, 2, 3, 5\}$ e a relação
$R = \{(x, y) \in M \times N \mid y = x^2 - 1\}$,
determine:

a) os pares ordenados da relação *R*
b) o conjunto domínio e o conjunto imagem
c) o diagrama de flechas
d) o gráfico cartesiano

107 Considerando a relação
$$R = \left\{(x, y) \in E \times F \mid y = \frac{x - 1}{2}\right\}$$
e os conjuntos $E = \{-3, -1, 1, 3, 5\}$ e $F = \{-2, -1, 0, 1, 3, 5\}$, determine os pares ordenados da relação.

108 Dados os conjuntos $C = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ e $D = \{1, 5, 9, 13, 15, 18\}$ e a relação $R = \{(x, y) \in C \times D \mid y = 2x + 1\}$, determine o conjunto domínio e o conjunto imagem da relação.

109 Considerando a relação $R = \{(x, y) \in I \times J \mid y = x^2\}$ e os conjuntos $I = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ e $J = \{-1, 0, 1, 2, 4, 6\}$, faça o diagrama de flechas da relação.

110 (Cesgranrio-RJ)
Se $A = \{1, 2\} \cup \{x \in \mathbf{R} \mid 2 < x < 3\}$ e $B = \{x \in \mathbf{R} \mid 1 \leq x \leq 2\}$ desenhe o gráfico de $A \times B$.

2. Funções

Considerando dois conjuntos, *A* e *B*, não-vazios e uma relação binária de *A* em *B*, dizemos que essa relação é função de *A* em *B* se, e somente se, a cada elemento *x* do conjunto *A* corresponder um único elemento *y* do conjunto *B*.

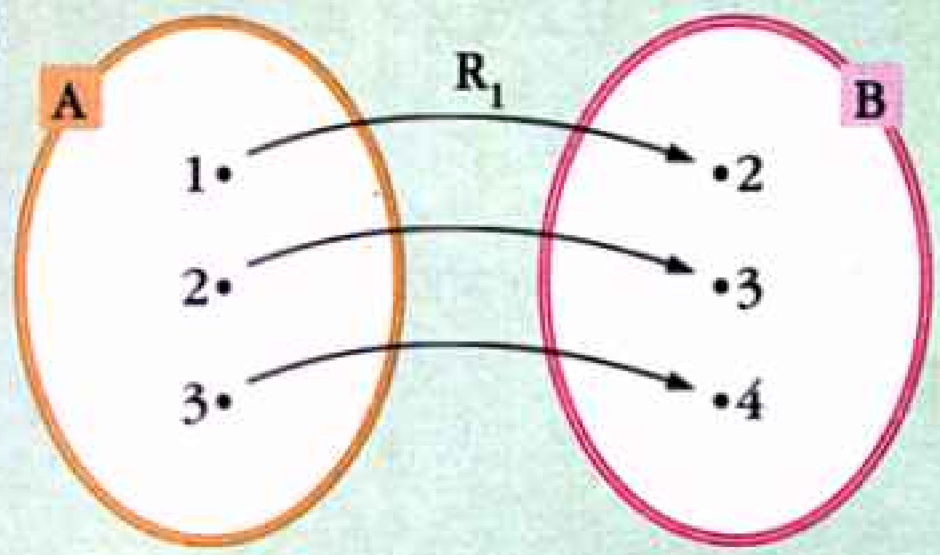
$f: A \to B$ lê-se: *f* é função de *A* em *B*.

Ou, no caso de ser possível escrever uma lei de correspondência através de uma expressão matemática:

$y = f(x)$ lê-se: *y* é função de *x*, com $x \in A$ e $y \in B$.

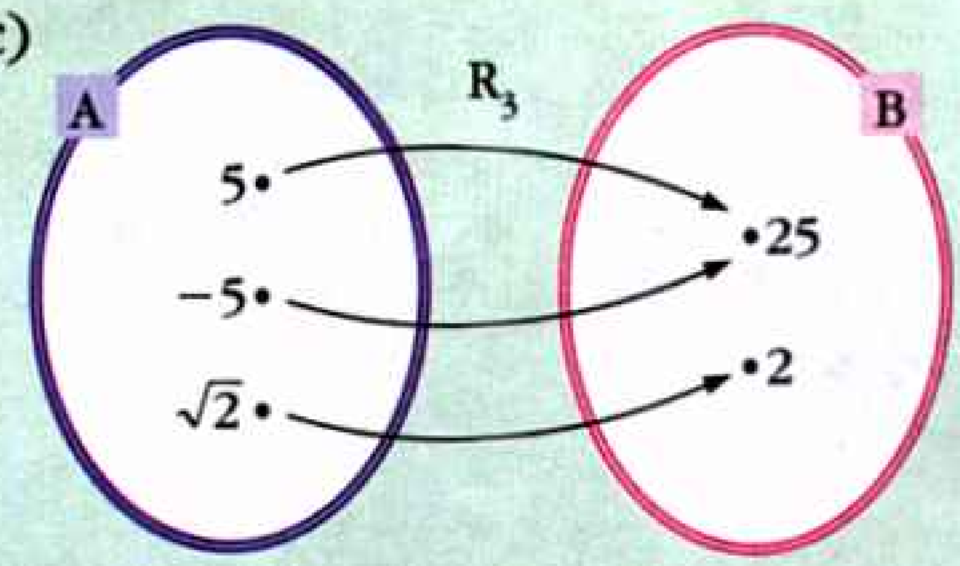
Exemplo:
Vamos considerar algumas relações representadas pelos diagramas de flechas e ver quais delas representam uma função:

a)



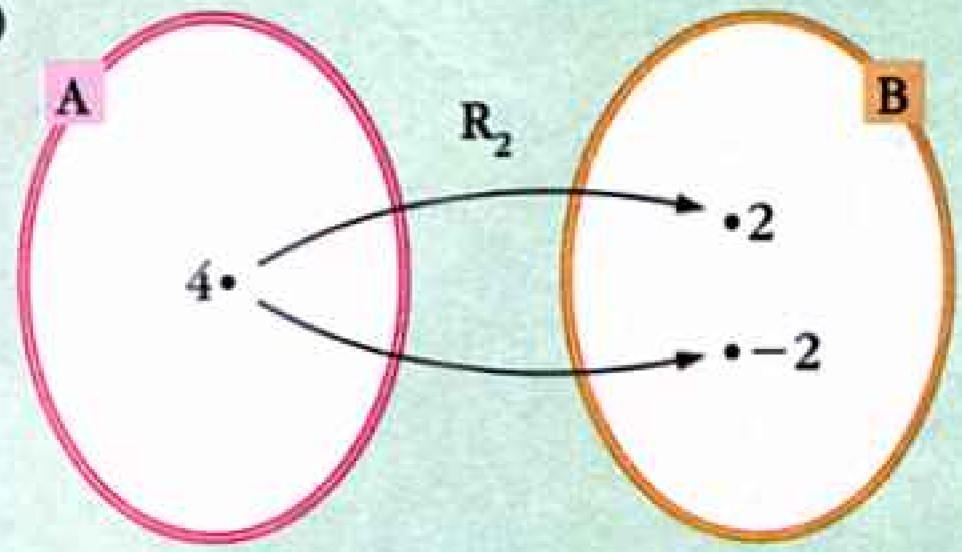
R_1 é função de *A* em *B*, pois a cada elemento do conjunto *A* corresponde um único elemento do conjunto *B*.

c)



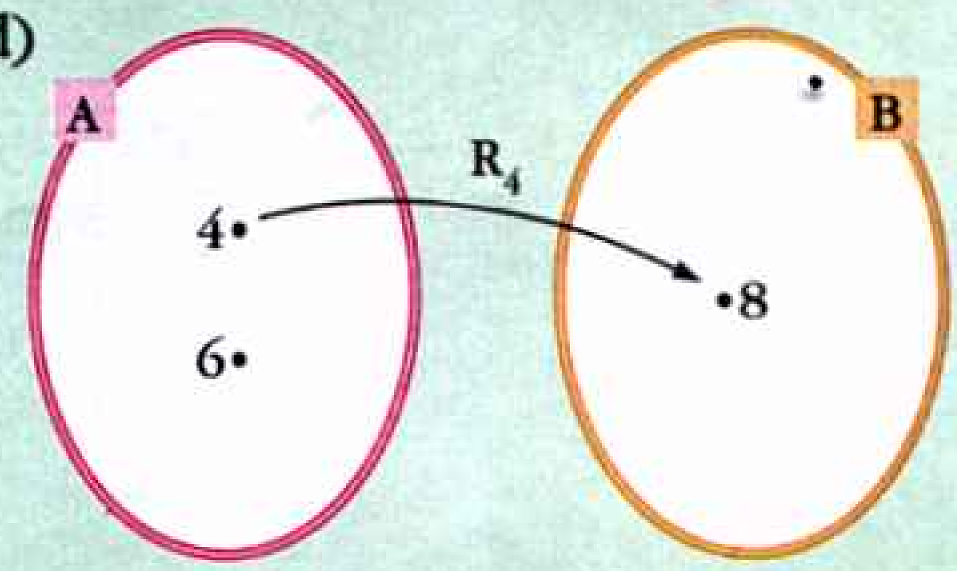
R_3 é função de *A* em *B*, pois a cada elemento do conjunto *A* corresponde um único elemento do conjunto *B*.

b)



R_2 não é uma função de *A* em *B*, pois o elemento 4 do conjunto *A* possui dois correspondentes em *B* (2 e −2).

d)



R_4 não é uma função de *A* em *B*, pois o elemento 6 do conjunto *A* não possui correspondente no conjunto *B*.

Domínio, contradomínio e imagem de uma função

Ao considerarmos uma função f: A → B, temos que:

D(f) = A	lê-se: o domínio da função *f* é igual ao conjunto *A*.
CD(f) = B	lê-se: o contradomínio da função *f* é igual ao conjunto *B*.
Im(f) ⊂ B	lê-se: o conjunto imagem da função *f* está contido no contradomínio *B*.

O conjunto formado pelos elementos do conjunto *B*, que estão em correspondência com os elementos do conjunto *A*, recebe o nome de conjunto imagem da função *f*.

Exercícios

Resolvido

Dados os conjuntos $A = \{-2, -1, 0, 1\}$ e $B = \{-5, -2, 1, 4, 5, 6\}$ e a relação $R = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 3x + 1\}$:

a) determinar a relação *R* em forma de pares ordenados

b) construir um diagrama de flechas

c) verificar se essa relação é uma função. Em caso afirmativo determinar os conjuntos D(f), CD(f) e Im(f)

a) $y = 3x + 1$

$x = -2 \Rightarrow y = 3 \cdot (-2) + 1 = -6 + 1 = -5 \in B$, então $(-2, -5) \in R$

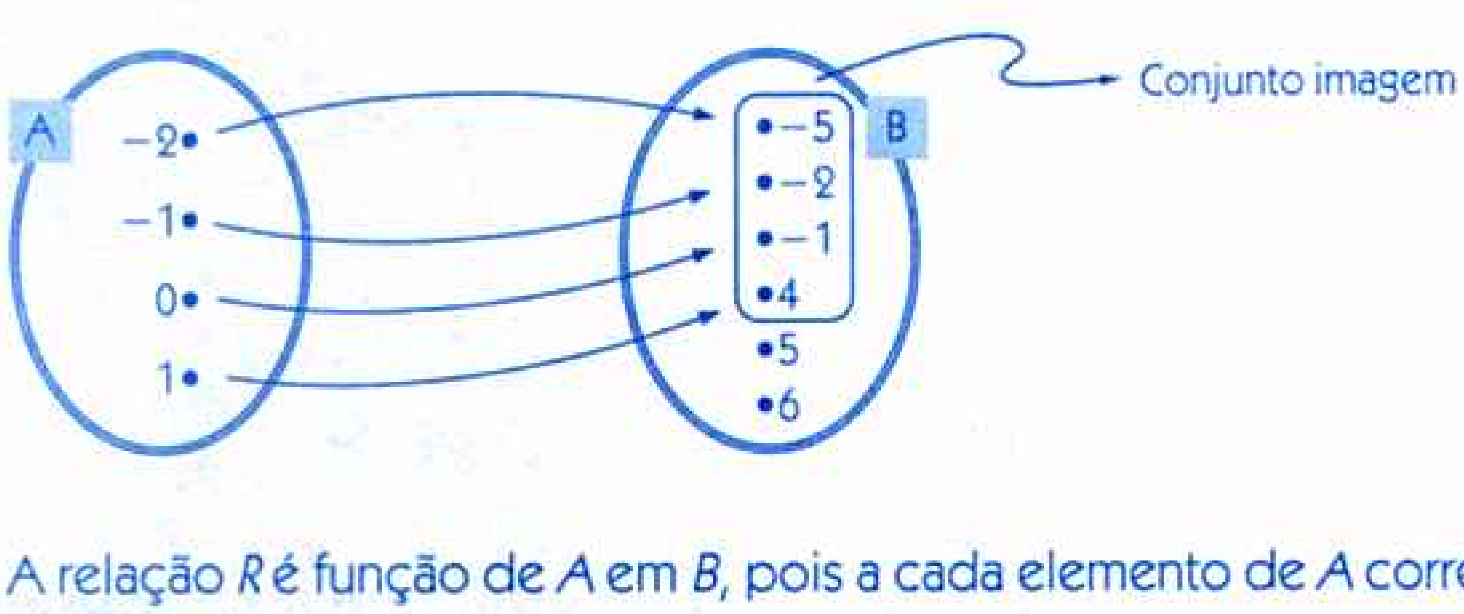
$x = -1 \Rightarrow y = 3 \cdot (-1) + 1 = -3 + 1 = -2 \in B$, então $(-1, -2) \in R$

$x = 0 \Rightarrow y = 3 \cdot (0) + 1 = 0 + 1 = 1 \in B$, então $(0, 1) \in R$

$x = 1 \Rightarrow y = 3 \cdot (1) + 1 = 3 + 1 = 4 \in B$, então $(1, 4) \in R$

$R = \{(-2, -5), (-1, -2), (0, 1), (1, 4)\}$

b)



c) A relação *R* é função de *A* em *B*, pois a cada elemento de *A* corresponde um único elemento de *B*. Assim:

D(f) = A, CD(f) = B e Im(f) = $\{-5, -2, 1, 4\}$

Observe que o conjunto imagem, Im(f), sempre está contido no conjunto *B*, mas nem sempre é igual ao conjunto *B*.

Imagem de um elemento

A cada elemento x pertencente ao domínio de uma função $y = f(x)$ corresponde um único valor de y do contradomínio dessa função, denominado imagem de x pela função f.

Exemplo:

Considerando a função $f(x) = 2x^2 + 1$, temos:

- $f(1) = 2 \cdot (1)^2 + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 2 + 1 = 3$ (a imagem de 1 pela função f é $f(1) = 3$)
- $f(-2) = 2 \cdot (-2)^2 + 1 = 2 \cdot 4 + 1 = 8 + 1 = 9$ (a imagem de -2 pela função f é $f(-2) = 9$)
- $f(3) = 2 \cdot (3)^2 + 1 = 2 \cdot 9 + 1 = 18 + 1 = 19$ (a imagem de 3 pela função f é $f(3) = 19$)

Como x representa todos os elementos do domínio da função, o seu valor varia.

Como para cada elemento x do domínio há uma imagem y no contradomínio, o valor de y também varia, e varia na dependência de x.

Daí chamamos x de variável independente e y de variável dependente.

Raiz ou zero de uma função

Dada uma função f de A em B, chamamos raiz (ou zero) da função f todo elemento de A cuja imagem é zero.

Exemplo:

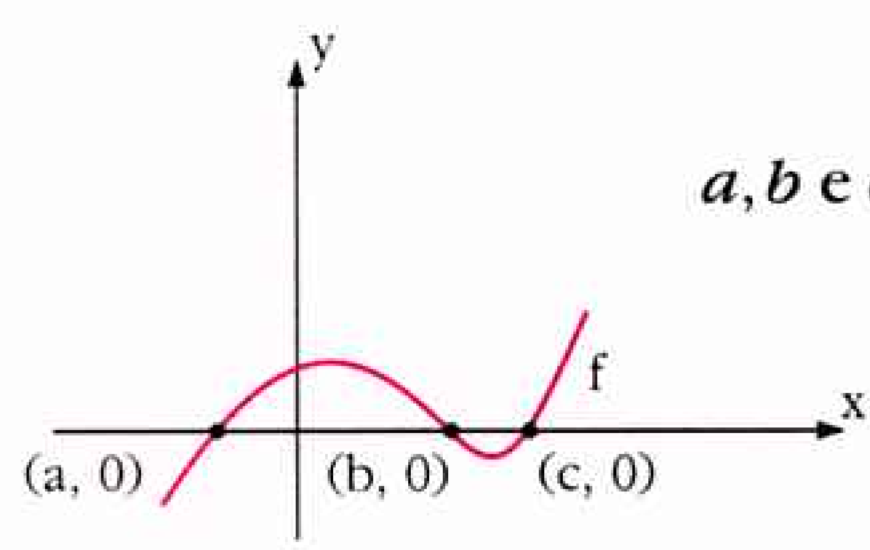
Na função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 - 3x - 10$, temos:

(-2) é raiz de f, pois $f(-2) = (-2)^2 - 3 \cdot (-2) - 10$, ou seja, $f(-2) = 0$

4 não é raiz de f, pois $f(4) = 4^2 - 3 \cdot 4 - 10$, ou seja, $f(4) \neq 0$

5 é raiz de f, pois $f(5) = 5^2 - 3 \cdot 5 - 10$, ou seja, $f(5) = 0$

▶ Se o gráfico de uma função f tem ponto no eixo Ox, então esse ponto tem ordenada nula; logo, a abscissa dele é raiz de f.



a, b e c são raízes de f.

Exercícios

Resolvidos

1 Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ e a relação $R = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x + 3\}$, pede-se:

a) determinar a relação em forma de pares ordenados

b) construir o diagrama de flechas

c) verificar se essa relação é uma função de *A* em *B*

a) $y = x + 3$

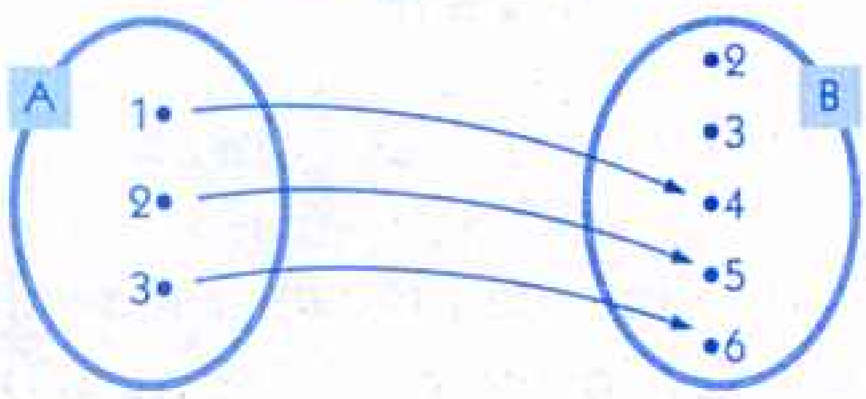
$x = 1 \Rightarrow y = 1 + 3 = 4 \in B$, então $(1, 4) \in R$

$x = 2 \Rightarrow y = 2 + 3 = 5 \in B$, então $(2, 5) \in R$

$x = 3 \Rightarrow y = 3 + 3 = 6 \in B$, $(3, 6) \in R$

$R = \{(1, 4), (2, 5), (3, 6)\}$

b)



c) Esta relação é uma função de *A* em *B*, pois a cada elemento do conjunto *A* corresponde um único elemento do conjunto *B*.

2 Considerando a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde $f(x) = 3x - 1$, determinar:

a) $f(0)$ b) $f(1)$ c) $f\left(\frac{1}{3}\right)$

a) $f(0) = 3 \cdot 0 - 1 = 0 - 1 = -1$

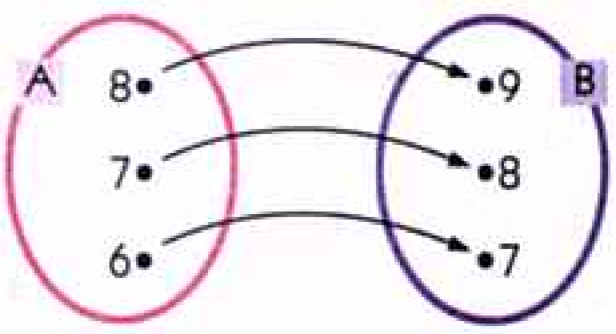
b) $f(1) = 3 \cdot 1 - 1 = 3 - 1 = 2$

c) $f\left(\frac{1}{3}\right) = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) - 1 = 1 - 1 = 0$

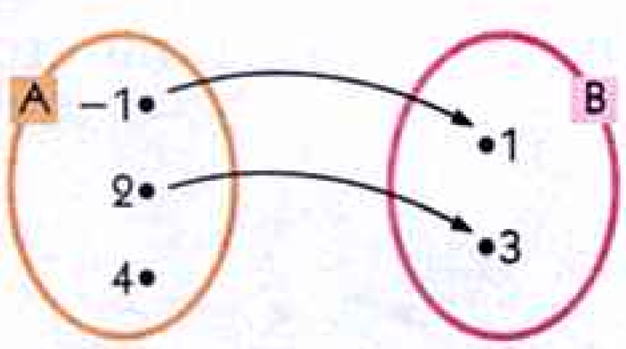
Propostos

111 Quais das seguintes relações de *A* em *B* são funções?

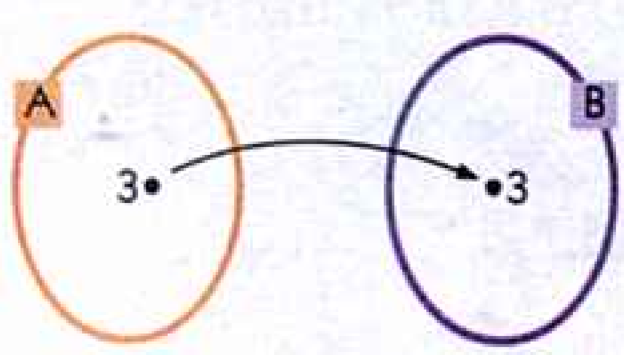
a)



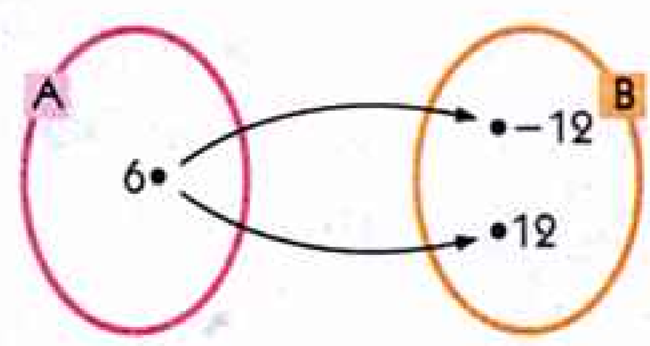
b)



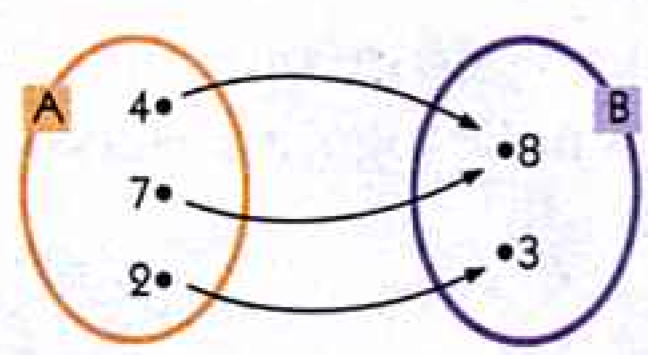
c)



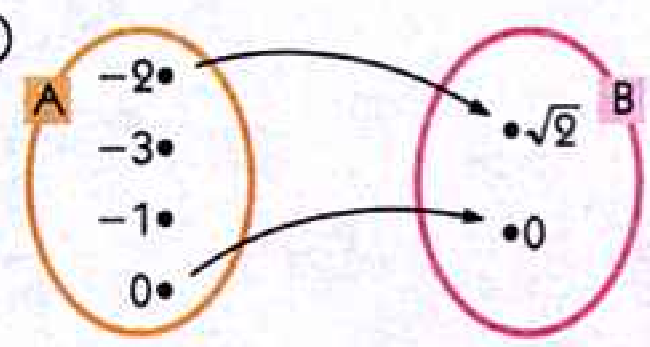
d)



e)



f)



112 Dados os conjuntos $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ e a relação $R = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x - 2\}$:

a) determine a relação em forma de pares ordenados
b) construa um diagrama de flechas
c) identifique se essa relação é uma função

113 Dados os conjuntos $M = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ e $N = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e a relação $R = \{(x, y) \in M \times N \mid y = x + 2\}$:

a) determine a relação em forma de pares ordenados
b) construa um diagrama de flechas
c) verifique se essa relação é uma função

114 Considere as funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e esboce o gráfico cartesiano.

a) $f(x) = 2x + 3$
b) $f(x) = -x + 4$
c) $f(x) = x^2$
d) $f(x) = -2x^2 + 4$

115 Dada a função f por $f(x) = y = 3x - 9$, com $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$ determine:

a) $f(-1)$
b) $f(0)$
c) $f(3)$
d) $f\left(\frac{1}{3}\right)$

116 Considerando a função $f(x) = y = 5x^2 + 6$, com $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$ determine:

a) $f(-4)$
b) $f(3)$
c) $f\left(\frac{6}{5}\right)$
d) $f(\sqrt{2})$

117 Dada a função $f(x) = y = x^2 - x$, com $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$ calcule:

$f(1) + 3f(-1) - 5f(3) + f(0)$

118 Considerando a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, onde $f(x) = 4x - 3$:

a) calcule o valor de k de modo que $f(k) = 1$
b) calcule a raiz de f

119 Determine, se houver, as raízes das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dadas por:

a) $f(x) = x$
b) $f(x) = 18 - 4x$
c) $g(x) = x^2 - 10x + 25$
d) $f(x) = (x - 2)^2 - 9$
e) $h(x) = x^2 - x + 3$
f) $g(x) = x^2 + x + \frac{1}{4}$

120 (Mack-SP) Na função de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 3x + 1$, calcule $\frac{f(235) - f(129)}{106}$.

121 (PUC) O gráfico da função quadrática $f(x) = x^2 + ax + 3$ passa pelo ponto $P(1, 2)$. Determine o valor de a.

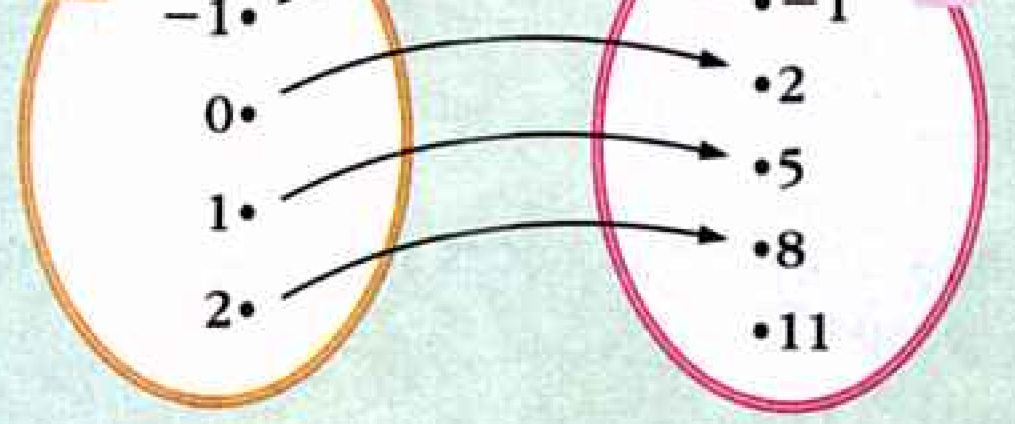
122 (Fuvest-SP) Se $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$, quanto vale $f\left(\sqrt[4]{7}\right)$?

Qualidade de uma função

Função injetora

Seja f uma função de A em B ($f: A \rightarrow B$). Se para quaisquer elementos distintos do conjunto A ($x_1 \neq x_2$) correspondem elementos distintos do conjunto B ($y_1 \neq y_2$), dizemos que a função é injetora (ou injetiva).

Exemplo:
Dados os conjuntos $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{-1, 2, 5, 8, 11\}$, vamos determinar a função $f: A \rightarrow B$ definida pela lei $y = 3x + 2$.



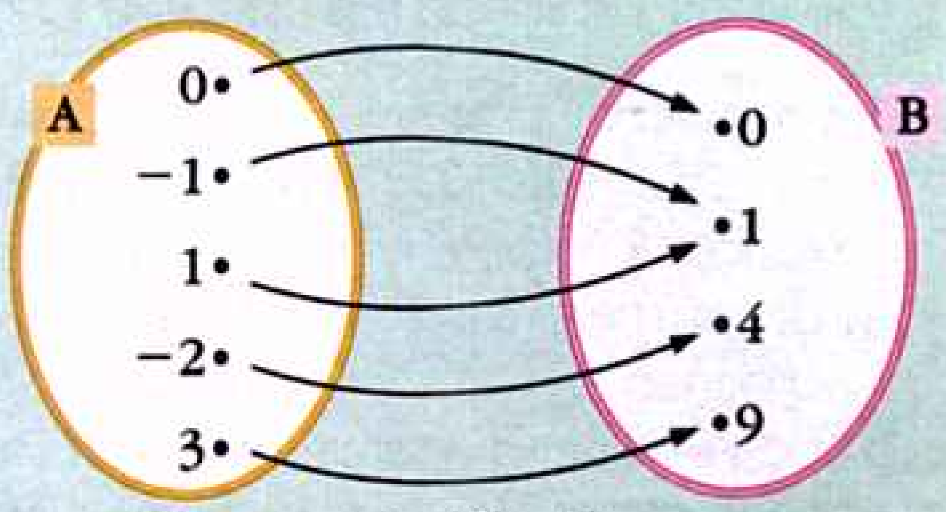
No diagrama de flechas, notamos que elementos distintos do conjunto A correspondem a elementos distintos do conjunto B. Então, a função é injetora.

Função sobrejetora

Seja f uma função de A em B ($f: A \to B$). Dizemos que f é uma função sobrejetora (ou sobrejetiva) se o conjunto imagem for igual ao conjunto B.

$\text{Im}(f) = B$ ou $\text{Im}(f) = \text{CD}(f)$

Exemplo:
Dados os conjuntos
$A = \{-2, -1, 0, 1, 3\}$ e $B = \{0, 1, 4, 9\}$,
vamos determinar a função $f: A \to B$
onde $y = x^2$ para $x \in A$ e $y \in B$.



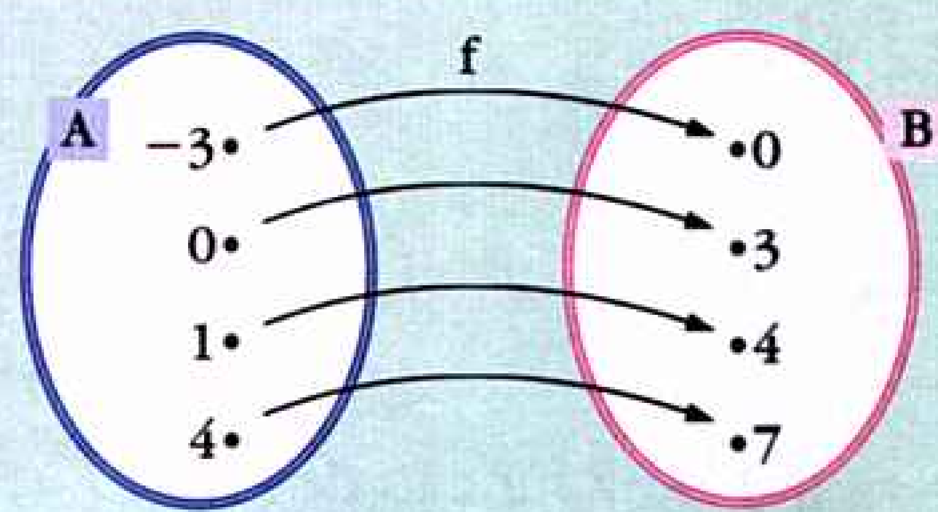
Im(f) = B

Observando o diagrama de flechas, notamos que cada elemento do conjunto B é imagem de pelo menos um elemento do conjunto A; logo, o conjunto imagem da função f é o próprio conjunto B e, portanto, a função é sobrejetora.

Função bijetora

Uma função f de A em B ($f: A \to B$) é bijetora (ou bijetiva) quando é, ao mesmo tempo, injetora e sobrejetora. Nesse caso, para elementos distintos do conjunto A correspondem elementos distintos do conjunto B (função injetora) e $\text{Im}(f) = B$ (função sobrejetora).

Exemplo:
Dados os conjuntos $A = \{-3, 0, 1, 4\}$ e $B = \{0, 3, 4, 7\}$, vamos determinar a função $f: A \to B$, definida pela lei $y = x + 3$ para $x \in A$ e $x \in B$.



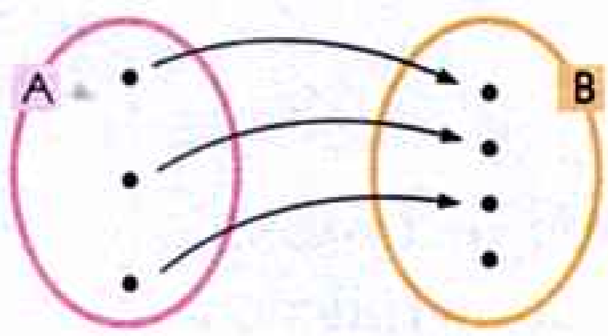
f é bijetora, pois f é injetora e sobrejetora

Exercícios

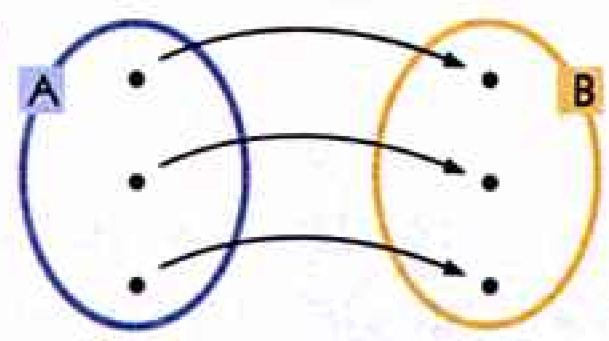
Resolvidos

1 Classificar as funções abaixo, em injetora, sobrejetora ou bijetora.

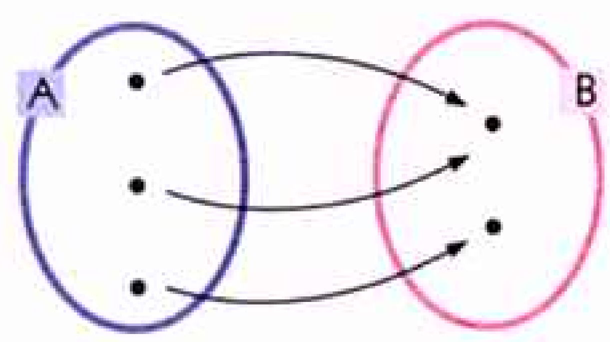
a)



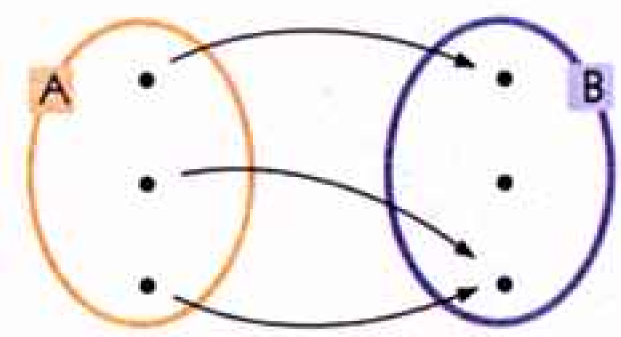
b)



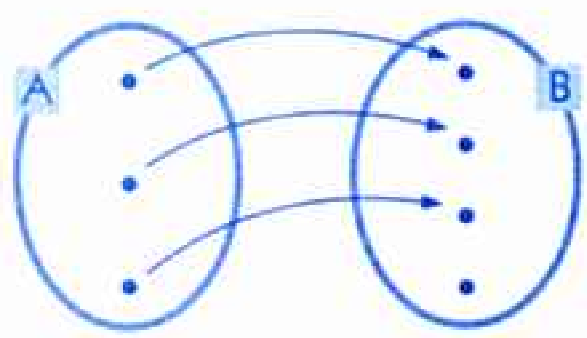
c)



d)

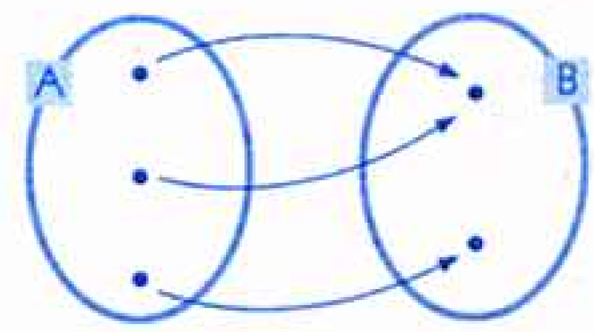


a)



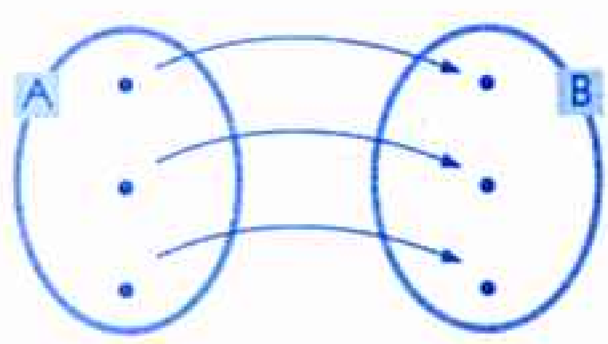
Injetora, pois elementos distintos do conjunto *A* estão em correspondência com elementos distintos do conjunto *B*.

c)



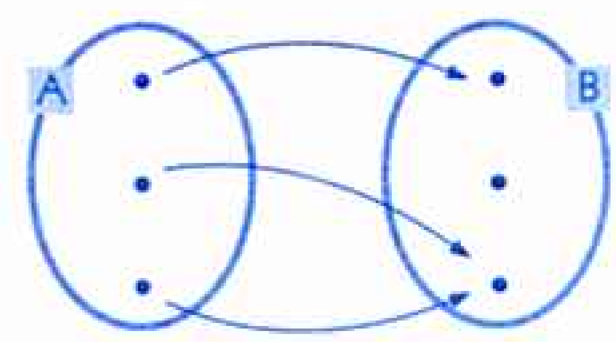
Sobrejetora, pois o conjunto imagem da função é o próprio conjunto *B*.

b)



Bijetora, pois para elementos distintos do conjunto *A* correspondem elementos distintos do conjunto *B* e Im(f) = B.

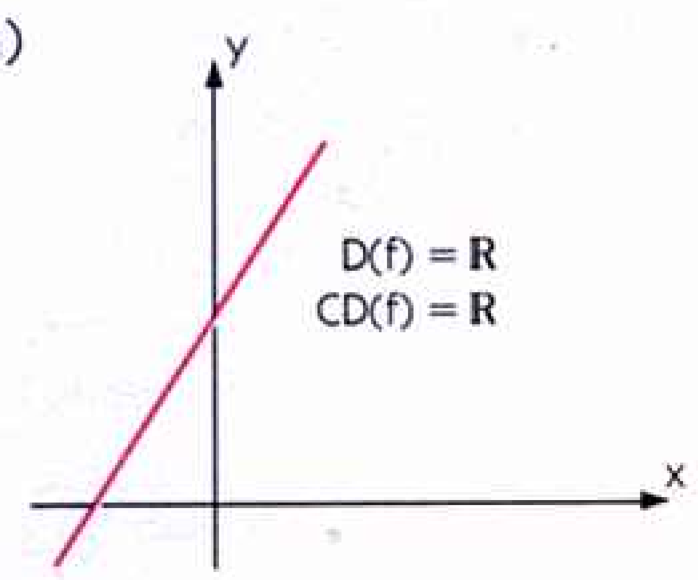
d)



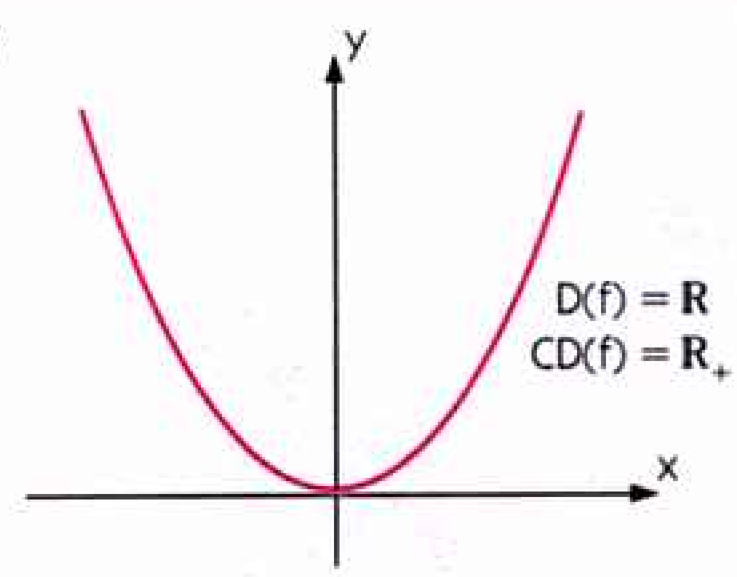
Não é injetora, pois pelo menos um elemento de *B* é imagem de mais de um elemento de *A*. Não é sobrejetora, pois o conjunto imagem da função não é o próprio conjunto *B*.

2 Classificar as funções representadas graficamente em injetora, sobrejetora ou bijetora.

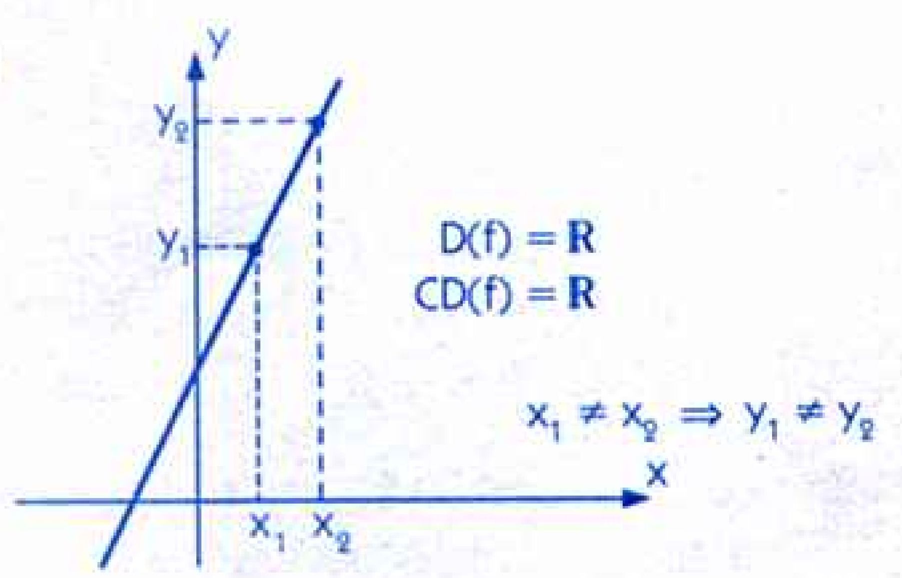
a)



b)

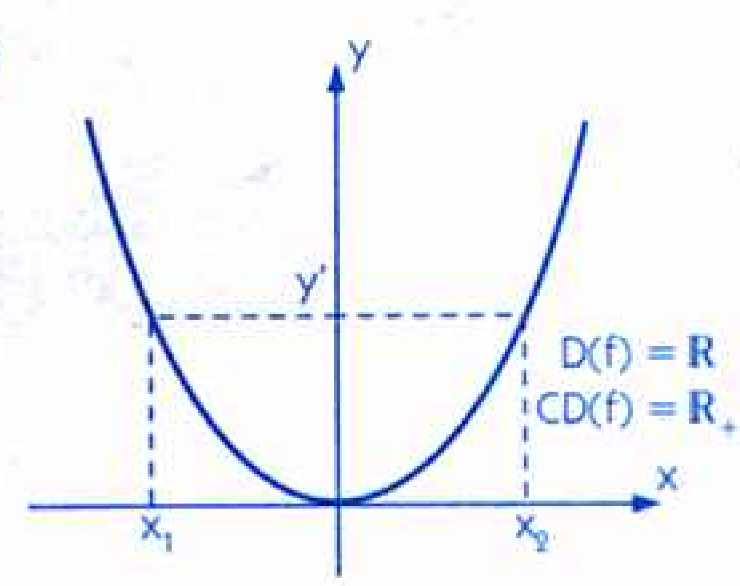


a)



Bijetora, pois para valores distintos quaisquer do eixo *x* correspondem valores distintos do eixo *y* e o conjunto imagem da função é o próprio conjunto dos reais.

b)

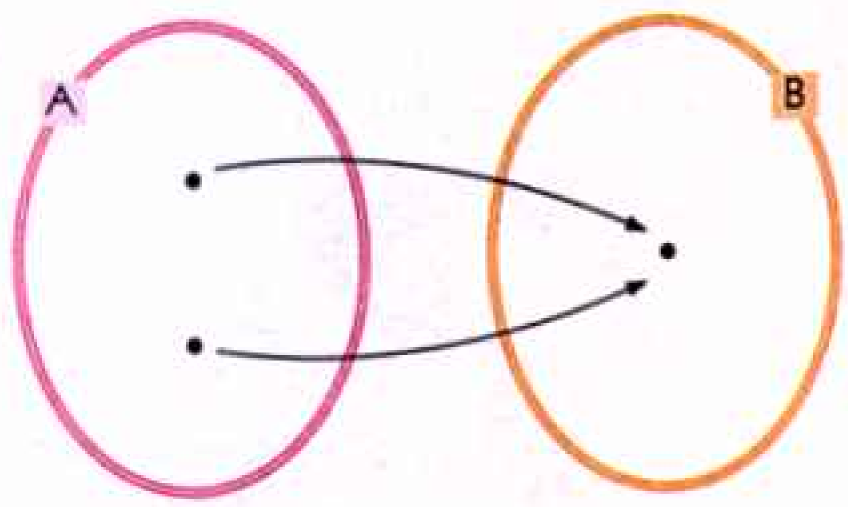


- A função é sobrejetora, pois $Im(f) = CD(f) = \mathbb{R}_+$
- Não é injetora, pois pelo menos um elemento (y') do CD(f), é imagem de dois elementos distintos (x_1 e x_2) do D(f).

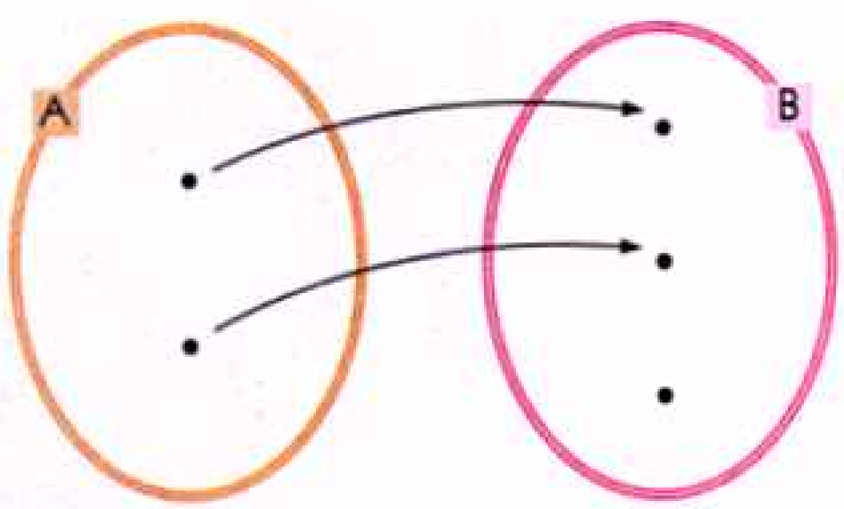
Propostos

123 Classifique as funções representadas nos diagramas em injetora, sobrejetora ou bijetora.

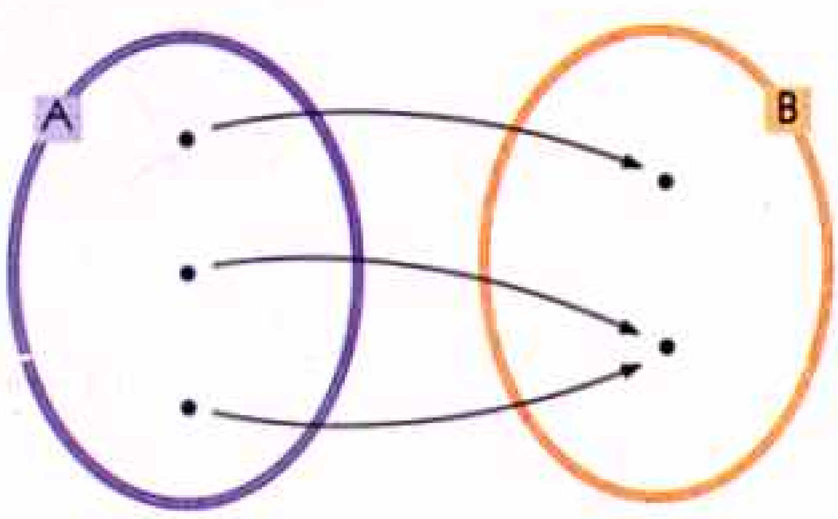
a)



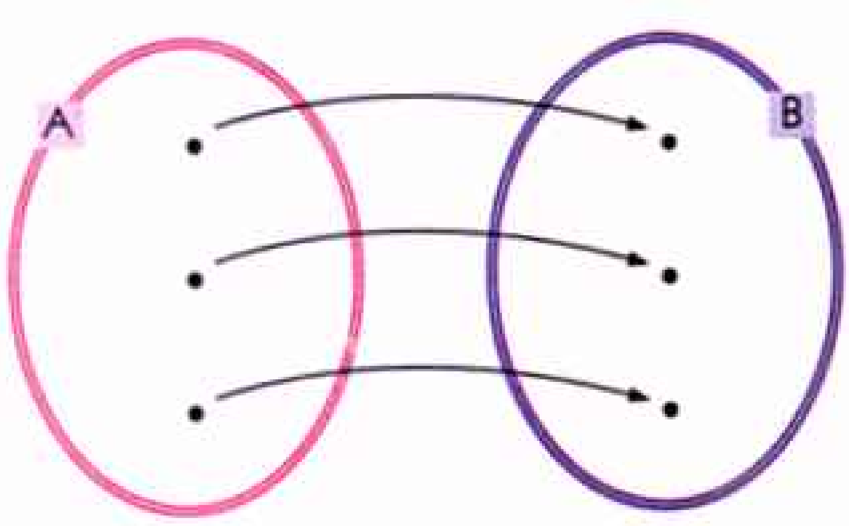
b)



c)

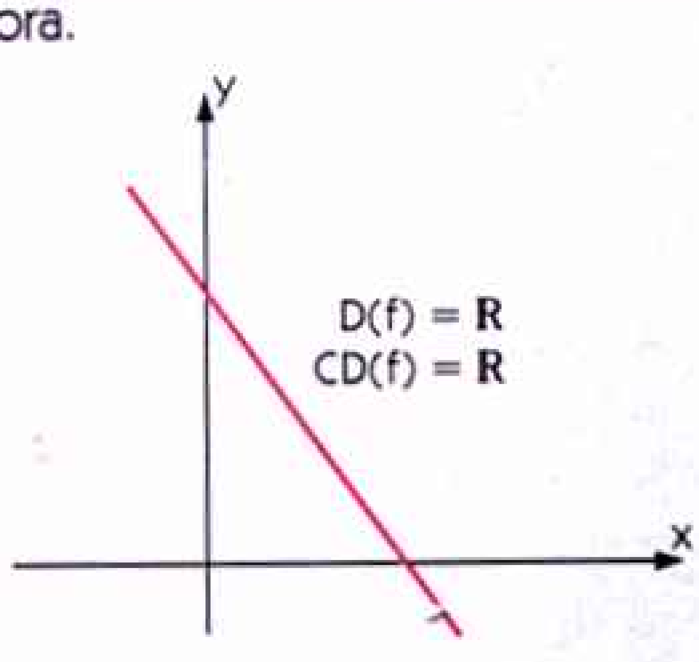


d)

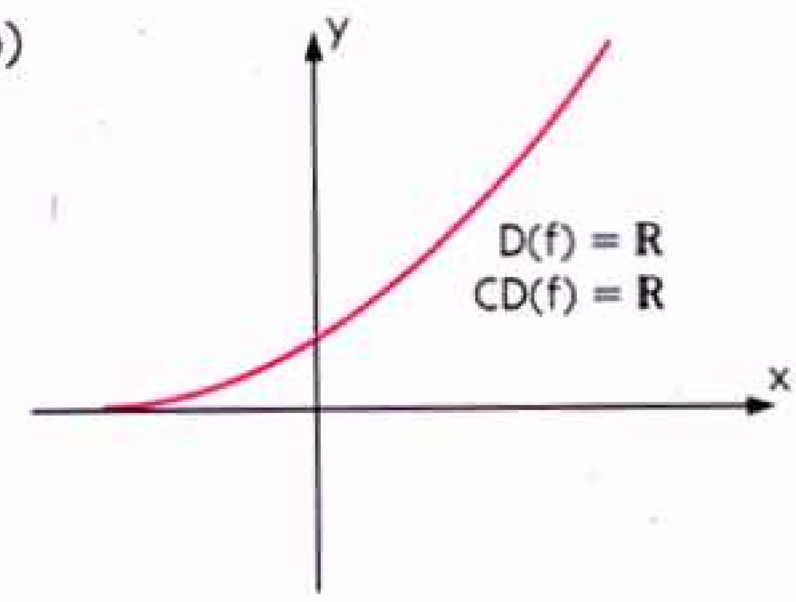


124 Classifique as funções representadas graficamente em injetora, sobrejetora ou bijetora.

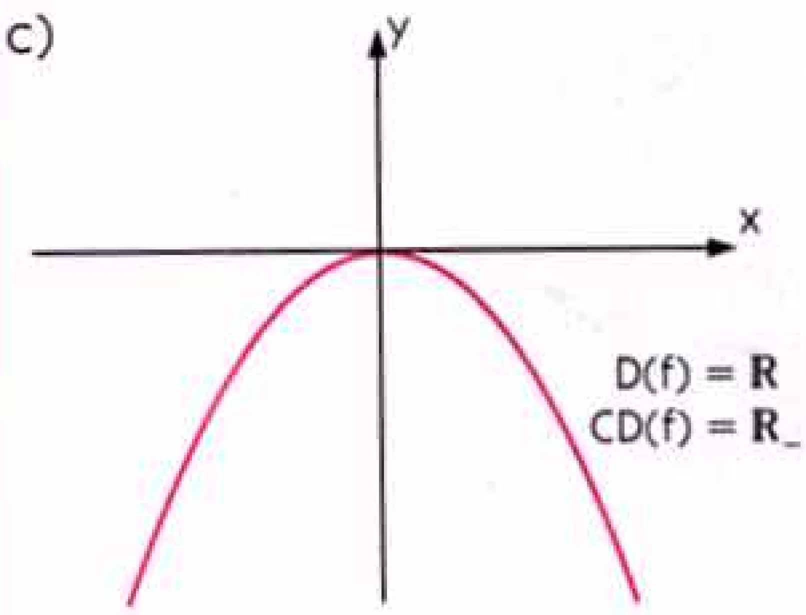
a)



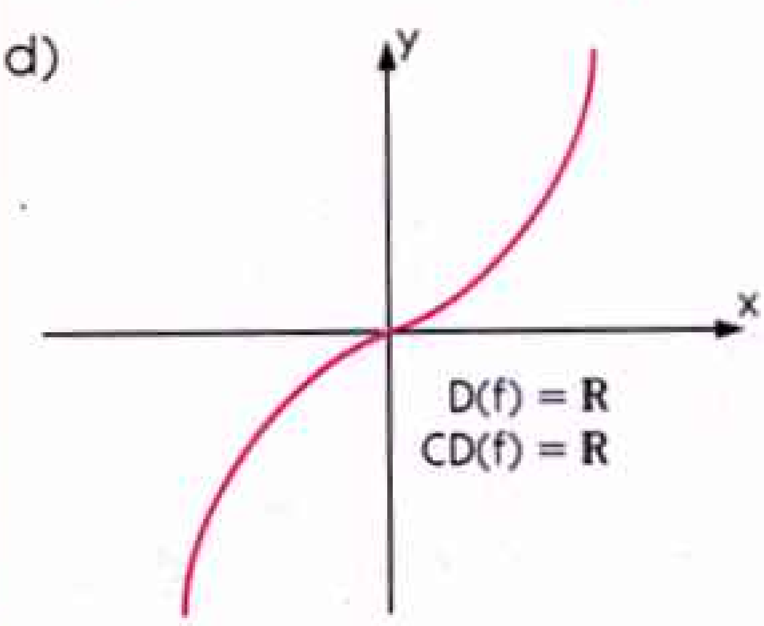
b)



c)



d)



125 (Cesesp-PE) Sejam: *A* o conjunto dos automóveis matriculados na cidade de Recife e *B* o conjunto dos dígitos de 0 a 9.
Considere a função $f: A \rightarrow B$ definida por: $f(x)$ é o último dígito à direita na matrícula do automóvel *x*.
Assinale, dentre as alternativas abaixo, a correta:

a) *f* é função injetiva
b) *f* é uma função sobrejetiva
c) *f* é uma função bijetiva
d) a imagem de *f* é o conjunto {0, 1, 2, 3}
e) a imagem de *f* é o conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

126 (UFF-RJ) Sendo $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e a aplicação $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$, podemos afirmar que *f*:

a) é sobrejetora e não injetora
b) é bijetora
c) é sobrejetora
d) é injetora
e) não é injetora nem sobrejetora

127 (Cesesp-PE) $\mathbb{N}$ representa o conjunto dos números naturais. Considere a função s: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por:

$$s(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2}, \text{ se } x \text{ é um número par} \\ \dfrac{x+1}{2}, \text{ se } x \text{ é um número ímpar} \end{cases}$$

O que de verdadeiro podemos afirmar a respeito da função *s*?

a) a função *s* é injetora
b) a função *s* não é sobrejetora
c) a função *s* é bijetora
d) a função *s* é injetora e não é sobrejetora
e) a função *s* é sobrejetora e não é injetora

Domínio de uma função real

Consideraremos que o domínio de uma função *f*, D(f), salvo indicação em contrário, é o subconjunto de $\mathbb{R}$, formado por todos os valores de *x* para os quais as operações indicadas nas expressões são possíveis, resultando um número real.

Tal função, na qual o domínio é subconjunto de $\mathbb{R}$, é chamada de função real.

É possível determinar o domínio de uma função real, conhecendo apenas a lei de correspondência entre seus elementos.

Veja alguns casos notáveis:

1º caso Quando a variável aparece no denominador de uma fração.

Condição: o denominador de uma fração deve ser diferente de zero.

Exemplo:

Determinar o domínio da função $f(x) = \dfrac{3 + x}{2x - 5}$.

Como $2x - 5 \neq 0$ tem-se $2x \neq 5$ ou $x \neq \dfrac{5}{2}$, então, $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \dfrac{5}{2}\right\}$.

2º caso Quando a variável aparece no radicando de um radical de índice par.

Condição: o radicando de um radical de índice par deve ser um número maior ou igual a zero (positivo ou nulo).

Exemplo:

Determinar o domínio da função $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x - 6}}{5}$.

Como $2x - 6 \geqslant 0$ tem-se $2x \geqslant 6$ ou $x \geqslant 3$, então, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 3\}$.

3º caso Quando a variável aparece no radicando de um radical de índice par e esse radical está no denominador de uma fração.

Condição: este caso é a reunião dos dois primeiros casos; logo, o radicando deve ser maior que zero.

Exemplo:

Determinar o domínio da função $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x + 2}}$.

Como $x + 2 > 0$ tem-se $x > -2$, então, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$.

Exercícios

Resolvido

Determinar o domínio das seguintes funções:

a) $f(x) = x^3 + x$ b) $f(x) = \dfrac{2x - 1}{3x + 4}$ c) $f(x) = \sqrt{-3x + 15}$ d) $f(x) = \dfrac{x + 1}{\sqrt{4x + 4}}$

a) $f(x) = x^3 + x$

Como não há restrição para o domínio da função $f(x) = x^3 + x$, o domínio é o conjunto dos números reais: $D(f) = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = \dfrac{2x - 1}{3x + 4}$

Temos: $3x + 4 \neq 0 \Rightarrow 3x \neq -4 \Rightarrow x \neq -\dfrac{4}{3}$

Logo: $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -\dfrac{4}{3}\right\}$

c) $f(x) = \sqrt{-3x + 15}$

Temos: $-3 + 15 \geqslant 0$

$-3x \geqslant -15 \Rightarrow 3x \leqslant 15 \Rightarrow x \leqslant 5$

Logo: $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 5\}$

d) $f(x) = \dfrac{x + 1}{\sqrt{4x + 4}}$

Observe que o radicando não pode ser negativo, pois o índice do radical é par.

Temos: $4x + 4 > 0 \Rightarrow 4x > -4 \Rightarrow x > -1$

Logo: $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$

Propostos

128 Determine o domínio das seguintes funções:

a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$

b) $f(x) = \dfrac{x + 3}{x + 2}$

c) $f(x) = \sqrt{x - 6}$

d) $f(x) = \sqrt{4x + 8}$

e) $f(x) = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x - 3}}$

129 Determine o domínio das seguintes funções:

a) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

b) $f(x) = \dfrac{2x - 1}{\sqrt{-5x + 10}}$

c) $f(x) = \sqrt{-5x + 7}$

d) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$

e) $f(x) = \dfrac{-3x + 1}{7x + 10}$

130 (PUC-SP) Seja a função *f* de $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x - 2)(x - 4)$. Determine o seu conjunto imagem.

131 Seja a função *f*, definida por $f(x) = \dfrac{x - 2}{2x - 1}$, cujo conjunto imagem é $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Qual o seu domínio?

132 (PUC) Qual o domínio de

$f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid y = \dfrac{2}{4 - x^2}\right\}$?

Função inversa

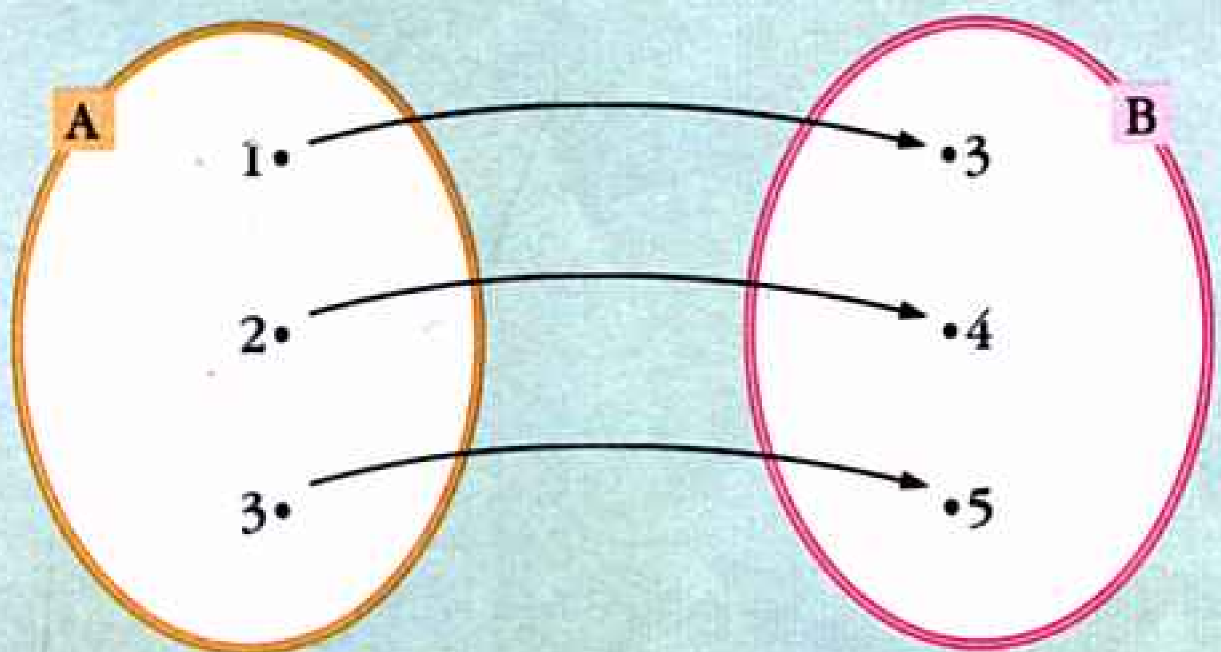
Considere a função $f: A \to B$, bijetora. Chama-se função inversa de f a função $g: B \to A$ quando e somente quando $f(m) = n$ equivaler a $g(n) = m$, quaisquer que sejam $m \in A$ e $n \in B$. Indicaremos a função inversa de f por f^{-1}.

Exemplo:

São dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$, sendo $f: A \to B$ definida pela lei $f(x) = x + 2$.

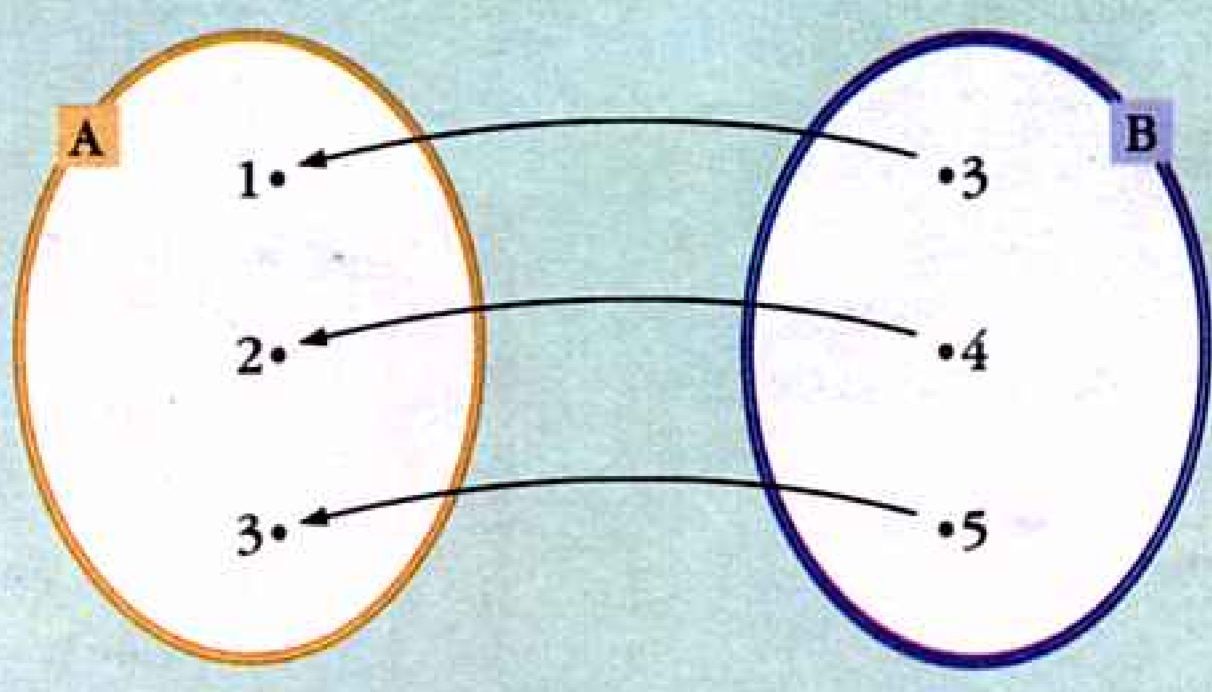
Fazendo a representação de $f: A \to B$ em diagrama de flechas e pares ordenados, temos:

$f = \{(1, 3), (2, 4), (3, 5)\}$



A função inversa de f, $f^{-1}: B \to A$ é obtida invertendo a ordem dos elementos de cada par ordenado da função $f: A \to B$.

$f^{-1} = \{(3, 1), (4, 2), (5, 3)\}$



Para obter a lei de correspondência entre os elementos da função $f^{-1}: B \to A$, basta trocar x por y na lei de correspondência da função $f: A \to B$ e isolar y.

Trocando x por y, em $y = x + 2$, temos:

$x = y + 2$

Isolando y, vem:

$y = x - 2$ lei de correspondência da função f^{-1}

Exercícios

Resolvidos

1 Determinar a lei da função inversa de cada função dada por:

a) $y = 2x - 4$ b) $y = \frac{x+2}{x-1}$, para $x \neq 1$

a) $y = 2x - 4$

Trocando *x* por *y*, temos:

$x = 2y - 4$

Isolando *y*, vem:

$y = \frac{x+4}{2}$

Logo, $y = \frac{x+4}{2}$ é a lei procurada.

b) $y = \frac{x+2}{x-1}$, para $x \neq 1$

Trocando *x* por *y*, temos:

$x = \frac{y+2}{y-1}$

Isolando *y*, vem:

$x(y - 1) = (y + 2) \Rightarrow xy - x = y + 2 \Rightarrow xy - y = x + 2 \Rightarrow y(x - 1) = x + 2$

$\Rightarrow y = \frac{x+2}{x-1}$, para $x \neq 1$

Neste caso, a lei da inversa é igual à da função dada.

2 Dada a função *f* por $f(x) = 3x - 2$, calcular $f^{-1}(4)$.

Inicialmente calculamos $f^{-1}(x)$:

$y = 3x - 2 \Rightarrow x = 3y - 2 \Rightarrow x + 2 = 3y \Rightarrow y = \frac{x+2}{3}$ ou $f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3}$

Logo: $f^{-1}(4) = \frac{4+2}{3} \Rightarrow f^{-1}(4) = 2$

Propostos

133 Determine a lei da função inversa de cada função dada por:

a) $y = x + 5$

b) $y = x - 4$

c) $y = 3x$

d) $y = 2x - 1$

134 Determine a função inversa de cada função dada por:

a) $y = 4x + 2$

b) $y = \frac{x+2}{x-2}$ para $x \neq 2$

c) $y = \frac{x-4}{x+1}$ para $x \neq -1$

135 Dada a função *f* por $f(x) = x + 6$, calcule $f^{-1}(4)$.

136 Considerando a função *f* dada por $f(x) = 2x + 1$, calcule $f^{-1}(3)$.

137 Determine $f^{-1}(2) + f^{-1}(-2)$, sabendo que $f(x) = 3x + 1$.

138 (Santa Casa-SP) Se f^{-1} é a função inversa da função *f*, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 3x - 2$, então $f^{-1}(-1)$ é igual a:

a) -1

b) $-\frac{1}{3}$

c) $-\frac{1}{5}$

d) $\frac{1}{5}$

e) $\frac{1}{3}$

Função composta

Vamos observar um evento das atividades da tecnologia e, assim, estabelecer um exemplo que nos dê a idéia de função composta.

Um laboratório de provas submeteu um determinado carro a um teste de consumo relacionado com o custo do combustível. Os resultados foram tabulados da seguinte forma:

Tabela 1

Percurso (km)	Consumo (ℓ)
10	1
20	2
30	3
40	4

A lei que define o consumo em função do percurso é: $f(x) = 0{,}1x$

Tabela 2

Consumo (ℓ)	Custo (R$)
1	12,00
2	24,00
3	36,00
4	48,00

A lei que define o custo em função do consumo é: $g(x) = 12x$

Tabela 3

Percurso (km)	Custo (R$)
10	12,00
20	24,00
30	36,00
40	48,00

A partir das funções obtidas, temos a relação percurso e custo, que chamaremos de função composta.

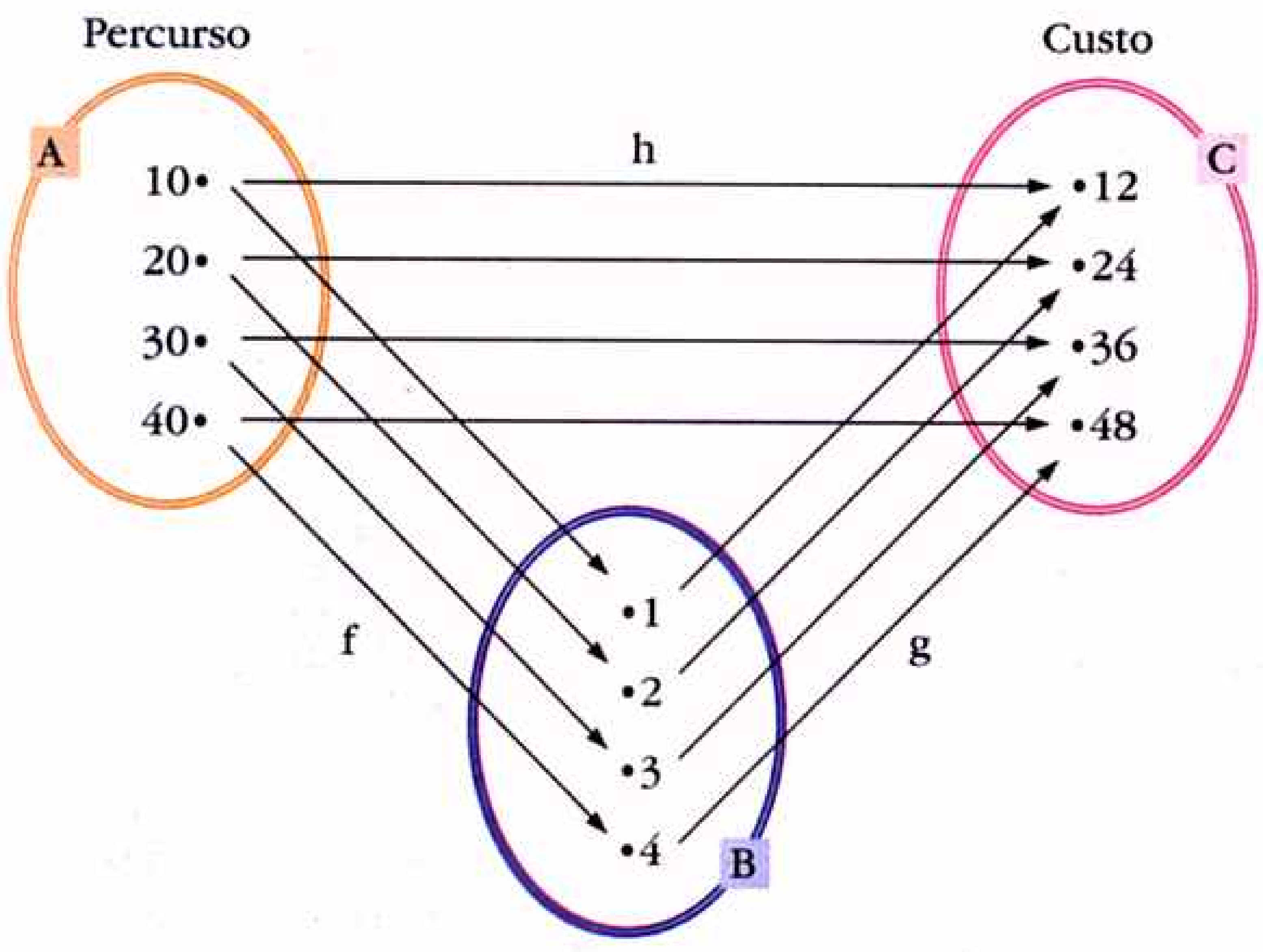
Observe os valores da tabela 3 e note ainda que a lei que define esta função é h(x) = 1,2x, obtida fazendo a composição entre as funções g(x) e f(x), isto é, aplicando a função f a x e depois aplicando a função g a f(x). Em símbolos:

$g \circ f(x) = g[f(x)] = 12[f(x)]$

$g \circ f(x) = 12(0{,}1x)$

$h(x) = g \circ f(x) = 1{,}2x$

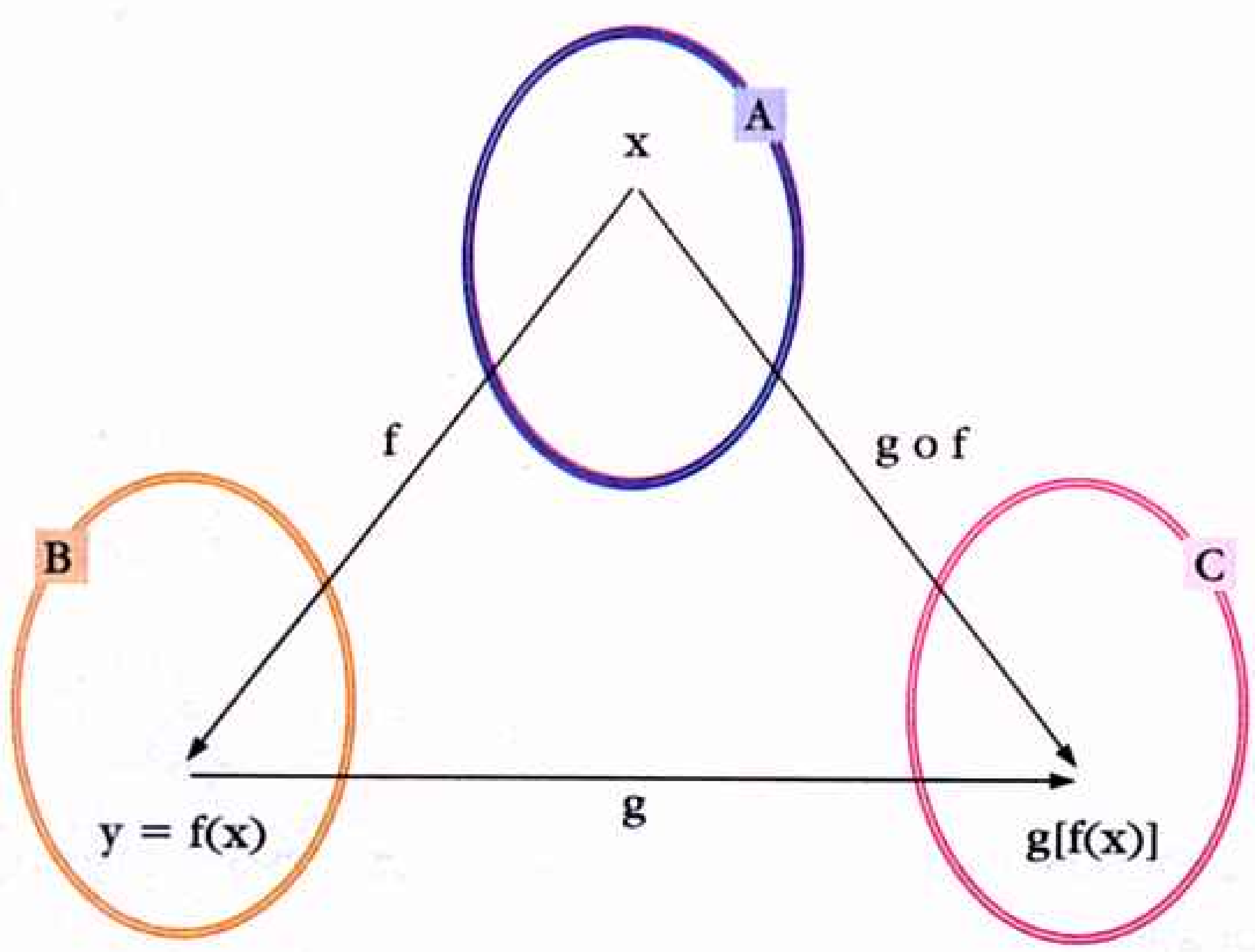
Em diagramas:



Observe que CD(f) = D(g)

Função composta e sua linguagem formal

Considerando as funções $f: A \to B$ e $g: B \to C$, temos que a função composta de g com f é a função $g \circ f: A \to C$, sendo $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.



Exercícios

Resolvidos

1 Dadas as funções f e g de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definidas por:
$f(x) = x + 5$ e $g(x) = x^2 - 1$, determine as funções compostas $g \circ f$ e $f \circ g$.

$(g \circ f)(x) = g[f(x)]$

Sendo $g(x) = x^2 - 1$, então:

$g \circ f(x) = g[f(x)] = [f(x)]^2 - 1$

Como $f(x) = x + 5$, temos: $\Rightarrow g \circ f(x) = g[f(x)] = (x + 5)^2 - 1 \Rightarrow g[f(x)] = x^2 + 10x + 25 - 1$

$\Rightarrow g[f(x)] = x^2 + 10x + 24$

Enquanto que:

$(f \circ g)(x) = f[g(x)]$

Sendo $f(x) = x + 5$, então

$(f \circ g)(x) = f[g(x)]] = g(x) + 5$

Como $g(x) = x^2 - 1$, temos:

$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = x^2 - 1 + 5 = x^2 + 4$

2 Sabendo que $D(f) = \mathbb{R} - \{1, 2\}$ e que $f(x) = \frac{1}{x - 1}$, determinar $f[f(x)]$.

$$f[f(x)] = \frac{1}{f(x) - 1}$$

$$f[f(x)] = \frac{1}{\frac{1}{x - 1} - 1}$$

$$f[f(x)] = \frac{1}{\frac{1 - x + 1}{x - 1}}$$

$$f[f(x)] = \frac{1}{\frac{2 - x}{x - 1}}$$

$$f[f(x)] = \frac{x - 1}{2 - x}$$

3 Dadas as funções $f(x) = 1 - 2x$ e $g(x) = 2x + k$, determinar o valor de k de modo que $f[g(x)] = g[f(x)]$.

Calculamos $f[g(x)]$: $f[g(x)] = 1 - 2[g(x)] = 1 - 2[2x + k] = 1 - 4x - 2k$

Calculamos $g[f(x)]$: $g[f(x)] = 2[f(x)] + k = 2(1 - 2x) + k = 2 - 4x + k$

Sendo $f[g(x)] = g[f(x)]$, temos:

$1 - 4x - 2k = 2 - 4x + k$

$-2k - k = 2 - 1 - 4x + 4x$

$-3k = 1$

$k = -\frac{1}{3}$

Propostos

139 Determine a lei que define a função $g \circ f$ e $f \circ g$ em cada caso:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sendo $f(x) = 2x$
$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sendo $g(x) = 4x + 1$

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sendo $f(x) = 6 - x$
$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sendo $g(x) = 6x + 3$

140 Determine a lei que define a função $g \circ f$ dadas as funções:
$f: \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R} - \{-3\}$, sendo $f(x) = x - 5$
$g: \mathbb{R} - \{-3\} \to \mathbb{R}$, sendo $g(x) = \dfrac{1}{x + 3}$

141 Determine a lei que define a função $f \circ g$, dadas as funções: $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, sendo $f(x) = x - 5$ e $g = \mathbb{R} - \{-3\} \to \mathbb{R}^*$, sendo $g(x) = \dfrac{1}{x + 3}$

142 Dadas as funções $f(x) = -x - 3$ e $g(x) = 4x + k$, determine o valor de *k* de modo que $f \circ g = g \circ f$.

143 Dadas as funções
$f(x) = 5x - 3$, $g(x) = x^2 - 1$ e $h(x) = 2x^2$

a) simplifique a expressão dada por $f[h(x)] - 4g(x)$;

b) calcule *x*, para que $f[h(x)] = 7$.

144 (UA-AM) Se *f* e *g* são funções, tais que $f(x) = 2x - 3$ e $f[g(x)] = x$, então $g(x)$ é igual a:

a) $\dfrac{x + 3}{2}$

b) $3x + 2$

c) $\dfrac{1}{2x - 3}$

d) $2x + 3$

145 (PUCCAMP-SP) Dadas as funções reais $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$, $x \neq 1$ e $g(x) = 2x - 4$, o valor de $(f \circ g)(2) + (g \circ f)\left(\dfrac{1}{2}\right)$ é igual a:

a) 7
b) 0
c) −9
d) −7
e) n.d.a.

146 (ITA-SP) Sejam $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = x - 1$ duas funções reais. Definimos a função composta de *f* e *g* como sendo $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.
Então, $(g \circ f)(y - 1)$, é igual a:

a) $y^2 - 2y + 1$
b) $(y - 1)^2 + 1$
c) $y^2 + 2y - 2$
d) $y^2 - 2y + 3$
e) $y^2 - 1$

147 (FUABC-SP) Se $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x - 2}$, então $f(f(x))$ vale:

a) 1

b) $\left(\dfrac{2x + 1}{x - 2}\right)^2$

c) $\dfrac{x - 2}{2x + 1}$

d) *x*

e) $\dfrac{2x + 1}{x - 2}$

148 (Fuvest-SP) Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é da forma $f(x) = ax + b$ e verifica $f(f(x)) = x + 1$ para todo *x* real, então *a* e *b* valem, respectivamente:

a) 1 e $\dfrac{1}{2}$

b) −1 e $\dfrac{1}{2}$

c) 1 e 2

d) 1 e −2

e) 1 e 1

149 (U.E.Maringá) Sejam *f* e *g* funções definidas por $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$ e $g(x) = x^2 + 2$, determine o valor de

$$f\left[g\left(\frac{1}{2}\right)\right] + g\left[f(\sqrt{5} + 1)\right].$$

150 (PUC-SP) Sendo $f(x) = 3x - 2$, $g(x) = 2x + 3$ e $b = f(a)$, então $g(b)$ vale:

a) $6a - 4$
b) $5a + 1$
c) $3a - 2$
d) $6a - 6$
e) $5a - 2$

151 (Mack-SP) Se $f(x) = 3$ e $g(x) = x^2$, então $f(g(x))$ é igual a:

a) 9
b) 3
c) $3x^2$
d) $9x^2$
e) x^2

Ficha-resumo

Produto cartesiano

$$\boxed{A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}}$$

Considerando dois conjuntos, *A* e *B*, não-vazios, chamamos produto cartesiano de *A* por *B* o conjunto indicado por A × B, formado por todos os pares ordenados, nos quais o 1º elemento pertence ao conjunto *A* e o 2º elemento pertence ao conjunto *B*.

Relação binária

Considerando dois conjuntos, *A* e *B*, não-vazios, denominamos relação binária de *A* em *B* qualquer subconjunto do produto cartesiano A × B.

Funções

$$\boxed{f: A \rightarrow B \text{ ou } y = f(x), \text{ dado que } x \in A \text{ e } y \in B}$$

Adotando dois conjuntos, *A* e *B*, não-vazios e uma relação binária de *A* em *B*, dizemos que essa relação é função de *A* em *B* se, e somente se, a cada elemento do conjunto *A* corresponde um único elemento do conjunto *B*.

Assim sendo, temos que:

Domínio da função	$D(f) = A$
Contradomínio da função	$CD(f) = B$
Imagem da função	$Im(f) \subset B$

Função injetora

Se para quaisquer elementos distintos do conjunto *A* ($x_1 \neq x_2$) correspondem elementos distintos do conjunto *B* ($y_1 \neq y_2$).

Função sobrejetora

Se o conjunto imagem é igual ao conjunto *B*, $Im(f) = B$.

Função bijetora

Se, ao mesmo tempo, é injetora e sobrejetora.

Domínio de uma função real

1º caso Quando a variável aparece no denominador de uma fração.
***Condição*:** o denominador de uma fração deve ser diferente de zero.

2º caso Quando a variável aparece no radicando de um radical de índice par.
***Condição*:** o radicando de um radical de índice par deve ser um número maior ou igual a zero.

3º caso Quando a variável aparece no radicando de um radical de índice par e esse radical está no denominador de uma fração.
***Condição*:** este caso é a reunião dos dois primeiros; logo, o radicando deve ser maior que zero.

Função inversa

Considerando a função $f: A \to B$ bijetora, chamamos função inversa de *f* a função $g: B \to A$, tal que $f(m) = n$ se e somente se $g(n) = m$ para todo $m \in A$ e para todo $n \in B$.

Função composta

Considerando as funções $f: A \to B$ e $g: B \to C$, temos que a função composta de *g* com *f* é a função $g \circ f: A \to C$, sendo $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$.

Exercícios Complementares

152 Sendo $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x < 3\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq x \leq 0\}$, determine a forma tabular e gráfica dos produtos cartesianos:

a) $A \times B$ b) $B \times A$

153 Considerando a relação

$$R = \left\{(x, y) \in A \times B \mid y = \frac{2x + 1}{2}\right\}$$

e os conjuntos $A = \left\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right\}$ e

$B = \left\{-\frac{1}{2}, 0, 2, 3, 4, 5\right\}$, determine:

a) pares ordenados da relação *R*
b) conjunto domínio e conjunto imagem
c) diagrama de flechas
d) gráfico cartesiano
e) se essa relação é uma função

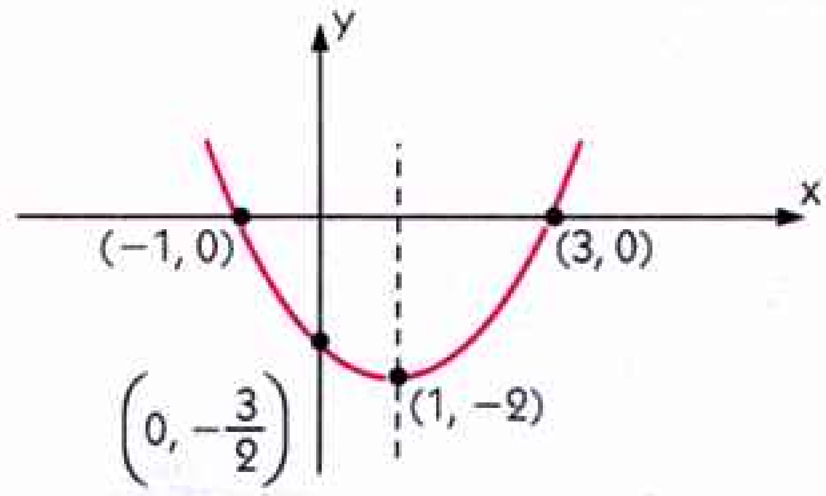
154 Dada a função $f(x) = x^2 - 3x$, determine:

a) $f(-3)$
b) $f(0)$
c) $f(3)$
d) $f\left(-\frac{1}{4}\right)$
e) $\frac{f(4) - f(-4)}{2}$

155 Em cada caso, calcule *k* para que 10 seja uma raiz da função *f*.

a) $f(x) = x + k$
b) $f(x) = x - k$
c) $f(x) = kx - 8$
d) $f(x) = (x - 2k) \cdot (x + 2k)$

156 A parábola da figura é o gráfico da função *f*. Quais são as raízes de *f*?



157 Encontre o domínio das seguintes funções:

a) $f(x) = x^3 - x$

b) $f(x) = \dfrac{x + 3}{x - 8}$

c) $f(x) = \sqrt{5x - 15}$

d) $f(x) = \dfrac{2x - 1}{\sqrt{-4x - 1}}$

e) $f(x) = \sqrt[3]{2x - 6}$

158 Determine a lei da função inversa de cada função dada por:

a) $y = -x + 8$

b) $y = 3x - 5$

c) $y = \dfrac{2x + 1}{2x - 1}$

d) $y = \dfrac{2 - x}{x} + 4$

159 Calcule $f^{-1}(3) + f^{-1}(-3)$, sabendo que $f(x) = \dfrac{4 + x}{4 - x}$.

160 Determine a lei que define a função g o f e f o g em cada caso:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sendo $f(x) = 3x - 1$
$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sendo $g(x) = 2 - 2x$

b) $f: \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\} \to \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$, sendo $f(x) = x^2$
$g: \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\} \to \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$, sendo $g(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$

161 Dadas as funções $f(x) = 4x - k$ e $g(x) = 1 - x$, determine o valor de k de modo que f o g = g o f.

162 Se $f(x) = 3x + 2$, determine: $f[f(x + 1)]$

163 (PUCCAMP-SP) A lei que associa cada par ordenado de números inteiros estritamente positivos com o seu máximo divisor comum:

a) é uma função sobrejetora, mas não é injetora

b) não representa uma função

c) é uma função bijetora

d) é uma função injetora, mas não é sobrejetora

e) n.d.a.

164 (UE-CE) Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função bijetora tal que $f(5) = 2$. Se $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função inversa da função f, então $g^{-1}(5)$ é igual a:

a) 2 b) 7 c) 5 d) 3

165 (PUC-SP) Sejam as funções dadas por $f(x) = 3x - 2$ e $g(x) = 2x + 3$.
Se $b = f(a)$, então $g(b)$ vale:

a) $6a - 1$

b) $5a + 1$

c) $3a - 2$

d) $6a - 6$

e) $5a - 2$

166 (UECE) Sejam f, e g funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = 2x + 1$. Então a função composta f o g assume o menor valor em um ponto do intervalo:

a) $]-1, 0[$

b) $]0, 1[$

c) $\left]\frac{1}{2}, 2\right[$

d) $\left]-1, -\frac{1}{2}\right[$

167 (FCC-BA) Sejam f e g funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 1 - 2x$ e $g(x) = 2x - 1$, respectivamente. Nestas condições, o valor de $f[g(-2)]$ é:

a) -11

b) -9

c) 5

d) 9

e) 11

168 (PUC-MG) Se $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$, o valor de x, de modo que $f[f(x)] = 1$ é:

a) 1,0

b) 2,0

c) 1,5

d) $-1,0$

e) $-1,5$

169 (Cesgranrio-RJ) Sejam $f:]0; +\infty[\to]0; +\infty[$ a função dada por $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ e f^{-1} a função inversa da f. O valor de f^{-1} no ponto 4 é:

a) $\frac{1}{4}$

b) $\frac{1}{2}$

c) 1

d) 2

e) 4

170 (Fuvest-SP) O gráfico de $f(x) = x^2 + bx + c$, onde b e c são constantes, passa pelos pontos (0, 0) e (1, 2). Então $f\left(-\frac{2}{3}\right)$ vale:

a) $-\frac{2}{9}$

b) $\frac{2}{9}$

c) $-\frac{1}{4}$

d) $\frac{1}{4}$

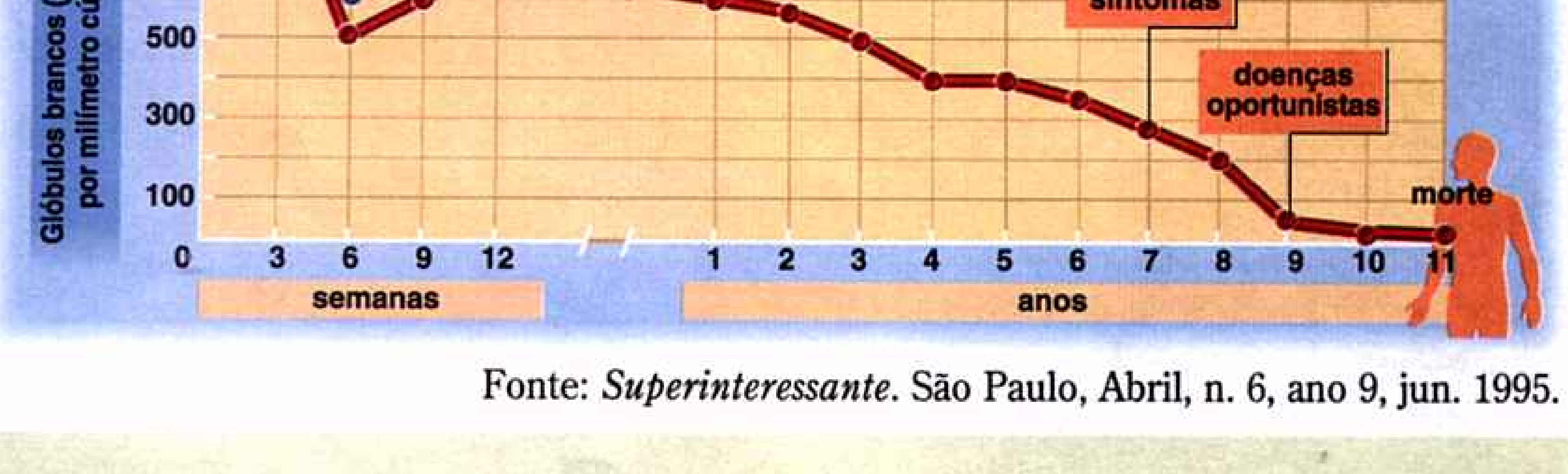
e) 4

Saiba um pouco mais

No início deste tema você observou uma das formas de utilização dos gráficos, no esporte. Agora, nesta leitura, aparece a utilização do gráfico demonstrando a evolução do HIV em função de outros fatores.

Novas pistas sobre como vencer a AIDS

Uma equipe do Instituto Nacional de Alergia e Doenças Infecciosas, em Bethesda, Maryland, levantou novas pistas sobre como alguns portadores do vírus HIV sobrevivem a mais de uma década sem desenvolver a Aids. Eles compararam quinze desses sobreviventes com outros dezoito que desenvolveram a doença em menos de dez anos (*veja o gráfico*), como acontece com mais de 90% dos que são soropositivos. Nos sobreviventes, os anticorpos conseguem reduzir o ritmo de multiplicação do vírus em até vinte vezes. E, em alguns deles, o sistema de defesa até se fortalece. A explicação: apesar da infecção, seus nódulos linfáticos — centros de proliferação de células de defesa, espalhadas pelo corpo — não se deterioram, como na maioria dos pacientes. Nestes, os nódulos estão cheio de HIV, contaminando as milhões de células CD4 (glóbulos brancos) armazenadas ali e matando-as antes que elas sejam distribuídas pelo corpo.



Fonte: *Superinteressante*. São Paulo, Abril, n. 6, ano 9, jun. 1995.