Função polinomial do $1^{\underline{o}}$ grau

Por que nos torna tão pouco felizes esta maravilhosa ciência aplicada, que economiza trabalho e torna a vida mais fácil? A resposta é simples: porque ainda não aprendemos a nos servir dela com bom senso.

Einstein (1879-1955)

1. Função polinomial do 1º grau

A remuneração de um vendedor de uma loja de camisas é feita em duas parcelas: uma fixa, no valor de R$ 500,00 e a outra variável, correspondente a uma comissão de 12% do total de vendas realizadas na semana.

Notamos que a remuneração semanal, R(x), do vendedor é calculada em função do total de vendas (x) na semana e pode ser escrita do seguinte modo:

$$R(x) = 500 + 0{,}12x$$

Chamamos função polinomial do 1º grau a função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa a cada número real x, o número real $ax + b$, com $a \neq 0$.

> Função polinomial do 1º grau f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sendo $f(x) = ax + b$ com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

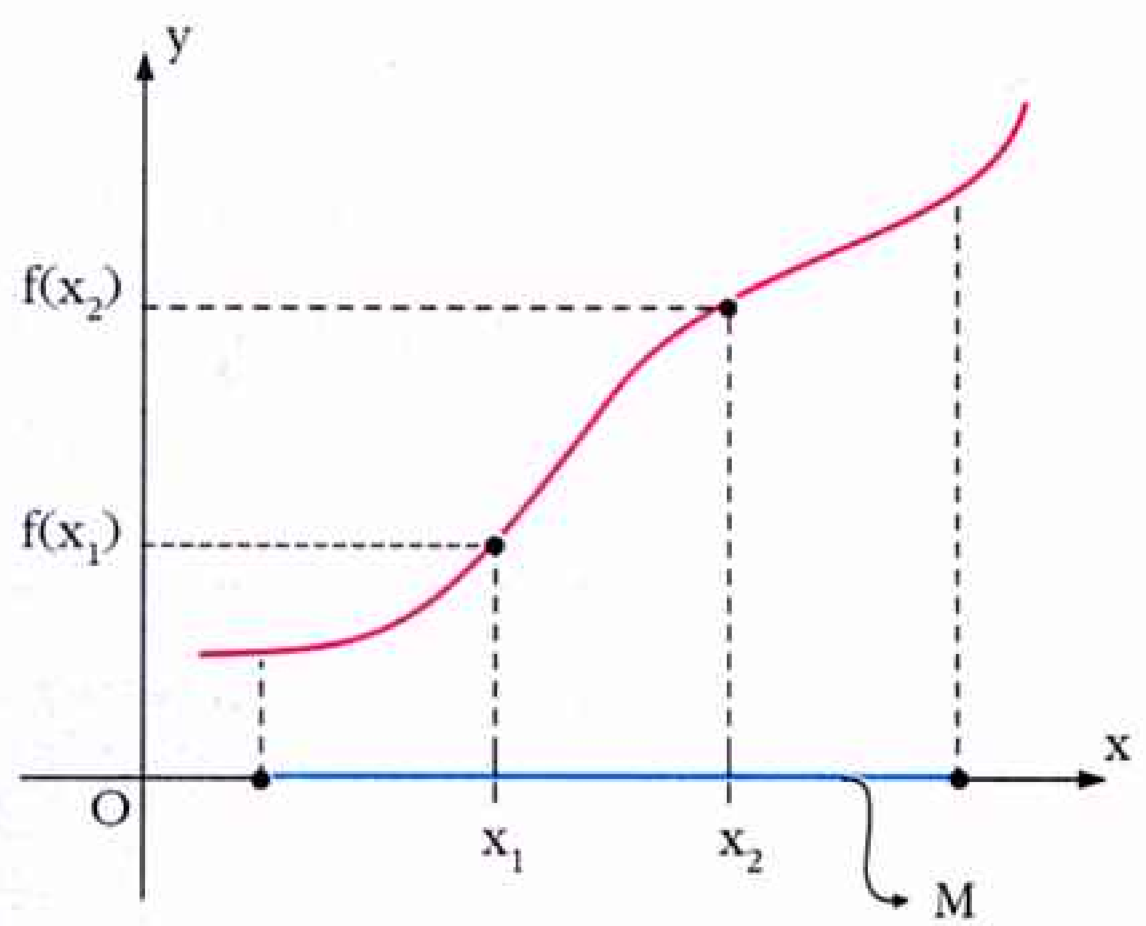
Exemplos:

- $f(x) = 2x + 6$, onde $a = 2$ e $b = 6$
- $f(x) = -3x + \frac{4}{5}$, onde $a = -3$ e $b = \frac{4}{5}$
- $f(x) = 2x$, onde $a = 2$ e $b = 0$

Função crescente

Se para quaisquer elementos x_1 e x_2 de um subconjunto M do domínio de uma função f, com $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) < f(x_2)$, então diremos que f é uma função crescente em M.

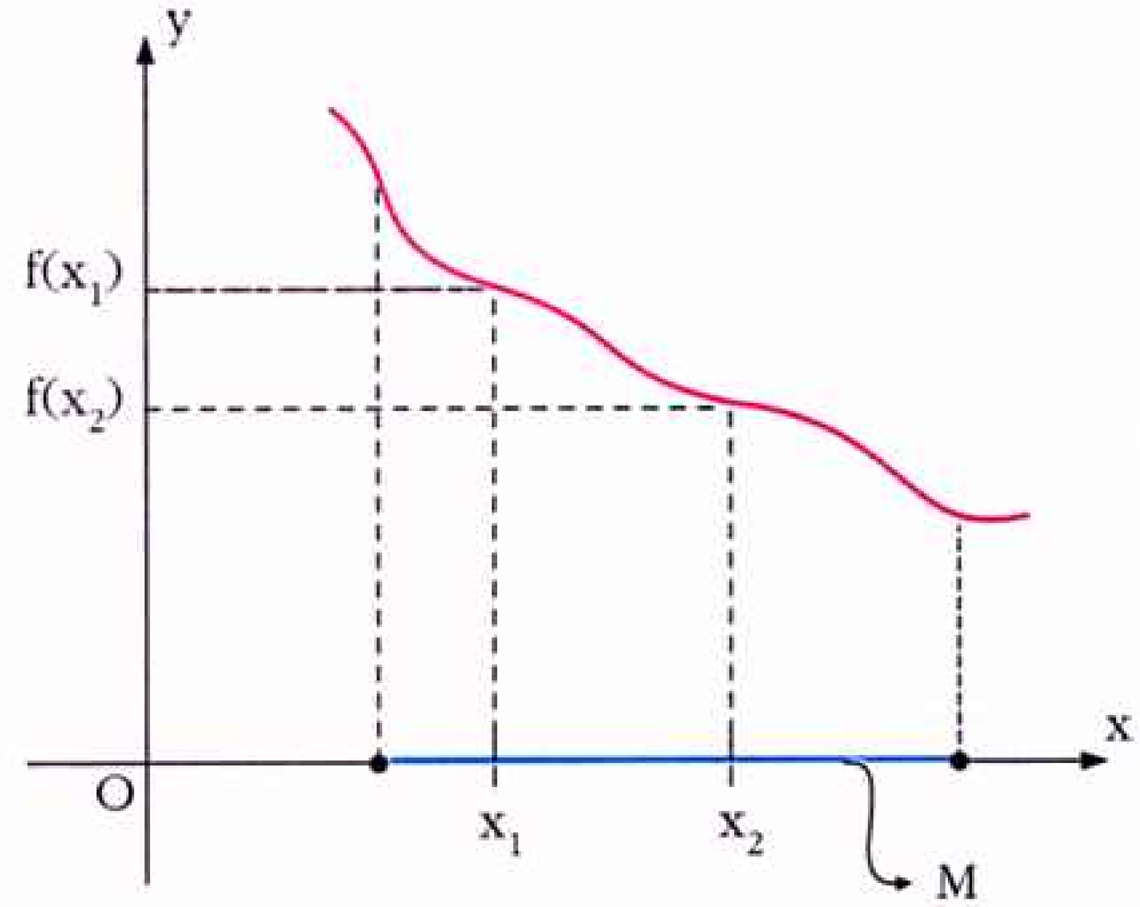
No gráfico:



Função decrescente

Se para quaisquer elementos x_1 e x_2 de um subconjunto *M* do domínio de uma função *f*, com $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) > f(x_2)$, então diremos que *f* é uma função decrescente em *M*.

No gráfico:



2. Características importantes da função do 1º grau

Conjunto domínio: o domínio da função do 1º grau é o conjunto dos números reais: $D(f) = \mathbb{R}$.

Conjunto imagem: o conjunto imagem da função do 1º grau é o conjunto dos números reais: $Im(f) = \mathbb{R}$.

Coeficiente angular: o coeficiente *a* é denominado coeficiente angular.

Coeficiente linear: o coeficiente *b* é denominado coeficiente linear.

A função do primeiro grau é *crescente* em $\mathbb{R}$ quando $a > 0$ e *decrescente* em $\mathbb{R}$ quando $a < 0$.

Exemplos:

a) Para a função $f(x) = 2x + 4$:
- o coeficiente angular *a* é o número 2
- o coeficiente linear *b* é o número 4

Como $a > 0$, a função é crescente em $\mathbb{R}$.

b) Para a função $f(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}$:
- o coeficiente angular é o número $-\frac{2}{3}$
- o coeficiente linear é o número $\frac{1}{2}$

Como $a < 0$, a função é decrescente em $\mathbb{R}$.

Casos particulares

Função linear: a **função polinomial do 1º grau em que o termo *b* é nulo (b = 0) passa a ser chamada de função linear e tem a forma: f(x) = ax.**

Exemplos:

• $y = 3x$ • $y = -\frac{2}{3}x$ • $y = x$ • $y = \sqrt{2}x$

Função identidade: **a função polinomial do 1º grau em que o termo *b* é nulo** (b = 0) e a = 1 **passa a ser chamada de função identidade e tem a forma f(x) = x.**

▶ Caso o termo *a* **seja nulo (a = 0) na expressão** f(x) = ax + b e b ∈ ℝ, **a função *f*** não é função **do 1º grau, passa a ser chamada função constante e tem a forma** f(x) = b.

Exemplos:

• $f(x) = 5$ • $f(x) = \sqrt{7}$ • $y = 0$ • $y = -\frac{1}{4}$

Exercícios

Resolvidos

1 Considerando a função f(x) = 3x + 1, determinar:
a) os coeficientes angular e linear
b) se a função é crescente ou decrescente
c) f(2) e f(−3)

a) $f(x) = \boxed{a}x + b$

$f(x) = \boxed{3}x + 1$

coeficiente angular: a = 3

$f(x) = ax + \boxed{b}$

$f(x) = 3x + \boxed{1}$

coeficiente linear: b = 1

b) A função f(x) = 3x + 1 é crescente porque a > 0.

c) $f(x) = 3x + 1$

$f(2) = 3 \cdot 2 + 1 \Rightarrow f(2) = 7$

$f(-3) = 3 \cdot (-3) + 1 \Rightarrow f(-3) = -8$

2 Conhecendo a função $f(x) = -\frac{5}{2}x$, determinar:

a) coeficientes angular e linear
b) se a função é crescente ou decrescente
c) $f(-1)$ e $f(2)$
d) x para que se tenha $f(x) = 20$

a) $f(x) = \boxed{a}x + b$

$f(x) = \boxed{-\frac{5}{2}}x$

coeficiente angular: $a = -\frac{5}{2}$

$f(x) = ax + \boxed{b}$

$f(x) = -\frac{5}{2}x + \boxed{0}$

coeficiente linear: $b = 0$

b) A função $f(x) = -\frac{5}{2}x$ é decrescente porque $a < 0$.

c) $f(x) = -\frac{5}{2}x$

$f(-1) = -\frac{5}{2} \cdot (-1) \Rightarrow f(-1) = \frac{5}{2}$

$f(2) = -\frac{5}{2} \cdot 2 \Rightarrow f(2) = -5$

d) $f(x) = -\frac{5}{2}x$ e $f(x) = 20$

$-\frac{5}{2}x = 20 \Rightarrow x = -8$

3 Determinar a lei da função que é do tipo $f(x) = ax + b$ e calcular $f(2)$, sabendo que $f(1) = 2$ e $f(3) = 8$.

Para determinar a função f vamos considerar que:

Se $f(1) = 2$ e $f(x) = ax + b$, então: $x = 1$ e $ax + b = 2$
Logo: $a + b = 2$ (I)

Se $f(3) = 8$ e $f(x) = ax + b$, então: $x = 3$ e $ax + b = 8$
Logo: $3a + b = 8$ (II)

Resolvendo o sistema, temos:

$$\begin{matrix} \text{(I)} \\ \text{(II)} \end{matrix} \begin{cases} a + b = 2 \\ 3a + b = 8 \end{cases}$$

Da equação (I), temos: $b = 2 - a$

Substituindo na equação (II): $3a + 2 - a = 8 \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3$

Substituindo $a = 3$ na equação $b = 2 - a$: $b = -1$

Portanto, a função f é dada por $f(x) = 3x - 1$.

Para determinar $f(2)$, fazemos:

$f(x) = 3x - 1$

$f(2) = 3 \cdot 2 - 1 \Rightarrow f(2) = 5$

4 Uma função f é do 1º grau. As imagens de (-2) e de zero são 11 e 3, respectivamente. Qual é a lei de f?

Determinando a função $f(x) = ax + b$:

Se $f(-2) = 11$, então $x = -2$ e $-2a + b = 11$ (I)

Se $f(0) = 3$, então $x = 0$ e $b = 3$ (II)

Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} b = 3 \\ -2a + b = 11 \end{cases}$$

Temos: $a = -4$

Logo: $f(x) = -4x + 3$

Propostos

171 Determine os coeficientes angular e linear, classifique a função em crescente ou decrescente e calcule $f(2)$, $f(-4)$ e $f(0)$ das seguintes funções:

a) $f(x) = x + 3$

b) $f(x) = 2 + 4x$

c) $f(x) = -\frac{7}{2}x$

172 Determine a lei $f(x) = ax + b$, da função f nos seguintes casos:

a) $f(3) = 5$ e $f(-1) = -7$

b) $f(0) = 5$ e $f(-4) = -3$

173 Sabendo que a lei da função f é $f(x) = ax + b$, determine $f(2)$ nos seguintes casos:

a) $f(1) = -1$ e $f(-2) = -4$

b) $f(-2) = 11$ e $f(4) = -13$

174 (Mack-SP) A função f é definida por $f(x) = ax + b$. Sabe-se que $f(-1) = 3$ e $f(1) = 1$. Qual o valor de $f(3)$?

175 (Fuvest-SP) As funções f e g são dadas por: $f(x) = \frac{3}{5}x - 1$ e $g(x) = \frac{4}{3}x + a$.

Sabe-se que $f(0) - g(0) = \frac{1}{3}$.

Determine $f(3) - 3\,g\left(\frac{1}{5}\right)$.

176 (FGV-SP) Quando o preço por unidade de um produto (x) vale R$ 16,00, então 42 unidades são vendidas por mês; quando o preço por unidade vale R$ 24,00, são vendidas 38 unidades por mês. Admitindo que o gráfico da quantidade vendida (y) em função de x seja formado por pontos de uma reta:

a) Obtenha a expressão de y em função de x.

b) Se o preço por unidade for R$ 26,00, qual a quantidade vendida?

Raiz ou zero da função polinomial do 1º grau

Raiz ou zero de uma função é um valor do seu domínio cuja imagem é zero. Sendo $y = f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$, temos:

$$\boxed{x \text{ é zero ou raiz de } f \Leftrightarrow f(x) = 0}$$

Assim, $ax + b = 0$, que apresenta uma única solução, nos leva a $x = -\frac{b}{a}$ para $a \neq 0$. Então a função do 1º grau tem uma só raiz.

Exemplo:

Seja a função $y = 2x - 4$. Para obtermos sua raiz ou zero, faremos $y = 0$.

$2x - 4 = 0 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$

3. Gráfico de uma função do 1º grau

Representação gráfica de uma função do 1º grau

A representação gráfica de uma função do 1º grau, $y = ax + b$ ($a \neq 0$), é uma reta não-paralela aos eixos Ox ou Oy, sendo raiz ou zero da função a abscissa do ponto onde a reta intercepta o eixo Ox.

Construção

A construção do gráfico de uma função do 1º grau, $y = ax + b$, pode ser feita:

1º) Atribuindo-se alguns valores reais a x e obtendo-se valores de y, correspondentes, organizando-os em uma tabela.

2º) Localizando no plano cartesiano os pontos (x, y) e traçando a reta que passa por eles.

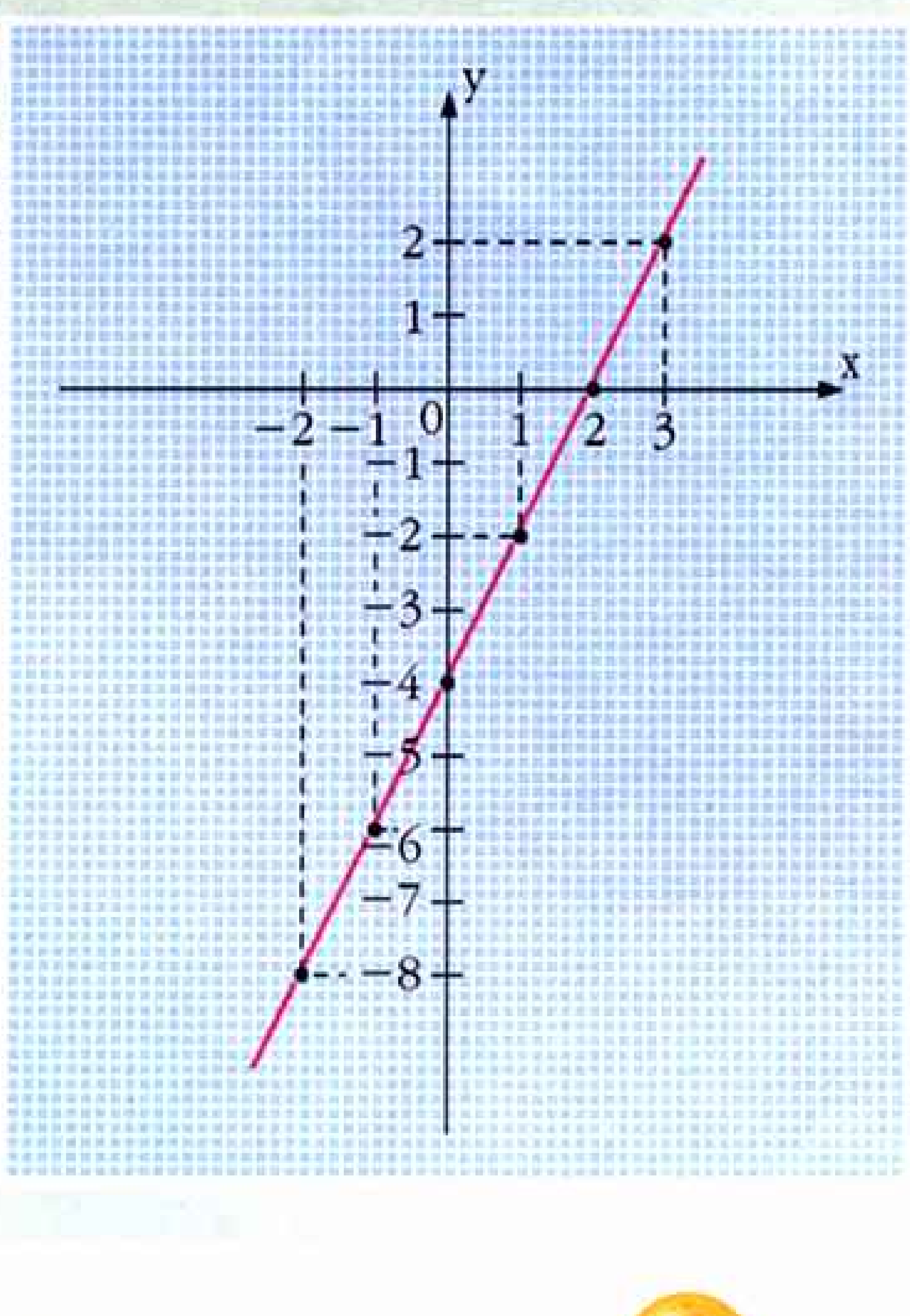
Exemplo:
Vamos construir o gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $y = 2x - 4$.

1º passo:

$x = -2 \to y = 2 \cdot (-2) - 4 = -4 - 4 = -8$
$x = -1 \to y = 2 \cdot (-1) - 4 = -2 - 4 = -6$
$x = 0 \to y = 2 \cdot (0) - 4 = 0 - 4 = -4$
$x = 1 \to y = 2 \cdot (1) - 4 = 2 - 4 = -2$
$x = 2 \to y = 2 \cdot (2) - 4 = 4 - 4 = 0$
$x = 3 \to y = 2 \cdot (3) - 4 = 6 - 4 = 2$

x	y	Pares ordenados
−2	−8	(−2, −8)
−1	−6	(−1, −6)
0	−4	(0, −4)
1	−2	(1, −2)
2	0	(2, 0)
3	2	(3, 2)

2º passo:



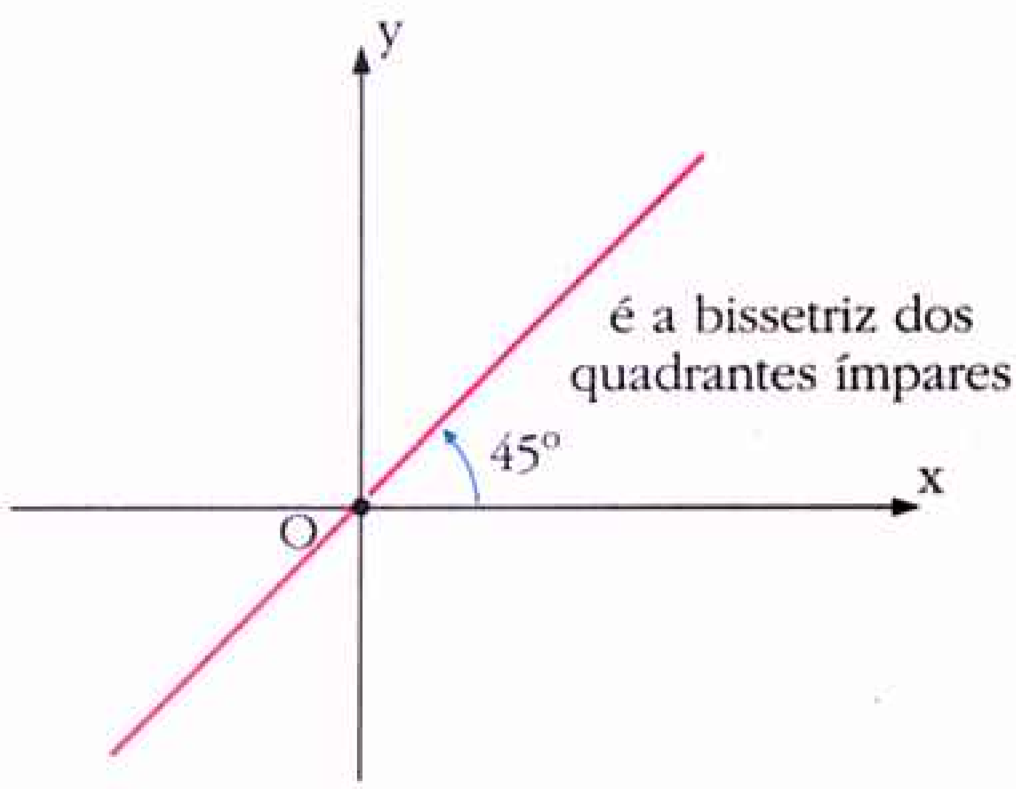
Como o gráfico da função do 1º grau é uma reta, observamos que sua construção pode ser feita com base em apenas dois pontos.

Note que o ponto em que a reta intercepta o eixo x tem o valor de x igual a 2, que é a raiz da função ou zero da função.

Casos particulares

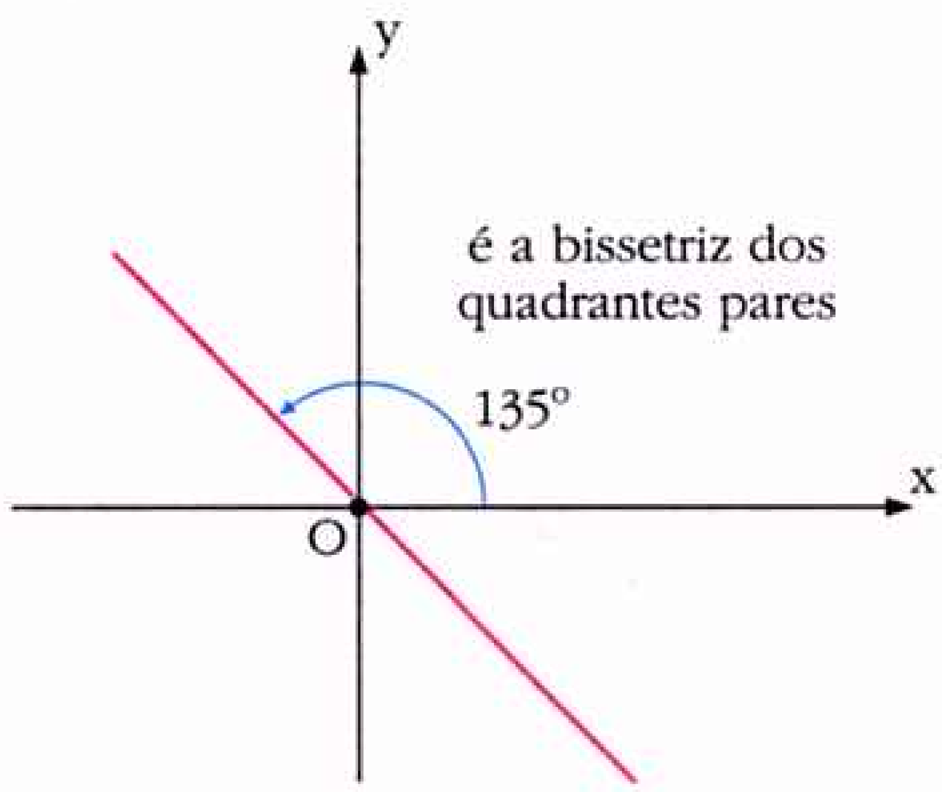
Função Identidade

f(x) = x

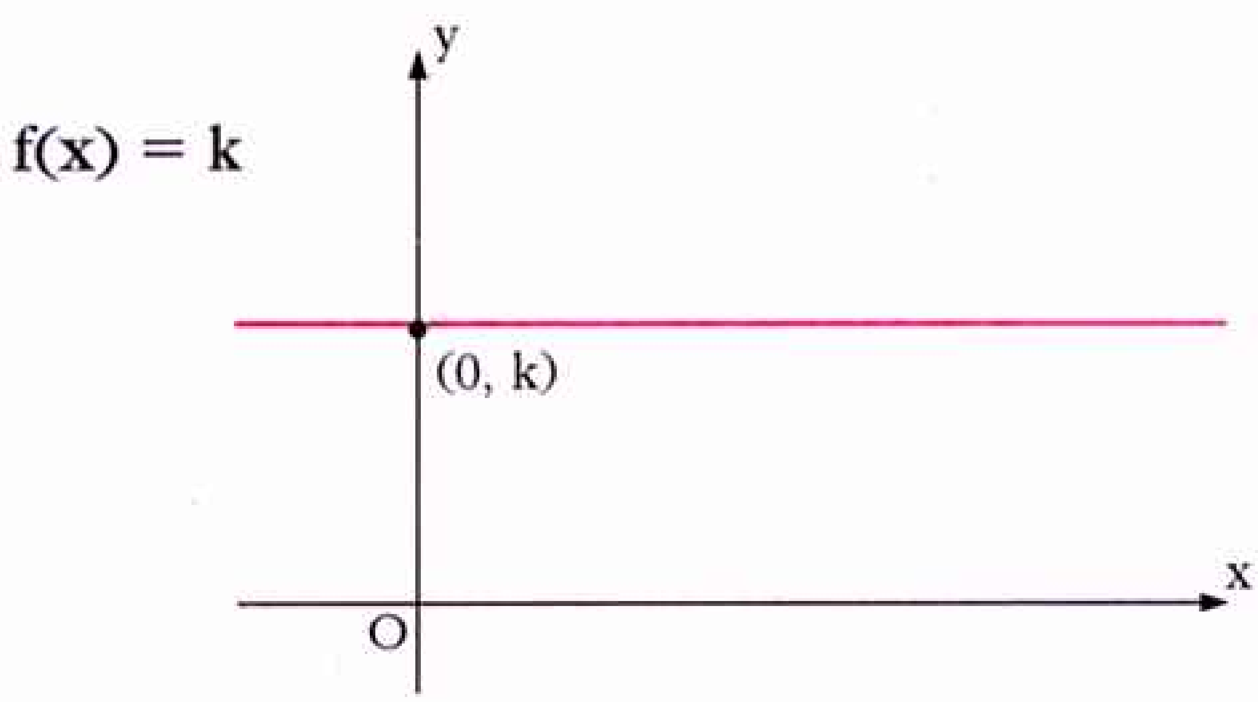


Oposta da Função Identidade

f(x) = −x



▶ **O gráfico de uma função constante também é uma reta, mas uma reta horizontal, isto é, uma reta paralela ao eixo Ox.**



Exercícios

Resolvidos

1 Sendo f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, esboçar o gráfico das funções do 1º grau, determinar suas raízes e classificar a função em crescente/decrescente.

a) $f(x) = -3x + 1$ b) $f(x) = 2x$

a) $f(x) = -3x + 1$

Atribuímos dois valores para *x*:

$x = 0 \to y = -3 \cdot (0) + 1 = 0 + 1 = 1$

$x = 1 \to y = -3 \cdot (1) + 1 = -3 + 1 = -2$

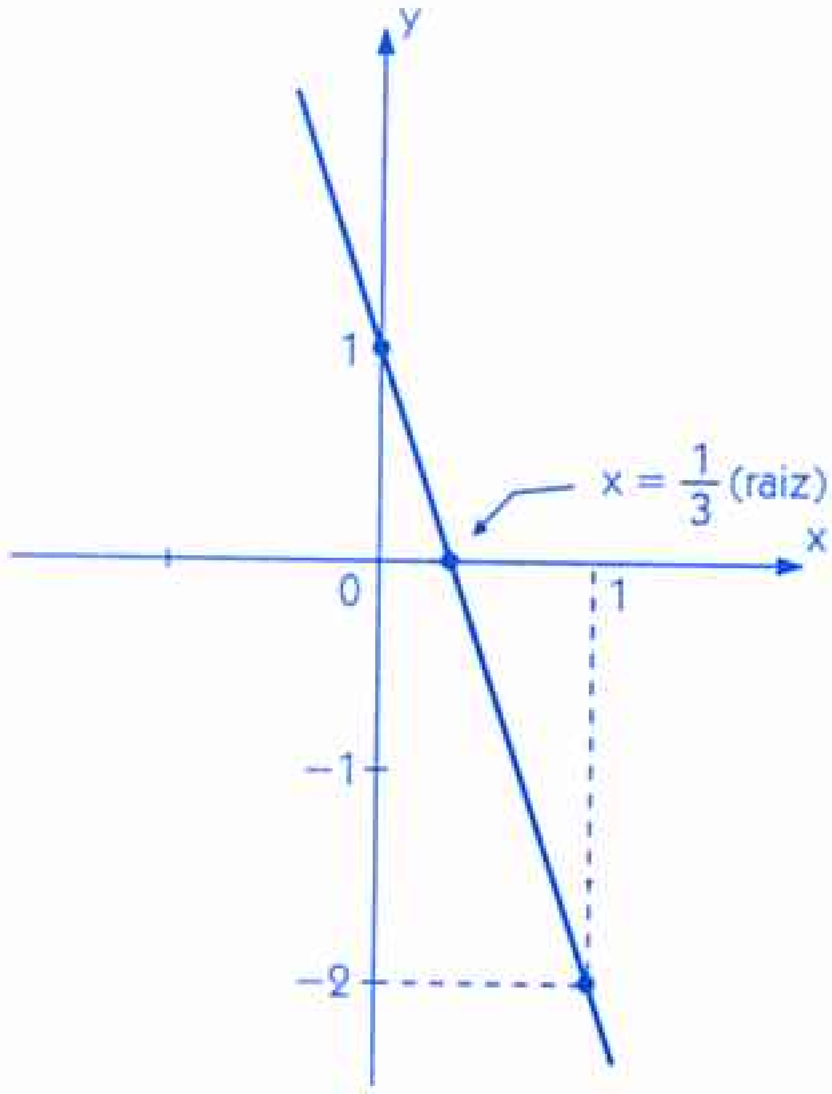
raiz $\to x = -\frac{b}{a} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$

x	y
0	1
1	−2

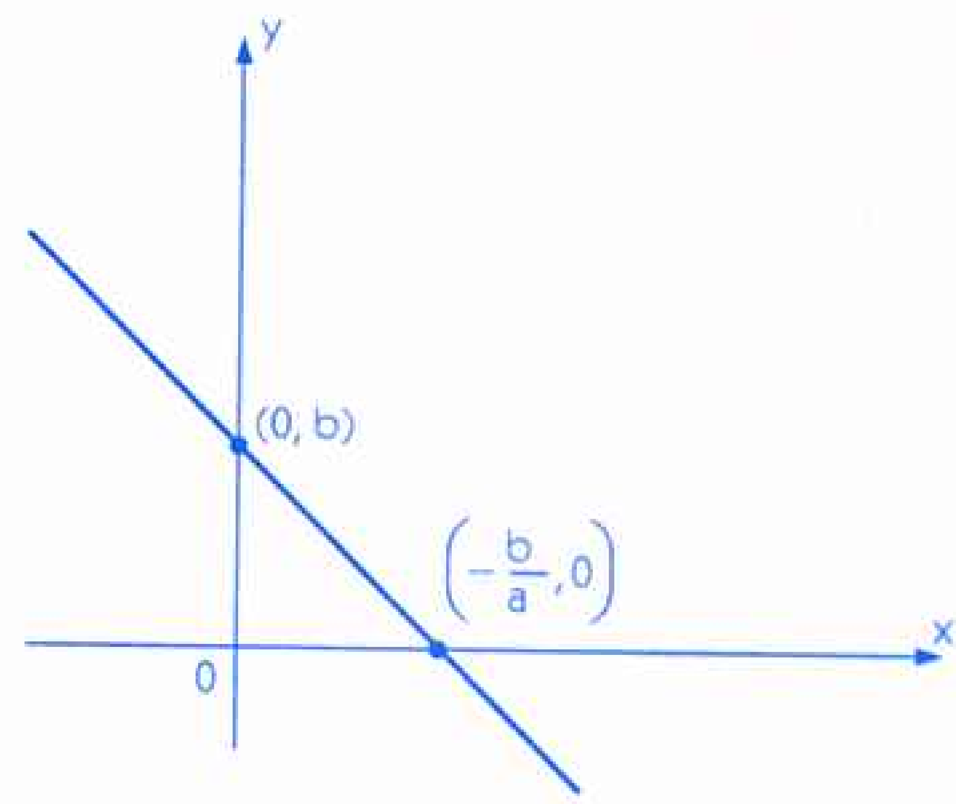
Pares ordenados

(0, 1)

(1, −2)



$\boxed{a < 0}$ Função decrescente



b) $f(x) = 2x$

Atribuímos dois valores para *x*:

$x = 0 \rightarrow y = 2(0) = 0$

$x = 1 \rightarrow y = 2\,(1) = 2$

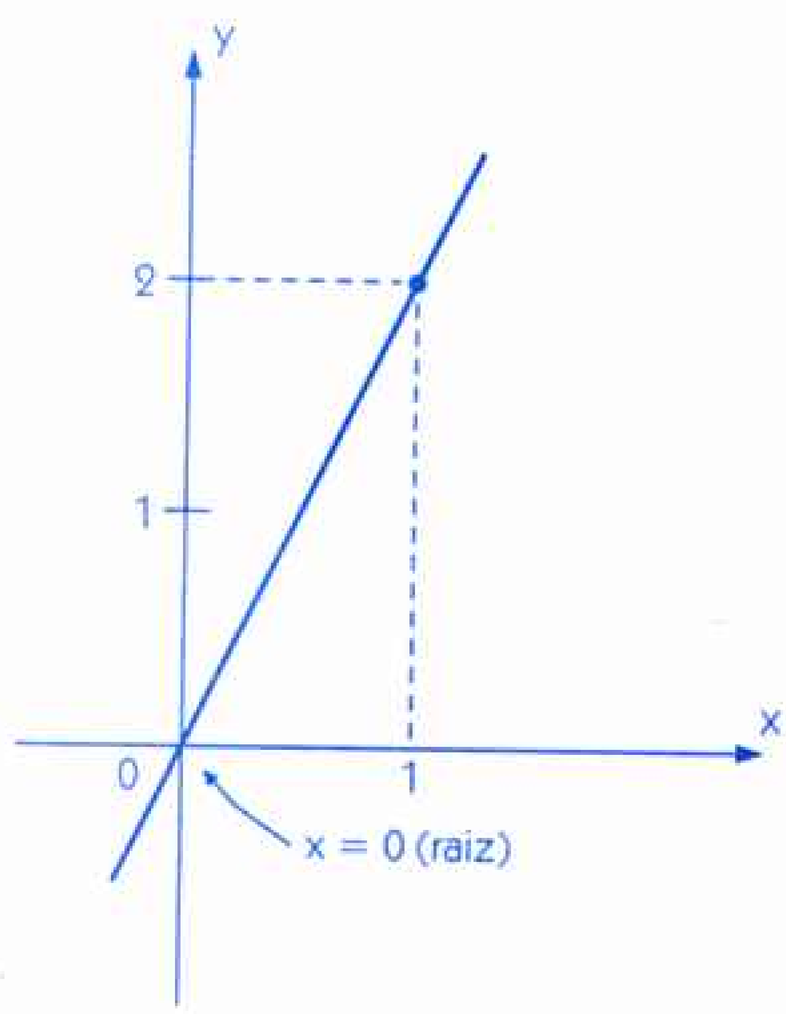
raiz: $x = -\frac{b}{a} = -\frac{0}{2} = 0$

x	y
0	0
1	2

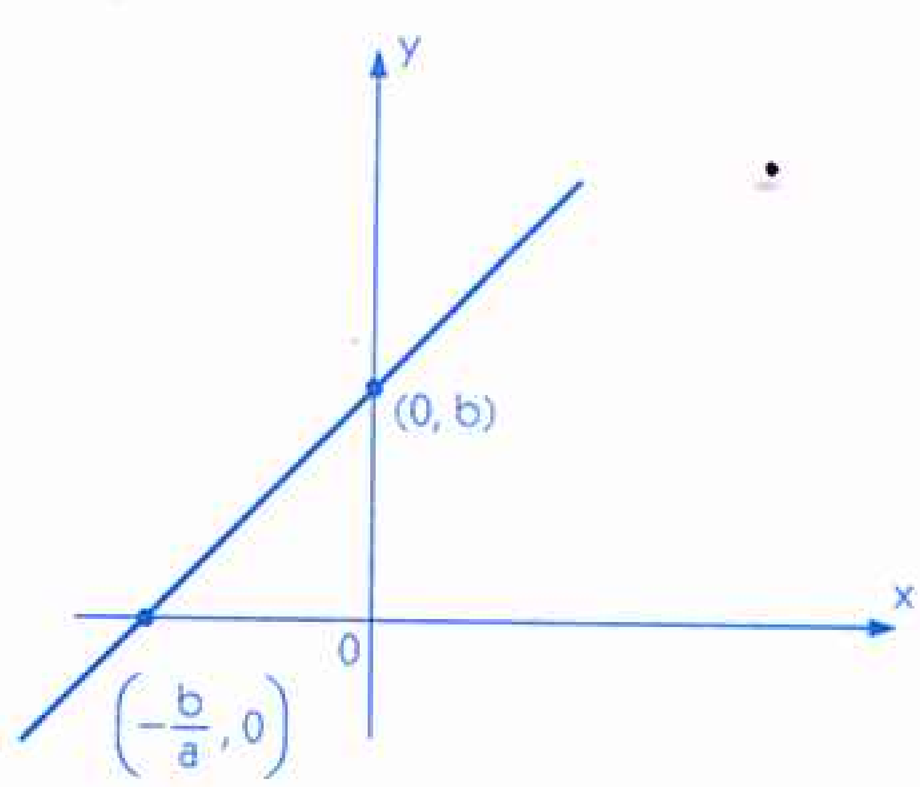
Pares ordenados

(0, 0)

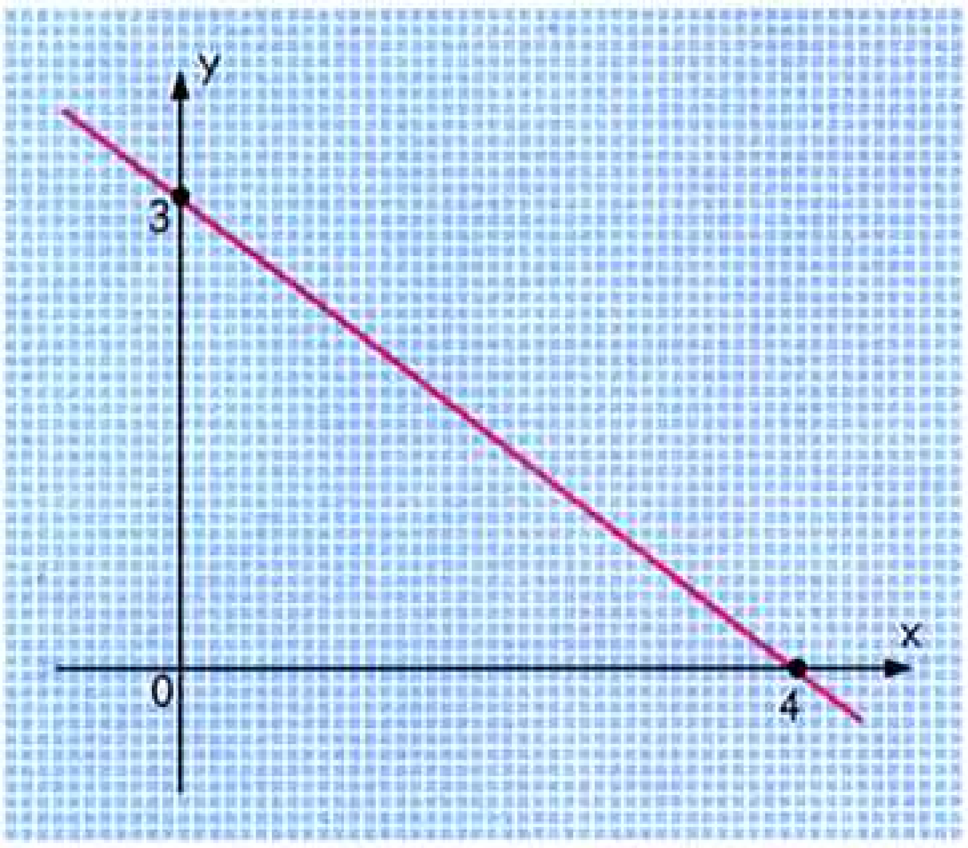
(1, 2)



$\boxed{a > 0}$ Função crescente



2 Determinar a lei que define a função representada no gráfico abaixo:



Sabendo que essa função é do 1º grau e sua forma é $y = ax + b$, consideramos os pontos assinalados no gráfico e montamos um sistema de equações:

Para o ponto (0, 3), temos: $a \cdot 0 + b = 3$, isto é, $b = 3$.

Para o ponto (4, 0), temos: $4a + b = 0$.

$$\begin{cases} b = 3 \\ 4a + b = 0 \end{cases}$$

Substituindo $b = 3$ em $4a + b = 0$, vem:

$4a + 3 = 0 \Rightarrow 4a = -3 \Rightarrow a = -\frac{3}{4}$ Logo, $y = -\frac{3}{4}x + 3$

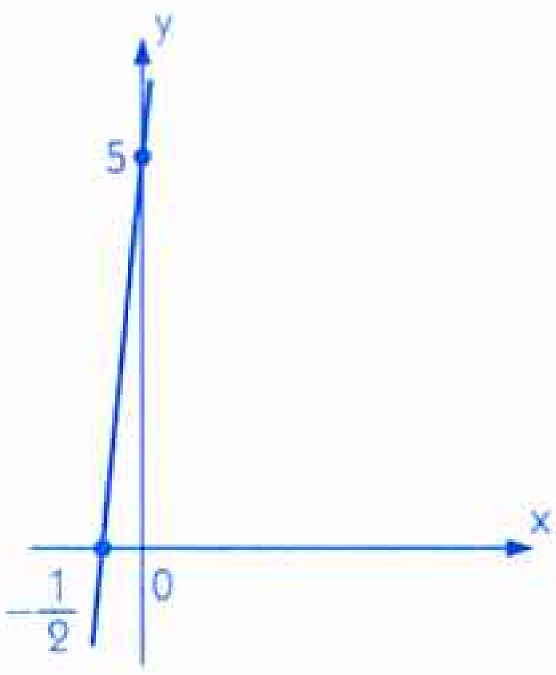
3 (Fuvest-SP) Esboçar o gráfico da curva $y = (x + 3)^2 - (x - 2)^2$.

$y = (x + 3)^2 - (x - 2)^2$

$y = x^2 + 6x + 9 - (x^2 - 4x + 4)$

$y = 10x + 5$

para $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 5 \\ y = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \end{cases}$



Propostos

177 Determine a raiz ou zero das seguintes funções do 1º grau:

a) $y = -3x - 6$

b) $y = -5x + 15$

c) $y = 7x$

d) $y = -x - 1$

e) $y = \frac{2}{5}x + 1$

f) $y = -\frac{3}{4}x + \frac{2}{5}$

178 Sendo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, esboce o gráfico das seguintes funções do 1º grau:

a) $y = 2x + 2$

b) $y = -3x + 6$

c) $y = 3x$

d) $y = -4x$

e) $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

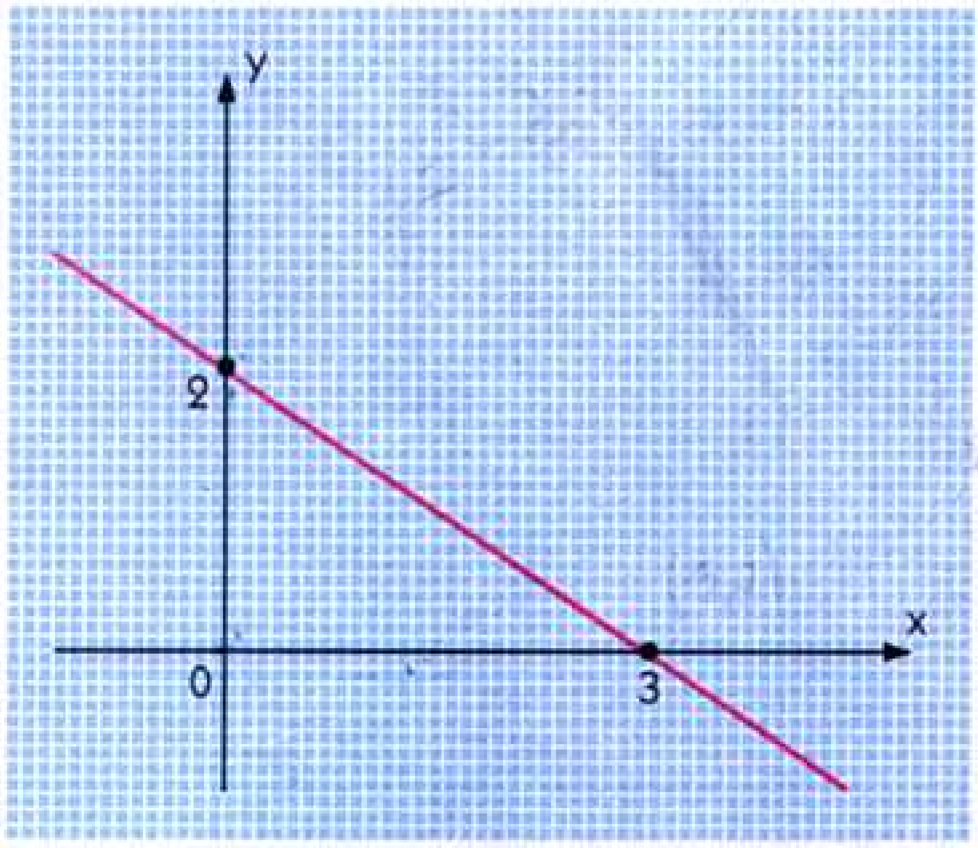
f) $y = -x + \frac{1}{2}$

g) $y = -x$

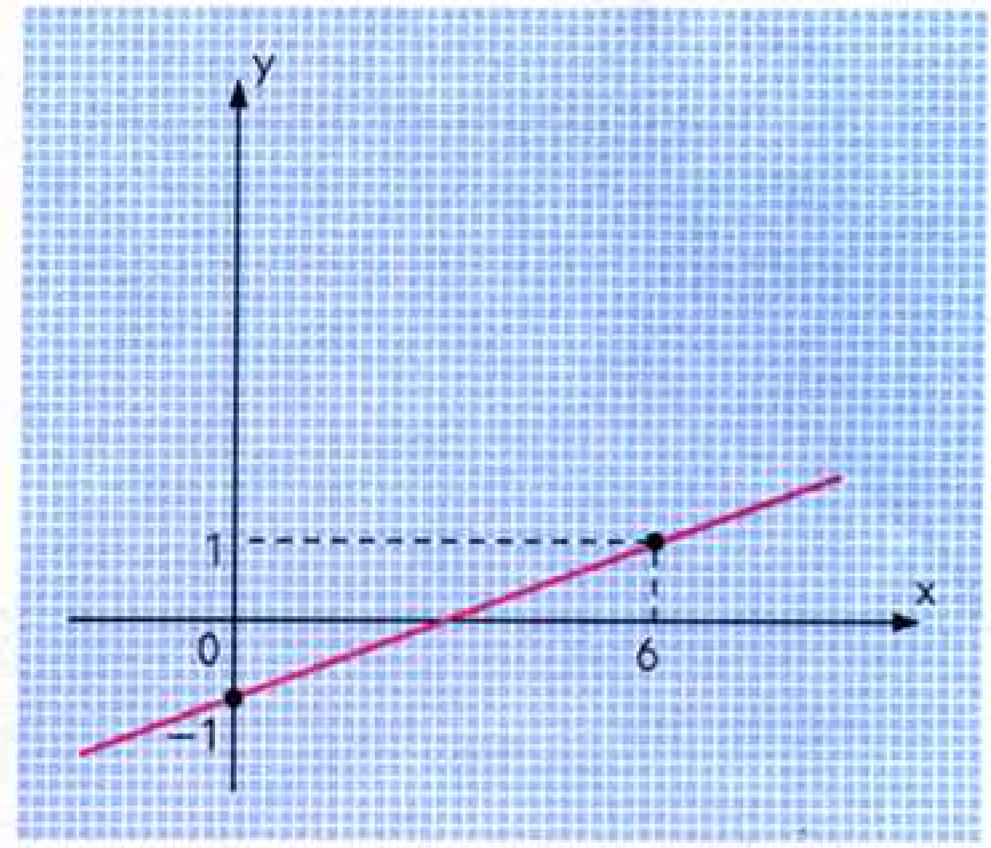
h) $y = 0{,}1x - 1$

179 Determine a lei que define a função representada em cada um dos seguintes gráficos:

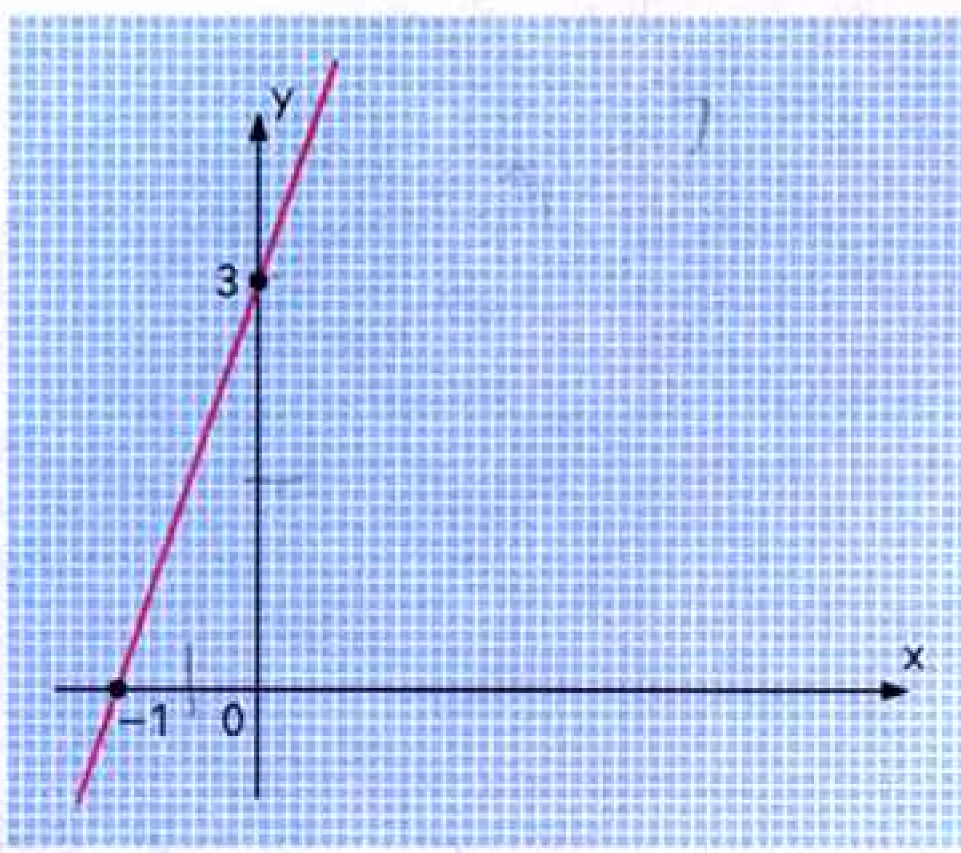
a)



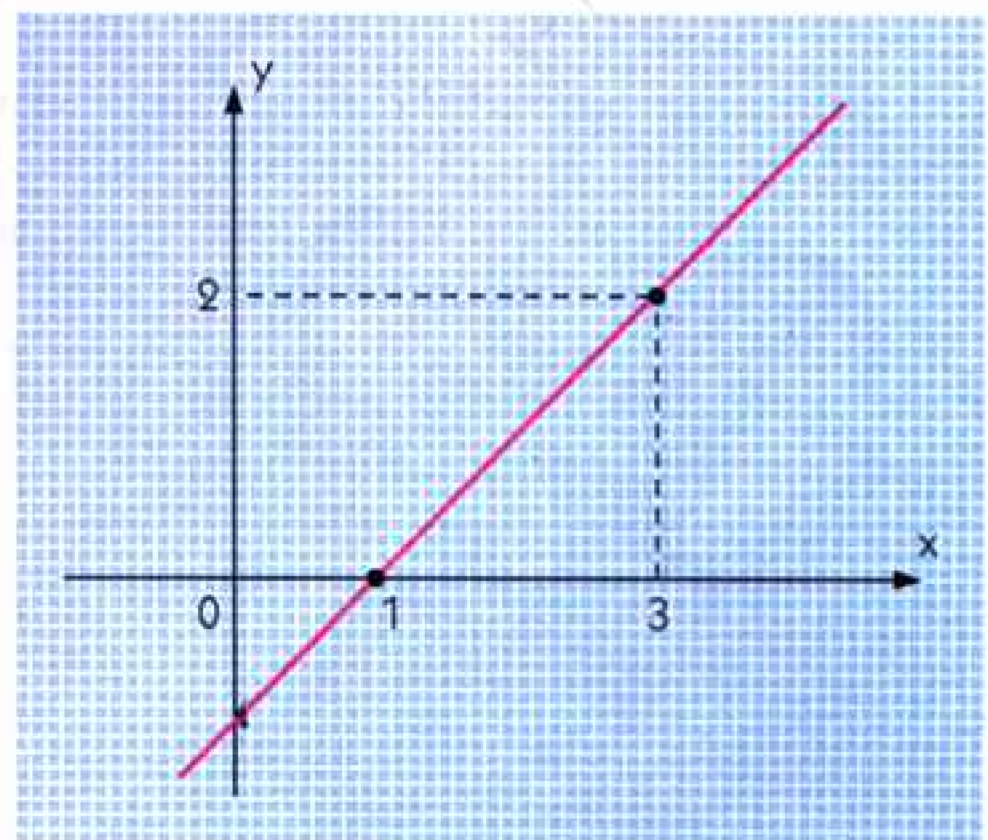
c)



b)



d)



180 Esboce o gráfico das funções:

a) $y = (x + 1)^2 - (x - 2)^2$ b) $y = (x - 1)^2 - (x + 1)^2$ c) $y = 4x^2 - \left(2x + \frac{1}{2}\right)^2$

4. Estudo dos sinais da função do 1º grau

O estudo dos sinais da função do 1º grau, $y = ax + b$ $(a \neq 0)$, consiste em saber para que valores de x:

a) $y > 0$ (positivo)

b) $y = 0$ (nulo)

c) $y < 0$ (negativo)

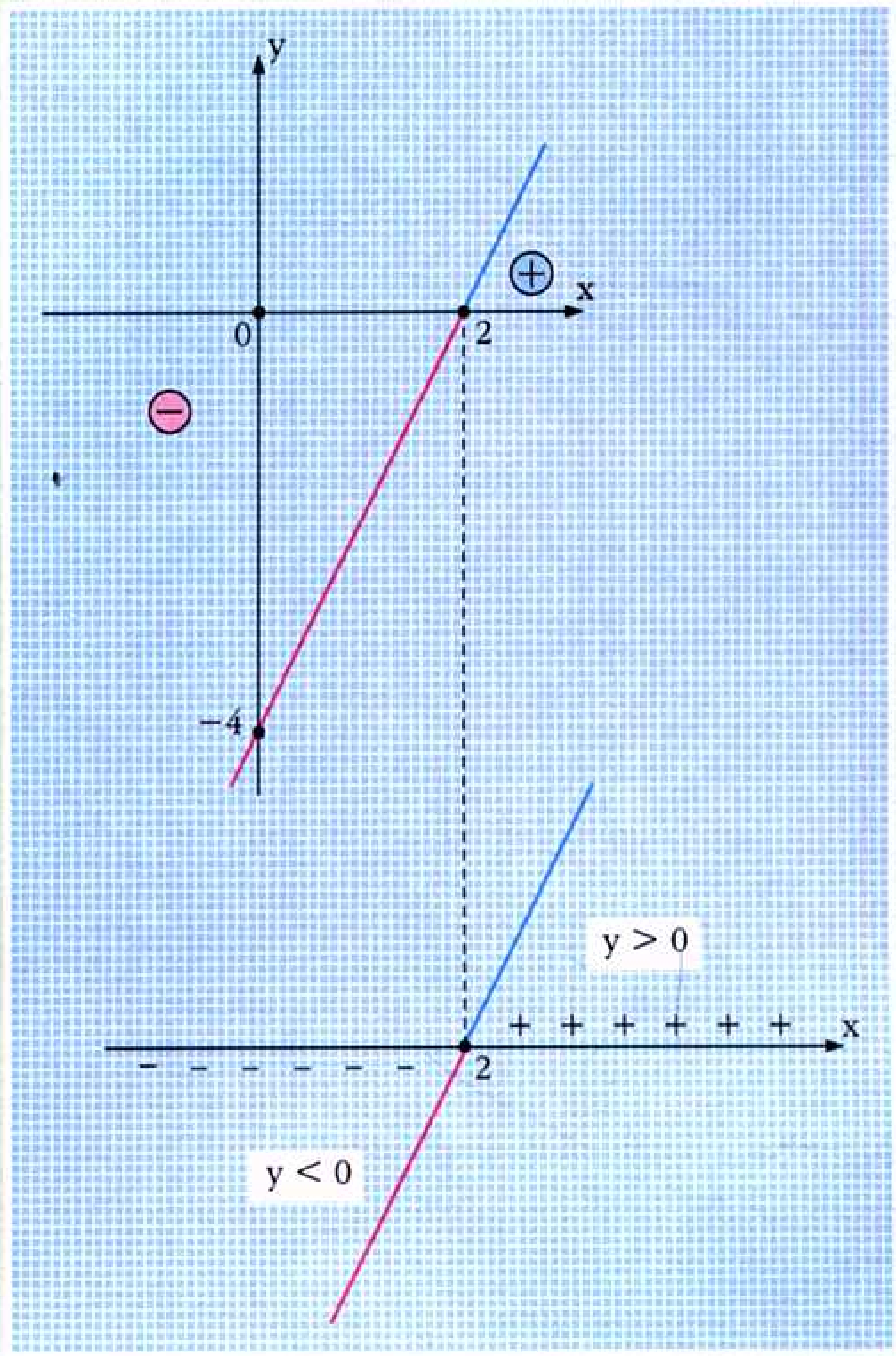
1º caso Função crescente

Exemplo:

Vamos estudar os sinais da função $y = 2x - 4$.

- Para $x = 0$: $y = 2 \cdot 0 - 4 = -4$.
- Para $y = 0$: $2x - 4 = 0 \Rightarrow x \doteq 2$.

No gráfico:

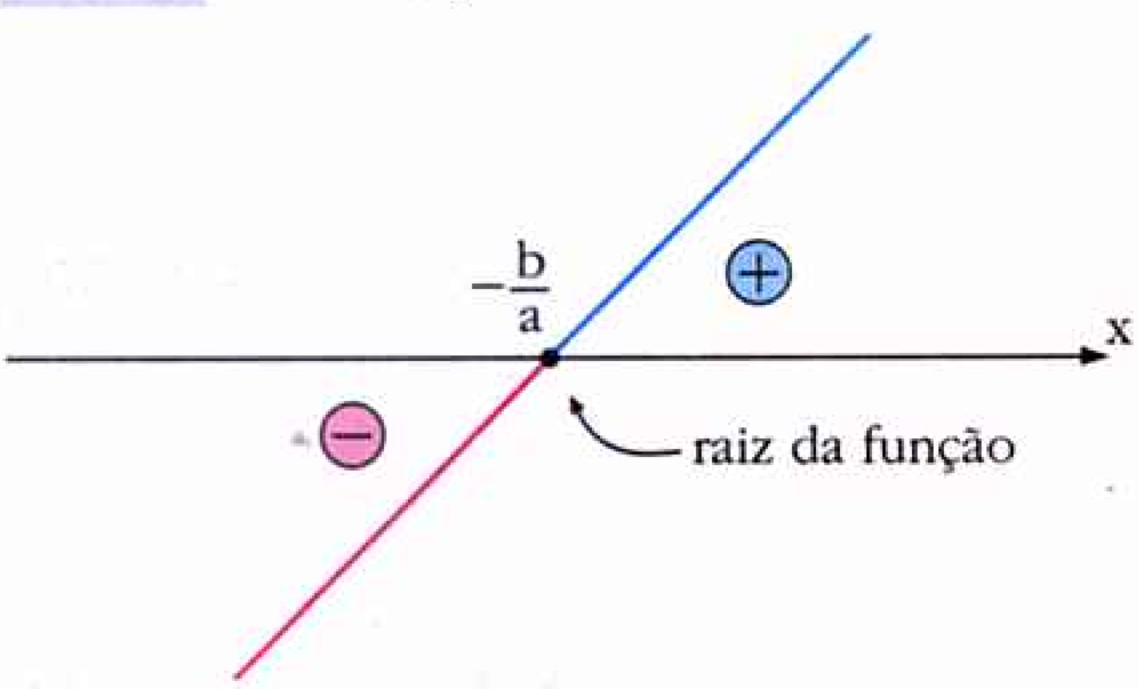


Esquematizando:

Notamos que:

$$\begin{cases} \text{Para } x > 2, \text{ temos } y > 0. \\ \text{Para } x = 2, \text{ temos } y = 0. \\ \text{Para } x < 2, \text{ temos } y < 0. \end{cases}$$

$a > 0$ Função crescente



A função crescente assume:

- *valores positivos* para todo $x > -\dfrac{b}{a}$
- *valor zero* para $x = -\dfrac{b}{a}$
- *valores negativos* para todo $x < -\dfrac{b}{a}$

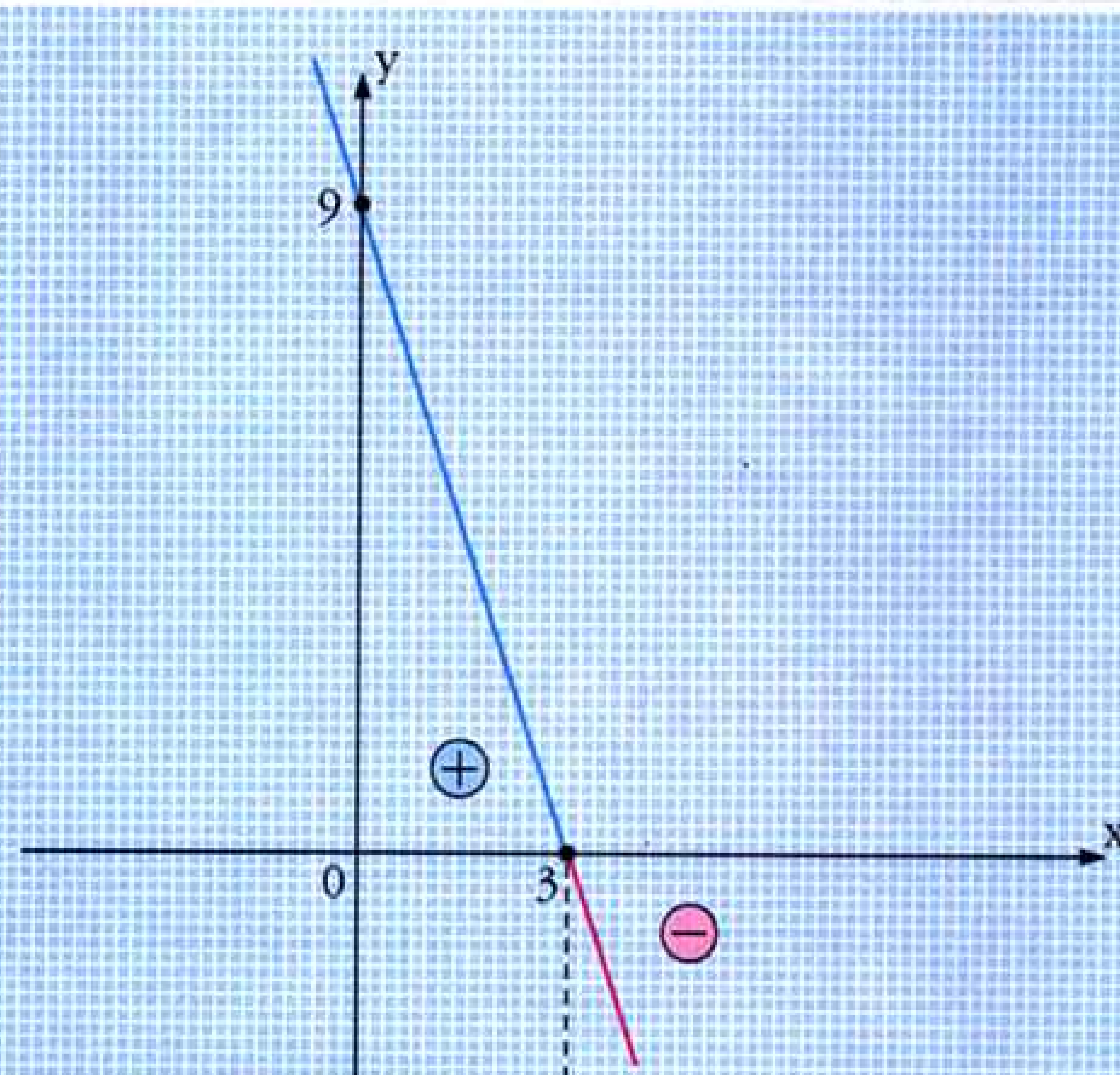
2º caso Função decrescente

Exemplo:

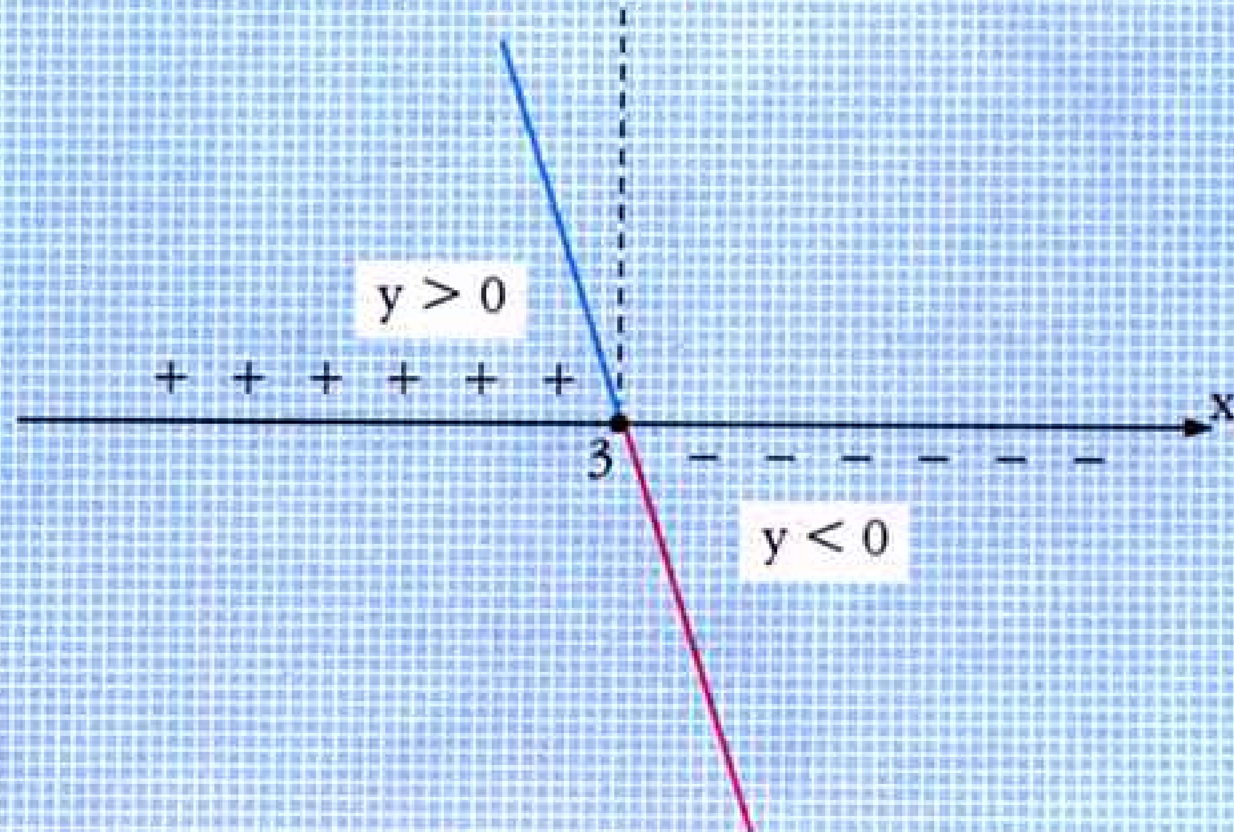
Vamos estudar os sinais da função $y = -3x + 9$.

- Para $x = 0$: $y = -3 \cdot 0 + 9 = 9$.
- Para $y = 0$: $-3x + 9 = 0 \Rightarrow x = 3$.

No gráfico:



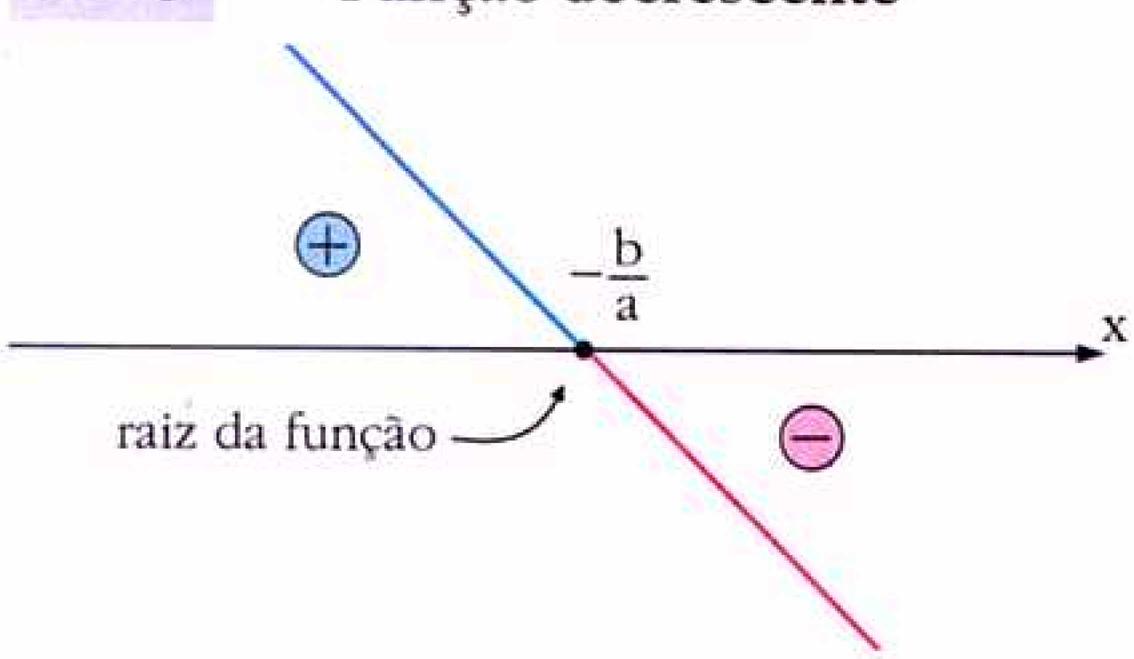
Esquematizando:



Portanto:

$$\begin{cases} \text{Para } x < 3, \text{temos } y > 0. \\ \text{Para } x = 3, \text{temos } y = 0. \\ \text{Para } x > 3, \text{temos } y < 0. \end{cases}$$

$a < 0$ Função decrescente



A função decrescente assume:

- *valores positivos* para todo $x < -\dfrac{b}{a}$
- *valor zero* para $x = -\dfrac{b}{a}$
- *valores negativos* para todo $x > -\dfrac{b}{a}$

Exercícios

Propostos

181 Faça o estudo dos sinais das seguintes funções:

a) $y = 2x - 8$
b) $y = -4x + 12$
c) $y = x + 1$
d) $y = -x + 3$

182 Faça o estudo dos sinais das seguintes funções:

a) $y = 4 - 4x$
b) $y = \frac{2}{3}x + 1$
c) $y = -\frac{3}{2}x - 4$

183 Faça o estudo dos sinais das seguintes funções:

a) $y = x$
b) $y = -x$

184 Determine a área do triângulo limitado pela reta $y = 4x + 1$ e pelos eixos Ox e Oy.

5. Inequações

A resolução das inequações do 1º grau, isto é, a determinação dos valores de x que as satisfazem, pode ser feita pelo estudo do sinal de uma função do 1º grau.

Exemplo:
Vamos resolver as inequações:

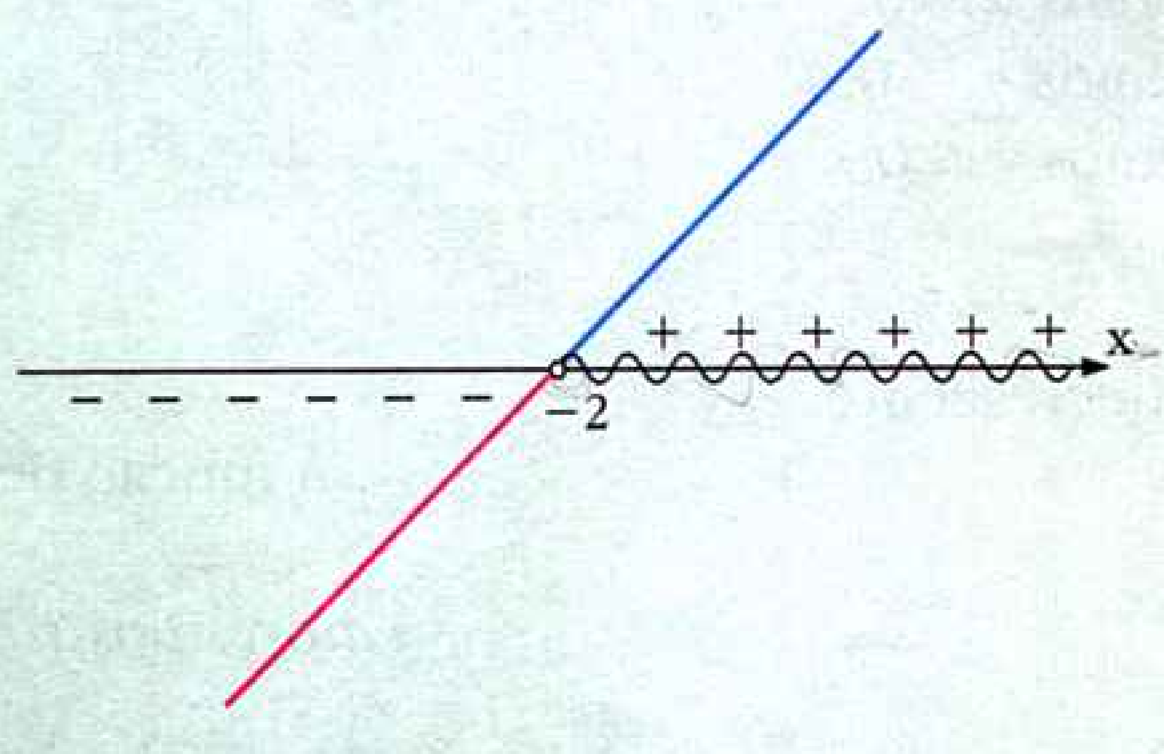
a) $x + 2 > 0$

Consideremos a função dada por $y = x + 2$; queremos $y > 0$.

Determinando o zero da função:

$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

Estudando os sinais da função:



Os valores de x para os quais $y > 0$ são aqueles que satisfazem a inequação.
Assim, temos:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$

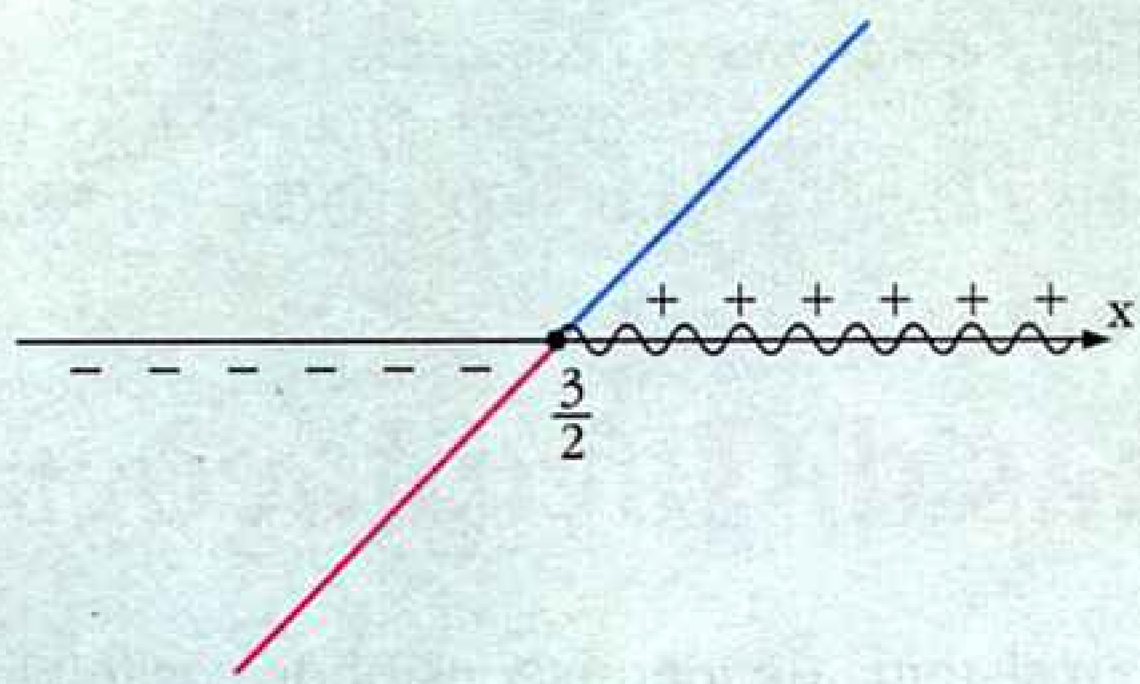
b) $2x - 3 \geq 0$

Seja $y = 2x - 3$, queremos $y \geq 0$.

Determinando o zero da função:

$2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{3}{2}$

Estudando os sinais da função:



Os valores de x que tornam $y \geq 0$ são aqueles que satisfazem a inequação. Assim, temos:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \dfrac{3}{2}\right\}$

Exercícios

Resolvido

Determinar os valores reais de x para que $5x - 3 \geq 2x + 6$.

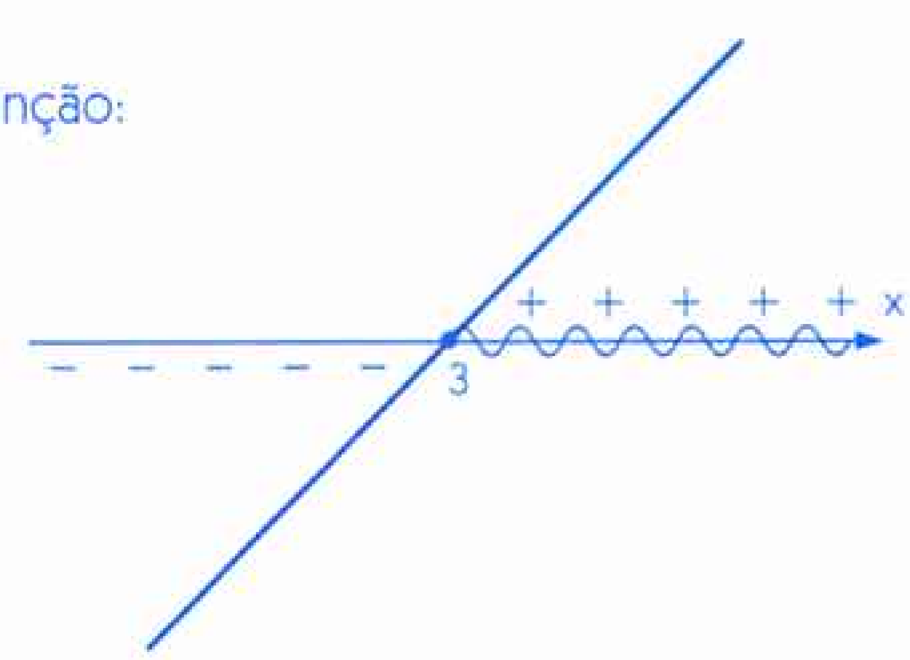
$5x - 3 \geq 2x + 6 \Rightarrow 5x - 3 - 2x - 6 \geq 0 \Rightarrow 3x - 9 \geq 0$

Seja $y = 3x - 9$, queremos y.

Determinando o zero da função $y = 3x - 9$:

$3x - 9 = 0 \Rightarrow x = 3$

Estudando os sinais da função:



Os valores de x que satisfazem a inequação pertencem ao conjunto:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$

Propostos

185 Resolva as seguintes inequações:

a) $x - 6 > 0$ b) $x + 5 \geqslant 0$ c) $4x - 3 < 0$ d) $-3x - 6 \leqslant 0$

186 Determine para que valores reais de *x*, temos:

a) $-4x + 5 \geqslant 0$ b) $-x + \frac{3}{5} < 0$ c) $\frac{4}{3}x - \frac{1}{2} \geqslant 0$

187 Resolva, no campo dos números reais, as inequações:

a) $3(x - 4) + 1 \geqslant 2x - 12$

b) $2(x - 2) + 3 < 5(x + 1)$

c) $4(x - 1)(x + 1) + 5(x + 1) \leqslant -3(x + 1) + 4x^2$

d) $-3(x + 1)(2x - 1) + 2(3x + 1) \geqslant 3x(2 - 2x) - 1$

6. Sistemas de inequações

A resolução de um sistema de inequações pode ser feita a partir do estudo dos sinais de uma função para cada inequação, separadamente, seguido da determinação da intersecção dos conjuntos verdade dessas inequações.

Faremos o estudo da resolução de sistemas através do exemplo:

$$\begin{cases} 3x - 2 \geqslant 7 \\ -4x - 8 < 0 \end{cases}$$

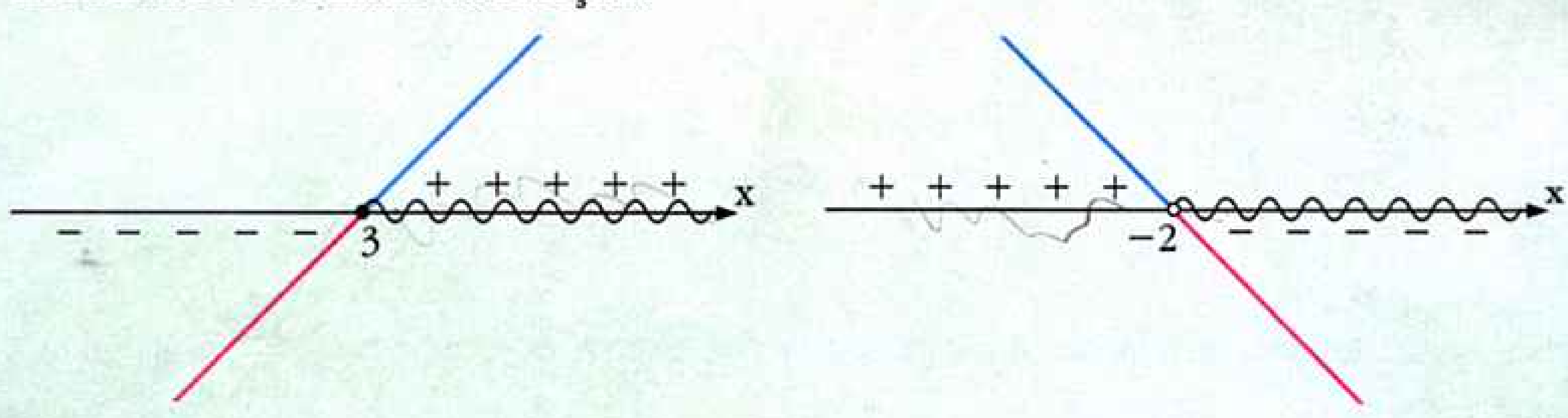
Simplificando $\begin{cases} 3x - 9 \geqslant 0 \\ -4x - 8 < 0 \end{cases}$

Considerando as funções $f(x) = 3x - 9$ e $g(x) = -4x - 8$, queremos $f(x) \geqslant 0$ e $g(x) < 0$.

Determinando o zero das funções:

$3x - 9 = 0$	$-4x - 8 = 0$
$3x = 9$	$-4x = 8$
$x = \frac{9}{3}$	$-x = \frac{8}{4} \quad (-1)$
$x = 3$	$x = -2$

Estudando os sinais da função:



Identificando os valores de x que satisfazem cada inequação:

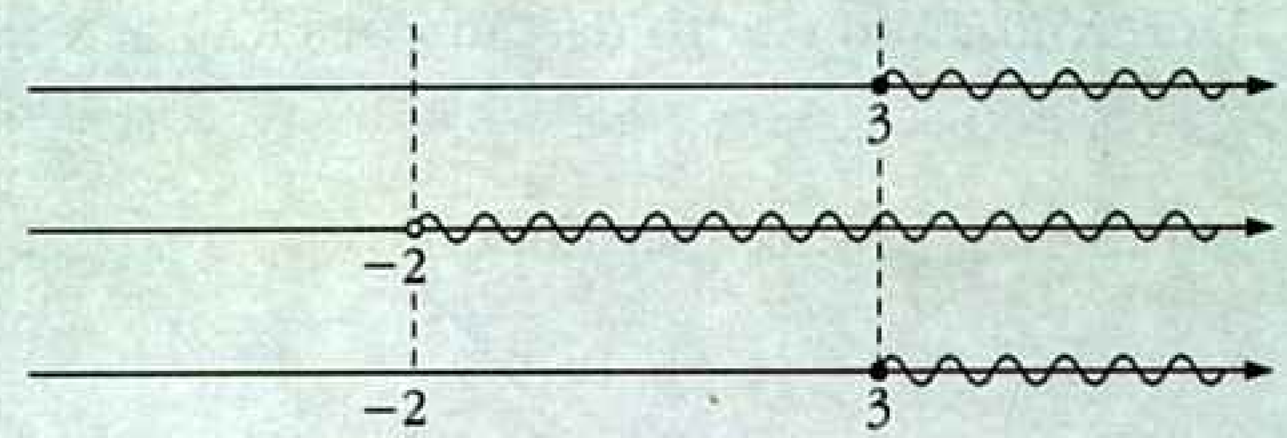
$V_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$ $\qquad$ $V_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$

Fazendo a intersecção dos conjuntos verdade:

$3x - 2 \geq 7 \Rightarrow V_1$

$-4x - 8 < 0 \Rightarrow V_2$

Sistema $\Rightarrow V_1 \cap V_2$



$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$

Exercícios

Propostos

188 Resolva os sistemas de inequações:

a) $\begin{cases} -2x - 2 < 0 \\ 2x + 1 < 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -3x + 5 \leq 0 \\ 2x - 5 < x \end{cases}$

c) $\begin{cases} -3x - 9 < 0 \\ 3x \leq 4x - 7 \end{cases}$

189 Resolva as inequações:

a) $2 \leq 2x + 2 \leq 4x$

b) $4x \leq -4x + 8 \leq 4x + 12$

c) $-2x + 6 < 2x + 2 \leq 4x$

d) $4x - 2 < -2x + 2 \leq 6x$

190 (UFSCar-SP) O conjunto solução do sistema de inequações $\begin{cases} 3x - 1 > 5x + 2 \\ 4x + 3 < 7x - 11 \end{cases}$ é:

a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{3}{2} \text{ ou } x > \frac{14}{3}\right\}$

b) $S = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{1}{3} \text{ ou } x < -\frac{5}{3}\right\}$

d) $S = \varnothing$

e) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{5}{3} < x < \frac{1}{3}\right\}$

7. Inequação-produto

Considerando f(x) e g(x) funções de variável x, do 1º grau, chamamos de inequação-produto uma desigualdade do tipo:

$$f(x) \cdot g(x) > 0,\ f(x) \cdot g(x) \geq 0,\ f(x) \cdot g(x) < 0 \text{ ou } f(x) \cdot g(x) \leq 0$$

A resolução de uma inequação-produto pode ser feita com o estudo do sinal das funções, separadamente, seguido da determinação dos sinais do produto de f(x) por g(x) e posteriormente identificando os valores de x que satisfazem a inequação-produto.

Exemplo:

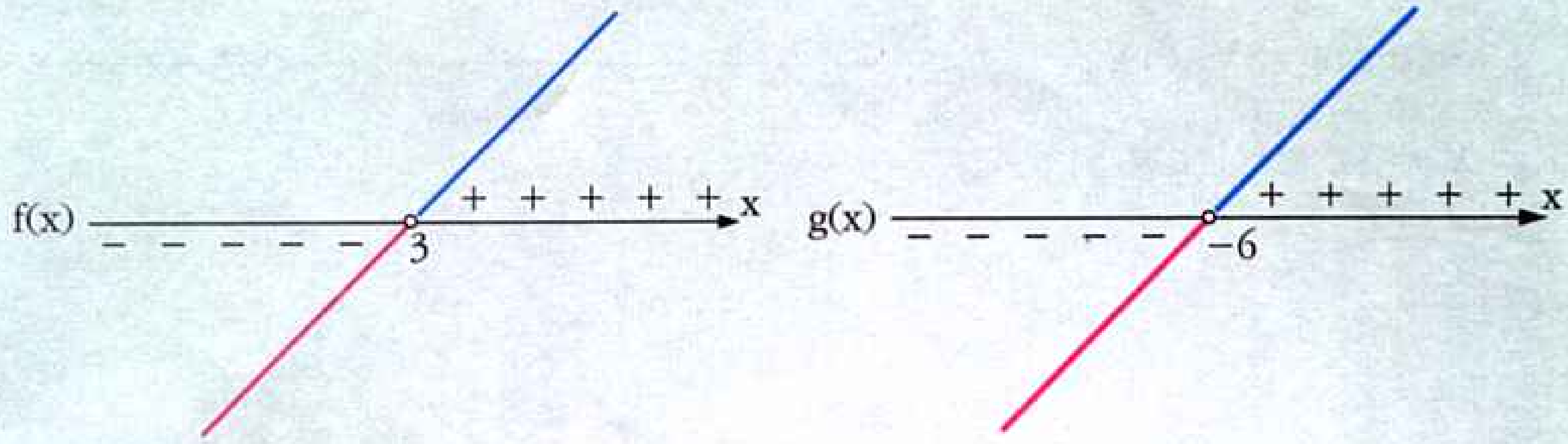
Resolver as inequações-produto:

a) $(x - 3) \cdot (x + 6) > 0$

Determinando o zero das funções $f(x) = x - 3$ e $g(x) = x + 6$:

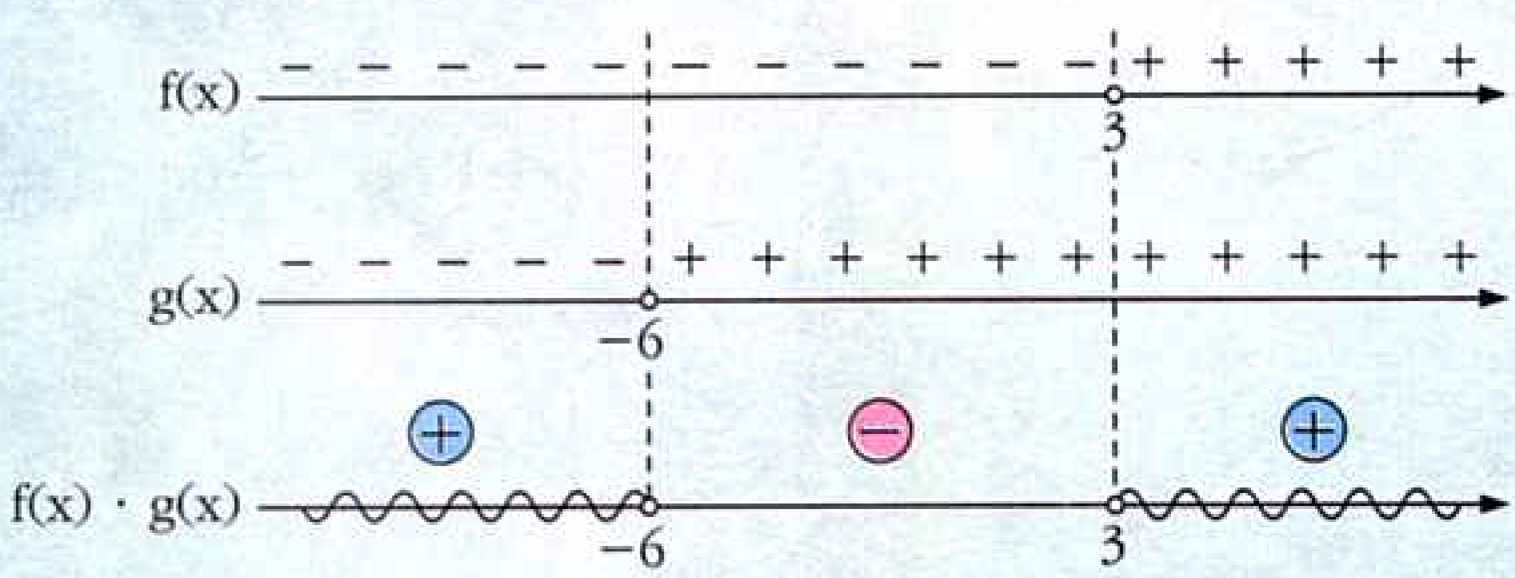
$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$ $\qquad$ $x + 6 = 0 \Rightarrow x = -6$

Estudando os sinais das funções:



Queremos $f(x) \cdot g(x) > 0$.

Estudando os sinais do produto das funções:



Identificando os valores de *x* que satisfazem a inequação:

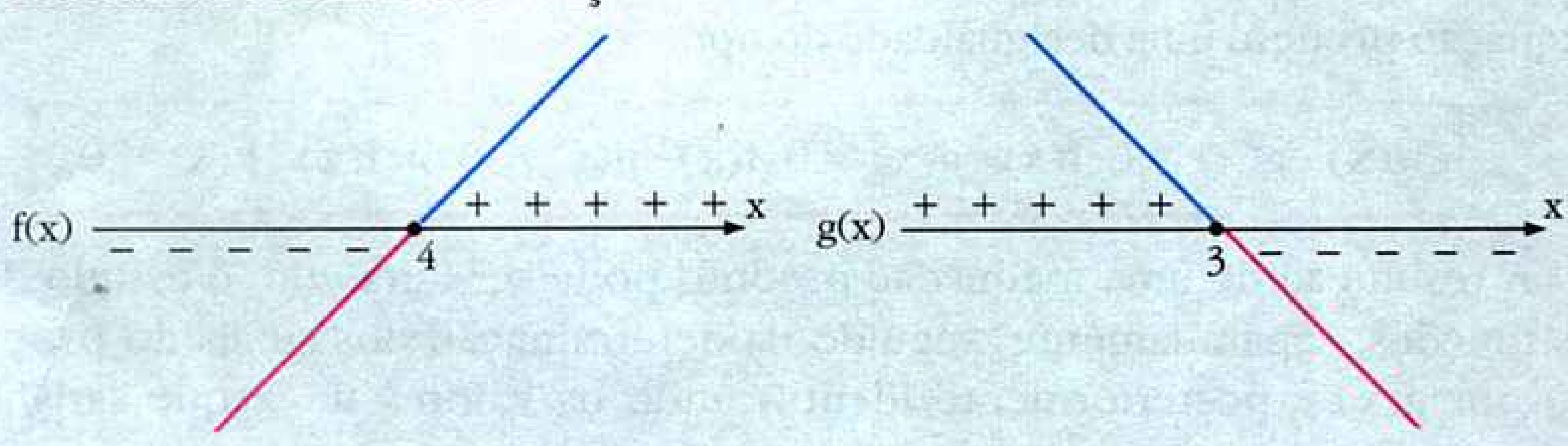
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -6 \text{ ou } x > 3\}$

b) $(3x - 12) \cdot (-2x + 6) \geq 0$

Determinando o zero das funções $f(x) = 3x - 12$ e $g(x) = -2x + 6$:

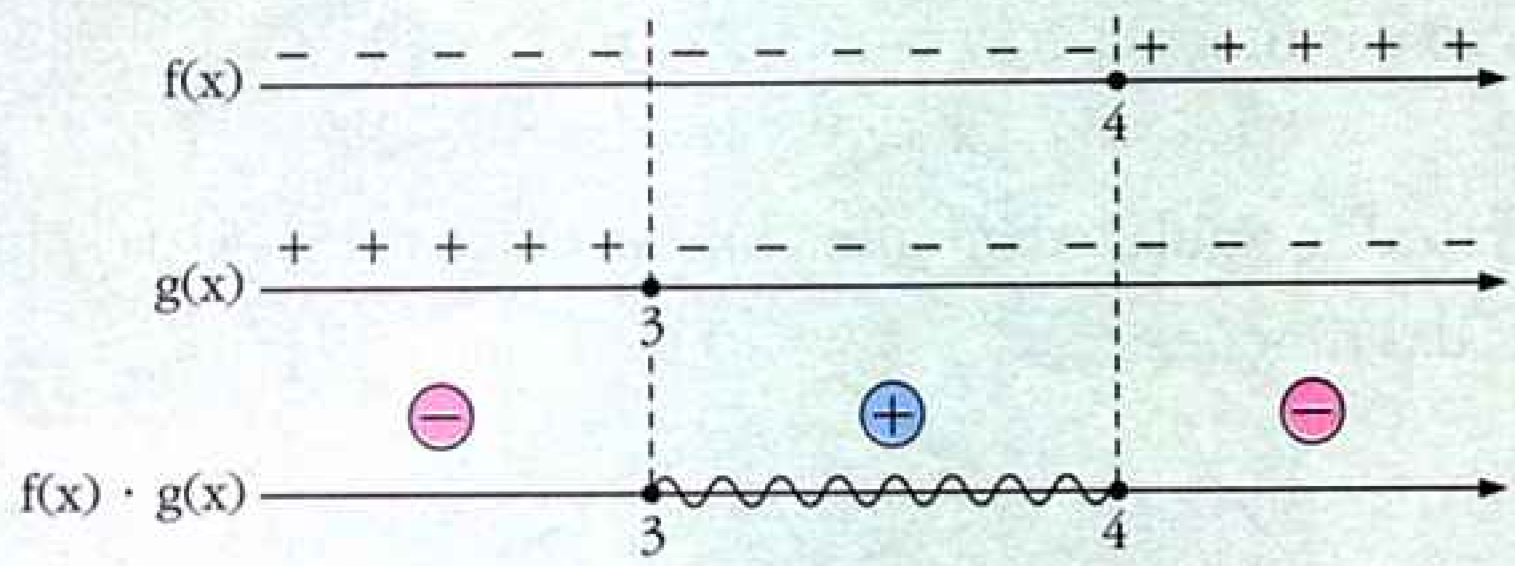
$3x - 12 = 0 \Rightarrow x = 4$ $\qquad$ $-2x + 6 = 0 \Rightarrow x = 3$

Estudando os sinais das funções:



Queremos $f(x) \cdot g(x) \geqslant 0$.

Estudando os sinais do produto das funções, temos:



Identificando os valores de x que satisfazem a inequação:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leqslant x \leqslant 4\}$

Exercícios

Propostos

191 Resolva as inequações-produto:

a) $(x + 1) \cdot (x - 2) > 0$

b) $(4x - 2) \cdot (-x - 1) \geqslant 0$

c) $(-3x + 3) \cdot (-x + 5) < 0$

d) $(2x - 1) \cdot (-5x + 10) \leqslant 0$

192 Resolva as inequações-produto:

a) $(x - 3) \cdot (-2x + 5) \cdot (x - 1) > 0$

b) $(3x + 1) \cdot (-x - 2) \cdot (-x + 3) \geqslant 0$

c) $(-2x + 1)^3 < 0$

d) $(x - 3)^2 \geqslant 0$

193 Determine o domínio das funções:

a) $\sqrt{(2x + 5) \cdot (-3x + 1)}$

b) $\sqrt{(2 - x) \cdot (5 - x)}$

194 (Mack-SP) Em $\mathbb{N}$, o produto das soluções da inequação $2x - 3 \leqslant 3$ é:

a) maior que 8

b) 6

c) 2

d) 1

e) 0

8. Inequação-quociente

Considerando f(x) e g(x) funções de variável x chamamos de inequação-quociente uma desigualdade do tipo:

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0, \quad \frac{f(x)}{g(x)} \geqslant 0, \quad \frac{f(x)}{g(x)} < 0 \text{ ou } \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant 0$$

Na resolução de uma inequação-quociente o denominador deve ser diferente de zero e a regra de sinais é a mesma tanto para produto como para divisão no conjunto dos números reais.

Exemplo:

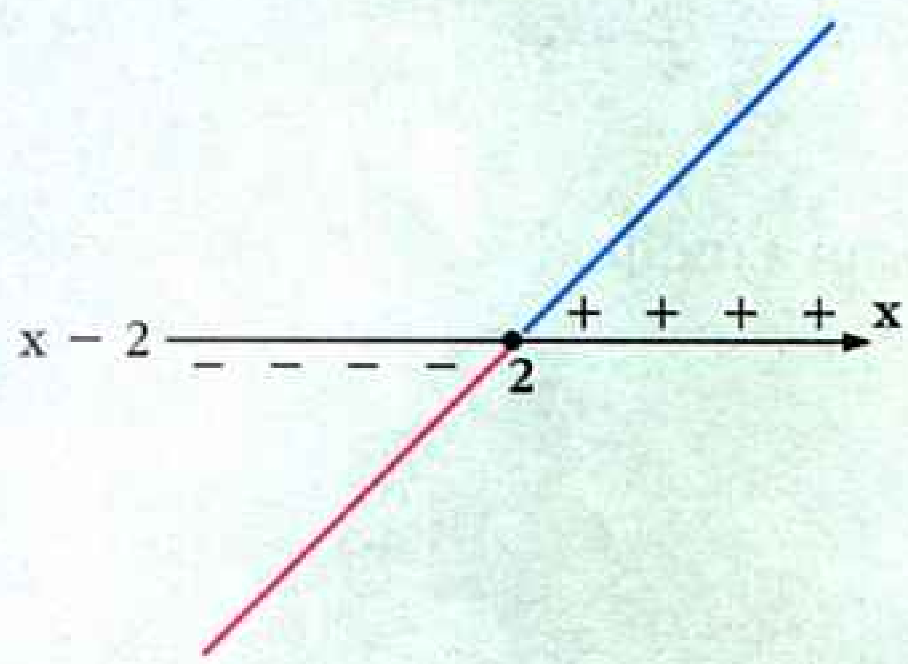
Resolver a inequação-quociente: $\dfrac{x-2}{x-3} \geqslant 0$

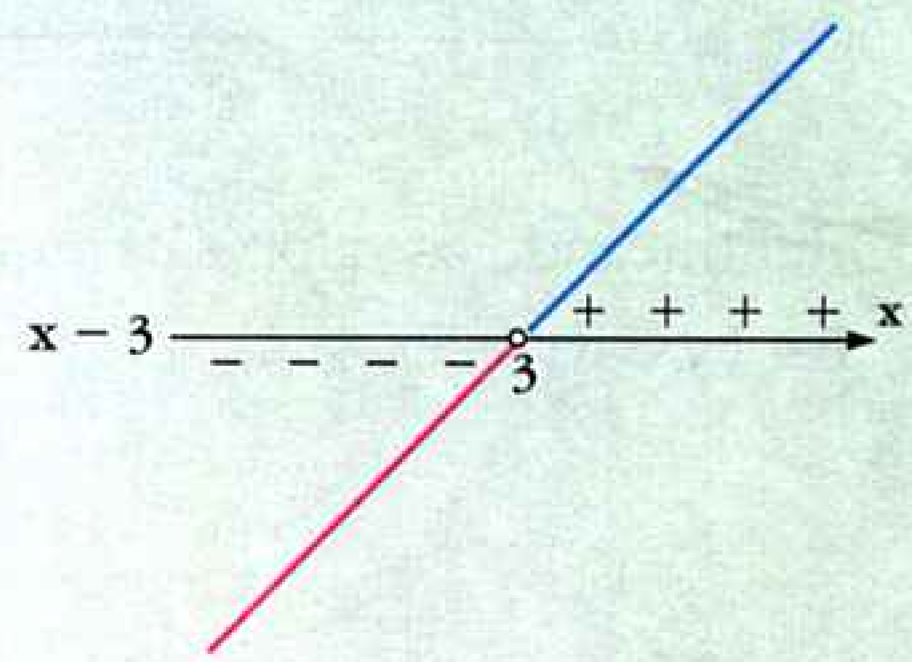
Determinando o zero das funções $f(x) = x - 2$ e $g(x) = x - 3$:

$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ $\qquad\qquad$ $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

Como o número 3, raiz de *g*, anula o denominador, devemos excluí-lo da solução.

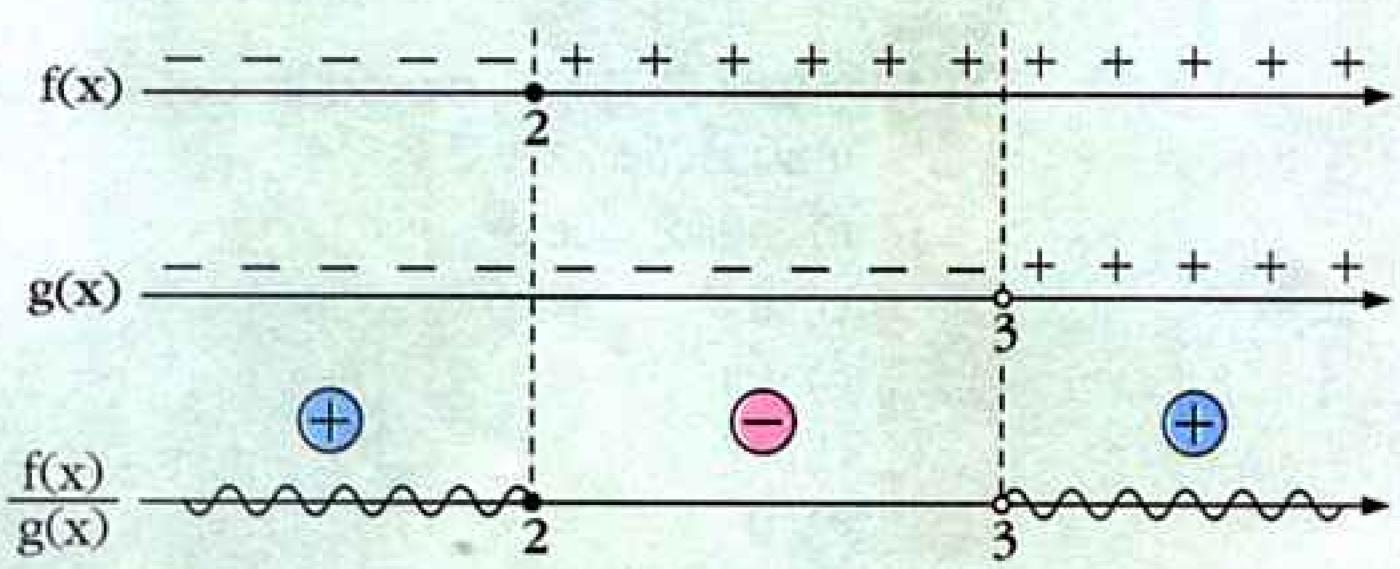
Estudando os sinais das funções:





Queremos $\dfrac{f(x)}{g(x)} \geqslant 0$.

Estudando os sinais do quociente das funções, temos:



Os valores de *x* que satisfazem a inequação pertencem a:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 2 \text{ ou } x > 3\}$

Exercícios

Propostos

195 Resolva, no campo dos números reais, as inequações:

a) $\dfrac{x-1}{x} > 0$ $\qquad$ b) $\dfrac{x+3}{-x-2} \geqslant 0$ $\qquad$ c) $\dfrac{-2x-1}{x+2} < 0$

196 Determine, no campo dos números reais, o conjunto verdade das inequações:

a) $\frac{3x+2}{x+3} \leq 0$

b) $\frac{-2x+4}{-x-5} \geq 0$

c) $\frac{3x+3}{-2x-5} \leq 0$

197 Determine o domínio de $f(x) = \sqrt{\frac{2x+3}{4-x}}$.

198 Determine o domínio da função

$f(x) = \sqrt{\frac{(x-3)\cdot(3x-2)}{1-3x}}$.

199 (FGV-SP) Resolva a inequação

$\frac{x}{x+1} - \frac{x}{x-1} \geq 0$.

200 (UFAL) O conjunto solução da inequação $\frac{5}{x-3} \leq 0$, em $\mathbb{R}$, é:

a) $\varnothing$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 8\}$

201 (UEBa) Os valores reais de *x* que satisfazem a inequação $\frac{(2-x)(x+1)}{x-1} \leq 0$ são tais que:

a) $x \leq -1$ ou $x \geq 2$
b) $0 < x < 1$ ou $x \geq 2$
c) $-1 \leq x < 1$ ou $x \geq 2$
d) $x \leq -1$ ou $1 < x \leq 2$
e) $-1 \leq x < 2$ e $x \neq 1$

202 (FEI-SP) Resolva a inequação $\frac{2x+1}{x-3} > 1$.

203 (UFPI) O conjunto solução da inequação $\frac{1}{x-1} - 1 \geq 0$, em $\mathbb{R}$, é:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 2\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1 \text{ e } x \neq 2\}$

204 (PUC-SP) No universo $\mathbb{R}$, o conjunto solução da inequação $\frac{x-3}{3x-x^2} < 0$ é:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } x > 3\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 3\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ e } x \neq 3\}$

205 Os valores reais de *x* que satisfazem a inequação $\frac{(5-x)(-5+x)}{x+5} > 0$ pertencem a:

a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -5\}$
b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{1}{5}\right\}$
c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{1}{5}\right\}$
d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -5\}$
e) $S = \varnothing$

206 Encontre o domínio da função

$f(x) = \sqrt{\frac{(3x-6)(-x+3)}{(-4x+8)}}$.

a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$
b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{1}{2}\right\}$
c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{1}{2}\right\}$
d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$
e) $S = \varnothing$

207 $V = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < -1 \text{ ou } x > 1\}$ é o conjunto verdade da seguinte inequação:

a) $\frac{(x+3)(-x+1)}{x+4} < 0$

b) $\frac{(-x-2)(x+1)}{-1+x} < 0$

c) $\frac{(1+x)(-x+1)}{x} \leq 0$

d) $\frac{3x-6}{x-2} \geq 0$

e) $\frac{(-1+x)(-x-2)}{1-x} > 0$

Ficha-resumo

Definição

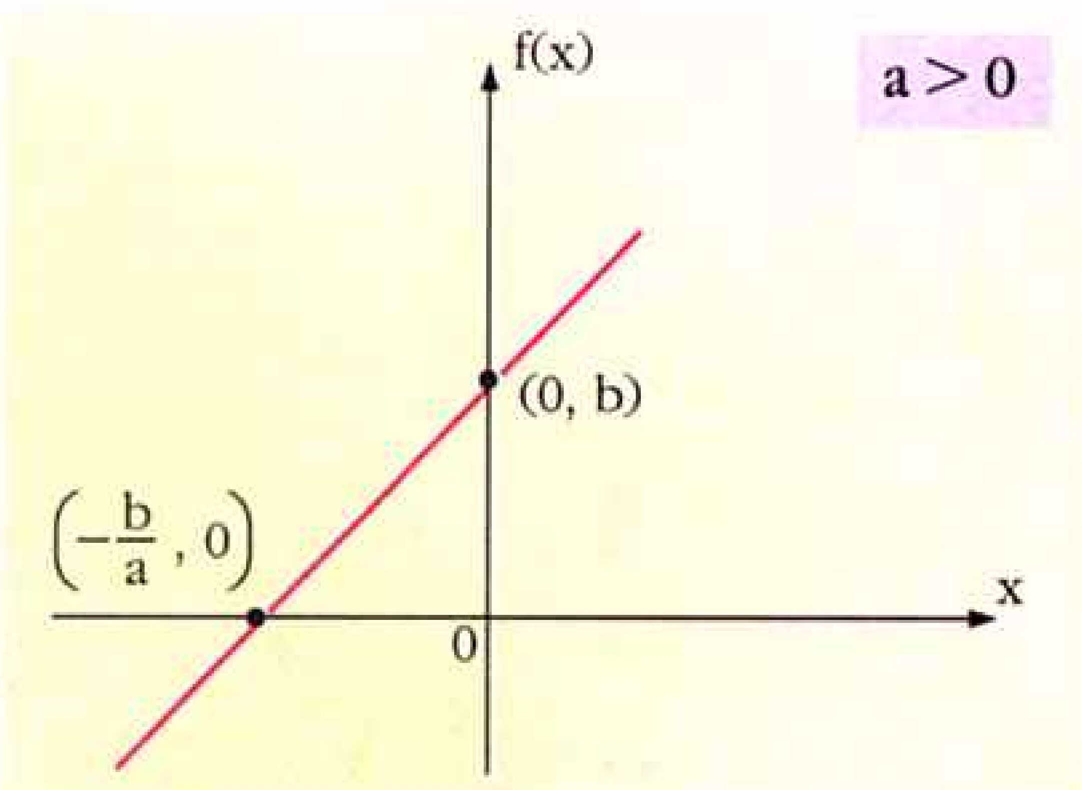
$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \text{ sendo } f(x) = ax + b, \text{ com } a, b \in \mathbb{R} \text{ e } a \neq 0$$

a é o coeficiente angular,
b é o coeficiente linear.

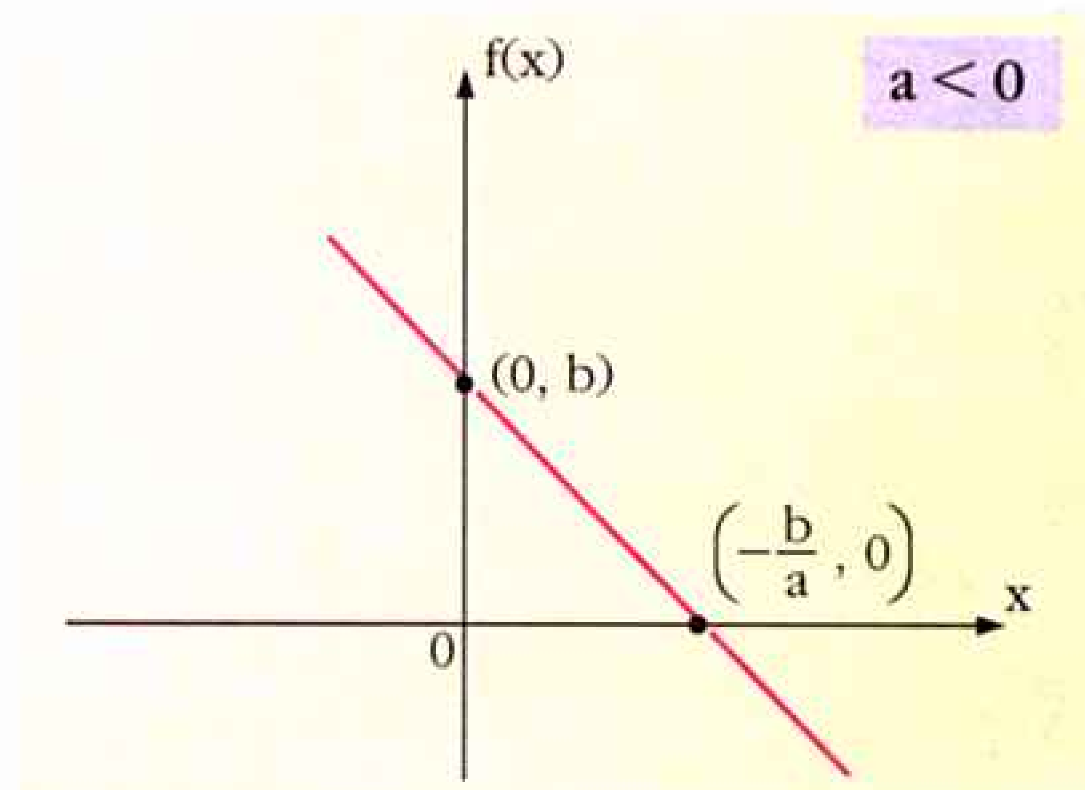
Zero da função

$$f(x) = ax + b \text{ se anula para } x = -\frac{b}{a}$$

Crescente



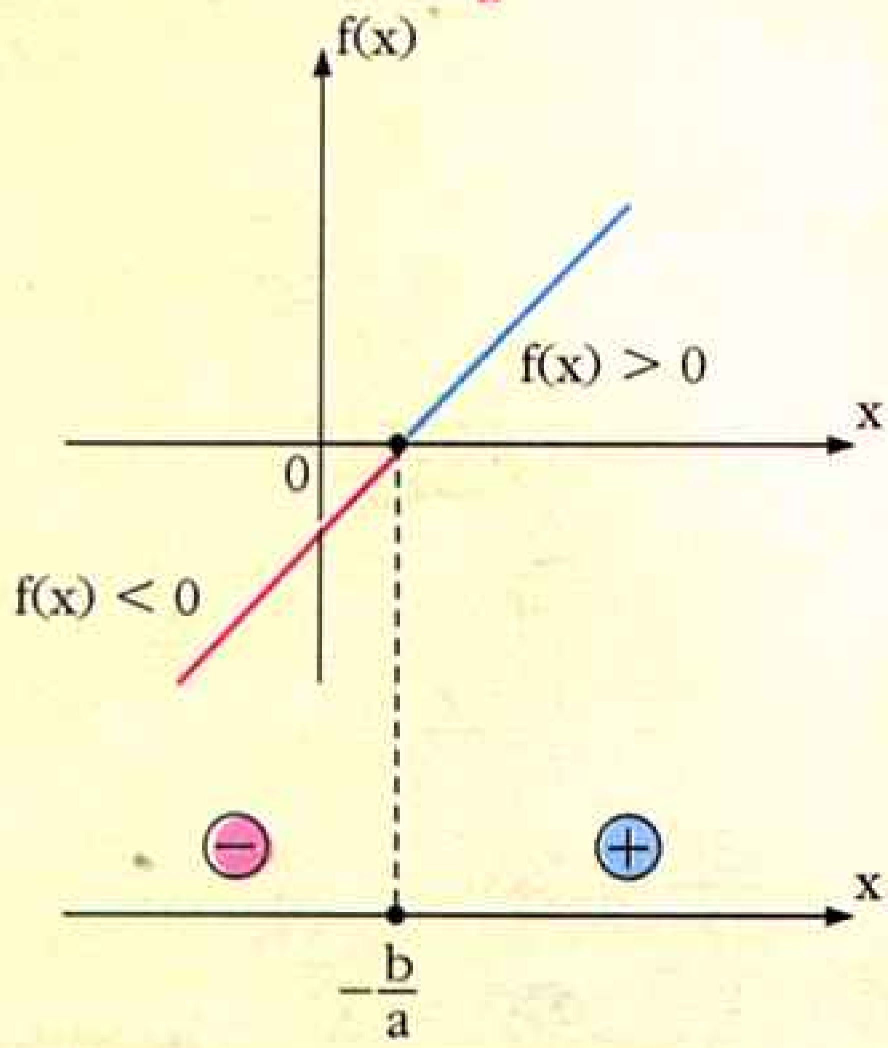
Decrescente



Sinal da função

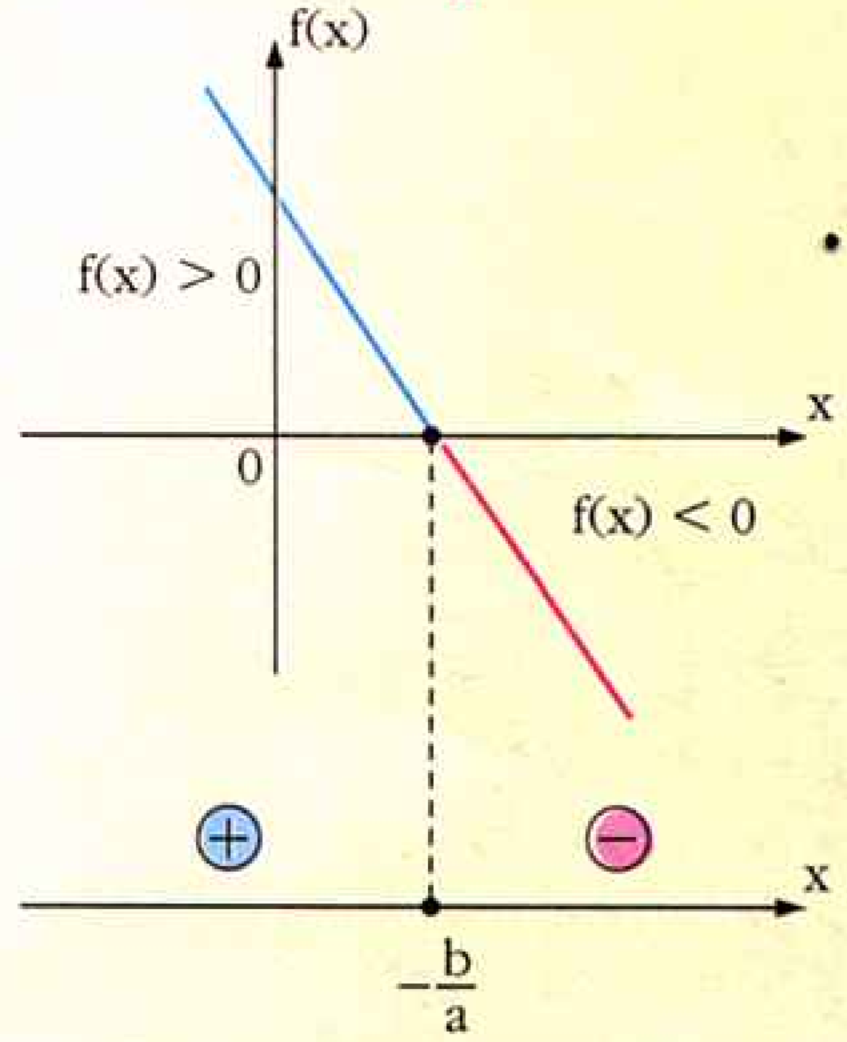
a > 0

- $f(x) > 0$, se $x > -\frac{b}{a}$
- $f(x) = 0$, se $x = -\frac{b}{a}$
- $f(x) < 0$, se $x < -\frac{b}{a}$



a < 0

- $f(x) > 0$, se $x < -\frac{b}{a}$
- $f(x) = 0$, se $x = -\frac{b}{a}$
- $f(x) < 0$, se $x > -\frac{b}{a}$



Função polinomial do 1º grau

Inequação

Resolução: 1) Obter a inequação equivalente tal que o 2º membro seja zero.
2) Fazer o estudo do sinal da função cuja lei é dada pela expressão que ficou no 1º membro, representando-o graficamente em um eixo.
3) Determinar o conjunto dos valores de x que tornam a inequação uma sentença verdadeira.

Sistemas de inequações

Resolução: 1) Fazer a resolução de cada inequação em separado.
2) Representar graficamente as soluções em eixos; um para cada inequação; um eixo sob o outro.
3) Determinar a intersecção dos conjuntos verdade das mesmas.

Inequação-produto

Resolução: 1) Fazer o estudo dos sinais das funções dadas pelos fatores.
2) Determinar para cada x o sinal do produto, aplicando a regra de sinais.
3) Determinar o conjunto dos valores de x que tornam a inequação verdadeira.

Inequação-quociente

Resolução: O procedimento é análogo ao da inequação-produto, lembrando que devemos excluir os valores de x que anulam o denominador.

Exercícios

Complementares

208 Determine a raiz das seguintes funções do 1º grau:

a) $y = 4x - 8$ c) $y = \frac{7}{3}x - 6$

b) $y = -7x + 21$ d) $y = -x$

209 Sendo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, esboce o gráfico das seguintes funções:

a) $y = 3x - 9$ c) $y = -2x$

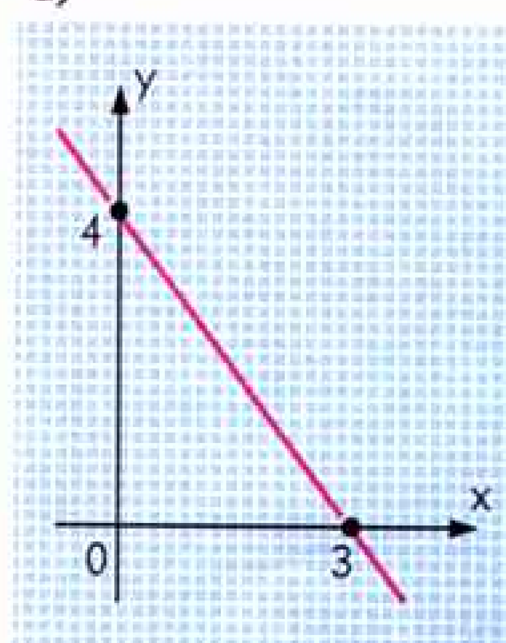
b) $y = -5x + 10$ d) $y = \frac{x}{4} - \frac{1}{2}$

210 Dada a função $f(x) = 2x - k$, determine o valor de k, de modo que $f(1) = 4$.

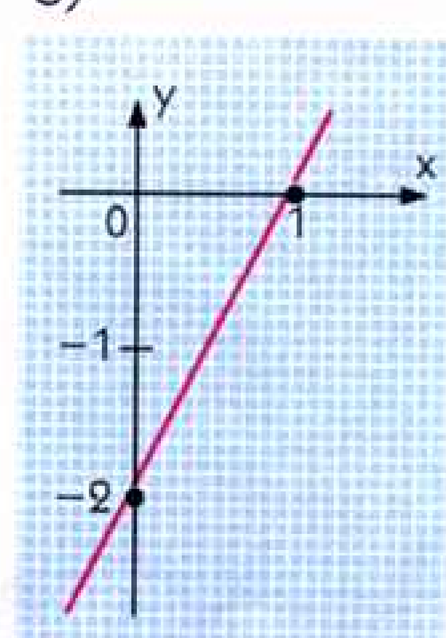
211 Sendo a função $f(x) = ax + b$ com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, determine os valores de a e b de modo que $f(3) = 4$ e $f(-1) = 2$.

212 Determine a lei que define a função representada em cada um dos seguintes gráficos:

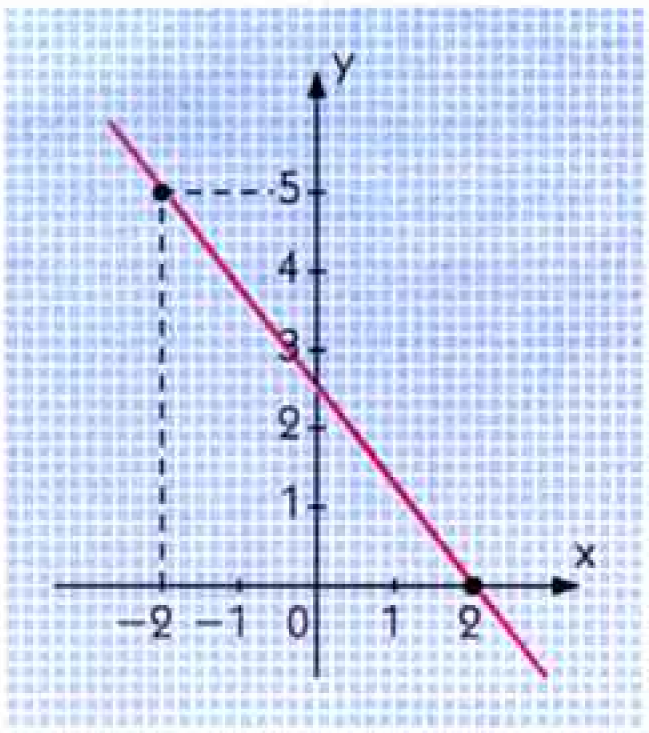
a)



b)



c)

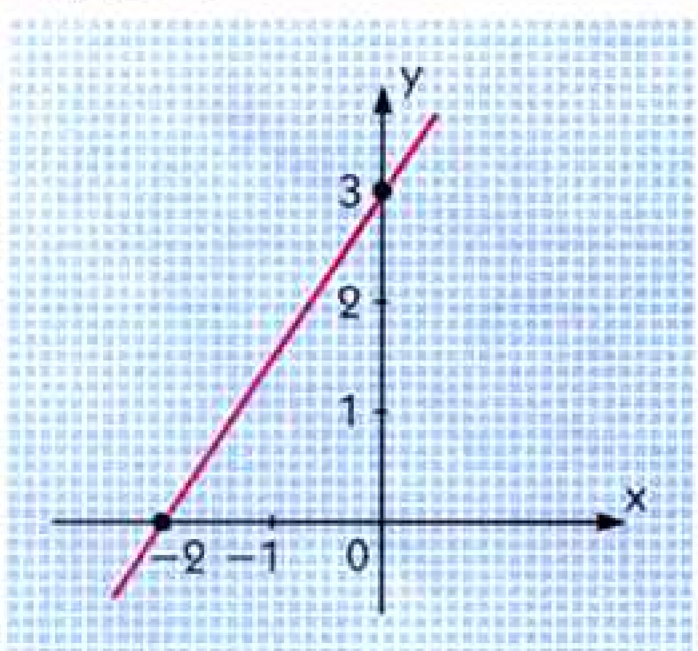


213 (UFPA) O gráfico de uma função *f* é a reta que corta os eixos coordenados em $x = 2$ e $y = -3$. O valor de $f[f^{-1}(0)]$ é:

a) $\frac{15}{2}$ b) 0 c) $-\frac{10}{3}$ d) $\frac{10}{3}$ e) $-\frac{5}{2}$

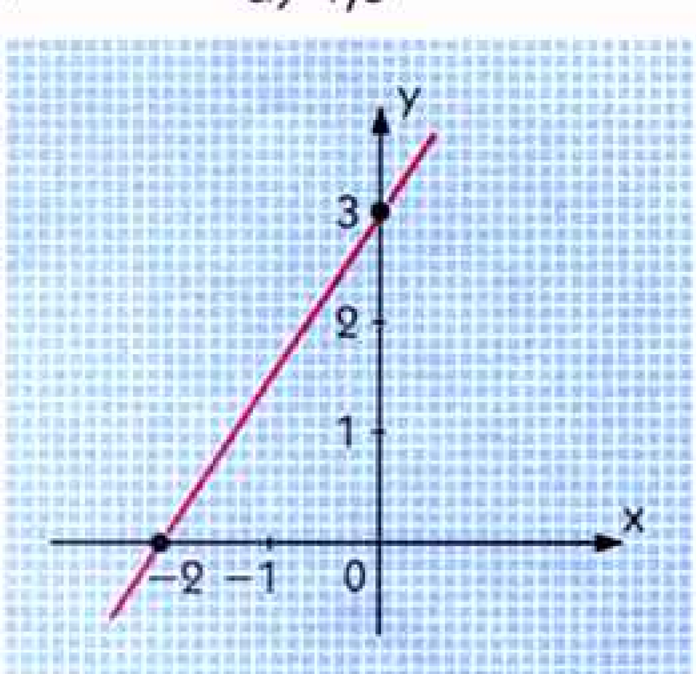
214 (MED-Itajubá) O gráfico abaixo pode representar qual das expressões?

a) $y = 2x - 3$
b) $y = -2x + 3$
c) $y = 1{,}5x + 3$
d) $y = -1{,}5x + 3$
e) $3y = -2x$



215 (FCC) A figura representa a função $y = ax + b$. O valor da função no ponto do gráfico de abscissa $x = -\frac{1}{3}$ é:

a) 2,8
b) 2,6
c) 2,5
d) 1,8
e) 1,7



216 (UFMT) Seja *a* a solução da equação $\frac{3 \cdot (x + 2)}{5} - \frac{3x + 1}{4} = 2$ em $\mathbb{R}$. Então:

a) $2a = 14$
b) $a^3 = -21$
c) $a = -\frac{11}{3}$
d) $3a = -21$
e) $a + 1 = 0$

217 O conjunto de todos os números reais $x < 1$ que satisfazem a inequação $\frac{2}{x - 1} < 1$ é:

a) $\{0\}$
b) $\left\{0, \frac{1}{2}\right\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$

218 (PUC-SP) A solução da equação $2 \cdot (x + 1) = 3 \cdot (2 - x)$ satisfaz a desigualdade:

a) $x < -1$
b) $-1 < x < 0$
c) $0 < x < 1$
d) $1 < x < 2$
e) $x > 2$

219 Determine o conjunto verdade das inequações:

a) $(x - 5) \cdot (2 - 3x) \leqslant 0$
b) $\frac{x + 2}{3 - x} \leqslant 0$

220 Quantos valores inteiros satisfazem a inequação $(2x - 7) \cdot (x - 1) \leqslant 0$?

a) zero b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

221 (UF-RN) O conjunto solução da inequação $\frac{x + 2}{x - 2} > 2$ é o intervalo:

a) $]2, +\infty[$
b) $]1, 4[$
c) $]-\infty, 6[$
d) $]2, 6[$
e) $]-6, \infty[$

222 (EAESP-FGV) A solução do sistema de inequações $\begin{cases} 3 - 2x \leqslant 1 \\ 3x - 1 \leqslant 5 \end{cases}$ é:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 1 \text{ ou } x \geqslant 2\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 2\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 2\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 1\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 1\}$

Saiba um pouco mais

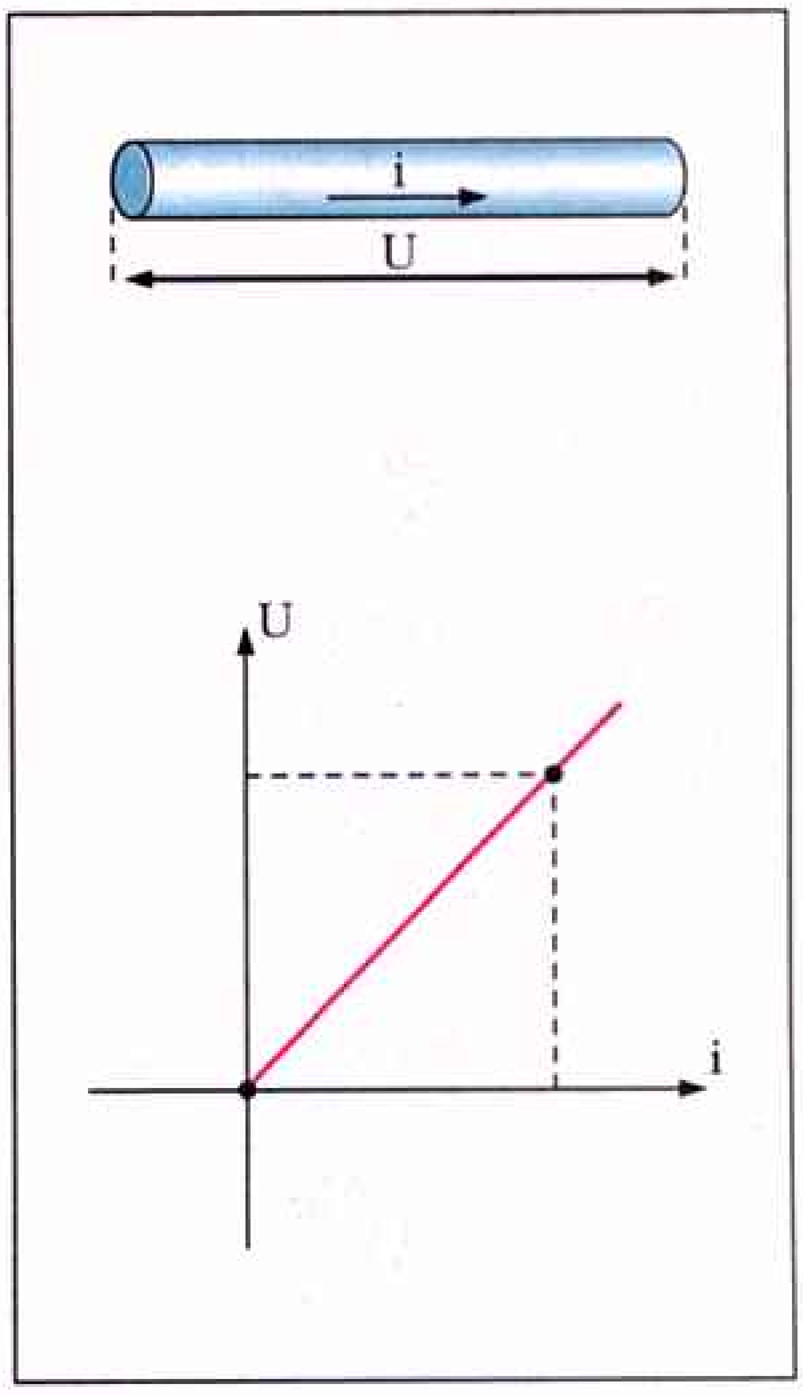
A condução da eletricidade

Condutores

O material que constitui o condutor elétrico é responsável pela maior ou menor movimentação das cargas elétricas que o percorrem. Essa resistência elétrica, *R*, é representada pela diferença de potencial, *U*, entre dois pontos desse condutor por unidade de corrente elétrica, *i*, entre os referidos pontos.

Experimentalmente, Georges Simon Ohm (1787-1854) constatou que a resistência elétrica de alguns resistores tinham valor constante e era determinada pelo quociente entre *U* e *i* ou, ainda, $R = \frac{U}{i}$.

Esse tipo de resistor é chamado ôhmico e a expressão $U = Ri$ pode ser representada por uma semi-reta.

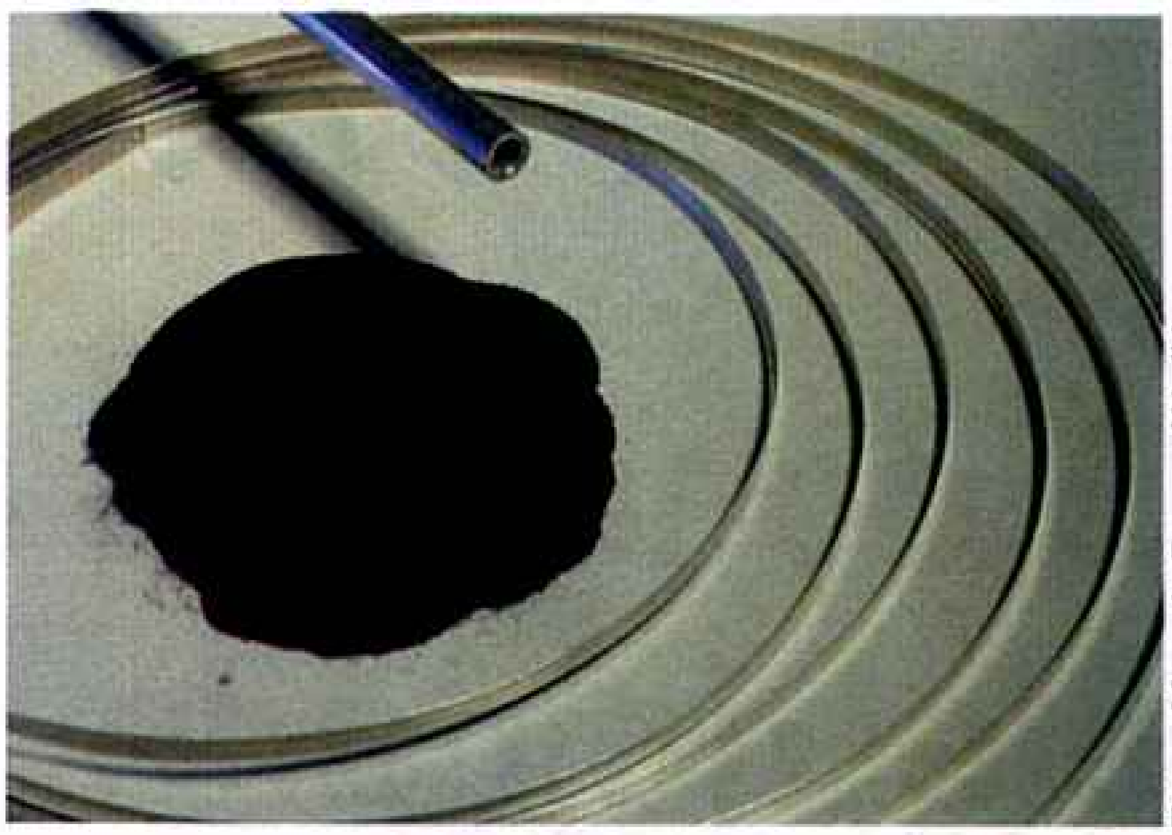


Supercondutores

Se os estudos feitos, no século XIX e no início do século XX, sobre eletricidade e a sua utilização transformaram a vida do homem, não é menos importante, para o final do século XX, os estudos que vêm sendo feitos sobre os supercondutores. Indústrias e organizações governamentais de vários países têm investido muito para conseguir avanços nesse campo.

Na cidade de Santo André, estado de São Paulo, a Pirelli Cabos constrói fitas supercondutoras, usadas na fabricação dos cabos.

1



Os principais ingredientes da fita são a cerâmica à base de bismuto e um tubo de prata — material maleável e resistente ao tratamento térmico.

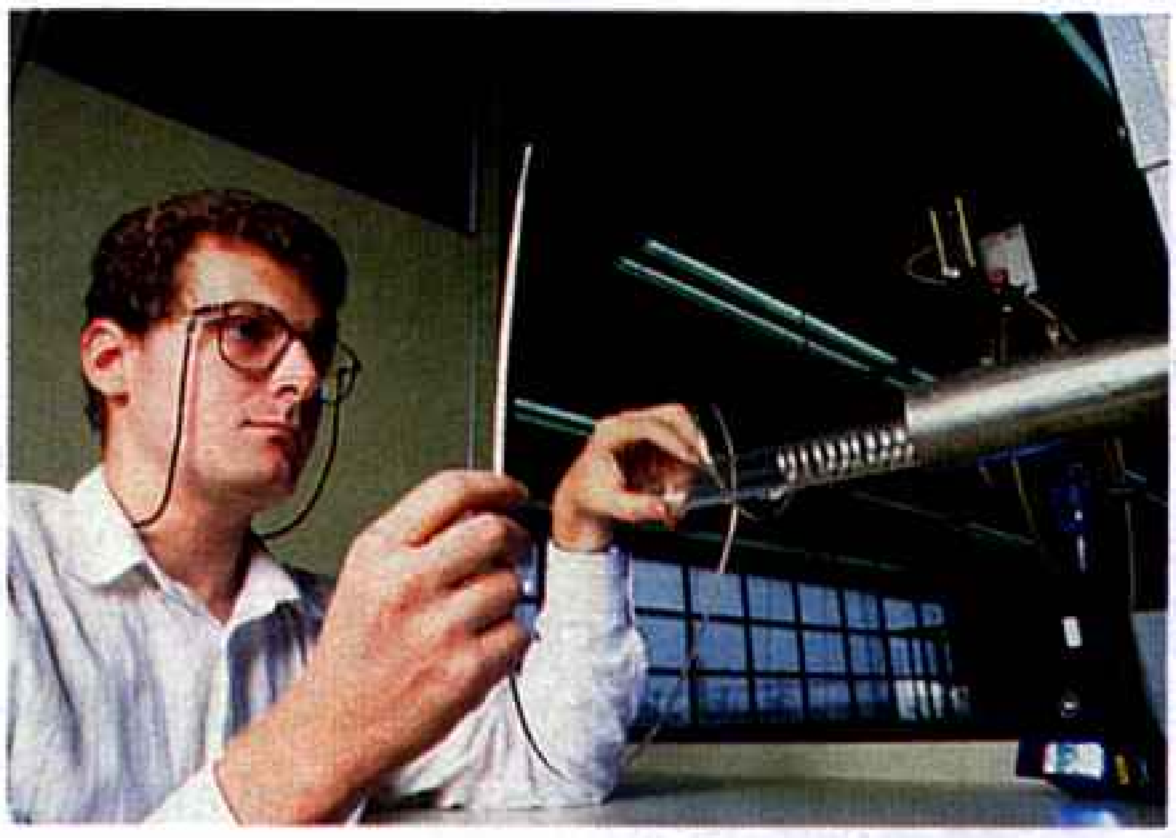
2

Pelo processo conhecido por "pó-no-tubo", a cerâmica é colocada dentro do tubo.

3

O tubo passa por um processo de trefilação, que o estira e comprime a cerâmica no seu interior.

4



Depois de laminado, já na forma final, a fita é aquecida à temperatura de 880 °C, num forno especial, de onde sai pronta para compor o cabo supercondutor.

Fonte: *Superinteressante*. São Paulo, Abril, n. 5, ano 8, 1994.