Função polinomial do 2º grau

Creio que o principal objetivo da educação deve ser encorajar os jovens a duvidarem de tudo aquilo que se considera estabelecido. O importante é a independência do espírito.

Bertrand Russel

1. Função quadrática

Chama-se *função quadrática* a função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa, a cada número real *x*, o número real $ax^2 + bx + c$, com *a*, *b* e *c* reais e $a \neq 0$.

> *Função quadrática* f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
> sendo $f(x) = ax^2 + bx + c$, com *a*, *b* e *c* $\in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Exemplos:

- $f(x) = 2x^2 + 5x + 6$, onde $a = 2$, $b = 5$ e $c = 6$
- $f(x) = -x^2 + x - 1$, onde $a = -1$, $b = 1$ e $c = -1$
- $f(x) = \frac{3}{2}x^2 + \sqrt{5}$, onde $a = \frac{3}{2}$, $b = 0$ e $c = \sqrt{5}$

2. Gráfico da função quadrática

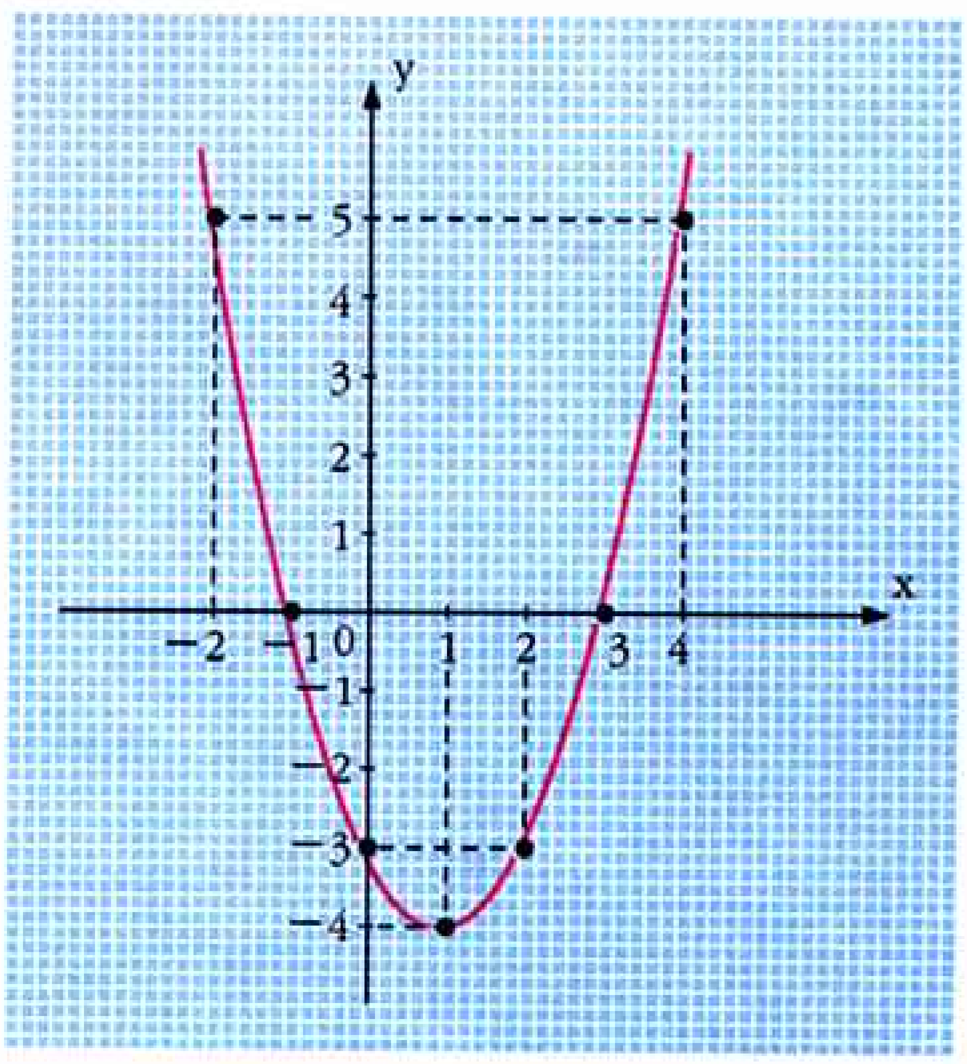
Em um sistema cartesiano ortogonal, o gráfico de uma função quadrática é representado por uma curva, à qual damos o nome de *parábola*.

Vamos esboçar o gráfico da seguinte função quadrática:

$$y = x^2 - 2x - 3$$

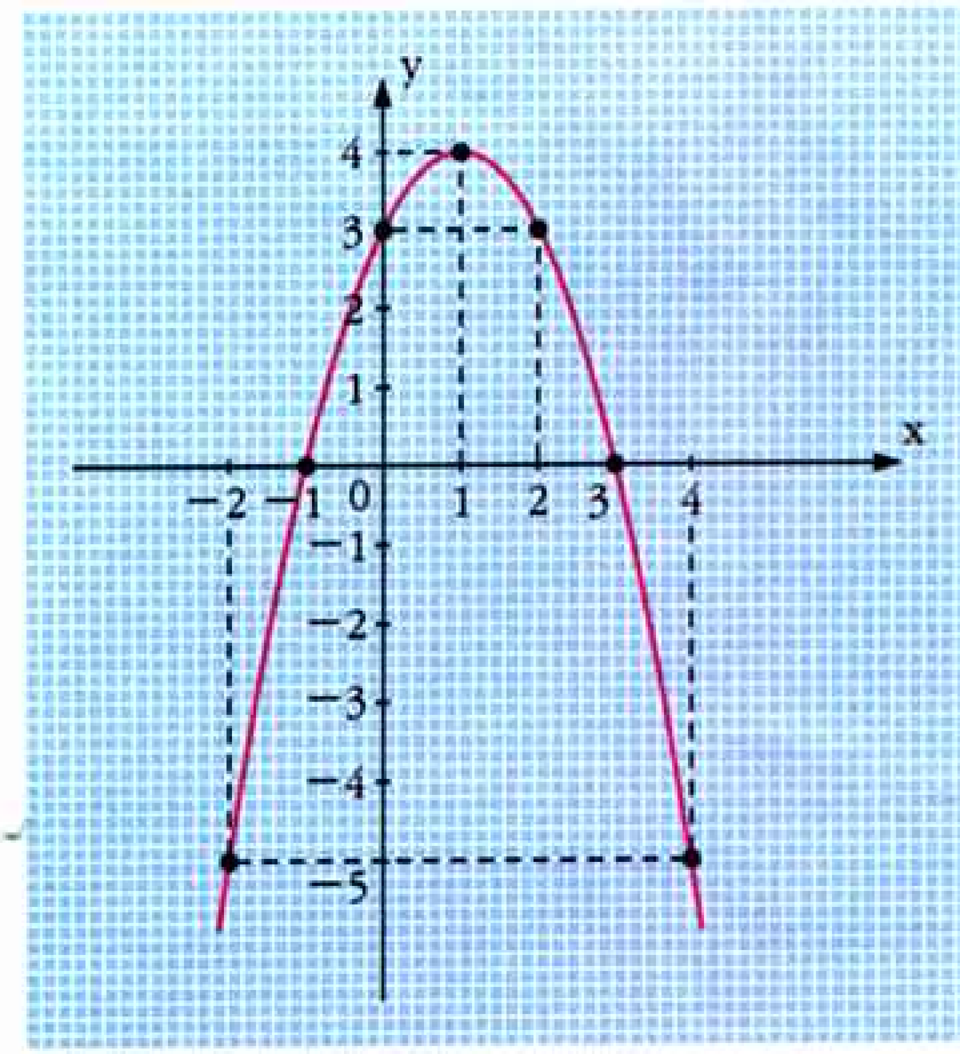
Atribuímos valores para *x* e obtemos valores para *y*, organizando-os com o auxílio de uma tabela.

x	y
−2	5
−1	0
0	−3
1	−4
2	−3
3	0
4	5



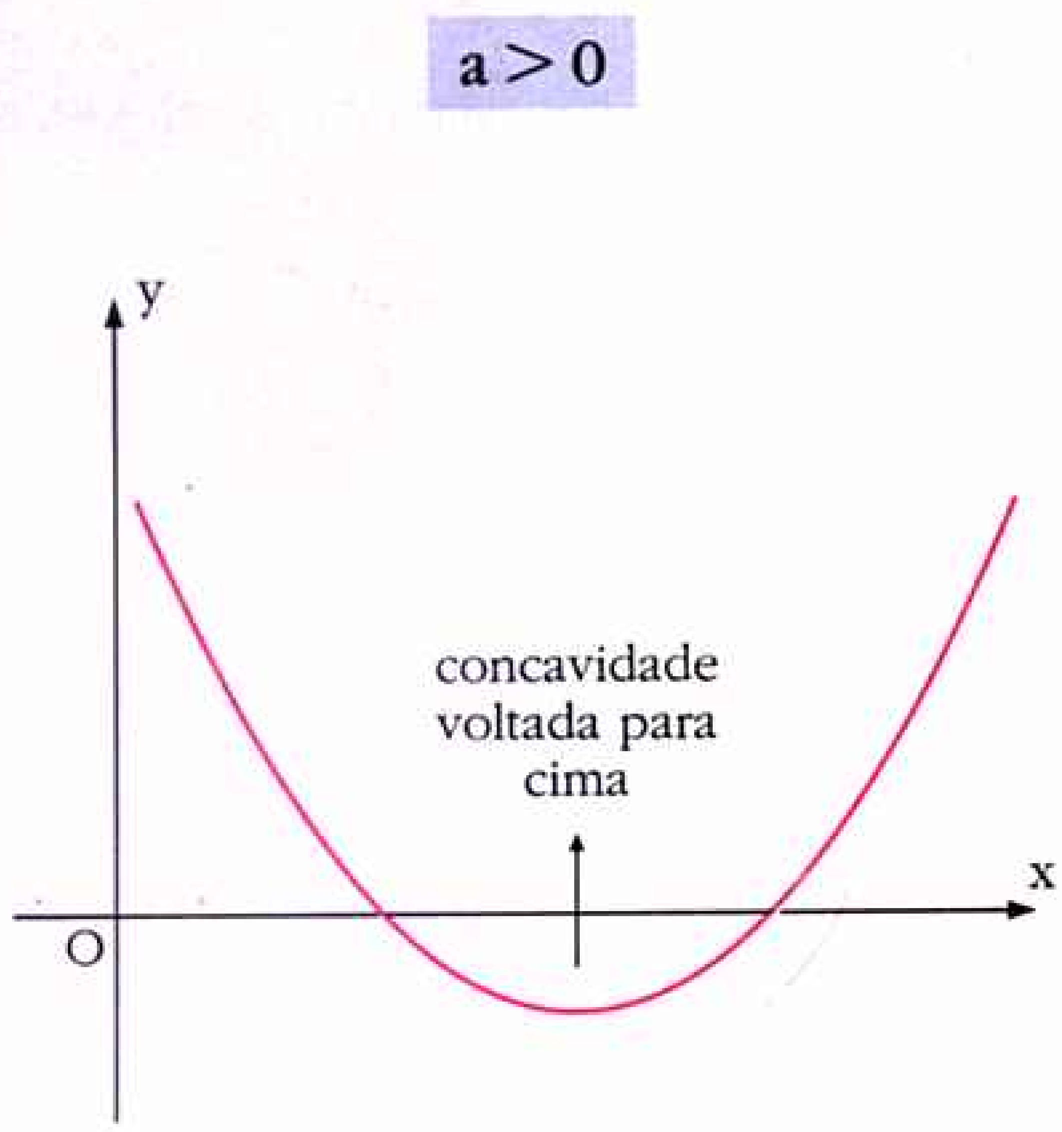
A seguir, vamos esboçar o gráfico da função quadrática $y = -x^2 + 2x + 3$.

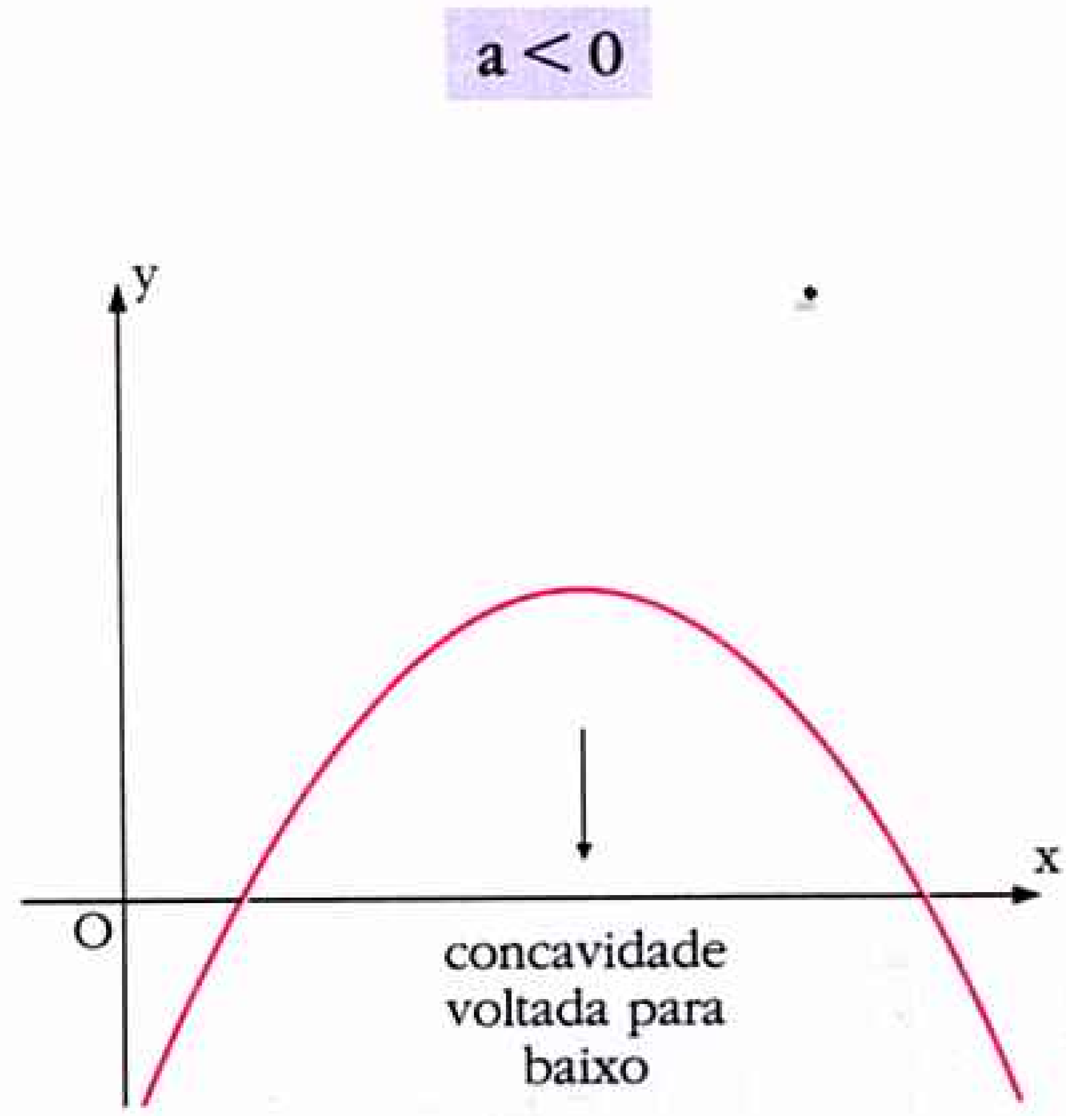
x	y
−2	−5
−1	0
0	3
1	4
2	3
3	0
4	−5



Relação entre a concavidade de uma parábola e o coeficiente a

O gráfico de uma função quadrática é sempre uma parábola, e essa parábola terá a *concavidade voltada para cima* quando $a > 0$ e terá a *concavidade voltada para baixo* quando $a < 0$.





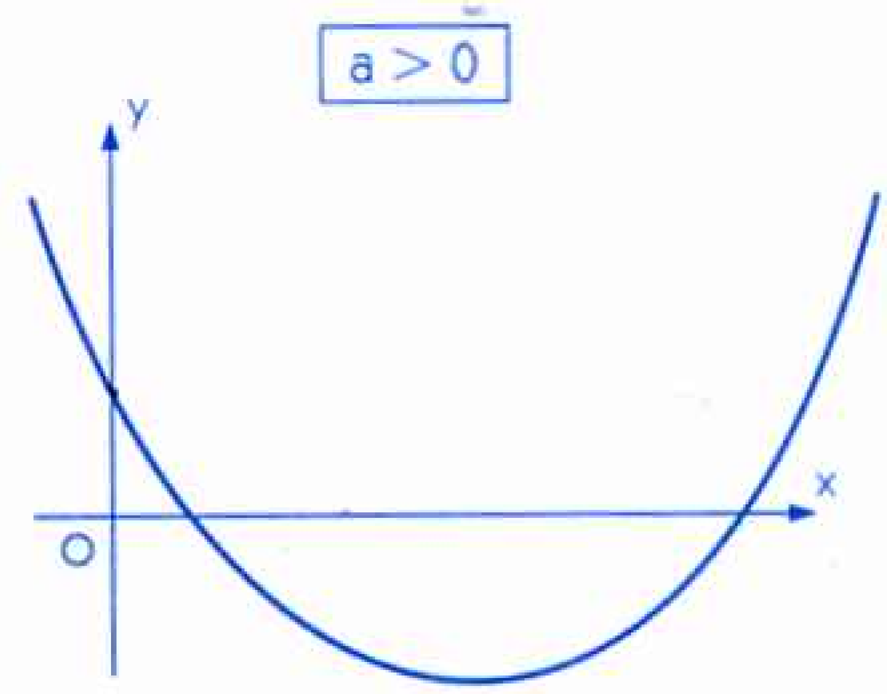
Exercícios

Resolvidos

1 Identificar *a*, *b* e *c* nas funções quadráticas abaixo, relacionando a concavidade da parábola com o coeficiente *a*.

a) $f(x) = x^2 - 9x + 8$

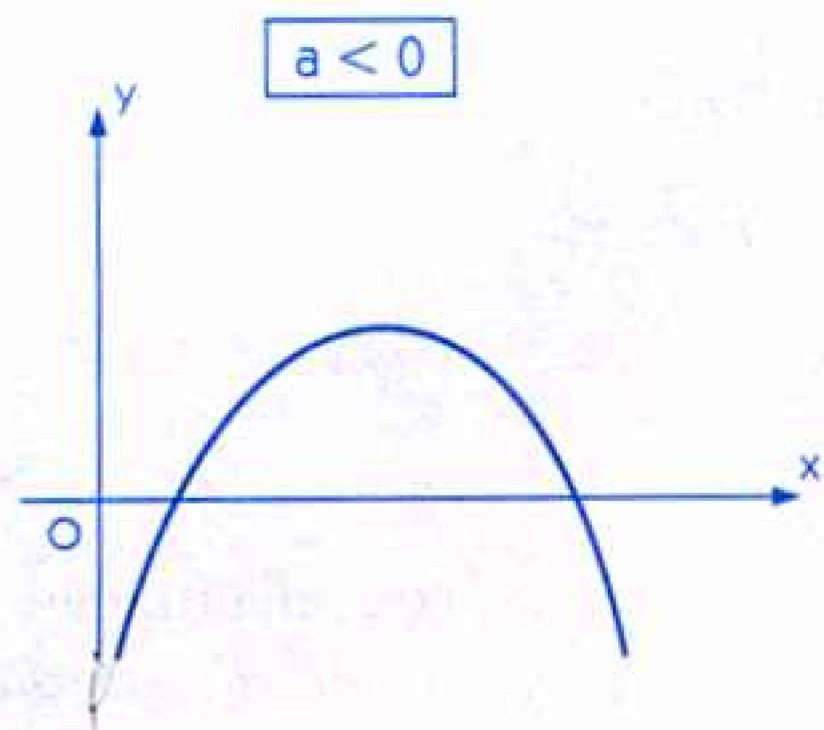
b) $f(x) = -2x^2 + 7x - 3$



a) $f(x) = x^2 - 9x + 8$

$a = 1$; $b = -9$ e $c = 8$

Como o coeficiente *a* é maior do que zero ($a > 0$), a parábola tem concavidade voltada para cima.



b) $f(x) = -2x^2 + 7x - 3$

$a = -2$, $b = 7$ e $c = -3$

Como o coeficiente *a* é menor do que zero ($a < 0$), a parábola tem concavidade voltada para baixo.

2 Encontrar a condição para o parâmetro *m*, de modo que a função $y = (3m - 9)x^2 - 7x + 6$ seja quadrática.

$a = 3m - 9$, $b = -7$ e $c = 6$

Para que a função acima seja quadrática, *a*, *b* e *c* devem pertencer ao conjunto dos números reais e *a* deve ser diferente de zero, portanto:

$a \neq 0 \Rightarrow 3m - 9 \neq 0 \Rightarrow 3m \neq 9 \Rightarrow m \neq 3$

Propostos

223 Identifique *a*, *b* e *c* e relacione a concavidade da parábola com o coeficiente *a* nas funções quadráticas abaixo:

a) $f(x) = x^2 - 5x + 6$

b) $f(x) = -2x^2 + 8x - 8$

c) $f(x) = x^2 - 4$

d) $f(x) = 3x^2 + x + 5$

e) $f(x) = -x^2 + x - 3$

f) $f(x) = -x^2 + x$

224 Encontre a condição para o parâmetro *m*, de modo que cada uma das seguintes funções seja quadrática:

a) $y = (m - 1)x^2 - 6x + 3$

b) $y = (4m - 16)x^2 + 2x - 1$

c) $y = (2 - m)x^2 + x$

d) $y = (3m - 7)x^2$

225 (PUC) Esboce o gráfico da função $y = -x^2 + 4x - 3$.

226 Esboce o gráfico das funções seguintes:

a) $y = x^2 - 6x + 8$

b) $y = x^2 - 5x + 6$

c) $y = -x^2 - 4x + 12$

d) $y = -x^2 + 6x - 9$

3. Raízes ou zeros da função quadrática

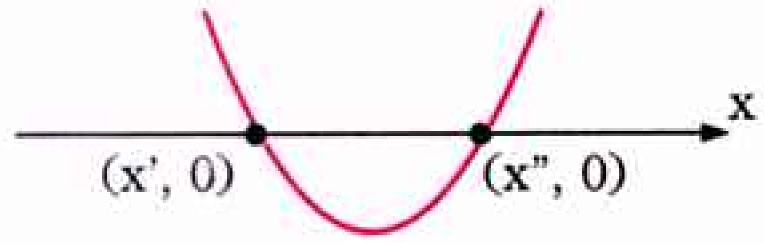
Quando fazemos $ax^2 + bx + c$ igual a zero, isto é, $y = f(x) = 0$, muitas vezes podemos obter valores de $x \in \mathbb{R}$, aos quais denominamos raízes ou zeros da função.

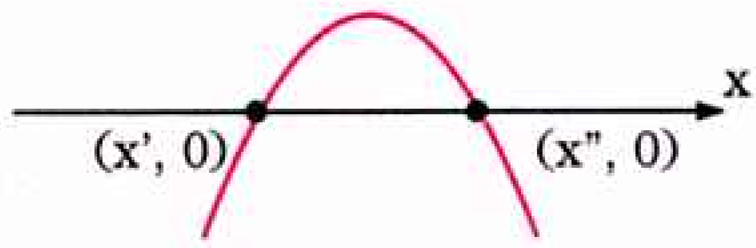
Para fazer referência a essas raízes, costumamos usar símbolos tais como x' e x" ou x_1 e x_2.

Então, se $y = 0$, temos que $ax^2 + bx + c = 0$. A fórmula de Bháskara nos fornece $x' = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x'' = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, mas devemos considerar os casos em que o discriminante (Δ) seja:

$\Delta > 0$

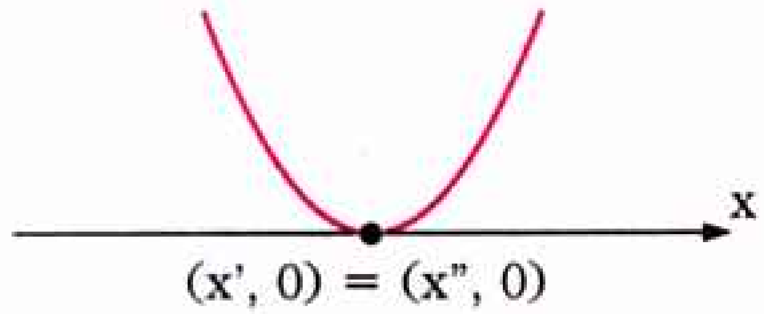
A função tem raízes reais e diferentes, portanto a parábola determina dois pontos distintos no eixo dos *x*: (x', 0) e (x", 0).

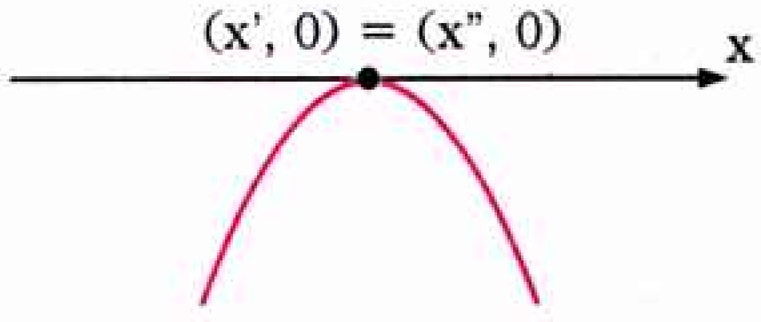




$\Delta = 0$

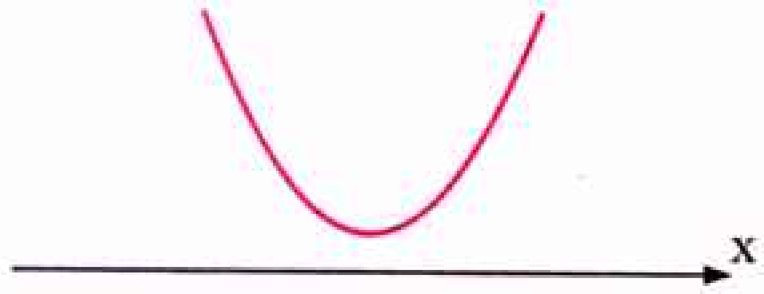
A função tem raízes reais e iguais: x' = x", portanto a parábola tangencia o eixo dos *x*.

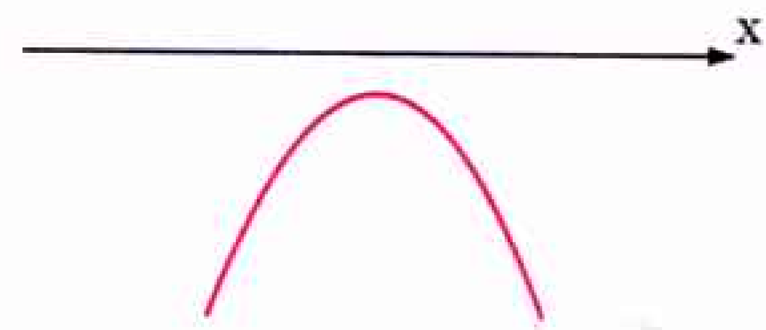




$\Delta < 0$

A função não tem raízes reais, portanto a parábola não determina nenhum ponto no eixo dos x.





Exercícios

Resolvidos

1 Determinar os zeros das funções quadráticas:

a) $y = -x^2 + 2x + 3$ b) $y = x^2 - 2x + 1$ c) $y = -x^2 + x - 1$

a) $y = -x^2 + 2x + 3$

$-x^2 + 2x + 3 = 0$

$a = -1$, $b = 2$ e $c = 3$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3$

$\Delta = 4 + 12$

$\Delta = 16$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x' = \frac{-2 + 4}{-2} = \frac{2}{-2} = -1$$

$$x'' = \frac{-2 - 4}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3$$

Neste caso, $\Delta > 0$ e as raízes são números reais e desiguais.

b) $y = x^2 - 2x + 1$

$x^2 - 2x + 1 = 0$

$a = 1$, $b = -2$ e $c = 1$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1$

$\Delta = 4 - 4$

$\Delta = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1}$$

$$x' = \frac{2 + 0}{2} = 1$$

$$x'' = \frac{2 - 0}{2} = 1$$

Neste caso, $\Delta = 0$ e as raízes são reais e iguais.

c) $y = -x^2 + x - 1$

$-x^2 + x - 1 = 0$

$a = -1$, $b = 1$ e $c = -1$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1)$

$\Delta = 1 - 4$

$\Delta = -3$

Neste caso $\Delta < 0$; logo, não existem raízes reais.

2 (Vunesp) Dada a equação $x^2 + x - \sqrt{2} = 0$, calcule a soma dos inversos de suas raízes.

Considerando: x_1 e x_2 raízes da equação $x^2 - Sx + P = 0$, onde

$S = x_1 + x_2 = \frac{c}{a}$, soma das raízes

$P = x_1 \cdot x_2 = -\frac{b}{a}$, produto das raízes, temos:

$x^2 + x - \sqrt{2} = 0$ se, e somente se, $x_1 + x_2 = -1$ e $x_1 \cdot x_2 = -\sqrt{2}$.

Portanto, a soma dos inversos de x_1 e x_2 é igual a $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{-1}{-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Propostos

227 Determine os zeros ou as raízes de cada uma das funções quadráticas:

a) $y = x^2 - 5x + 4$
b) $y = x^2 - 4x + 4$
c) $y = x^2 - 100$
d) $y = 3x^2 - 6x$

228 Considerando a função *f* dada por $f(x) = 5x^2 - 2x + k - 3$:

a) escreva a condição para que *f* apresente duas raízes reais e desiguais
b) determine o valor de *k* para que a função apresente raízes reais e desiguais

229 Para que valores de *k* a função $f(x) = x^2 - 2x + (2 - k)$ admite raízes reais e iguais?

230 Determine os valores de *k* para que a função $y = x^2 + 2x + k$ não apresente raízes reais.

231 (FMU-SP) A parábola de equação $y = -x^2 + bx - 8$ é tangente ao eixo dos *x*. Calcule *b*.

232 (Mack-SP) Determine *a* para que a equação do 2º grau $ax^2 + x + 1 = 0$ admita duas raízes reais distintas.

233 Sem calcular as raízes da equação $x^2 - 2x - 1 = 0$, determine a soma dos inversos dessas raízes.

234 (Fuvest-SP) Sejam x_1 e x_2 as raízes da equação $10x^2 + 33x - 7 = 0$. O número inteiro mais próximo do número $5 \cdot x_1 \cdot x_2 + 2 \cdot (x_1 + x_2)$ é:

a) -33
b) -10
c) -7
d) 10
e) 33

235 (Fuvest-SP) Se a equação $8x^3 + kx^2 - 18x + 9 = 0$ tem raízes reais *a* e $-a$, então o valor de *k* é:

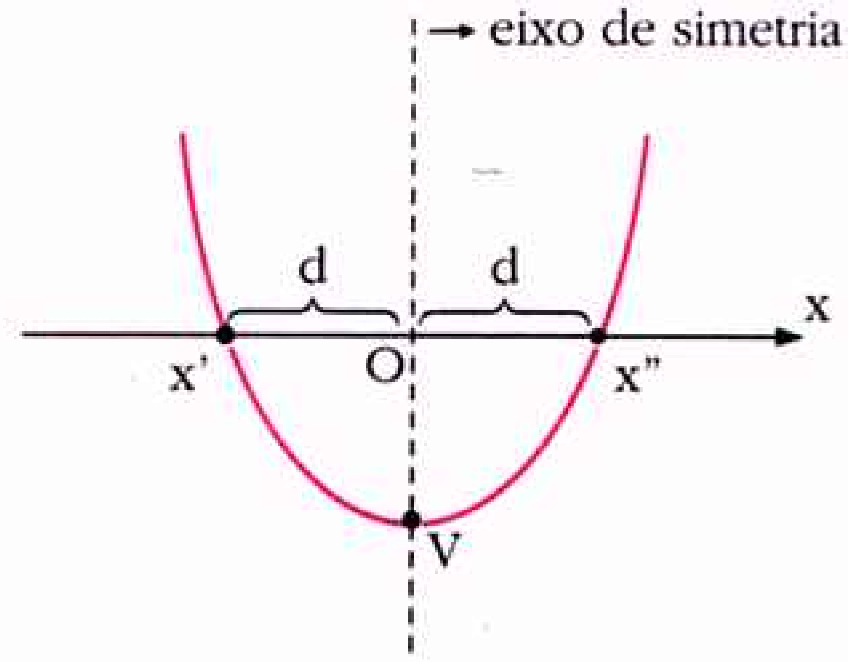
a) $\frac{9}{4}$
b) 2
c) $\frac{9}{8}$
d) -2
e) -4

4. Vértice da parábola

O vértice *V* de uma parábola é representado pelo ponto de intersecção do eixo de simetria com a própria parábola. As coordenadas do vértice são:

$$x_v = -\frac{b}{2a} \text{ ou } y_v = -\frac{\Delta}{4a}$$

$$\boxed{V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)}$$



Justificando as coordenadas do vértice

Sendo a abscissa do vértice a média aritmética entre as raízes x' e x", então:

$$x_v = \frac{x' + x''}{2}$$

$$x_v = \frac{\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}}{2}$$

$$x_v = \frac{\frac{-b + \cancel{\sqrt{\Delta}} - b - \cancel{\sqrt{\Delta}}}{2a}}{2}$$

$$x_v = \frac{-\frac{2b}{2a}}{2} = -\frac{b}{2a}$$

$$x_v = -\frac{b}{2a}$$

A obtenção da ordenada do vértice y_V é feita substituindo a quadrática $y = ax^2 + bx - c$.

$x_v = -\dfrac{b}{2a}$ na expressão da função

$$y_v = a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c$$

$$y_v = \frac{\cancel{a}b^2}{4a^{\cancel{2}}} - \frac{b^2}{2a} + c$$

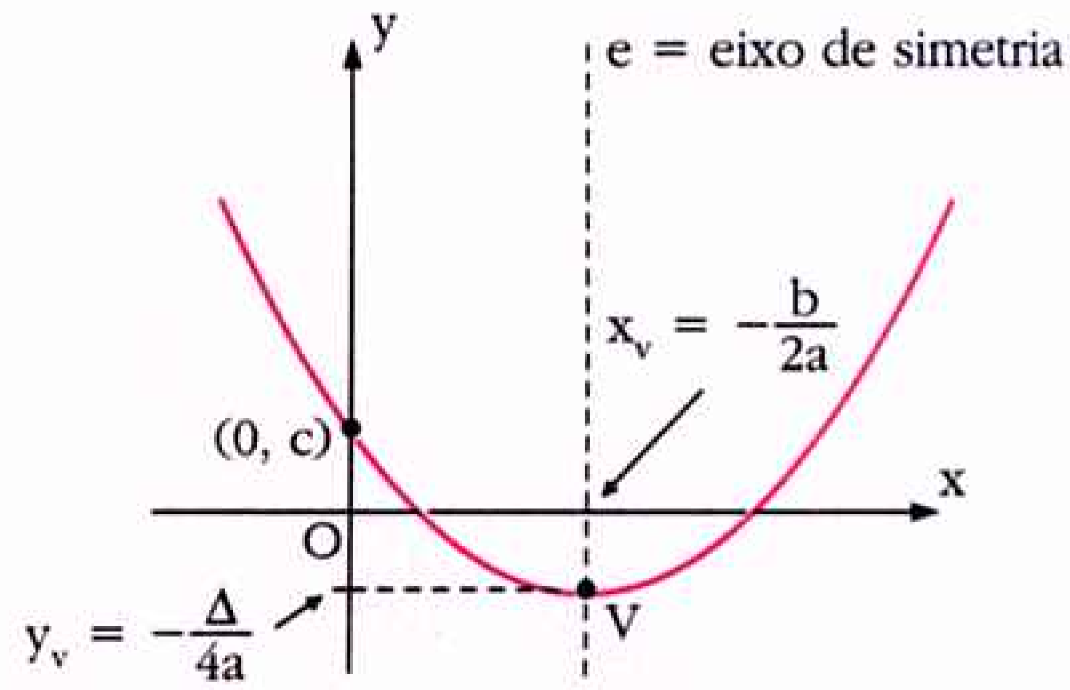
$$y_v = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c$$

$$y_v = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a}$$

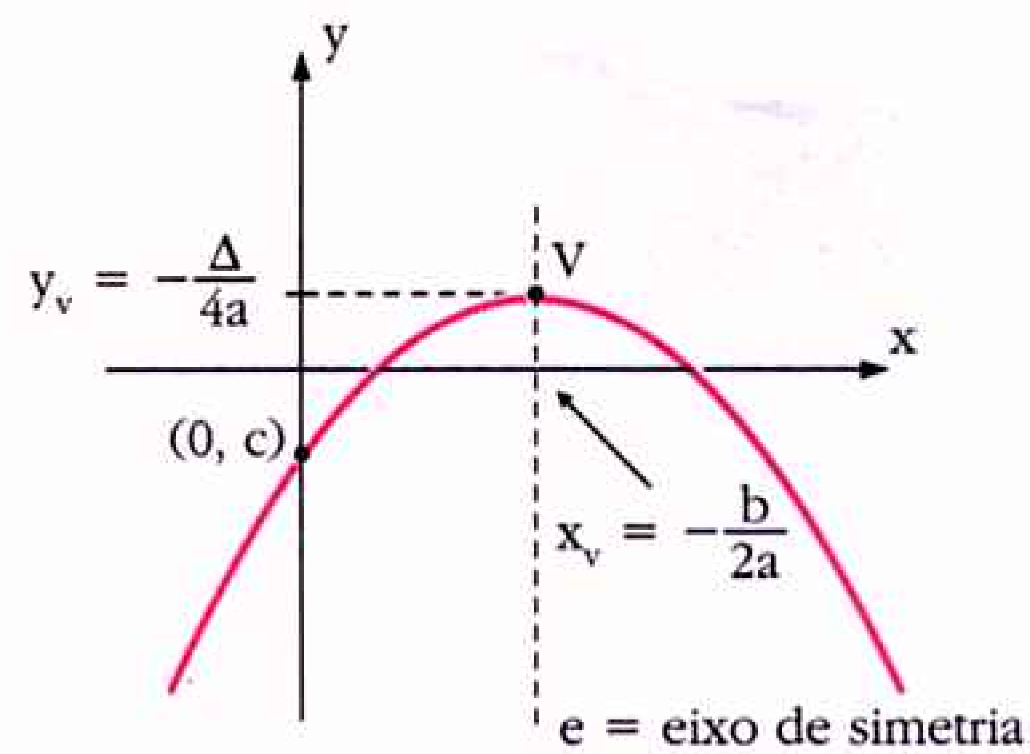
$$y_v = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = -\frac{(b^2 - 4ac)}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}$$

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a}$$

Estando a concavidade da parábola voltada para cima ($a > 0$), a função assume um *valor mínimo*, que é o valor $y_V = -\frac{\Delta}{4a}$.



Estando a concavidade da parábola voltada para baixo ($a < 0$), a função assume um *valor máximo*, que é o valor $y_V = -\frac{\Delta}{4a}$.



Observe que o ponto de intersecção da curva com o eixo *y* tem como coordenadas (0, c), ou seja: $x = 0 \Rightarrow y = c$.

Exercícios

Resolvidos

1 Esboçar o gráfico da função $y = 2x^2 - 3x + 1$, determinando:

a) as raízes
b) as coordenadas do vértice
c) a classificação de y_V (valor mínimo ou valor máximo da função)
d) intersecção da curva com o eixo *y*

a) Raízes:

$a = 2, b = -3$ e $c = 1$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1$

$\Delta = 9 - 8$

$\Delta = 1$

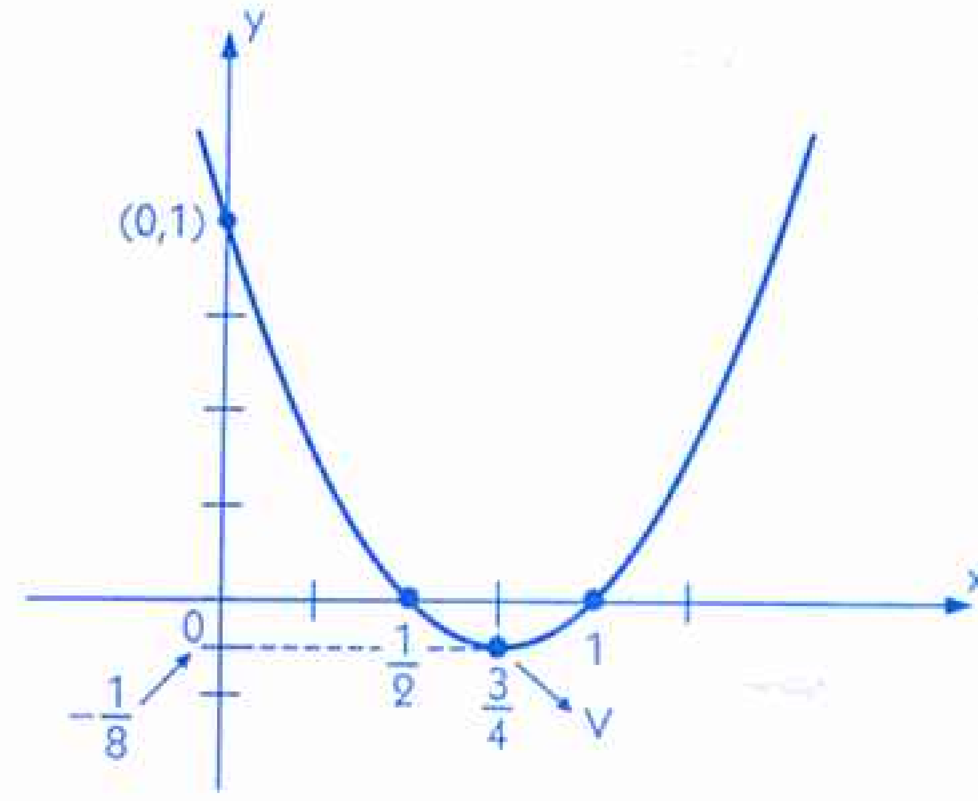
$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2(2)} \quad \begin{cases} x' = \frac{3+1}{4} = \frac{4}{4} = 1 \\ x'' = \frac{3-1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

b) Coordenadas do vértice:

$$x_V = -\frac{b}{2a} = \frac{-(-3)}{2 \cdot 2} = \frac{3}{4} \quad e \quad y_V = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{-1}{4(2)} = -\frac{1}{8}$$

c) Classificação de y_v:

$y_v = -\frac{1}{8}$ é o valor mínimo da função, pois $a > 0$ e a concavidade está voltada para cima.



d) A intersecção da curva com o eixo *y* se dá no ponto (0, 1), pois para $x = 0$ temos $y = 2 \cdot 0^2 - 3 \cdot 0 + 1 = 1$.

2 Esboçar o gráfico da função $y = -x^2 + x + 6$, determinando:

a) as raízes

b) as coordenadas do vértice

c) a classificação de y_V (valor mínimo ou valor máximo da função)

d) intersecção da curva com o eixo *y*

a) Raízes:

$a = -1$, $b = 1$ e $c = 6$

$\Delta = 1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (6)$

$\Delta = 1 + 24$

$\Delta = 25$

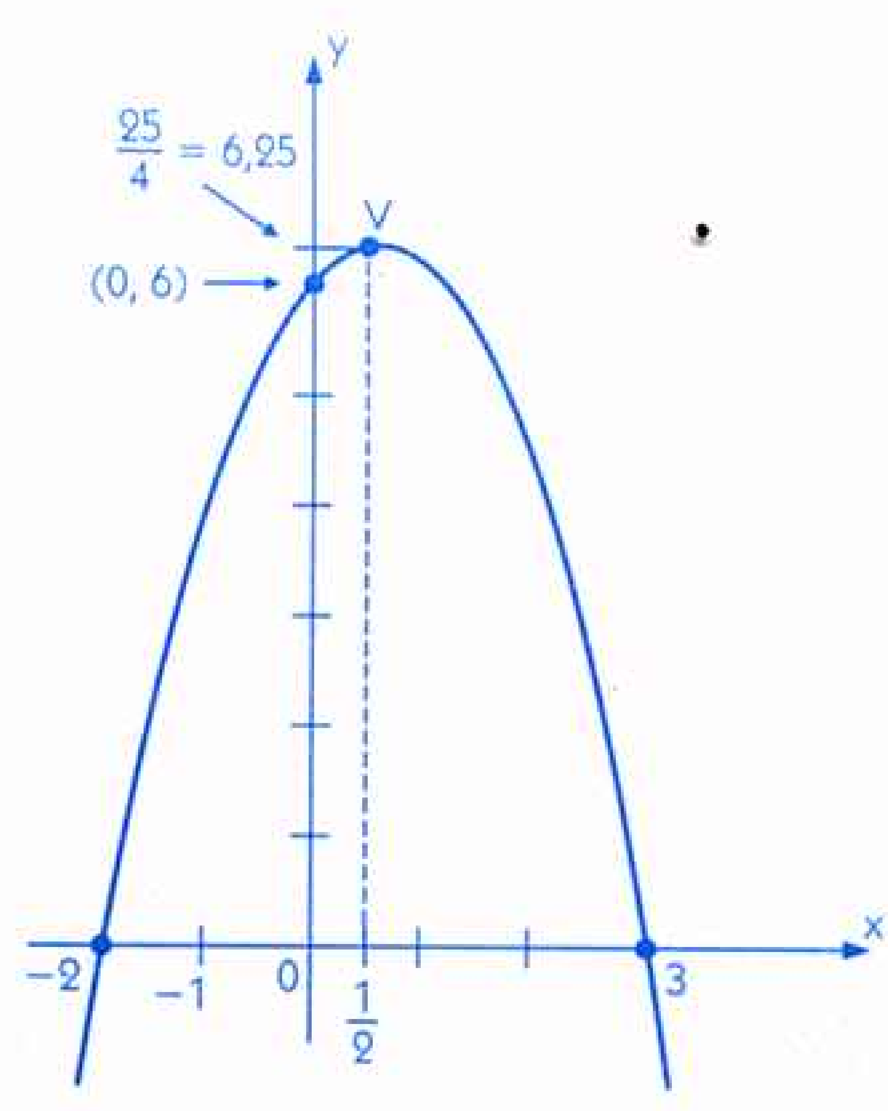
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot (-1)} \quad x' = \frac{-1 + 5}{-2} = -2 \qquad x'' = \frac{-1 - 5}{-2} = 3$$

b) Coordenadas do vértice:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2 \cdot (-1)} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-25}{4 \cdot (-1)} = \frac{25}{4}$$

c) Classificação de y_v:

$y_v = -\frac{25}{4}$ é o valor máximo da função, pois $a < 0$ e a concavidade está voltada para baixo.



d) A intersecção da curva com o eixo *y* se dá no ponto (0, 6), pois para $x = 0$ temos $y = -0^2 + 0 + 6 = 6$.

3 (FATEC-SP) O gráfico de uma função *f* do 2º grau corta o eixo das abscissas para $x = 1$ e $x = 5$. O ponto de máximo de *f* coincide com o ponto de mínimo da função *g*, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = \frac{2}{9}x^2 - \frac{4}{3}x + 6$. A função *f* pode ser definida por:

a) $y = -x^2 + 6x + 5$
b) $y = -x^2 - 6x + 5$
c) $y = -x^2 - 6x - 5$
x d) $y = -x^2 + 6x - 5$
e) $y = x^2 - 6x + 5$

O ponto de mínimo é determinado por $x = -\frac{b}{2a}$, se $a > 0$.

O ponto de máximo é determinado por $x = -\frac{b}{2a}$, se $a < 0$.

Portanto, o ponto de mínimo de $g(x) = \frac{2}{9}x^2 - \frac{4}{3}x + 6$ é dado por $x_v = -\dfrac{\left(-\frac{4}{3}\right)}{2 \cdot \left(\frac{2}{9}\right)} = 3$ e

$$y_v = -\frac{\left(-\frac{4}{3}\right)^2 - 4 \cdot \frac{2}{9} \cdot 6}{4 \cdot \frac{2}{9}} = 4$$

Podemos representar a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ na forma fatorada $f(x) = a(x - x') \cdot (x - x'')$.
Respeitadas as condições de existência, observe as seguintes equivalências:

$f(x) = a(x - x') \cdot (x - x'') \Leftrightarrow f(x) = a[x^2 - (x' + x'')x + x'x''] \Leftrightarrow$

$f(x) = a\left[x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a}\right] \Leftrightarrow f(x) = ax^2 + bx + c$

Como o gráfico de *f* corta o eixo Ox nos pontos de abscissa $x = 1$ ou $x = 5$, então, para algum $a \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = a(x - 1) \cdot (x - 5) \Leftrightarrow f(x) = ax^2 - 6ax + 5a$.

Assim, se (3, 4) é o ponto de máximo de *f*, então $f(3) = 4$.

$a(3)^2 - 6 \cdot a(3) + 5a = 4 \Rightarrow a = -1$

Portanto, se $a = -1$, então $f(x) = -x^2 + 6x - 5$.

Propostos

236 Encontre as coordenadas do vértice para cada função quadrática:
a) $y = x^2 - 4x + 3$
b) $y = -x^2 - 10x + 11$

237 Esboce o gráfico cartesiano para cada função quadrática:
a) $y = x^2 - 6x + 8$
b) $y = x^2 - 6x + 9$
c) $y = -x^2 - 2x + 3$
d) $y = x^2 - x + 1$
e) $y = -2x^2 + 7x - 3$

238 (FESP/UPE) Qual o vértice da parábola que tem por equação $y = x^2 - 7x + 12$?

239 (Cesgranrio-RJ) Qual a ordenada do vértice da parábola $y = x^2 - 2x + 5$?

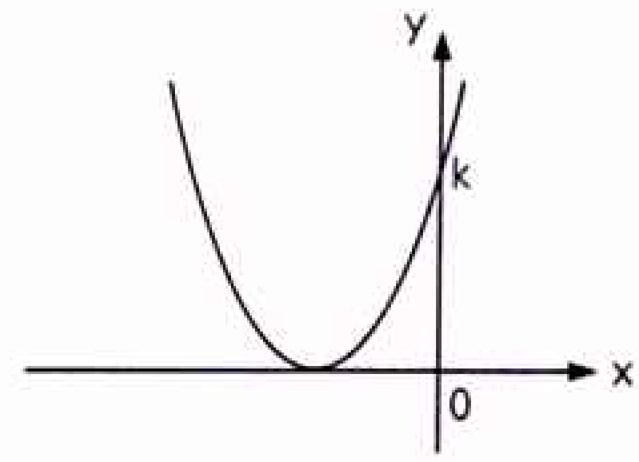
240 (Osec-SP) Qual o valor de *k* para que a função quadrática $f(x) = x^2 - 2x + k$ tenha o valor mínimo 1?

241 (FGV-SP) Deseja-se construir um retângulo de semi perímetro *p* de modo que o maior valor possível para a área seja 36. Então, o valor de *p* é:

a) 12
b) 13
c) 15
d) 20
e) 37

242 Qual a área máxima que pode ser associada a um dos retângulos cujo perímetro é 80 m?

243 Na figura, temos o gráfico da função real definida por $y = x^2 + mx + (15 - m)$. Então, *k* vale:



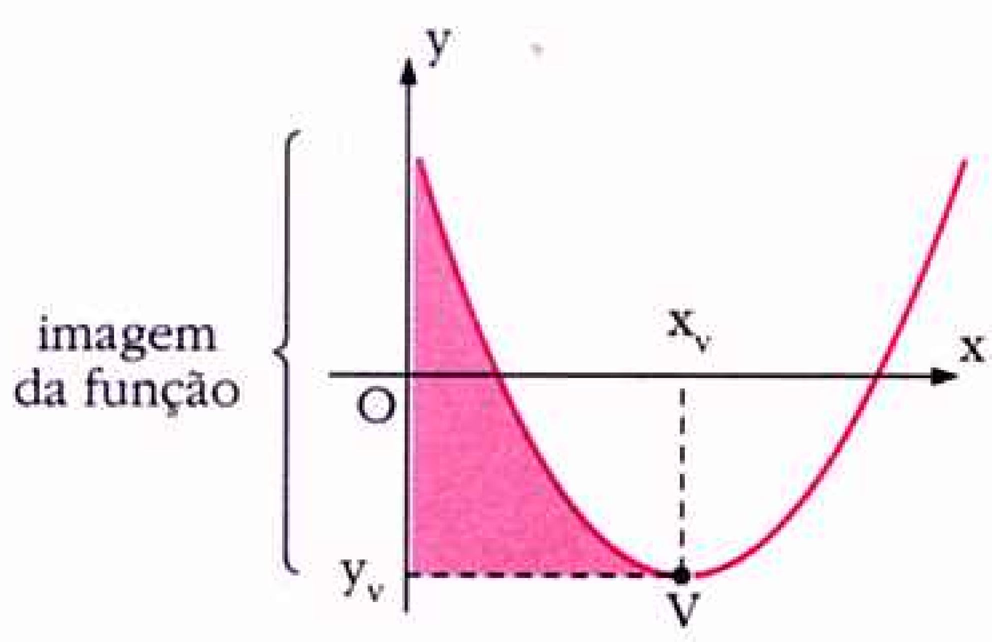
a) 25
b) 18
c) 12
d) 9
e) 6

5. Conjunto imagem da função quadrática

O conjunto imagem da função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ é determinado a partir da ordenada (y_V) do vértice da parábola. Temos dois casos a considerar:

$a > 0$

Quando $a > 0$ a função apresenta um ponto de mínimo, cuja ordenada $y_V = -\dfrac{\Delta}{4a}$ é o valor mínimo da função.

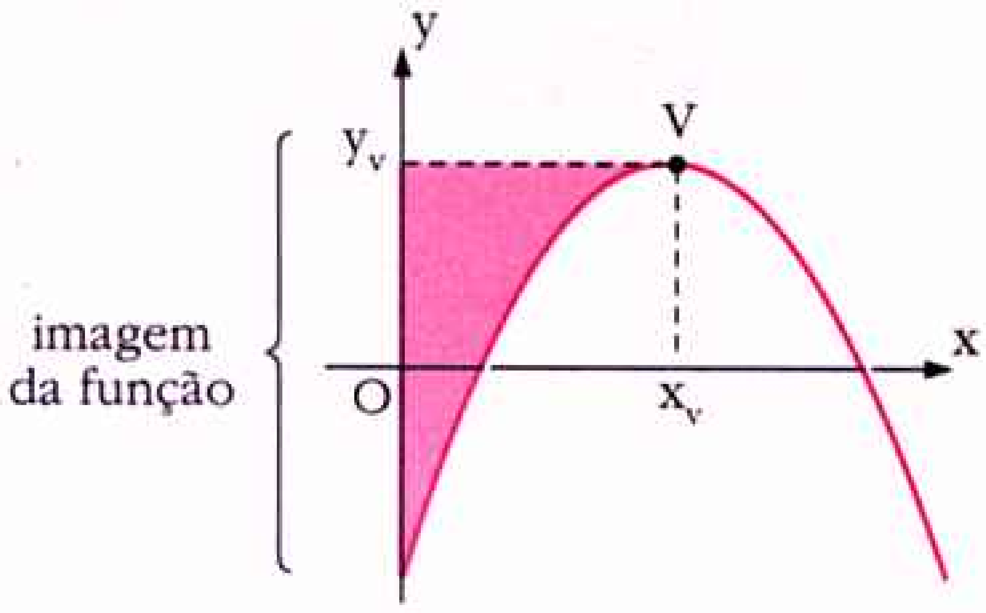


Logo:

$$\boxed{a > 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{Im}(f) = \left\{ y \in \mathbb{R} \mid y \geq -\frac{\Delta}{4a} \right\}}$$

$a < 0$

Quando $a < 0$ a função apresenta um ponto de máximo, cuja ordenada $y_V = -\dfrac{\Delta}{4a}$ é o valor máximo da função.



Logo:

$$\boxed{a < 0 \Rightarrow \text{Im}(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leq -\frac{\Delta}{4a}\right\}}$$

Exercícios

Resolvido

Determinar o conjunto imagem das funções quadráticas:

a) $y = x^2 - 2x - 3$ b) $y = -x^2 + 6x - 9$

a) $y = x^2 - 2x - 3$

$a = 1, b = -2$ e $c = -3$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16$

Sendo $a > 0$, a parábola apresenta um ponto de mínimo cuja ordenada é $y = -\frac{\Delta}{4a}$.

$y = \frac{-16}{4 \cdot 1} = -4$

Portanto, $\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -4\}$.

b) $y = -x^2 + 6x - 9$

$a = -1, b = 6$ e $c = -9$

$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-9) = 0$

Sendo $a < 0$, a parábola apresenta um ponto de máximo cuja ordenada é $y = -\frac{\Delta}{4a}$.

$y = -\frac{0}{4(-1)} = 0$

Portanto, $\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 0\}$.

Propostos

244 Determine o conjunto imagem das seguintes funções quadráticas:

a) $y = x^2 - 2x - 8$

b) $y = x^2 + 3x - 4$

c) $y = x^2 - 4$

245 Determine o conjunto imagem das seguintes funções quadráticas:

a) $y = -x^2 - 4x - 4$

b) $y = -x^2 + 8x - 7$

c) $y = -x^2 + 36$

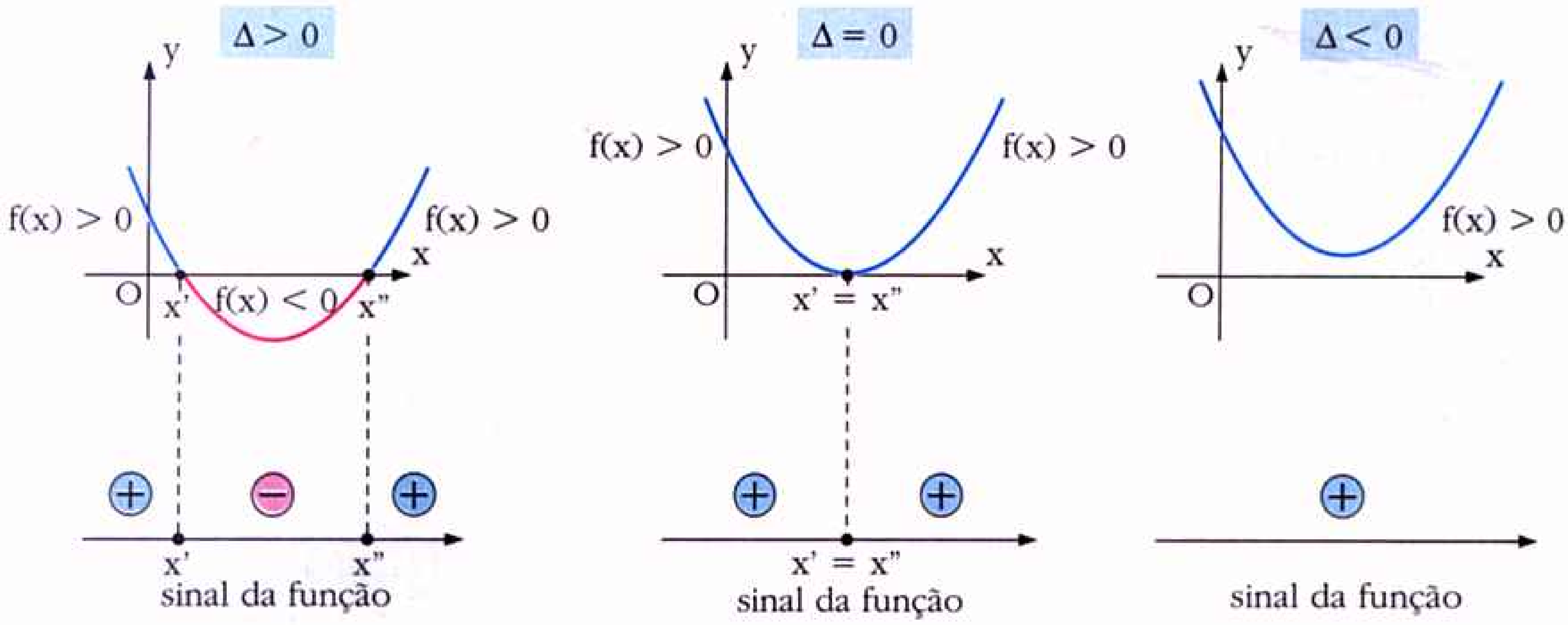
246 (PUC) Qual o conjunto imagem da função: $\{(x; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2 - 3\}$?

247 (Florianópolis-SC) Determine o conjunto imagem da função definida por: $f(x) = x^2 - x - 2$.

6. Estudo dos sinais da função quadrática

Os sinais da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ (*a*, *b* e *c* reais e $a \neq 0$) são estudados através da análise do coeficiente *a* e do Δ.

1º caso $a > 0$



Vamos fazer o estudo dos sinais usando como exemplos as seguintes funções:

a) $y = x^2 - 5x + 6$

Determinação do Δ e das raízes:

$a = 1,\ b = -5$ e $c = 6$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6$

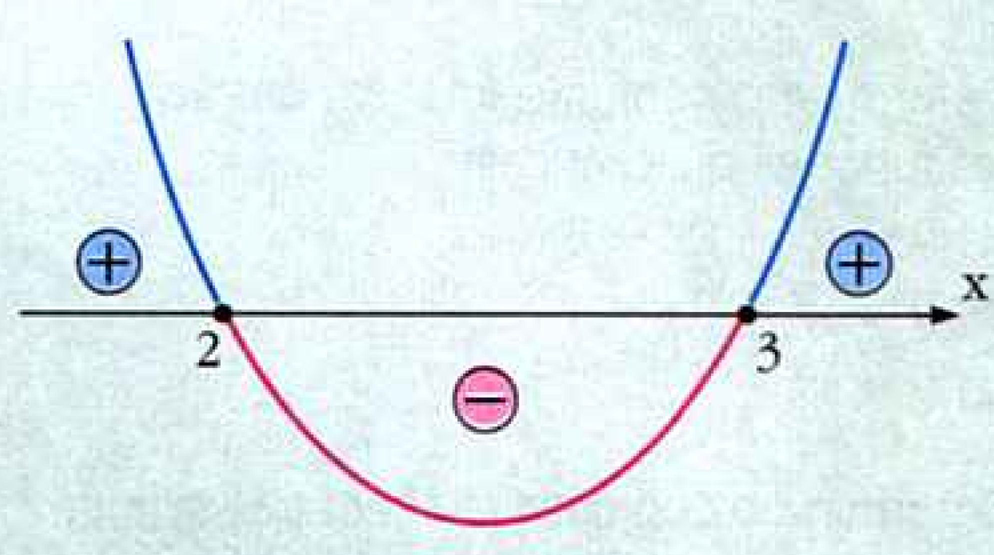
$\Delta = 25 - 24$

$\Delta = 1$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} \begin{cases} x' = \dfrac{5+1}{2} = 3 \\ x'' = \dfrac{5-1}{2} = 2 \end{cases}$$

Estudo dos sinais: $a > 0$ e $\Delta > 0$



$$\text{Logo: } \begin{cases} \text{se } x < 2 \text{ ou } x > 3, \text{ então } f(x) > 0 \\ \text{se } 2 < x < 3, \text{ então } f(x) < 0 \\ \text{se } x = 2 \text{ ou } x = 3, \text{ então } f(x) = 0 \end{cases}$$

b) $y = x^2 - 6x + 9$

Determinação do Δ e das raízes:

$a = 1, b = -6$ e $c = 9$

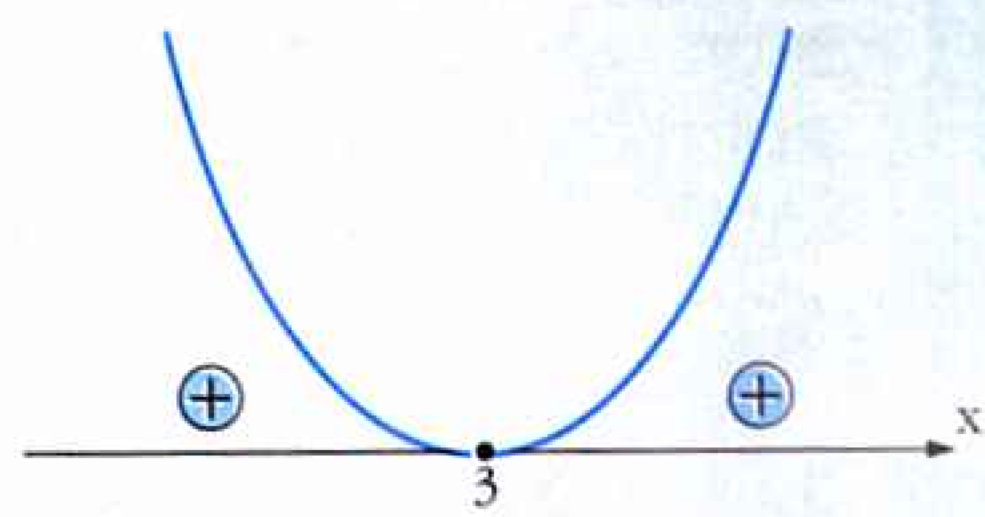
$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9$

$\Delta = 0$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} \begin{cases} x' = \dfrac{6 + 0}{2} = 3 \\ x'' = \dfrac{6 - 0}{2} = 3 \end{cases}$$

Estudos dos sinais: $a > 0$ e $\Delta = 0$



$$\text{Logo: } \begin{cases} \text{se } x < 3, \text{ ou se } x > 3, \text{ então } f(x) > 0 \\ \text{se } x = 3, \text{ então } f(x) = 0 \end{cases}$$

c) $y = x^2 - x + 10$

Determinação do Δ e das raízes:

$a = 1, b = -1$ e $c = 10$

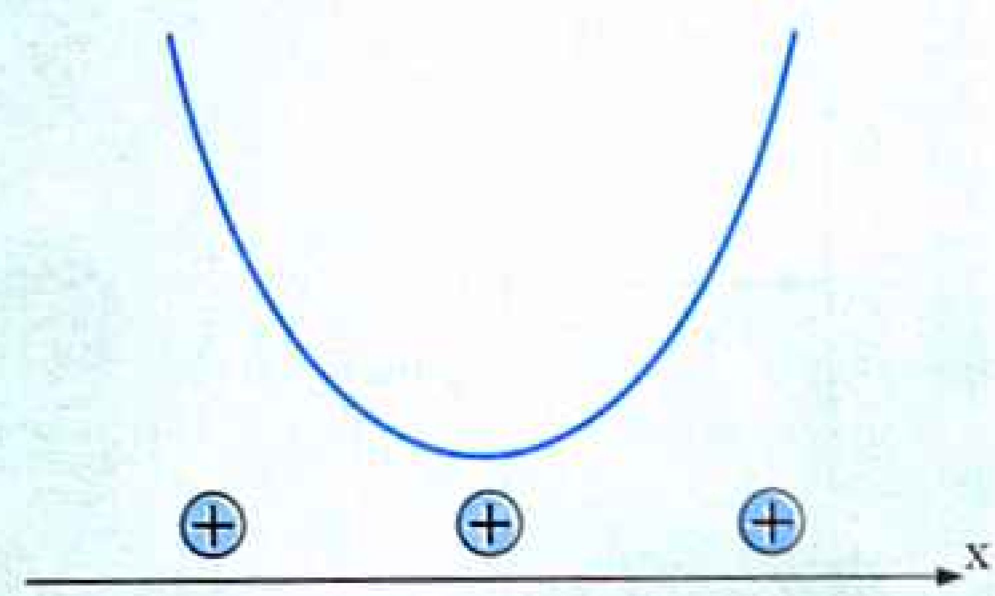
$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10$

$\Delta = -39$

Como $\Delta < 0$, a equação não possui raízes reais.

Estudo dos sinais: $a > 0$ e $\Delta < 0$



Logo, para qualquer valor de x, $f(x) > 0$.

Exercícios

Resolvido

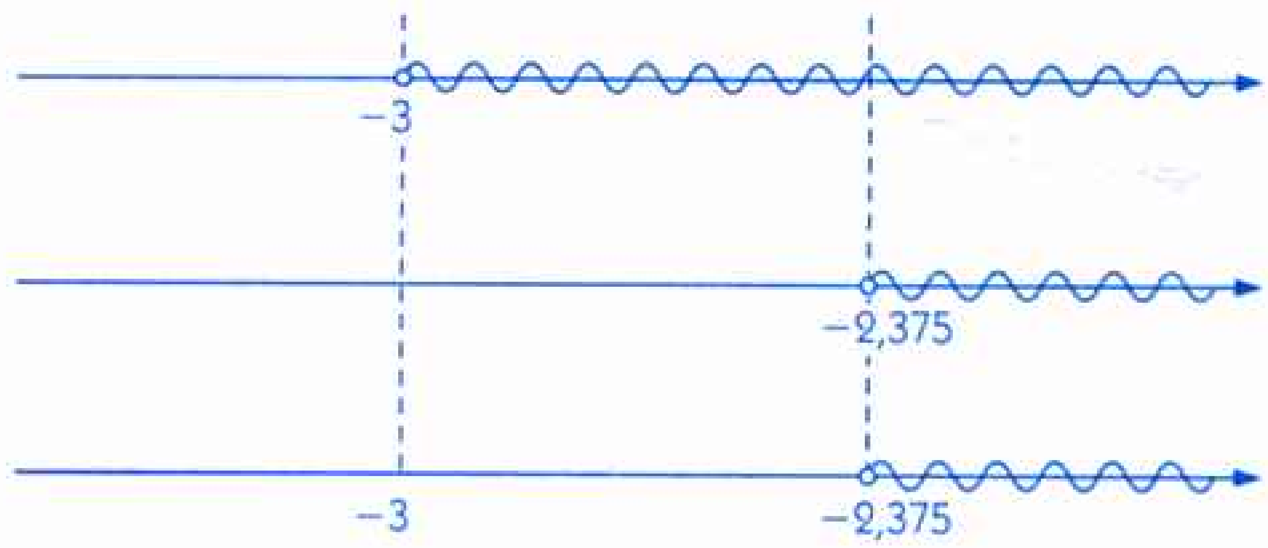
Determinar os valores de *m* para que a função $f(x) = (m + 3)x^2 - 5x + 10$ assuma valores positivos para todo *x* real.

Condições do problema: $a > 0$ e $\Delta < 0$

$a > 0 \therefore m + 3 > 0$ ou $m > -3$

$\Delta < 0 \therefore (-5)^2 - 4 \cdot (m + 3) \cdot 10 < 0$ ou $m > -\frac{19}{8} = -2{,}375$

A função assume valores positivos para todo *x* real quando $m > -2{,}375$.



Propostos

248 Faça o estudo dos sinais das seguintes funções:

a) $y = x^2 + 5x + 6$
b) $y = x^2 - 4x + 3$
c) $y = 16x^2 + 8x + 1$
d) $y = x^2 - 2x + 1$
e) $y = x^2 - 7x$

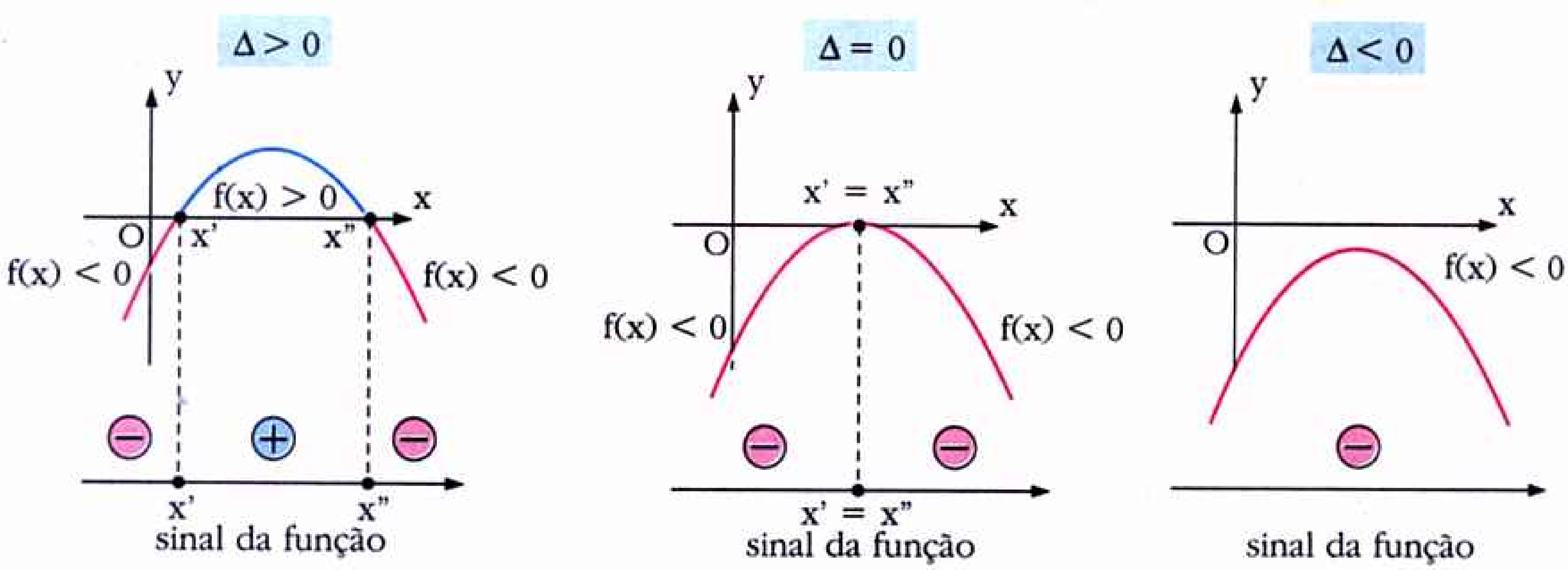
249 Para que valores de *x* tem-se $y > 0$?

a) $y = x^2 + 6x + 9$
b) $y = 4x^2 - 3x - 1$
c) $y = x^2 + 4x + 5$
d) $y = x^2 - 3x + 2$
e) $y = x^2 - 8x + 16$

250 Seja a função $f(x) = 2x^2 - 3x + (2m - 1)$, determine o valor de *m* e as raízes, de modo que f(x) se anule para um único valor de *x*.

251 Considere a função $f(x) = 4x^2 - 20x + (m - 10)$ e calcule o valor de *m* para que f(x) assuma valores positivos para todo *x* real.

2º caso $a < 0$



Vamos fazer o estudo dos sinais usando como exemplos as seguintes funções:

a) $y = -x^2 + 6x - 8$

Determinação do Δ e das raízes:

$a = -1$, $b = 6$ e $c = -8$

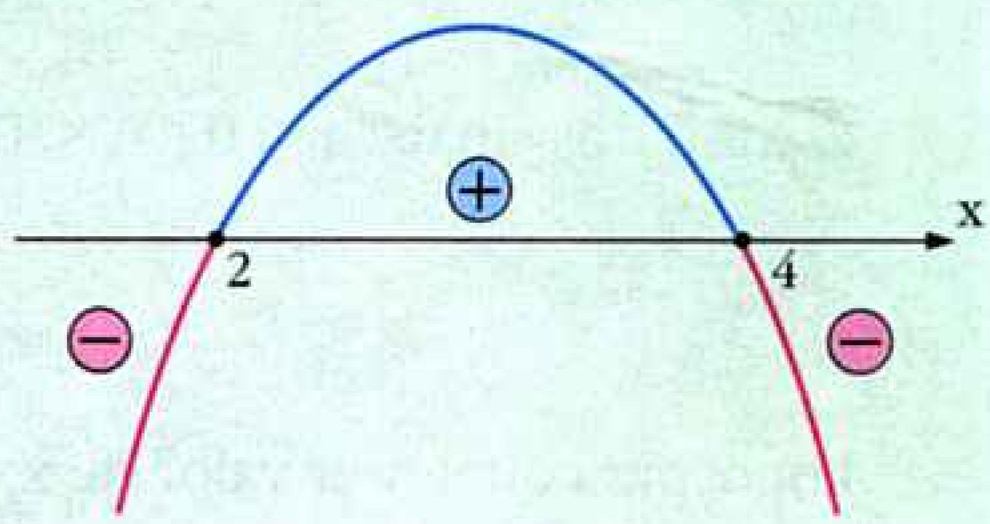
$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (6)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-8)$

$\Delta = 4$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot (-1)} \quad \begin{cases} x' = \dfrac{-6 + 2}{-2} = 2 \\ x'' = \dfrac{-6 - 2}{-2} = 4 \end{cases}$$

Estudo dos sinais: $a < 0$ e $\Delta > 0$



Logo: $\begin{cases} \text{se } x < 2 \text{ ou } x > 4, \text{ então } f(x) < 0 \\ \text{se } 2 < x < 4, \text{ então } f(x) > 0 \\ \text{se } x = 2 \text{ ou } x = 4, \text{ então } f(x) = 0 \end{cases}$

b) $y = - x^2 + 4x - 4$

Determinação do Δ e das raízes:

$a = -1$, $b = 4$ e $c = -4$

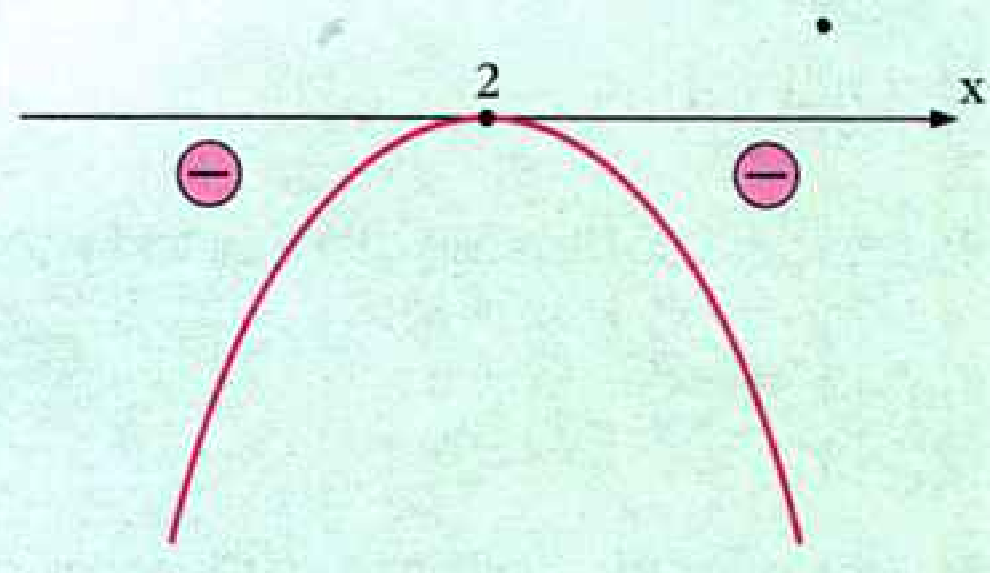
$\Delta = 4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-4)$

$\Delta = 16 - 16$

$\Delta = 0$

$$x = \frac{-4 \pm 0}{-2} \quad \begin{cases} x' = \dfrac{-4 + 0}{-2} = 2 \\ x'' = \dfrac{-4 - 0}{-2} = 2 \end{cases}$$

Estudo dos sinais: $a < 0$ e $\Delta = 0$



Logo: $\begin{cases} \text{se } x < 2 \text{ ou } x > 2, \text{ então } f(x) < 0 \\ \text{se } x = 2, \text{ então } f(x) = 0 \end{cases}$

c) $y = -x^2 - 6x - 11$

Determinação do Δ e das raízes:

$a = -1, b = -6 \text{ e } c = -11$

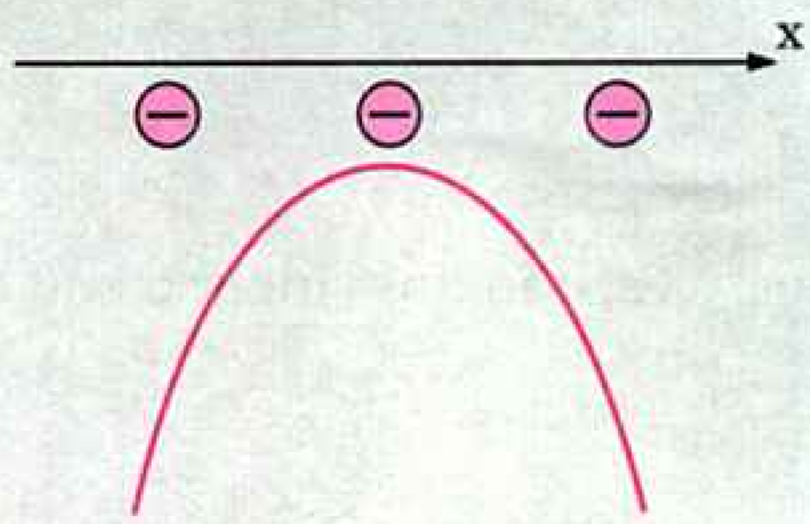
$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-11)$

$\Delta = 36 - 44$

$\Delta = -8$

Como $\Delta < 0$, a equação não possui raízes reais.

Estudo dos sinais: $a < 0$ e $\Delta < 0$



Logo, para qualquer valor de x, $f(x) < 0$.

Exercícios

Resolvido

Determinar os valores de *m* para que a função $f(x) = -x^2 - 4x - (-m + 1)$ assuma valores negativos para todo *x* real.

$f(x) = -x^2 - 4x - (-m + 1)$

Condições do problema: $a < 0$ e $\Delta < 0$

$a < 0$

$\Delta < 0 \therefore (-4)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (m - 1) < 0$ ou $16 + 4m - 4 < 0$ ou $m < -3$

A função assume valores negativos para todo *x* real quando $m < -3$.

Propostos

252 Faça o estudo dos sinais das seguintes funções:

a) $y = -x^2 + 4x + 5$
b) $y = -x^2 + 2x + 3$
c) $y = -x^2 + 6x - 9$

253 Faça o estudo dos sinais das funções dadas por:

a) $y = -2x^2 + 8x - 8$
b) $y = -x^2 - x - 1$
c) $y = -x^2 + 2x - 3$

254 Considere a função $f(x) = -x^2 - 10x + k$ e determine o valor de *k* para que f(x) assuma valores negativos para todo *x* real.

255 Considere a função $f(x) = mx^2 + x - 2$ e calcule o valor de *m* para que f(x) assuma valores negativos para todo *x* real.

256 Determine os valores de *m*, para os quais a função $f(x) = mx^2 + 2(m + 1)x + m^2$ seja positiva quando $x = 1$.

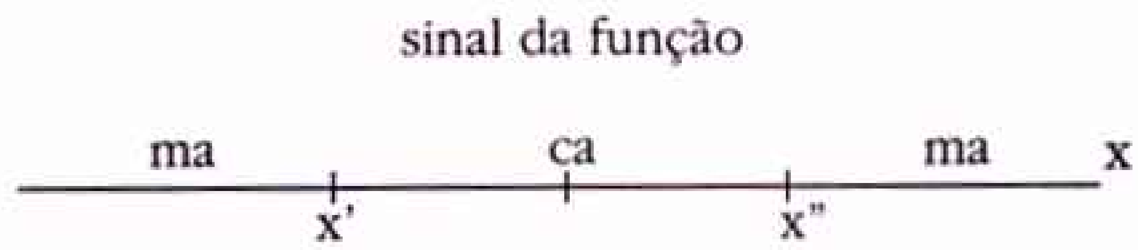
Podemos reunir o 1º e o 2º casos na seguinte síntese.

Para as raízes x' e x" a função assume valor zero.

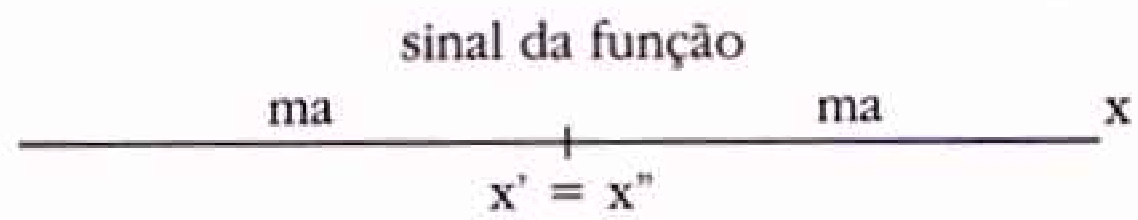
Para valores de x compreendidos entre as raízes, a função assume *sinal contrário* ao de a (ca).

Para outros valores de x a função assume o *mesmo sinal* de a (ma).

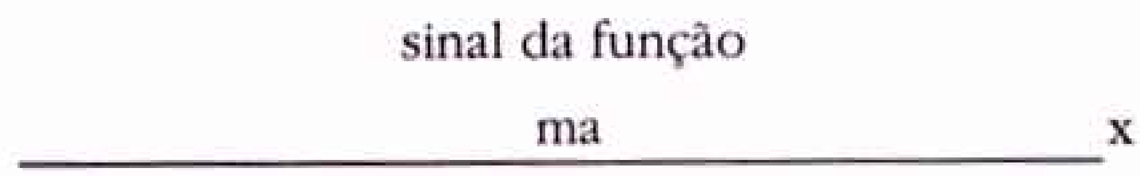
Quando $\Delta > 0$, temos:



Quando $\Delta = 0$, temos:



Quando $\Delta < 0$, temos:



Exercícios

Propostos

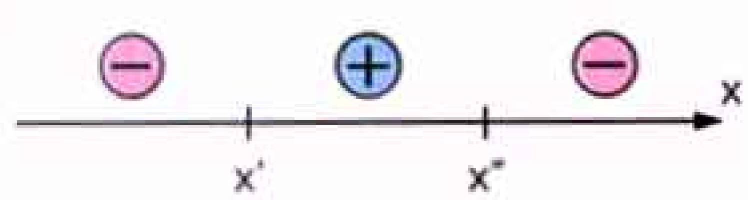
257 Faça o estudo de uma função do 2º grau cujas raízes são $\frac{1}{3}$ e 8 sabendo que o seu gráfico é uma parábola:

a) com a concavidade voltada para baixo

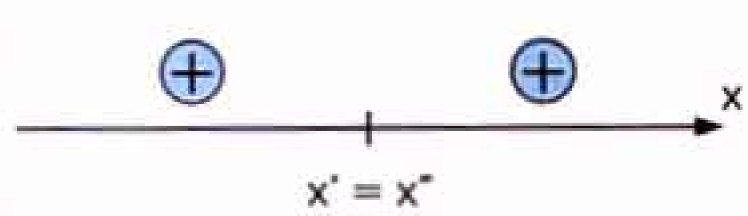
b) com a concavidade voltada para cima

258 O esquema mostra o estudo dos sinais de uma função quadrática. Dê o sinal do coeficiente a e do discriminante Δ.

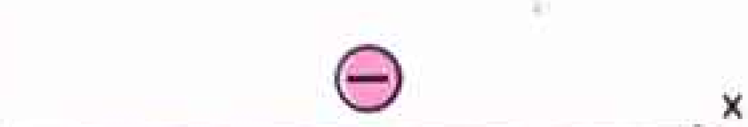
a)



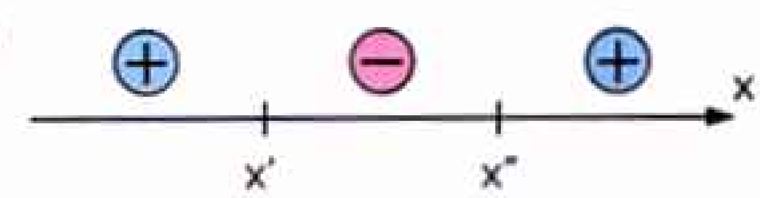
b)



c)

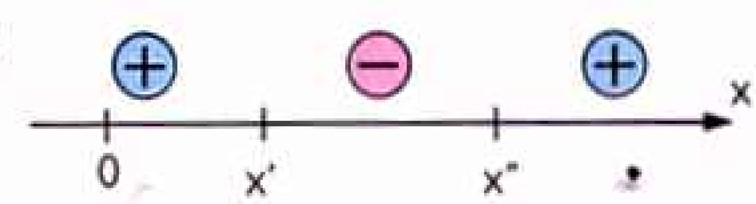


d)



259 Dados os esquemas de estudo do sinal de uma função do 2º grau, determine para cada caso os sinais dos coeficientes a, b e c.

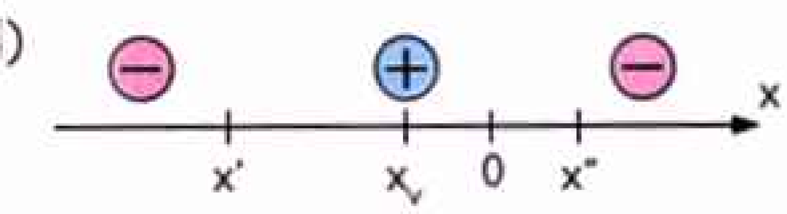
a)



b)

c)

d)



7. Inequação

A resolução de uma inequação do 2º grau, isto é, a determinação dos valores de x que a satisfazem, envolve o estudo dos sinais de uma função do 2º grau.

Estudaremos a resolução de inequações através dos seguintes exemplos:

a) $x^2 - 6x + 8 < 0$

Determinando as raízes da função $f(x) = x^2 - 6x + 8$, temos:

$a = 1, b = -6$ e $c = 8$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8$

$\Delta = 36 - 32$

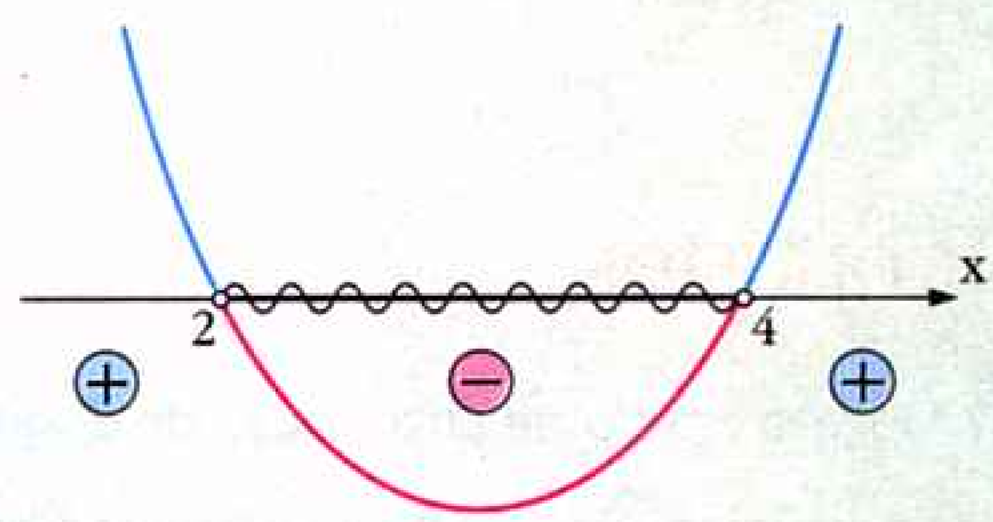
$\Delta = 4$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} \quad x' = \frac{6+2}{2} = 4 \quad x'' = \frac{6-2}{2} = 2$$

Queremos os valores de x para que $f(x) < 0$.

Estudando os sinais da função:



Identificando os valores de x que satisfazem a inequação, temos:

$V = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 4\}$

b) $x^2 - 2x + 1 > 0$

Determinando as raízes da função $f(x) = x^2 - 2x + 1$.

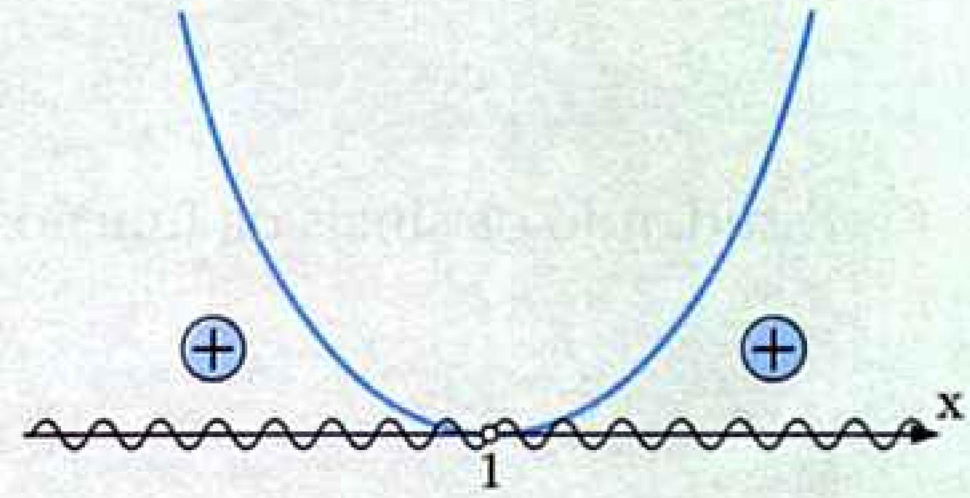
$a = 1, b = -2$ e $c = 1$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2} \quad x' = \frac{2+0}{2} = 1 \quad x'' = \frac{2-0}{2} = 1$$

Queremos os valores de x para que $f(x) > 0$.

Estudando os sinais da função:



Identificando os valores de x que satisfazem a inequação, temos:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$

c) $3x^2 - 3x + 2 < 0$

Determinando as raízes da função $f(x) = 3x^2 - 3x + 2$:

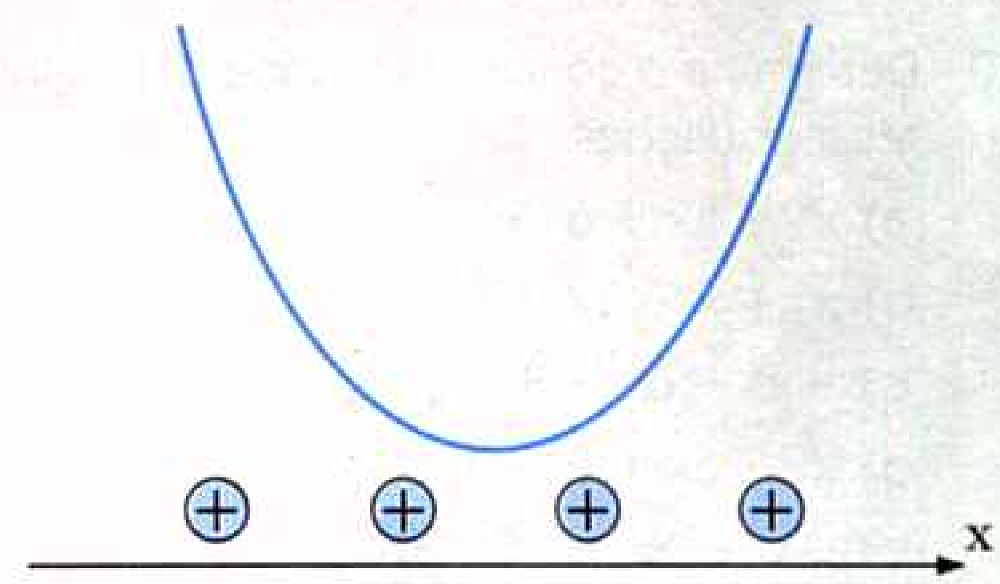
$a = 3$, $b = -3$ e $c = 2$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = -15$

Como $\Delta < 0$, a função não possui raízes reais.

Queremos os valores de x para que $f(x) < 0$.

Estudando os sinais da função:



Identificando os valores de x que satisfazem a inequação, temos:

$S = \varnothing$

d) $(-x + 4) \cdot (x - 3) < 0$

Determinando as raízes da função $f(x) = (-x + 4) \cdot (x - 3)$:

$(-x + 4) \cdot (x - 3) = 0$

$-x^2 + 3x + 4x - 12 = 0$

$-x^2 + 7x - 12 = 0$

$a = -1$, $b = 7$ e $c = -12$

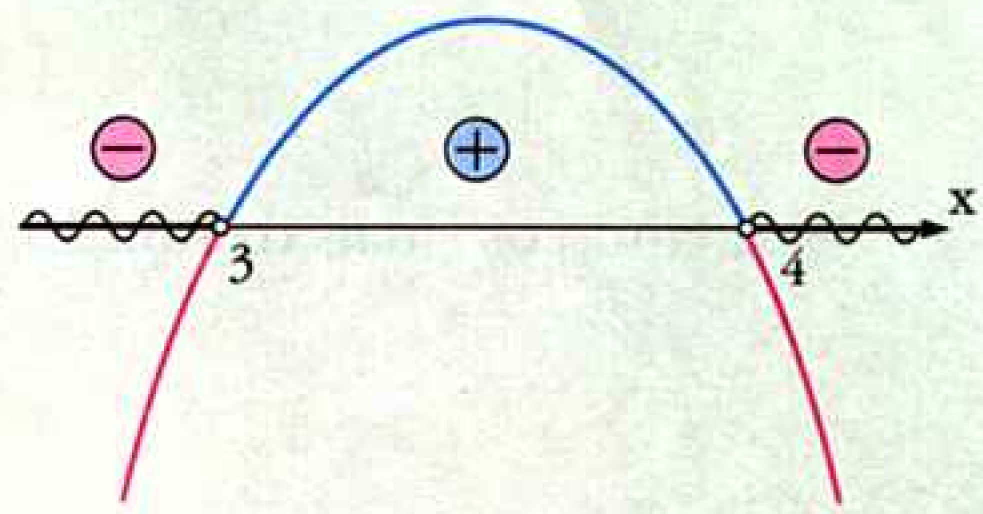
$\Delta = 7^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-12)$

$\Delta = 1$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot (-1)} \quad \begin{cases} x' = \dfrac{-7 + 1}{-2} = 3 \\[2ex] x'' = \dfrac{-7 - 1}{-2} = 4 \end{cases}$$

Queremos os valores de x para que $f(x) < 0$.

Estudando os sinais da função:



Identificando os valores de x que satisfazem a inequação, temos:

$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3 \text{ ou } x > 4\}$

Exercícios

Propostos

260 Determine o conjunto verdade das seguintes inequações:

a) $x^2 - 5x + 6 > 0$

b) $x^2 + x - 12 \leqslant 0$

c) $-x^2 + 6x - 8 > 0$

d) $x^2 - 6x + 9 > 0$

e) $-x^2 + 8x - 15 < 0$

f) $x^2 - x + 6 > 0$

261 Para quais valores reais de x têm-se:

a) $x^2 - 10x + 25 \geqslant 0$

b) $2x^2 - 3x + 1 \geqslant 0$

c) $(x + 2)(x - 3) > 0$

d) $(x + 4)(x - 4) \leqslant 0$

e) $x(x - 7) > 0$

262 (PUCCAMP-SP) No conjunto $\mathbb{R}$, qual o conjunto verdade de $-x^2 + 2x + 15 < 0$?

263 (FAAP-SP) Qual o domínio da função definida por $y = \sqrt{x^2 - 9}$?

264 (FGV-SP) Qual o valor de k para que a expressão $y = \sqrt{x^2 - kx + 6}$ defina uma função de domínio real em x?

8. Sistema de inequações

A resolução de um sistema de inequações pode ser feita a partir do estudo dos sinais de uma função para cada inequação, separadamente, seguido da determinação da intersecção dos conjuntos verdade (conjuntos solução) dessas inequações.

Faremos o estudo da resolução de sistemas através do exemplo:

Resolver o sistema

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 9 \geqslant 0 \\ 3x - 6 > 0 \end{cases}$$

Determinando os zeros das funções $f(x) = x^2 - 6x + 9$ e $g(x) = 3x - 6$:

$x^2 - 6x + 9 = 0$

$a = 1, b = -6$ e $c = 9$

$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 0$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} \quad \begin{cases} x' = \dfrac{6 + 0}{2} = 3 \\[2ex] x'' = \dfrac{6 - 0}{2} = 3 \end{cases}$$

$3x - 6 = 0$

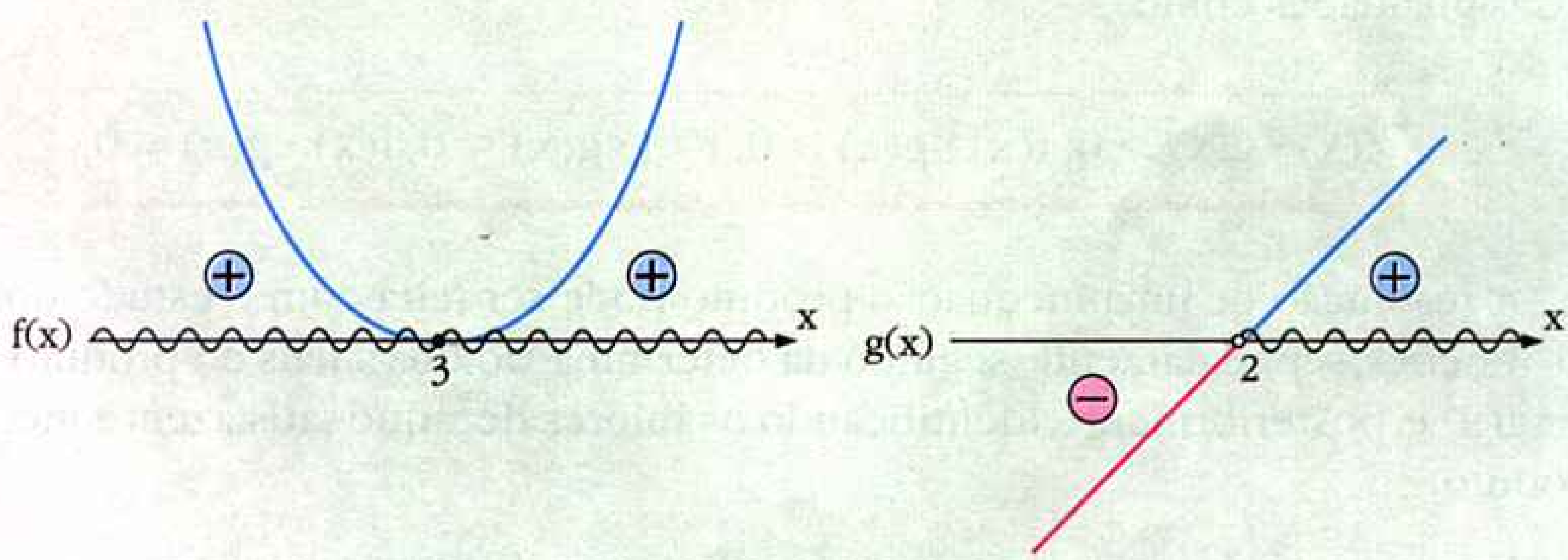
$3x = 6$

$x = \dfrac{6}{3}$

$x = 2$

Queremos que $f(x) \geqslant 0$ e $g(x) > 0$.

Estudando os sinais das funções:

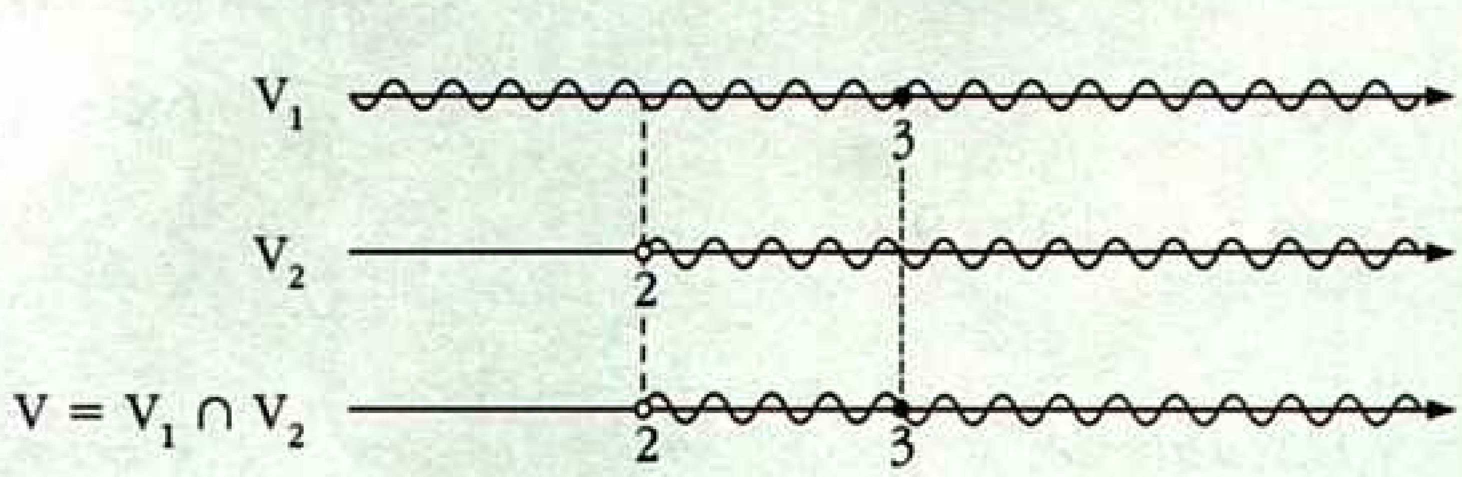


Identificando os valores de *x* que satisfazem as inequações:

$V_1 = \mathbb{R}$

$V_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$

Fazendo a intersecção dos conjuntos verdade:



$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$

Exercícios

Propostos

265 Resolva os sistemas de inequações:

a) $\begin{cases} x^2 - 3x + 2 > 0 \\ -x^2 + x > 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x^2 - 4x + 12 \leq 0 \\ 5x + 15 \leq 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -x^2 + 6x - 9 \leq 0 \\ x^2 + x + 1 < 0 \end{cases}$

266 Resolva as inequações:

a) $x^2 - 16x + 8 < -7x > -x^2 - 12$
b) $x - 20 \leq x^2 > - x^2 - 7x - 3$
c) $-2x^2 + 4 \leq - 3x + 2 \leq -x^2 - 4x + 4$
d) $-x^2 - 3x < -2x^2 < - 3x^2 + 4$

267 (AMAN-RJ) A solução do sistema

$\begin{cases} 2x^2 + 12 > x^2 - 8x \\ x + 5 < 0 \end{cases}$ é o conjunto:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -6\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -6\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -5\}$
e) n.d.a

9. Inequação-produto

Considerando f(x) e g(x) funções da variável x, chamamos de inequação-produto desigualdades como:

$$\boxed{f(x) \cdot g(x) > 0,\ f(x) \cdot g(x) \geq 0,\ f(x) \cdot g(x) < 0,\ f(x) \cdot g(x) \leq 0.}$$

A resolução de uma inequação-produto pode ser feita com o estudo dos sinais das funções, separadamente, seguido da determinação dos sinais do produto de f(x) por g(x) e, posteriormente, identificando os valores de x que satisfazem a inequação-produto.

Vamos entender melhor esse processo através da seguinte inequação-produto:

$$(x^2 - 7x + 10) \cdot (6x + 12) \geq 0$$

Determinando o zero das funções $f(x) = x^2 - 7x + 10$ e $g(x) = 6x + 12$:

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 9$$

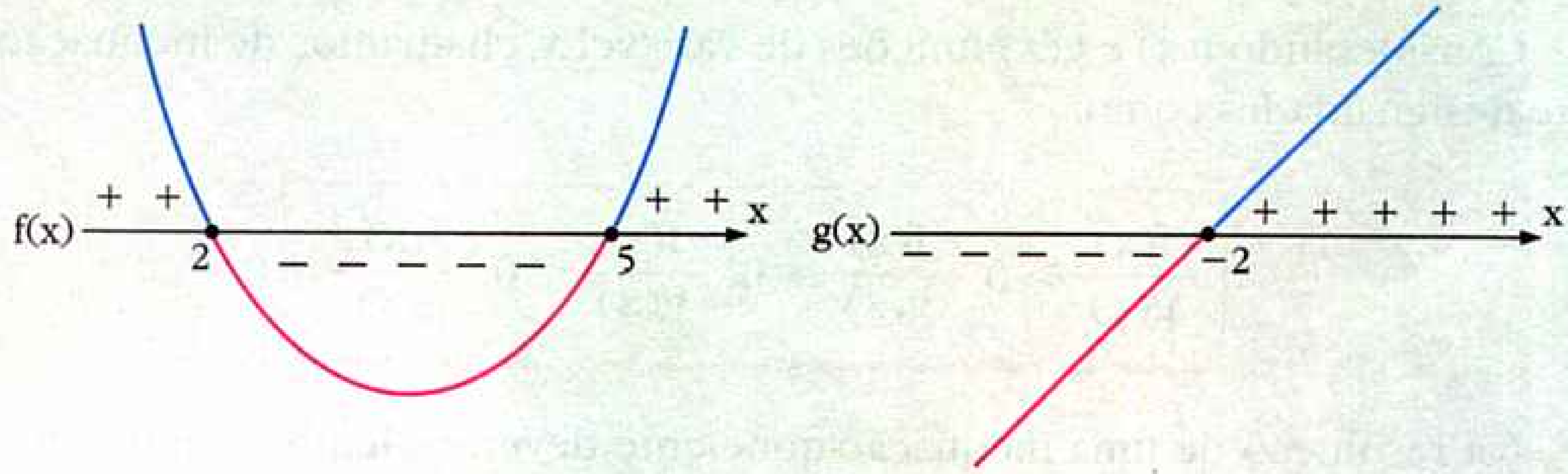
$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{9}}{2} \quad \begin{cases} x' = \dfrac{7 + 3}{2} = 5 \\ x'' = \dfrac{7 - 3}{2} = 2 \end{cases}$$

$$6x + 12 = 0$$

$$x = -\frac{12}{6}$$

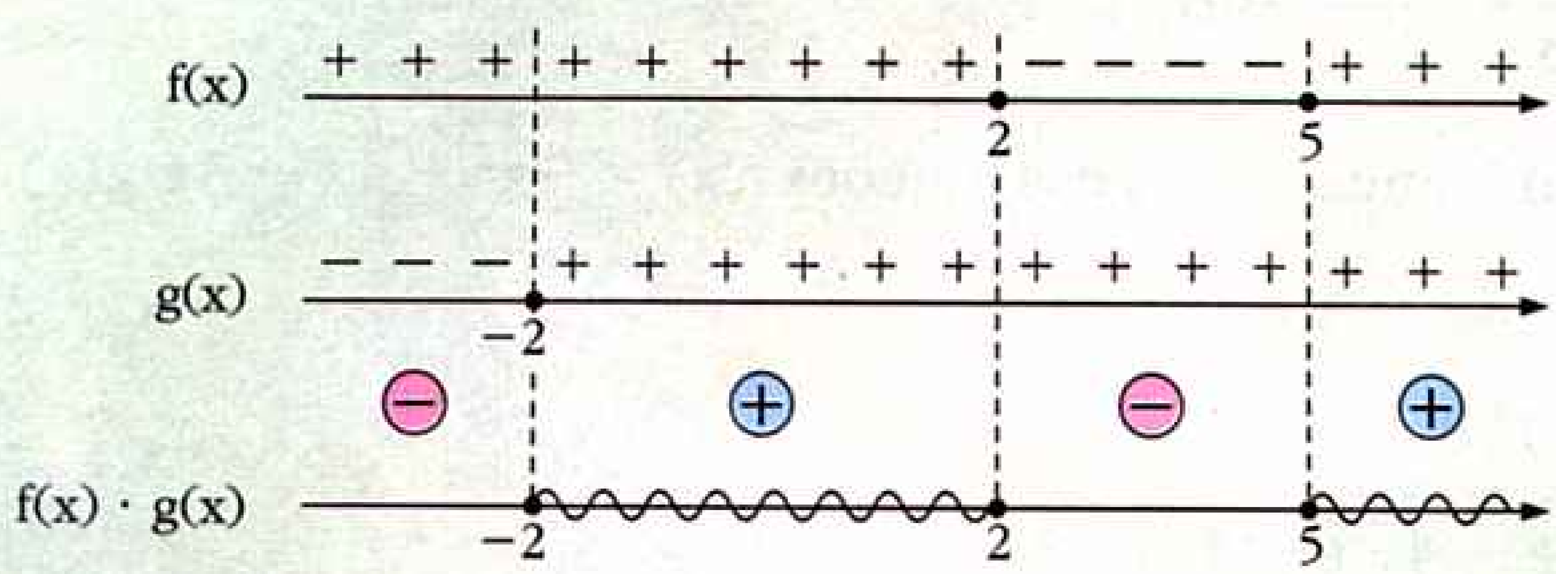
$$x = -2$$

Estudando os sinais das funções:



Queremos que $f(x) \cdot g(x) \geqslant 0$.

Estudando os sinais do produto das funções:



Identificando os valores de *x* que satisfazem a inequação, temos:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x \leqslant 2 \text{ ou } x \geqslant 5\}$

Exercícios

Propostos

268 Resolva as inequações-produto:

a) $(-2x^2 + 3x + 2) \cdot (x - 4) \geqslant 0$

b) $(x^2 + 4x - 5) \cdot (2x - 6) \geqslant 0$

c) $(x^2 - x - 2) \cdot (-x^2 + 2x + 3) \leqslant 0$

269 Para quais valores reais de *x* tem-se:

a) $(x^2 - 3x - 4) \cdot (x^2 - 2x + 1) > 0$

b) $(x^2 - x - 1) \cdot (x^2 - x) < 0$

c) $(x^2 - 7x + 10) \cdot (x^2 - 3x) \leqslant 0$

270 (FAAP-SP) Resolva a inequação:
$(x^2 - 5x + 6) \cdot (-x^2 + 5x - 4) > 0$.

271 (FGV-SP) Resolva a inequação:
$(x^2 - 5x) \cdot (x^2 - 8x + 12) < 0$.

272 (ITA-SP) Resolva a inequação:
$(x - 4)^2 > 0$.

273 Resolva a inequação:
$(x^2 - 9x + 14) \cdot (x^2 - 7x + 10) \leqslant 0$.

10. Inequação-quociente

Considerando f(x) e g(x) funções de variável x, chamamos de inequação-quociente desigualdades como:

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0, \quad \frac{f(x)}{g(x)} \geqslant 0, \quad \frac{f(x)}{g(x)} < 0, \quad \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant 0.$$

Na resolução de uma inequação-quociente devemos lembrar que o denominador deve ser diferente de zero e a regra de sinais é a mesma, tanto para multiplicação como para divisão, no conjunto dos reais.

Vamos entender melhor esse processo através da seguinte inequação-quociente:

$$\frac{-x^2 + 4x - 3}{-x + 2} \geqslant 0$$

Determinando o zero das funções $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ e $g(x) = -x + 2$:

$-x^2 + 4x - 3 = 0$

$a = -1, b = 4$ e $c = -3$

$\Delta = 4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-3) = 4$

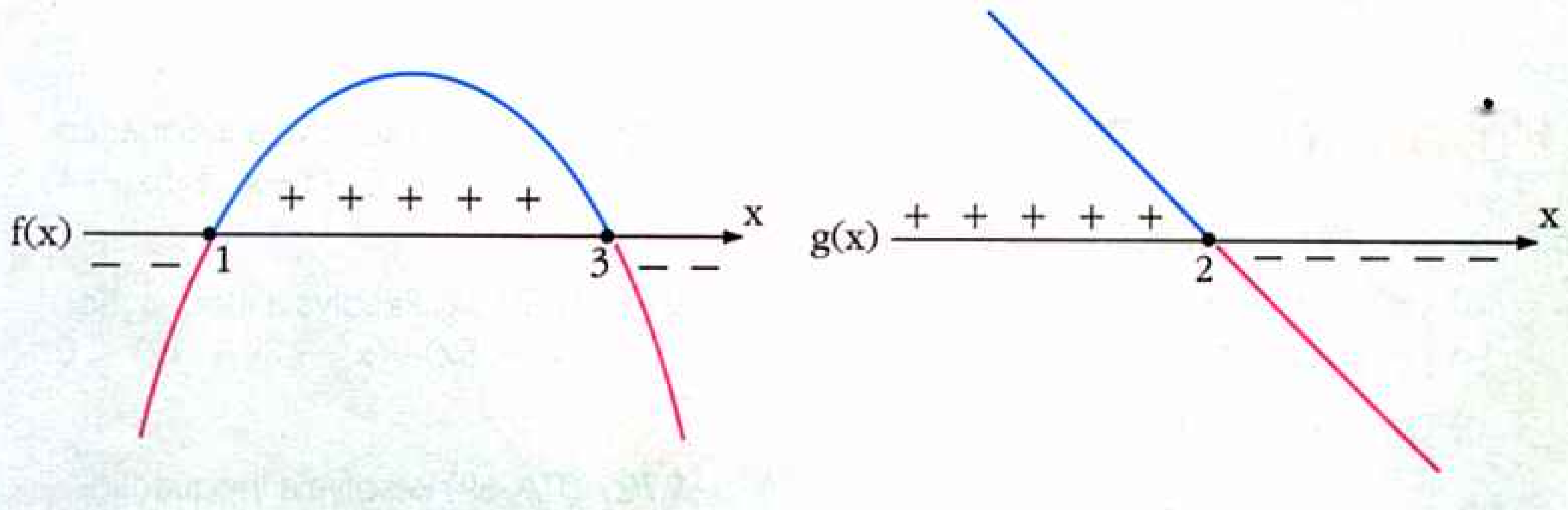
$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot (-1)} \quad \begin{cases} x' = \dfrac{-4 + 2}{-2} = 1 \\[2mm] x'' = \dfrac{-4 - 2}{-2} = 3 \end{cases}$$

$-x + 2 = 0$

$-x = -2$

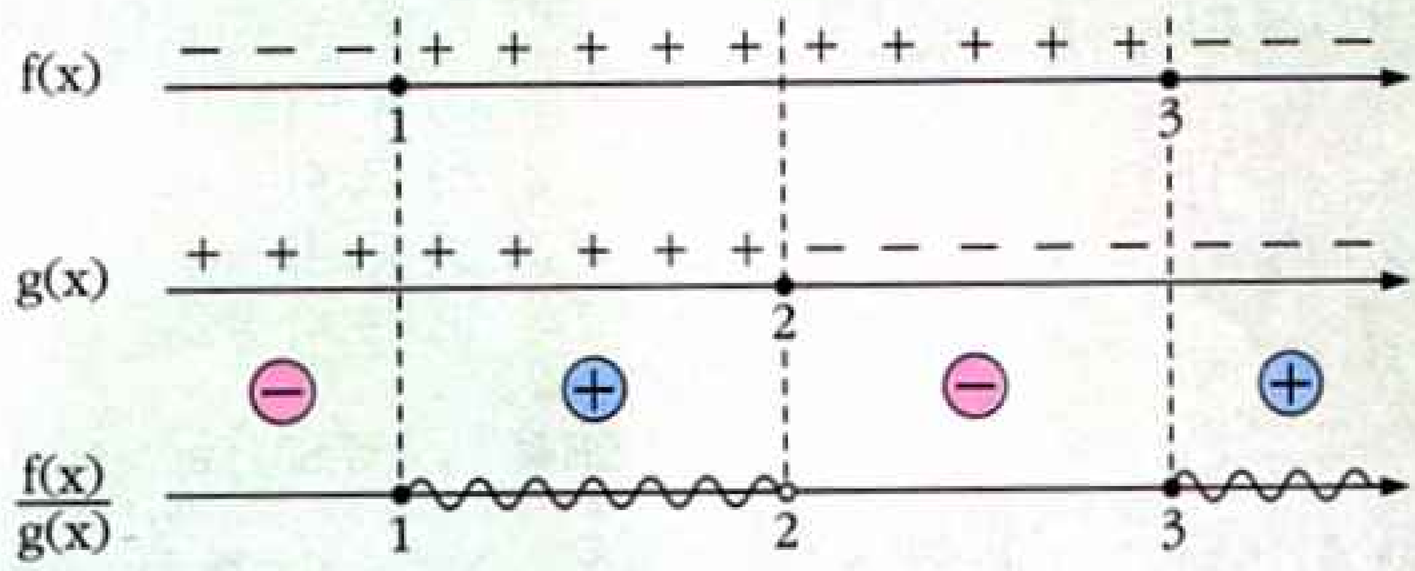
$x = 2$

Estudando o sinal das funções:



Queremos que $\dfrac{f(x)}{g(x)} \geqslant 0$.

Estudando os sinais do quociente das funções:



Identificando os valores de x que satisfazem a inequação, temos:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 2 \text{ ou } x \geq 3\}$

Exercícios

Propostos

274 Resolva as inequações-quocientes:

a) $\dfrac{-x^2 + 2x - 1}{x - 4} > 0$

b) $\dfrac{x^2 - 4x - 5}{-x + 3} < 0$

c) $\dfrac{x^2 - 7x + 6}{x^2 - 2x - 3} \geq 0$

275 Determine o conjunto verdade das inequações-quociente:

a) $\dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4x + 3} \leq 0$

b) $\dfrac{(-x^2 + 10x - 25) \cdot (x - 3)}{(-x + 4)} > 0$

c) $\dfrac{(x^2 + 5x - 6) \cdot (x^2 - 4)}{-x - 3} < 0$

276 (MACK-SP) Resolva, em $\mathbb{R}$, a inequação $x + \dfrac{1}{x} \leq -2$.

277 (FGV-SP) Resolva a inequação: $\dfrac{x(x + 2)}{x^2 - 1} > 0$.

278 O conjunto das soluções, no conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais da inequação $\dfrac{x}{x + 1} > x$ é:

a) $S = \varnothing$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\}$

e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$

279 (UFSM-RS) Os valores de $x \in \mathbb{R}$, para os quais a fração $\dfrac{4x - 5}{x^2 - 8x + 16}$ é sempre negativa, são aqueles que satisfazem a expressão:

a) $x \neq 4$

b) $x > 4$

c) $-4 \leq x \leq 4$

d) $x > 1{,}25$

e) $x < 1{,}25$

280 (FGV-SP) O conjunto solução da inequação $\dfrac{x - x^2}{x^2 + 2x - 3} \geq 0$ é:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } x \geq 0 \text{ e } x > 1\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } x > 1\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 1\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq 0\}$

e) $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq 0 \text{ ou } x \geq 1\}$

281 Determine o conjunto solução da inequação $\frac{(x^2 - 2x + 1)(x^2 + 1)}{1 - x} \geqslant 0$.

a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 1\}$

b) $S = \varnothing$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 1\}$

e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$

282 Se $A = \left\{x \in \mathbb{R} \text{ e } -x < \frac{1 - x}{1 + x}\right\}$, então A é:

a) $]-1, +\infty[$

b) $]1, +\infty[$

c) $]-\infty, 3]$

d) $[-1, 1]$

e) $]-1, 1[$

283 (Fatec-SP) O conjunto solução da inequação $\frac{x - 1}{x^2 - 4x + 3} \geqslant 1$, no universo $\mathbb{R}$, é:

a) $]-\infty, 3] \cup [4, +\infty[$

b) $\mathbb{R} - \{3, 1\}$

c) $[3, 4]$

d) $]3, 4]$

e) $]3, 4[$

284 (Mauá-SP) Resolver a inequação $x + 4 < -\frac{2}{x + 1}$.

285 Resolva a inequação $\frac{x \cdot (3x - 9)}{2x^2 - 8} < 0$.

a) $[-2, 0]$

b) $[2, 3]$

c) $]-2, 0[\cup]2, 3[$

d) $[-2, 0] \cup [2, 3]$

e) $\varnothing$

Função polinomial do 2º grau

Ficha-resumo

Definição

f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sendo $f(x) = ax^2 + bx + c$, com *a*, *b* e *c* reais e $a \neq 0$

Zeros da função

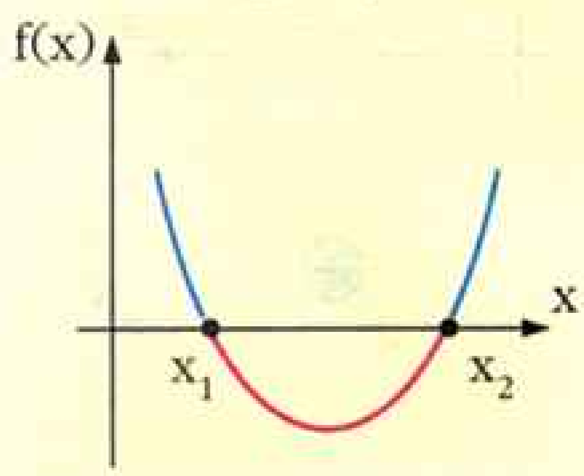
$f(x) = ax^2 + bx + c$ se anula para $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ onde $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta > 0$ (2 raízes reais distintas)	$\Delta = 0$ (2 raízes reais iguais)	$\Delta < 0$ (nenhuma raiz real)

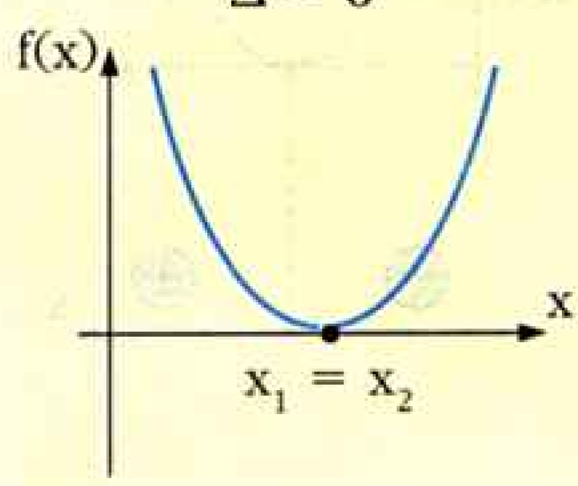
$a > 0$

concavidade voltada para cima

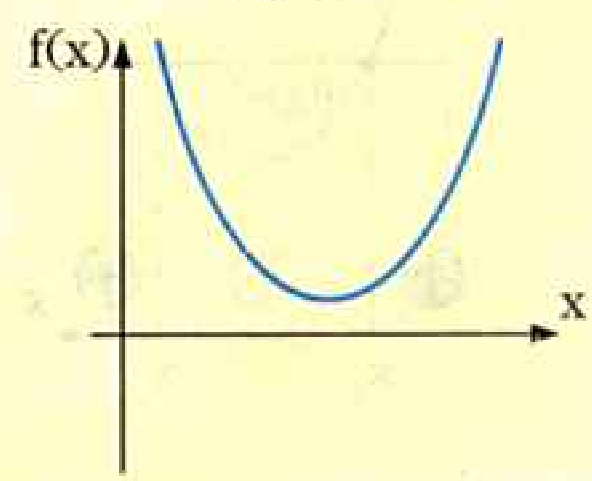
$a > 0$
$\Delta > 0$



$a > 0$
$\Delta = 0$



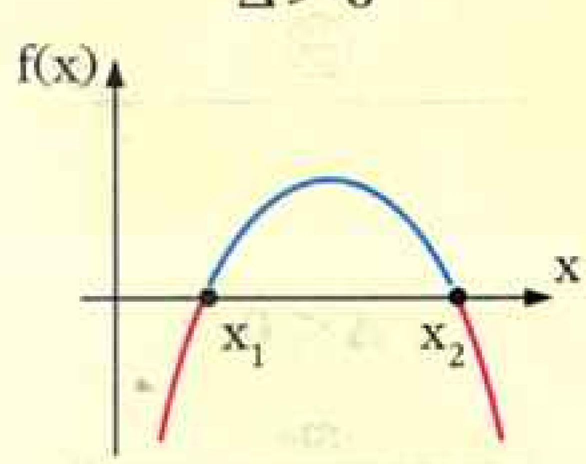
$a > 0$
$\Delta < 0$



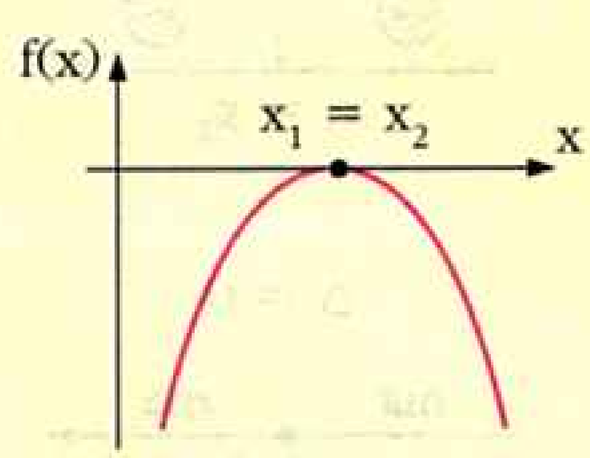
$a < 0$

concavidade voltada para baixo

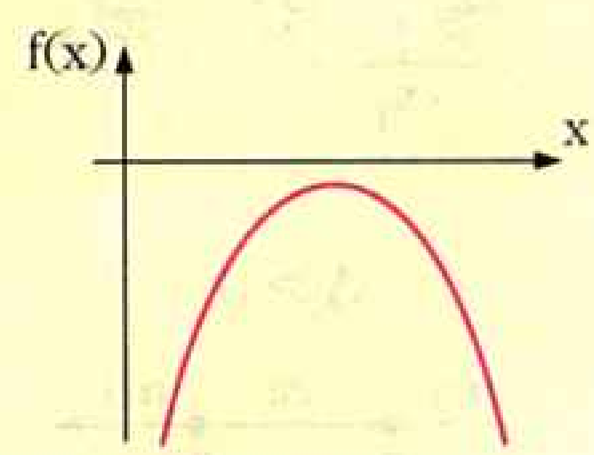
$a < 0$
$\Delta > 0$



$a < 0$
$\Delta = 0$



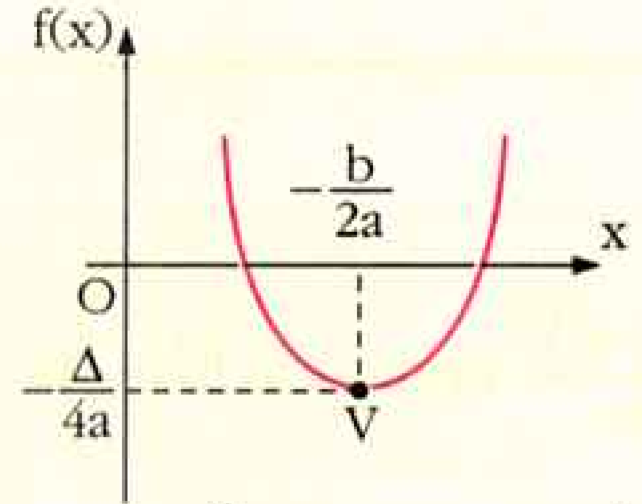
$a < 0$
$\Delta < 0$



Vértice e conjunto imagem da função

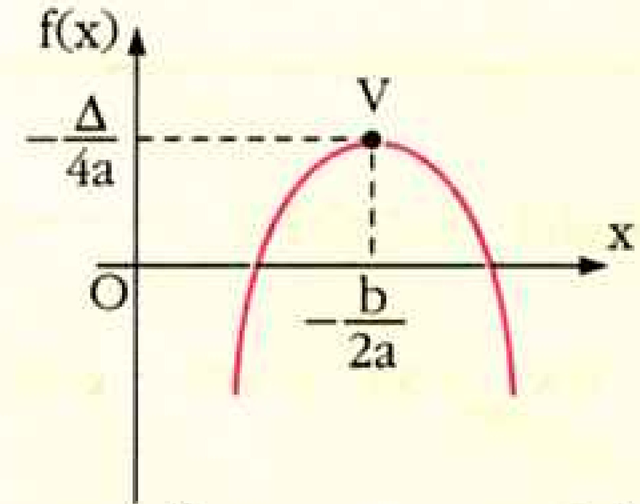
$$x_v = -\frac{b}{2a} \qquad y_v = -\frac{\Delta}{4a}$$

a > 0 (ponto de mínimo)



$$\text{Im}(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -\frac{\Delta}{4a}\right\}$$

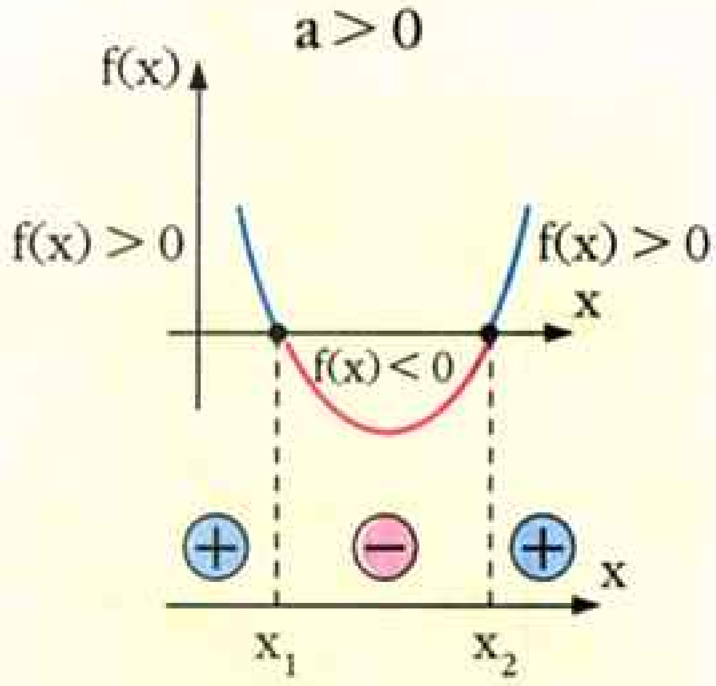
a < 0 (ponto de máximo)



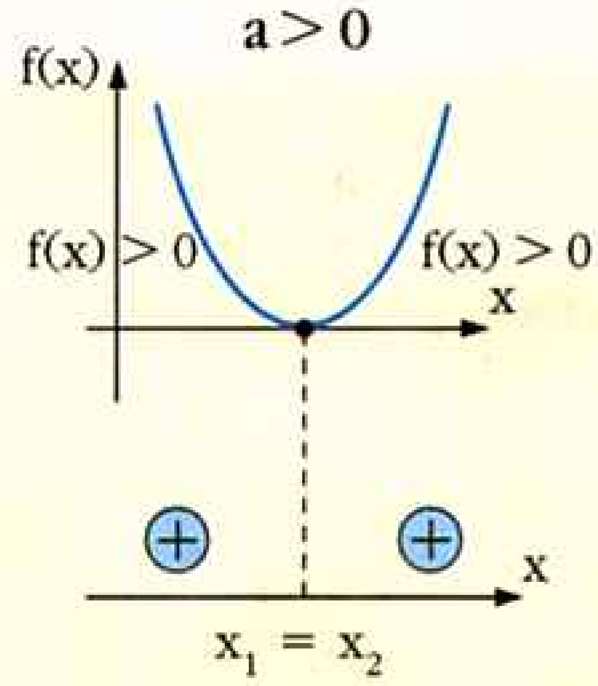
$$\text{Im}(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leq -\frac{\Delta}{4a}\right\}$$

Sinal da função

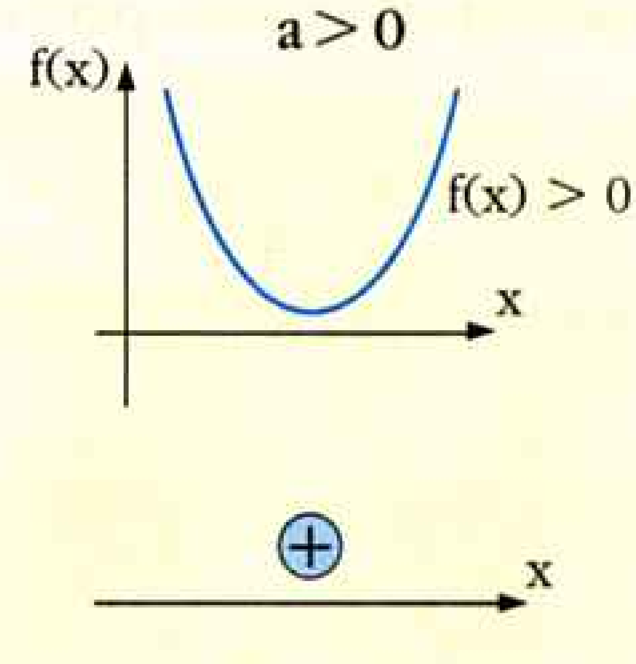
$\Delta > 0$
$a > 0$



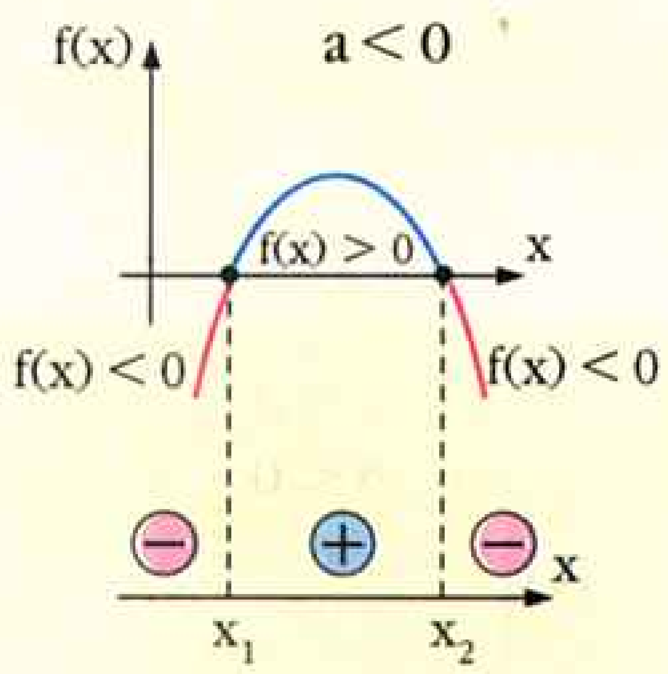
$\Delta = 0$
$a > 0$



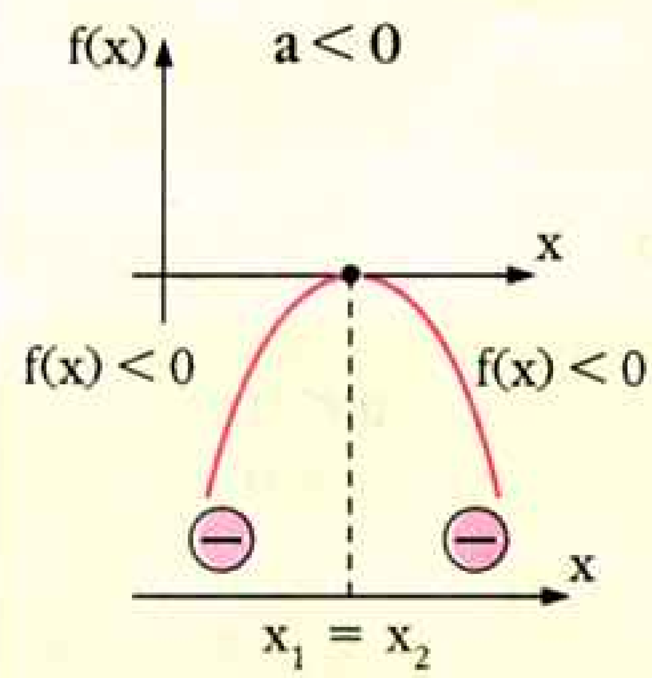
$\Delta < 0$
$a > 0$



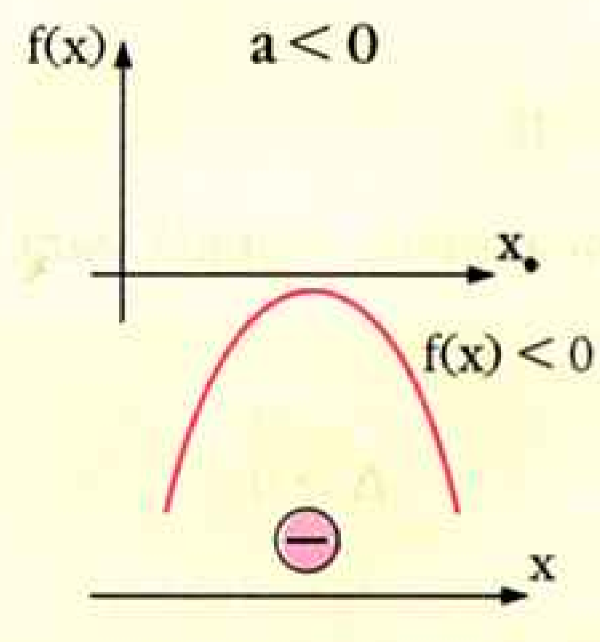
$\Delta > 0$
$a < 0$



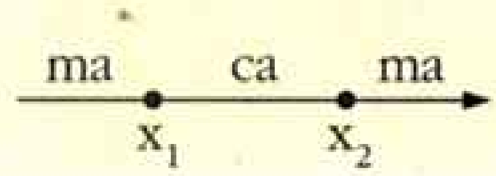
$\Delta = 0$
$a < 0$



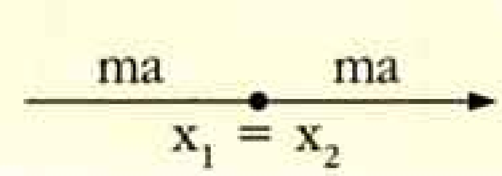
$\Delta < 0$
$a < 0$



$\Delta > 0$



$\Delta = 0$



$\Delta < 0$

Função polinomial do 2º grau

Inequação

Resolução: 1) Obter a inequação equivalente tal que o 2º membro seja zero.
2) Fazer o estudo do sinal da função cuja lei é dada pela expressão que ficou no 1º membro, representando-o graficamente em um eixo.
3) Determinar o conjunto dos valores de x que tornam a inequação uma sentença verdadeira.

Sistema de inequações

Resolução: 1) Fazer a resolução de cada inequação em separado.
2) Representar graficamente as soluções em eixos; um para cada inequação; um eixo sob o outro.
3) Determinar a intersecção dos conjuntos verdade das mesmas.

Inequação-produto

Resolução: 1) Fazer o estudo dos sinais das funções dadas pelos fatores.
2) Determinar para cada x o sinal do produto, aplicando a regra de sinais.
3) Determinar o conjunto dos valores de x que tornam a inequação verdadeira.

Inequação-quociente

Resolução: O procedimento é análogo ao da inequação-produto, lembrando que devemos excluir os valores de x que anulam o denominador.

Exercícios

Complementares

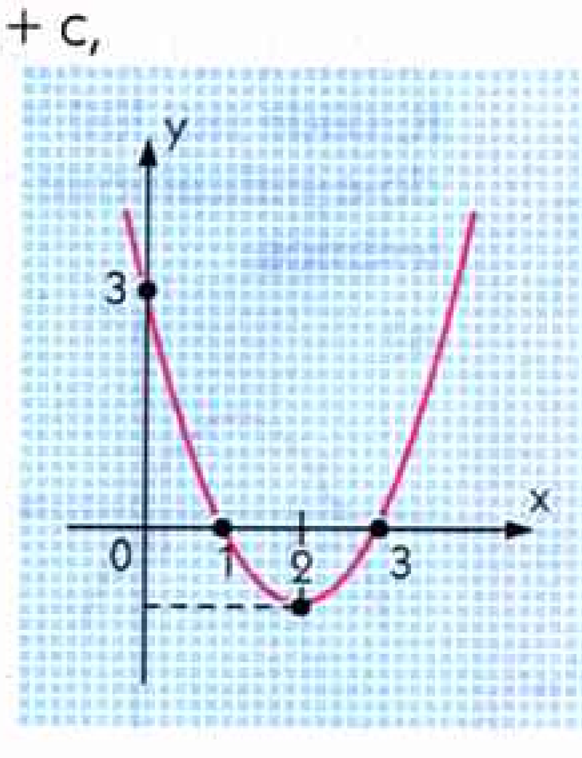
286 Encontre o valores reais para o parâmetro k, de modo que cada uma das seguintes funções seja quadrática:

a) $y = (k^2 - 1)x^2 + 5x - 7$

b) $y = (3k^2 - 3k)x^2$

287 Determine o valor de a e de b na função quadrática $y = 2x^2 - ax + b$, sendo suas raízes iguais a -2 e 2.

288 Dado o gráfico da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, encontre os valores de a, b e c.



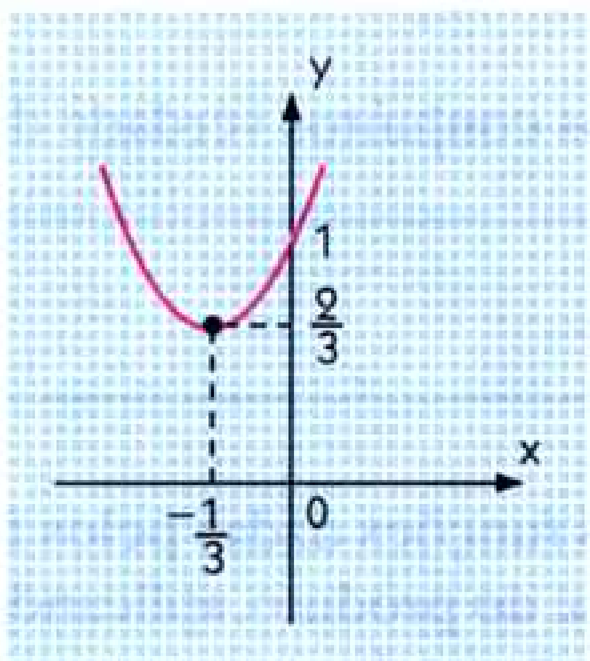
289 Construa o esboço do gráfico cartesiano para cada função quadrática:

a) $y = x^2 + 2x - 3$
b) $y = -x^2 + 10x - 25$
c) $y = x^2 - 3x$
d) $y = -x^2$

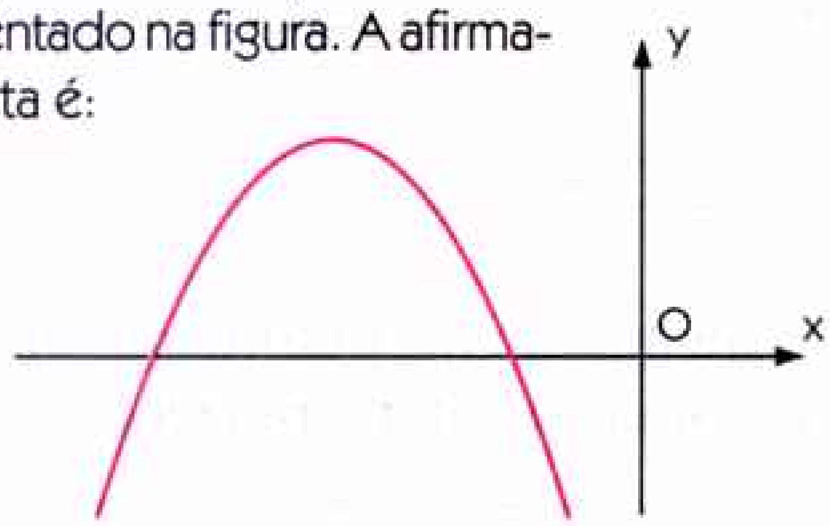
290 Determine o domínio e o conjunto imagem das funções:

a) $f(x) = x^2 - 9x + 20$
b) $f(x) = -x^2 - 4x - 4$

291 (UFBA) O gráfico abaixo é uma parábola cuja equação é da forma $y = ax^2 + bx + c$. Calcule $2a + 3b + 8c$.



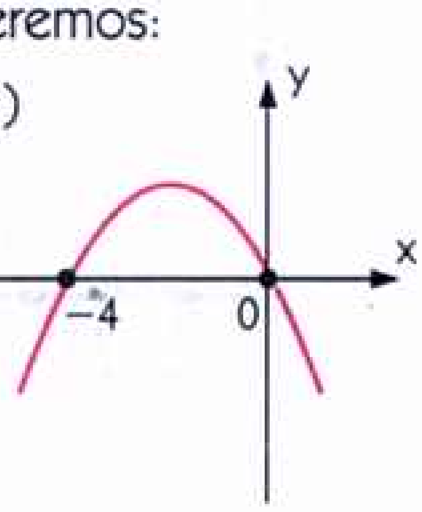
292 (UFMG) O trinômio $y = ax^2 + bx + c$ está representado na figura. A afirmativa certa é:



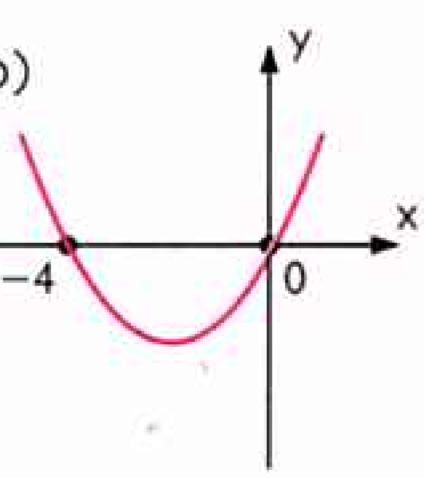
a) $a > 0, b > 0, c < 0$
b) $a < 0, b < 0, c < 0$
c) $a < 0, b > 0, c < 0$
d) $a < 0, b > 0, c > 0$
e) $a < 0, b < 0, c > 0$

293 (UCSal-BA) Considere a função *f*, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, dada por $f(x) = 4x - x^2$. Representando-a graficamente no plano cartesiano, obteremos:

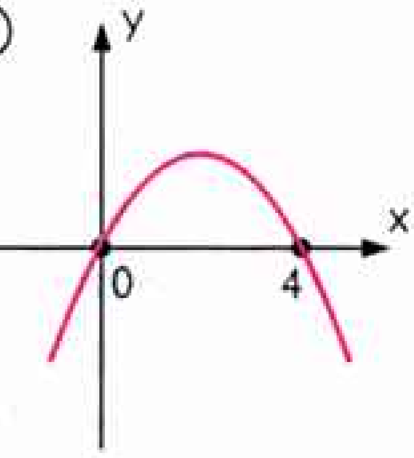
a)



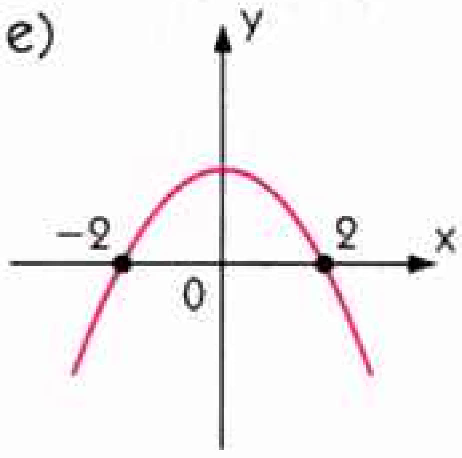
b)



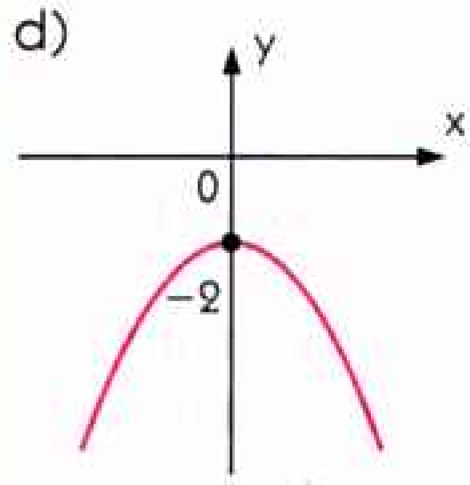
c)



e)



d)

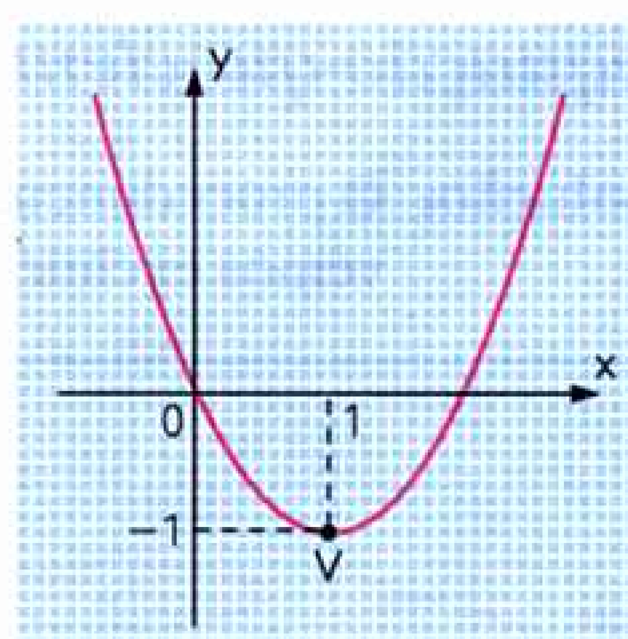


294 (ACAFE-SC) A função $f(x) = x^2 - 2x + 1$ tem mínimo no ponto em que *x* vale:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

295 (Cesgranrio-RJ) O gráfico representa o trinômio do 2º grau $x^2 + bx + c$. Podemos concluir que:

a) $b = -1$ e $c = 0$
b) $b = 0$ e $c = -1$
c) $b = 1$ e $c = 1$
d) $b = -2$ e $c = 0$
e) $b = 4$ e $c = 0$



296 (FGV-SP) Uma parede de tijolos será usada como um dos lados de um curral retangular. Para os outros lados iremos usar 400 metros de tela de arame, de modo a produzir uma área máxima. Então o quociente de um lado pelo outro é:

a) 1 b) 0,5 c) 2,5 d) 3 e) 1,5

297 (UFBA) $\{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 6\}$ é conjunto imagem da função $f(x) = -x^2 - 2x + p$, se *p* for igual a:

a) −6 b) −1 c) 1 d) 4 e) 5

Função polinomial do 2º grau

298 (PUC-SP) A parábola de equação $y = 4x^2 + 4x + 1$ tem vértice no ponto:

a) $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$
b) (0, 1)
c) $\left(\frac{1}{2}, 4\right)$
d) (1, −2)
e) $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$

299 (PUC-MG) O valor máximo da função $f(x) = -x^2 + 2x + 2$ tem ordenada:

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

300 (PUC-SP) Um terreno retangular de área 875 m² tem o comprimento excedendo em 10 m na largura. Indique a equação que representa o problema:

a) $x^2 + 10x + 875 = 0$
b) $x^2 + 875x - 10 = 0$
c) $x^2 - 10x + 875 = 0$
d) $x^2 + 10x - 875 = 0$
e) $x^2 - 875x + 10 = 0$

301 (Unesp-SP) O conjunto solução da inequação $(x - 2)^2 < 2x - 1$, considerando como universo o conjunto $\mathbb{R}$, está definido por:

a) $1 < x < 5$
b) $3 < x < 5$
c) $2 < x < 4$
d) $1 < x < 4$
e) $2 < x < 5$

302 (Cesgranrio- RJ) A menor solução inteira de $x^2 - 2x - 35 < 0$ é:

a) −5
b) −4
c) −3
d) −2
e) −1

303 (Unesp-SP) Os valores de $x \in \mathbb{R}$ que satisfazem o sistema $\begin{cases} x^2 - 4 < 0 \\ x^2 - 3x < 0 \end{cases}$ são tais que:

a) $1 < x < 3$
b) $-3 < x < -2x$
c) $0 < x < 2$
d) $2 < x < 3$
e) $-2 < x < 0$

304 (FGV-SP) Dado o sistema de inequação: $\begin{cases} -2x^2 + 3x + 2 \leq 0 \\ x^2 + x - 2 \leq 0 \end{cases}$, o intervalo que satisfaz a estas inequações tem amplitude:

a) $\frac{3}{2}$
b) $\frac{1}{2}$
c) infinito
d) 1
e) n.d.a.

305 (FGV-SP) Resolvendo-se $(x^2 - 3)(x^2 - 9) \leq 0$, obtemos:

a) $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$ ou $x = \pm 3$
b) $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$
c) $x \leq -\sqrt{3}$ ou $x \geq \sqrt{3}$
d) $-3 \leq x \leq -\sqrt{3}$ ou $\sqrt{3} \leq x \leq 3$
e) $x \leq -3$ ou $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$ ou $x \geq 3$

306 (Cesgranrio-RJ) Os valores de *x* tais que $\frac{4x - 1}{x^2 - 2x + 1} \leq 0$ são aqueles que satisfazem:

a) $x > 4$
b) $x \geq 4$
c) $x \leq \frac{1}{4}$
d) $x \neq 1$
e) $x \geq \frac{1}{4}$

307 (FGV-SP) Os valores de *m*, para que a equação $x^2 - 3xm + m^2 + 2x - 9m + 1 = 0$ tenha raízes reais e iguais, são:

a) $m_1 = 24$ e $m_2 = -5$
b) $m_1 = 0$ e $m_2 = 24$
c) $m_1 = 5$ e $m_2 = 0$
d) $m_1 = m_2 = \frac{24}{5}$
e) $m_1 = 0$ e $m_2 = -\frac{24}{5}$

308 (Vunesp) O gráfico da função quadrática definida por $y = x^2 - mx + (m - 1)$, onde $m \in \mathbb{R}$, tem um único ponto em comum com o eixo das abscissas. Então, o valor de *y* que essa função associa a $x = 2$ é:

a) −2
b) −1
c) 0
d) 1
e) 2

309 (Unicamp-SP) Determine o número *m* de modo que o gráfico da função $y = x^2 + mx + 8 - m$ seja tangente ao eixo dos *x*. Faça o gráfico da solução (ou soluções) que você encontrar para o problema.

310 (FGV-SP) A função *f*, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, dada por $f(x) = ax^2 - 4x + a$ tem um valor máximo e admite duas raízes reais e iguais. Nessas condições, $f(-2)$ é igual a:

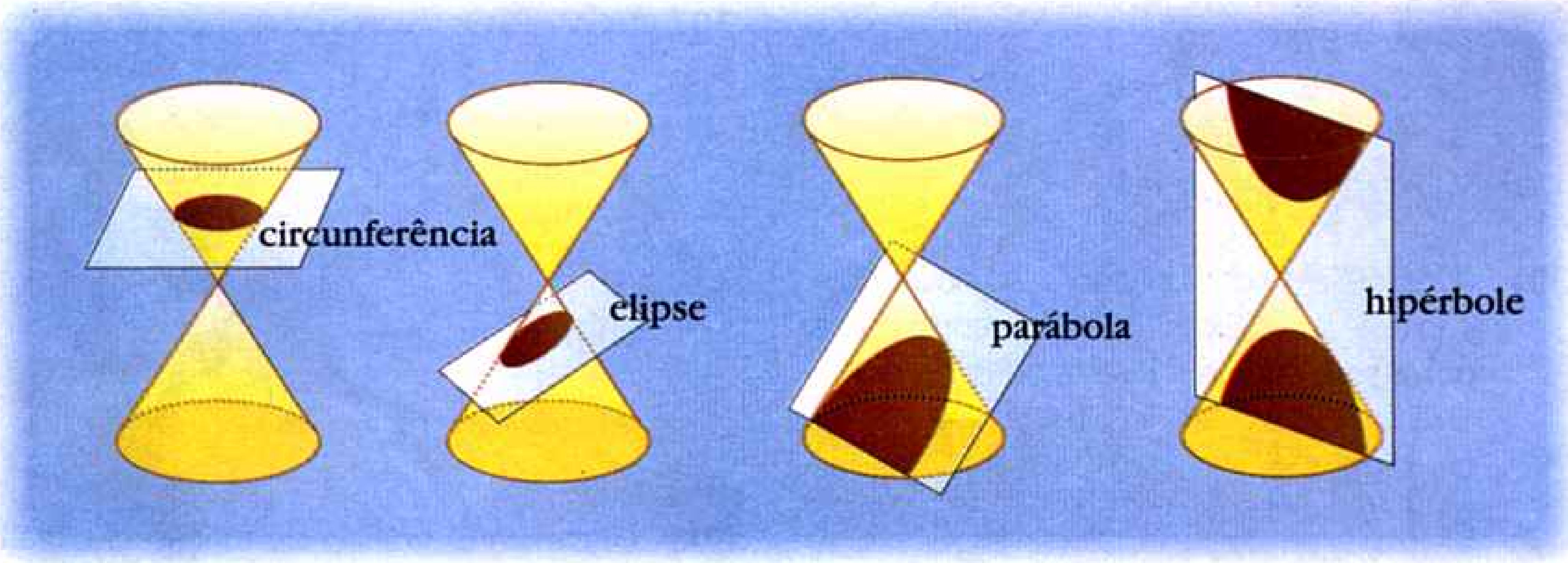
a) 4
b) 2
c) 0
d) $-\frac{1}{2}$
e) −2

Saiba um pouco mais

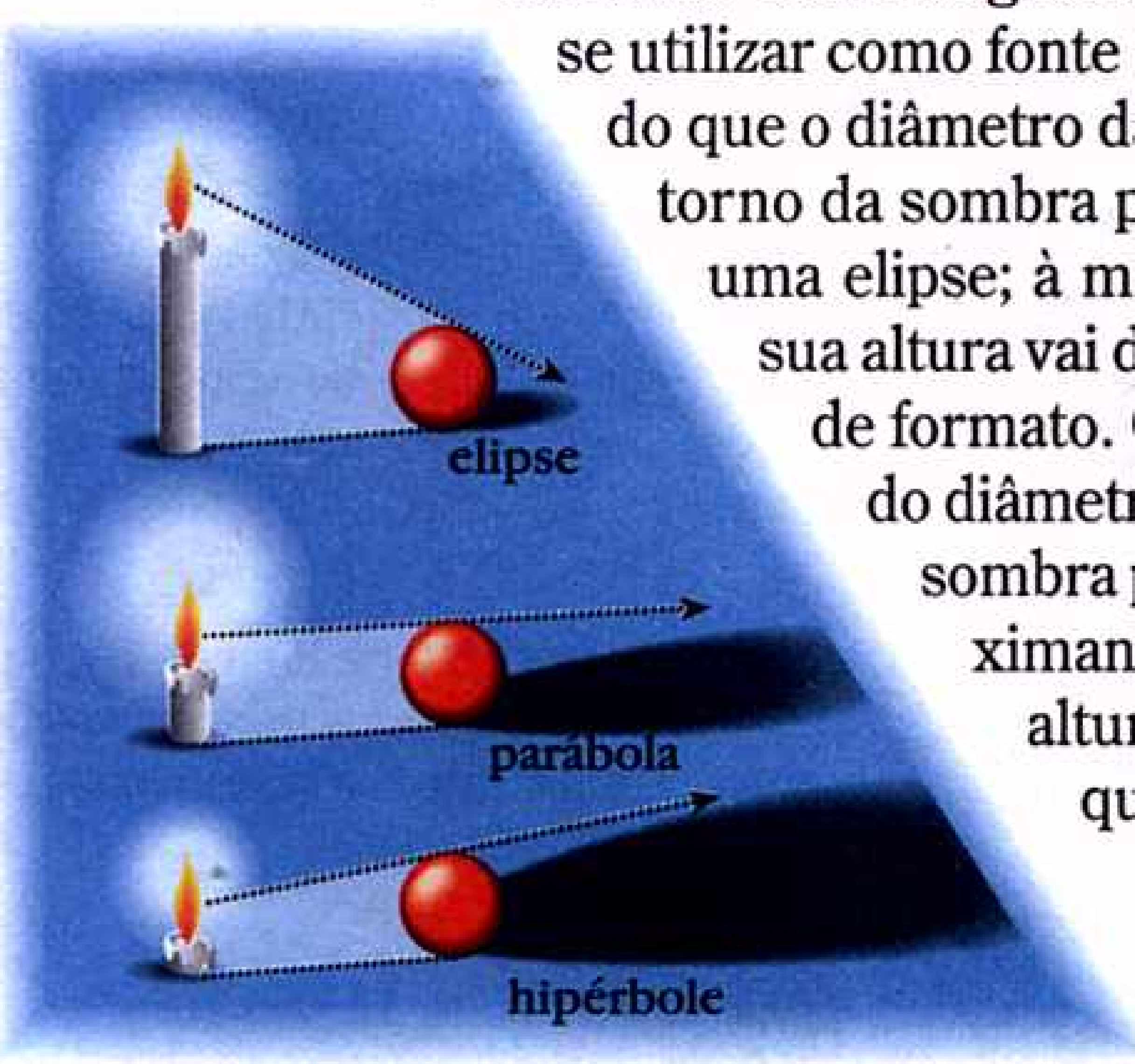
Cônicas

A parábola, a elipse, a hipérbole e a circunferência são ditas secções cônicas, ou simplesmente cônicas, porque podem ser delineadas pela intersecção do plano com o cone circular reto.

O fator que determina a diferença para se obter essas cônicas é a maior ou menor inclinação com que o plano secciona o cone. Essa inclinação se dá em relação ao eixo central do cone.



Um experimento de simples confecção, e que exemplifica a obtenção das cônicas, pode ser conseguido por uma fonte luminosa e uma bola de formato esférico. Como sugestão, num local pouco iluminado, pode-se utilizar como fonte luminosa uma vela com altura maior do que o diâmetro da bola. Num primeiro instante o contorno da sombra projetada pela bola tem o formato de uma elipse; à medida que a vela vai derretendo e a sua altura vai diminuindo, a sombra sofre alteração de formato. Quando a medida da altura da vela e do diâmetro da bola forem iguais, teremos uma sombra parabólica. Essa parábola irá se aproximando de uma hipérbole à medida que a altura da vela for se tornando menor do que o diâmetro da bola.



Com o mesmo instrumental, para se obter uma sombra circular, em que posição deverá ficar a vela?