Função exponencial

Para ser grande, sê inteiro: nada
Teu exagera ou exclui.
Sê todo em cada coisa. Põe quanto és
No mínimo que fazes.
Assim em cada lago a lua toda
Brilha, porque alta vive.

Fernando Pessoa (Ricardo Reis)

1. Tópicos básicos para função exponencial

O estudo da função exponencial requer alguns conceitos sobre potenciação.

Para uma expressão do tipo a^n, denominamos: base, ao número real *a;* expoente, ao número natural *n* maior que 1; potência, ao resultado da operação.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fatores}} \qquad a^n \to \text{expoente},\quad a \to \text{base}$$

Expoente inteiro não-negativo

Por extensão da definição, fazemos:

$$n = 0 \quad \to \quad a^0 = 1$$
$$n = 1 \quad \to \quad a^1 = a$$

Exemplos:

a) $9^0 = 1$

b) $\pi^0 = 1$

c) $-\pi^1 = -\pi$

d) $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$

e) $(-4)^3 = (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) = -64$

f) $0^9 = 0$

g) $-4^3 = -4 \cdot 4 \cdot 4 = -64$

h) $-5^2 = -5 \cdot 5 = -25$

i) $0^0 =$ indeterminado

Exercícios

Propostos

311 Determine:

a) 12^0 b) 1^0 c) $(\sqrt{12})^0$ d) $(3\pi)^1$ e) $(\sqrt{5})^1$ f) $(-7{,}2)^1$

312 Calcule:

a) 0^1 b) 2^5 c) $(-2)^5$ d) 0^5 e) $(\sqrt{3})^4$ f) $(\sqrt{4})^3$

313 Calcule:

a) $(-3)^4$ b) $(-1)^4$ c) $(-1)^0$ d) -3^4 e) -1^4 f) -1^0

Expoente inteiro negativo

Sendo a base *a* um número real não-nulo a ∈ $\mathbb{R}^*$ e o expoente *n* um número natural, temos:

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n},\ a \in \mathbb{R}^* \text{ e } n \in \mathbb{N}}$$

Exemplos:

a) $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$

b) $(-3)^{-3} = \frac{1}{(-3)^3} = \frac{1}{-27} = -\frac{1}{27}$

c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^1} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$

d) $0{,}2^{-1} = \left(\frac{2}{10}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{2}{10}} = \frac{10}{2} = 5$

e) $-2^{-3} = -\frac{1}{2^3} = -\frac{1}{8}$

f) $0^{-1} = \frac{1}{0} = \nexists$

► Zero elevado a expoente negativo não existe.

Exercícios

Propostos

314 Determine:

a) 3^{-2}

b) 5^{-3}

c) $(-4)^{-2}$

d) $(-2)^{-4}$

e) π^{-3}

f) $(-4)^{-2}$

315 Calcule:

a) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}$

b) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}$

c) $0{,}3^{-1}$

d) $0{,}5^{-1}$

e) $(-\pi)^{-3}$

f) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$

Propriedades das potências, cujo expoente é um número inteiro

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$a^m : a^n = a^{m-n}$, sendo $a \neq 0$

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, sendo $b \neq 0$

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Exemplos:

a) $4^3 \cdot 4^{-2} = 4^{3+(-2)} = 4^1$

b) $(3 \cdot 5)^2 = 3^2 \cdot 5^2$

c) $(2^3)^{-2} = 2^{3 \cdot (-2)} = 2^{-6}$

d) $5^6 : 5^3 = 5^{6-3} = 5^3$

e) $\left(\dfrac{7}{4}\right)^3 = \dfrac{7^3}{4^3}$

f) $\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)^2 = \dfrac{(3\pi)^2}{2^2} = \dfrac{3^2 \cdot \pi^2}{2^2}$

Exercícios

Propostos

316 Utilize as propriedades adequadas a cada caso:

a) $3^2 \cdot 3^3$ $= 3$

b) $5^1 \cdot 5^{-3}$ $= 5^{1+(-3)} = 5^{-2}$

c) $2^{-2} \cdot 2^{-3}$

d) $(2 \cdot 7)^2$

e) $\left(\dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{3}\right)^2$

f) $(11^6 : 11^3)^2$ $(11^3)^2$ 11^6

317 Simplifique utilizando as propriedades:

a) $(5^2)^2$

b) $(3^3)^{-2}$

c) $(0{,}2^{-2})^{-4}$

d) $4^6 : 4^2$

e) $3^2 : 3^{-3}$

f) $7^{-2} : (7^{-3})^2$

318 Calcule, utilizando as propriedades:

a) $0{,}2^{-8} : 0{,}2^{-6}$

b) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^5$

c) $\left(\dfrac{5}{4}\right)^3$

d) $\left(\sqrt[3]{5}\right)^{-3}$

e) $\dfrac{10^{-2} \cdot 10^{-3}}{10^{-2}}$

f) $\left(\dfrac{\sqrt{\pi}}{2^0 \cdot \dfrac{1}{2}}\right)^{-2}$

Expoente racional

Considerando $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$, temos que:

- Não existe raiz em $\mathbb{R}$ quando $a \in \mathbb{R}_-^*$ e *n* é par.
- A raiz é um número negativo quando $a \in \mathbb{R}_-^*$ e *n* é ímpar.

A expressão $a^{\frac{m}{n}}$ é uma potência cuja base *a* é um número real positivo, $(a \in \mathbb{R}_+^*)$ e o expoente $\dfrac{m}{n}$ é um número racional, sendo *m* e *n* números inteiros e positivos.

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = a^{-\frac{m}{n}}$$

Exemplos:

a) $64^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{64^2} = \sqrt[3]{(4^3)^2} = 4^2 = 16$

b) $729^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{729^2}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{(9^3)^2}} = \dfrac{1}{9^2} = \dfrac{1}{81}$

c) $243^{0,4} = 243^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{243^2} = \sqrt[5]{(3^5)^2} = 3^2 = 9$

Exercícios

Propostos

319 Determine:

a) $81^{\frac{1}{2}}$

b) $27^{\frac{2}{3}}$

c) $1\,024^{\frac{2}{5}}$

d) $125^{-\frac{1}{3}}$

e) $32^{-\frac{2}{5}}$

f) $(16^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$

320 Calcule:

a) $243^{-\frac{2}{5}}$

b) $243^{0,6}$

c) $3\,125^{0,2}$

d) $1\,024^{0,1}$

e) $243^{-0,4}$

f) $(10\,000)^{0,25}$

Propriedades das potências, cujo expoente é um número racional

As mesmas propriedades estudadas em potências com expoente inteiro são válidas para potências com expoente racional.

Exemplos:

a) $125^{\frac{7}{3}} \cdot 125^{-\frac{5}{3}} = 125^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{125^2} = \sqrt[3]{(5^3)^2} = 5^2 = 25$

b) $16^{\frac{1}{4}} : 16^{-\frac{1}{2}} = 16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16^3} = \sqrt[4]{(2^4)^3} = 2^3 = 8$

c) $\left(a^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{2}{3}}\right)^3 = a \cdot b^2$

d) $(343^{\frac{1}{3}})^2 = 343^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{343^2} = \sqrt[3]{(7^3)^2} = 7^2 = 49$

e) $\left(\dfrac{32}{243}\right)^{\frac{3}{5}} = \dfrac{32^{\frac{3}{5}}}{243^{\frac{3}{5}}} = \dfrac{\sqrt[5]{32^3}}{\sqrt[5]{243^3}} = \dfrac{\sqrt[5]{(2^5)^3}}{\sqrt[5]{(3^5)^3}} = \dfrac{2^3}{3^3} = \dfrac{8}{27}$

Exercícios

Propostos

321 Determine:

a) $16^{\frac{1}{8}} \cdot 16^{\frac{3}{8}}$

b) $64^{\frac{5}{3}} \cdot 64^{-\frac{4}{3}}$

c) $(5^4)^{\frac{1}{2}}$

d) $(\pi^{-3})^{\frac{1}{3}}$

e) $(2^5 \cdot 3^4)^{\frac{1}{2}}$

f) $(81 : 3^{-1})^{0,4}$

322 Calcule:

a) $(25^2 \cdot 81)^{\frac{1}{4}}$

b) $8^{\frac{-2}{3}} : 8^{-\frac{4}{3}}$

c) $64^{-\frac{2}{3}} : 64^{\frac{1}{2}}$

d) $\left(\dfrac{216}{343}\right)^{\frac{1}{3}}$

e) $\left[\left(\dfrac{625}{81}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{3}{4}}$

f) $\left[\left(\dfrac{81}{625}\right)^{\frac{3}{4}}\right]^{\frac{1}{3}}$

Potência cujo expoente é um número irracional

A expressão a^{α} é uma potência cuja base *a* é um número real positivo ($a \in \mathbb{R}_+^*$) e o expoente α é um número irracional.

Tomando como exemplo 3^{π} e elaborando uma seqüência de números racionais que permita uma aproximação cada vez mais precisa de π, temos:

$$3; 3{,}1; 3{,}14; 3{,}141; \ldots$$

Da mesma forma, podemos elaborar uma seqüência de potências de base 3, cujos expoentes sejam os termos da seqüência anterior.

$$3^3; 3^{3,1}; 3^{3,14}; 3^{3,141}; \ldots$$

Podemos observar que quanto mais os expoentes se aproximam de π, por intermédio de números racionais, mais as potências de expoentes racionais se aproximam de 3^{π}.

2. Equações exponenciais

Algumas equações apresentam a incógnita como expoente; nesse caso, são denominadas equações exponenciais.

Exemplos:

a) $5^x = 125$

b) $11^{(x-2)} = 1$

c) $3^{x(x+2)} = 27$

d) $5^{2x} - 4 \cdot 5^x + 3 = 0$

A resolução das equações exponenciais requer o conhecimento das propriedades das potências e a utilização de alguns artifícios.

Para facilitar a abordagem didática das equações exponenciais, levaremos em conta três tipos de resolução.

$1^{\underline{o}}$ tipo Inicialmente, vamos resolver as equações exponenciais transformando-as em igualdades de mesma base.

Exemplos:

a) $5^x = 125$

Primeiro devemos igualar as bases, usando a decomposição em fatores primos, após o que podemos desprezá-las e considerarmos a igualdade entre os expoentes.

Logo, $5^x = 5^3 \Rightarrow x = 3$

$V = \{3\}$

b) $3^x = \dfrac{1}{81} \Rightarrow 3^x = \dfrac{1}{3^4} \Rightarrow 3^x = 3^{-4} \Rightarrow x = -4$

$V = \{-4\}$

c) $121^{(x-2)} = 1 \Rightarrow (11^2)^{x-2} = 1$

Igualamos as bases após substituir 1 por 11^0.

$11^{2(x-2)} = 11^0$

$2(x-2) = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$

$V = \{2\}$

Outra resolução:

$121^{(x-2)} = 1$

$121^{(x-2)} = 121^0$

Logo, $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

$V = \{2\}$

d) $49^x = \sqrt[4]{343} \Rightarrow (7^2)^x = \sqrt[4]{7^3}$

Transformamos o radical em potência de expoente fracionário.

$(7^2)^x = 7^{\frac{3}{4}} \Rightarrow 2x = \dfrac{3}{4} \Rightarrow x = \dfrac{3}{8}$

$V = \left\{\dfrac{3}{8}\right\}$

Exercícios

Propostos

323 Determine o conjunto verdade das equações exponenciais:

a) $2^x = 64$ b) $7^x = 343$ c) $8^x = 32$ d) $25^x = 625$ e) $9^x = \frac{1}{3}$ f) $2^x = \frac{1}{32}$

324 Determine o conjunto verdade das equações exponenciais:

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{8}{27}\right)$ c) $5^x = \sqrt{5}$ e) $2^{x+4} = 16$

b) $\left(\frac{9}{25}\right)^{2x} = \left(\frac{3}{5}\right)$ d) $49^x = \sqrt{7}$ f) $5^{2x+1} = \frac{1}{625}$

325 Determine o conjunto verdade das equações exponenciais:

a) $25^{(x+2)} = 1$ b) $0{,}01^{(3x-1)} = 0{,}01^0$ c) $32^{x+3} = \sqrt[3]{2}$ d) $5^{x^2+2x} = 1$

2º tipo A resolução de determinadas equações exponenciais exige, além da mudança de base, a utilização de alguns artifícios.

Exemplos:

a) $5^{x+1} + 5^{x+2} = 30$

Nesse caso, podemos separar cada termo com incógnita em potências de mesma base e, em seguida, faremos a mudança de variável. É bom lembrarmos que:

$a^{m+n} = a^m \cdot a^n$

$5^x \cdot 5^1 + 5^x \cdot 5^2 = 30$

Considerando $5^x = m$:

$m \cdot 5 + m \cdot 25 = 30 \Rightarrow 30 \cdot m = 30 \Rightarrow m = 1$

Substituindo $m = 1$, obtemos o valor de x.

$5^x = m \Rightarrow 5^x = 1 \Rightarrow 5^x = 5^0 \Rightarrow x = 0$

$V = \{0\}$

b) $2^{x-1} + 2^{x+2} = 36$

Lembrando que $a^{m-n} = a^m : a^n$, sendo $a \neq 0$: $\frac{2^x}{2^1} + 2^x \cdot 2^2 = 36$

Considerando $2^x = m$:

$\frac{m}{2} + 4m = 36 \Rightarrow \frac{m + 8m}{2} = \frac{72}{2} \Rightarrow 9m = 72 \Rightarrow m = 8$

Substituindo $m = 8$, obtemos o valor de x.

$2^x = m \Rightarrow 2^x = 8 \Rightarrow 2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3$

$V = \{3\}$

Exercícios

Propostos

326 Determine o conjunto verdade das seguintes equações exponenciais:

a) $3^{x+1} + 3^{x+2} = 12$ c) $2^{x+2} + 2^{x-1} = 18$

b) $2^{x+1} + 2^{x+3} = 20$ d) $5^{x-2} + 5^{x+1} = 126$

327 Determine o conjunto verdade das seguintes equações exponenciais:

a) $7^{x-1} + 7^{x+1} = 50$ c) $5^{x-1} + 5^{x-3} = 26$

b) $2^{x+3} = 2^{x-2} + 62$ d) $2^{x-1} + 5 \cdot 2^{x} = 11$

328 (FGV-SP) Se *x* é a raiz da equação $3^{x-1} + 3^{x} + 3^{x+1} = \frac{13}{27}$, então, determine x^{-1}.

3º tipo **Neste caso fazemos a substituição de variável e resolvemos a equação de 2º grau obtida. Veja os exemplos:**

a) $2^{2x} - 3 \cdot 2^{x} + 2 = 0$

Considerando $2^{x} = m$, temos:

$(2^{x})^{2} - 3 \cdot 2^{x} + 2 = 0 \Rightarrow m^{2} - 3 \cdot m + 2 = 0$

Resolvemos a equação de 2º grau: $m = \frac{3 \pm 1}{2}$ ↗ $m' = 1$ ↘ $m'' = 2$

Determinamos os valores de *x*:

$2^{x} = m \Rightarrow 2^{x} = 1 \Rightarrow 2^{x} = 2^{0} \Rightarrow x = 0$

$2^{x} = m \Rightarrow 2^{x} = 2 \Rightarrow x = 1$

$V = \{0, 1\}$

b) $4^{x} - 9 \cdot 2^{x} + 8 = 0$

Consideramos que $4 = 2^{2}$, logo:

$(2^{x})^{2} - 9 \cdot 2^{x} + 8 = 0$

Mudamos a variável fazendo $2^{x} = m$:

$m^{2} - 9m + 8 = 0$

Resolvemos a equação de 2º grau: $m = \frac{9 \pm 7}{2}$ ↗ $m' = 8$ ↘ $m'' = 1$

Determinamos o valor de *x*:

$2^{x} = m \Rightarrow 2^{x} = 8 \Rightarrow 2^{x} = 2^{3} \Rightarrow x = 3$

$2^{x} = m \Rightarrow 2^{x} = 1 \Rightarrow 2^{x} = 2^{0} \Rightarrow x = 0$

$V = \{0, 3\}$

Exercícios

Resolvido

Resolver a equação $\frac{25^x - 6 \cdot 5^x}{5} = -1$.

$\frac{25^x - 6 \cdot 5^x}{5} = -1 \Rightarrow 25^x - 6 \cdot 5^x = -5 \Rightarrow (5^x)^2 - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$

Considerando: $m = 5^x$, temos:

$m^2 - 6 \cdot m + 5 = 0$, onde: $m = \frac{6 \pm 4}{2}$ $\begin{cases} m' = 5 \\ m'' = 1 \end{cases}$

Logo: $5^x = 5 \Rightarrow x = 1$ ou $5^x = 1 \Rightarrow x = 0$

$V = \{0, 1\}$

Propostos

329 Determine o conjunto verdade das seguintes equações exponenciais:

a) $4^x - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$

b) $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$

c) $25^x - 30 \cdot 5^x = -125$

d) $4^x - 10 \cdot 2^x + 16 = 0$

330 Para que valores de *x* tem-se a igualdade $3^{2x} = 12 \cdot 3^x - 27$?

331 Determine o conjunto verdade das seguintes equações exponenciais:

a) $4^x + 16 = 17 \cdot 2^x$

b) $\frac{2^{2x} - 2 \cdot 2^x}{5} = 1$

332 Determine o conjunto verdade das seguintes equações exponenciais:

a) $4^x - 12 \cdot 2^x = -32$

b) $4^{x-1} + 2^{x-1} = \frac{5}{16}$

333 Determine os valores de *x* de tal forma que:

$\frac{4^x + 4}{2^x} = 5$.

334 (PUC-RS) A soma das raízes da equação $\frac{16^x + 64}{5} = 4^{x+1}$ é:

a) 1

b) 3

c) 8

d) 16

e) 20

3. Função exponencial

Chamamos de função exponencial a toda função do tipo $f(x) = a^x$, definida para todo *x* real com $a > 0$ e $a \neq 1$.

Exemplos:

a) $f(x) = 2^x$

b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

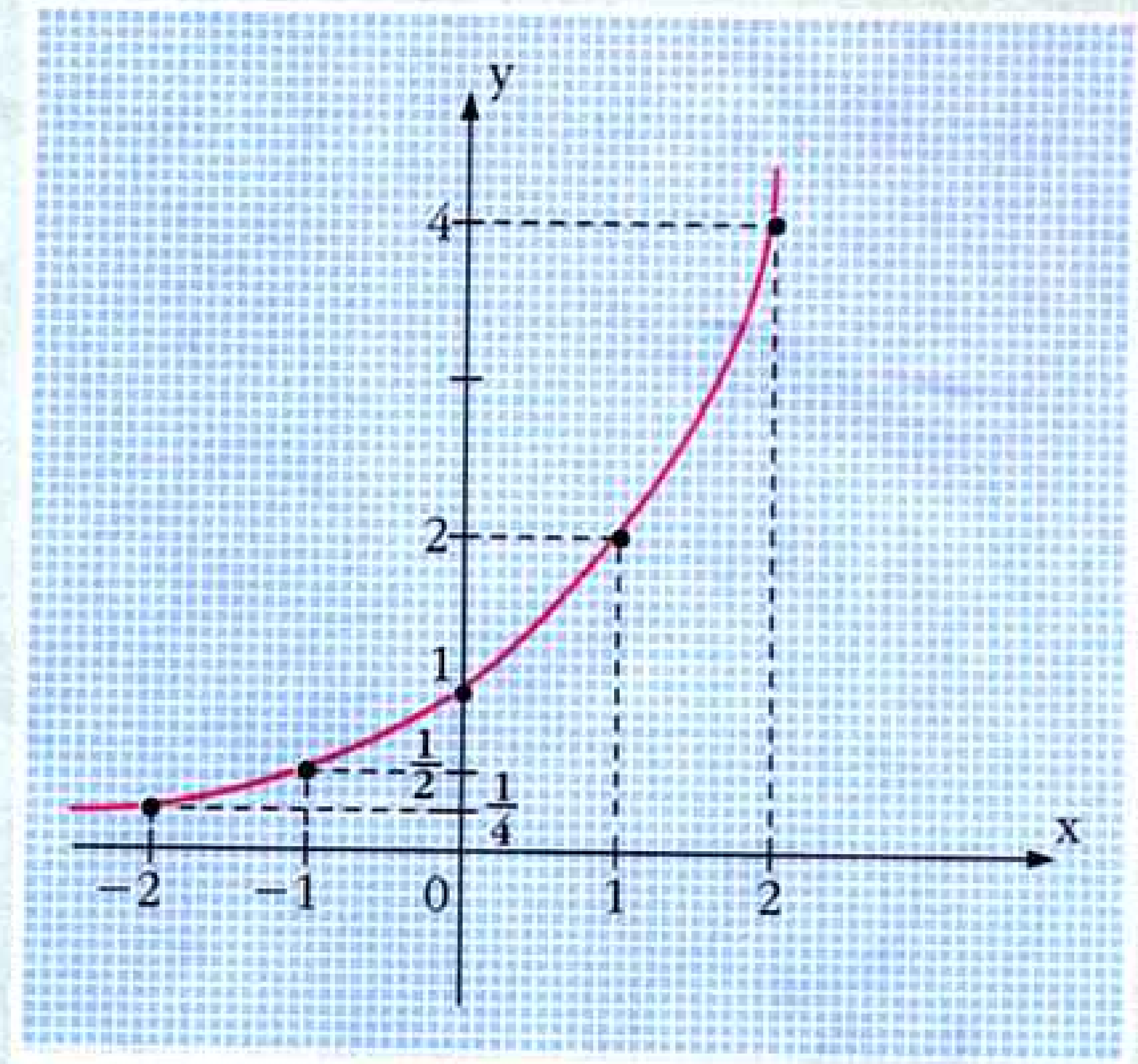
Gráfico da função exponencial

Faremos o estudo gráfico da função exponencial em dois casos:

1º caso A base é um número real maior que 1: $a > 1$

Exemplo: $f(x) = 2^x$ ou $y = 2^x$

x	$y = 2^x$
2	4
1	2
0	1
-1	$\frac{1}{2}$
-2	$\frac{1}{4}$

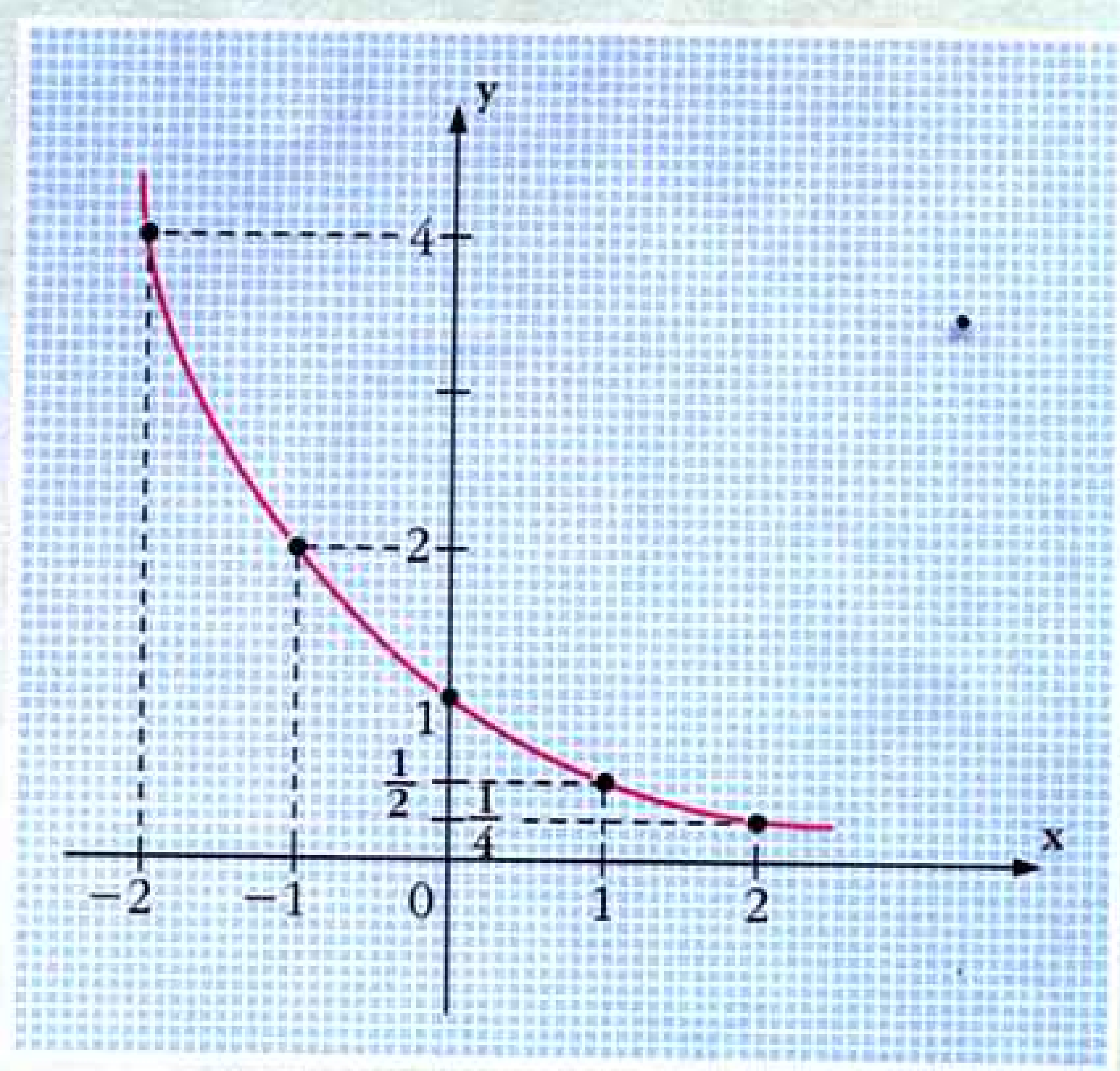


Função crescente

2º caso A base é um número real, maior que 0 e menor que 1: $0 < a < 1$

Exemplo: $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ou $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
2	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{2}$
0	1
-1	2
-4	4



Função decrescente

Características da função exponencial

Dos exemplos estudados, podemos tirar as seguintes conclusões:

- A curva da função $f(x) = a^x$ passa pelo ponto (0, 1).
- O seu domínio é o conjunto dos reais $D = \mathbb{R}$.
- O seu conjunto imagem é $Im = \mathbb{R}_+^*$.
- A função é crescente para a base *a* maior que 1 ($a > 1$).
- A função é decrescente para a base *a* maior que 0 e menor que 1 ($0 < a < 1$).

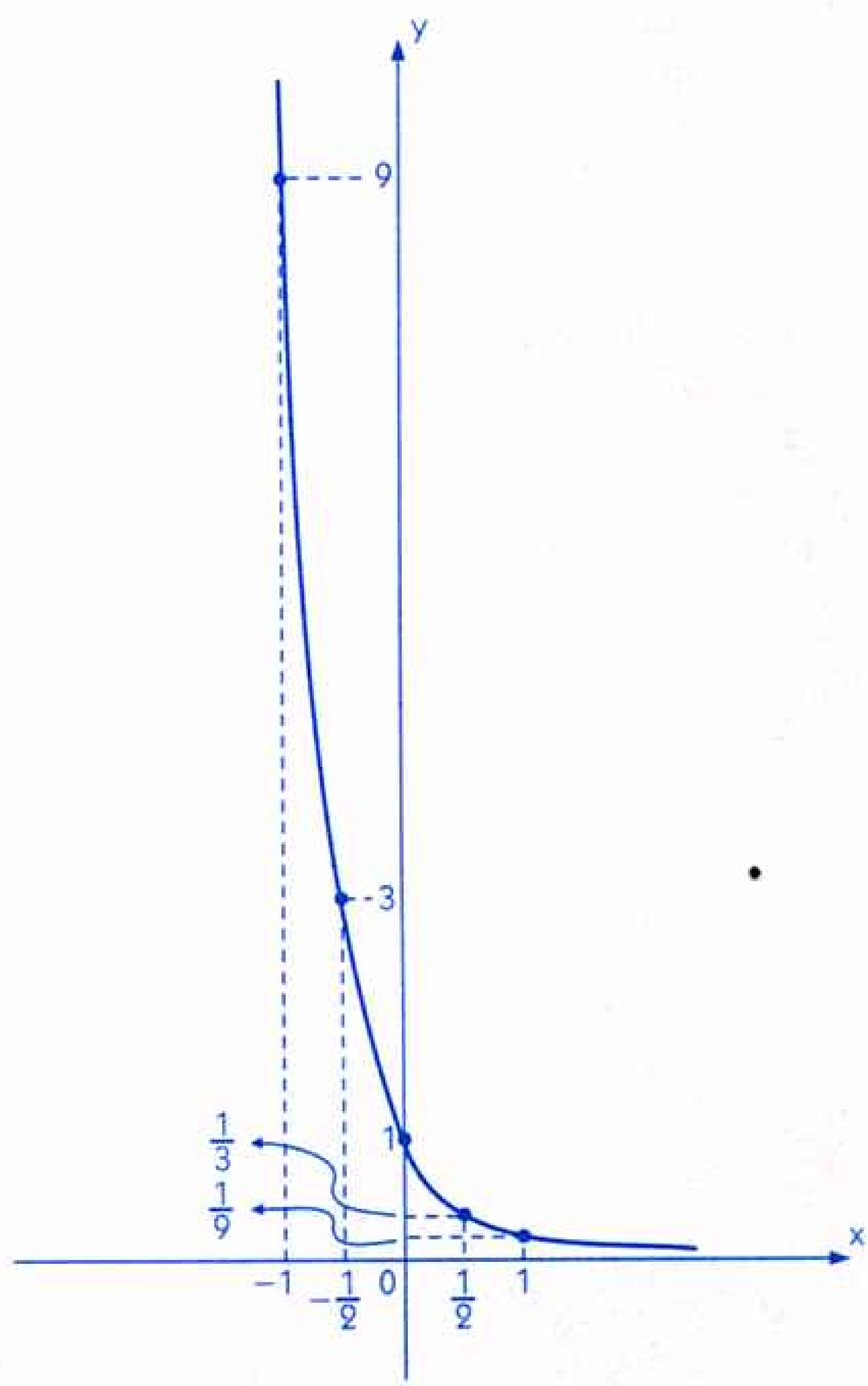
Exercícios

Resolvido

Esboçar o gráfico da função dada por $y = 3^{-2x}$, classificando-a em crescente ou decrescente.

$f(x) = 3^{-2x}$ ou $y = \frac{1}{3^{2x}}$

x	$y = \frac{1}{3^{2x}}$
1	$\frac{1}{9}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
0	1
$-\frac{1}{2}$	3
−1	9



($0 < a < 1$)
Função decrescente

Propostos

335 Esboce o gráfico e identifique como crescente ou decrescente as funções exponenciais:

a) $f(x) = 3^x$

b) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

c) $f(x) = 5^x$

d) $f(x) = 2^{-x}$

336 Determine se as funções exponenciais são crescentes ou decrescentes e esboce os gráficos.

a) $f(x) = 3^{2x}$ b) $f(x) = 2^{2x}$ c) $f(x) = 2^{-2x}$

337 (PUC-MG) Seja a função exponencial $f(x) = a^x$ é correto afirmar que:

a) ela é crescente se $x > 0$

b) ela é crescente se $a > 0$

c) ela é crescente se $a > 1$

d) ela é decrescente se $a \neq 1$

e) ela é decrescente se $0 < x < 1$

338 (PUC-SP) As funções $y = a^x$ e $y = b^x$, com $a > 0$, $b > 0$ e $a \neq b$, têm gráficos que se encontram em:

a) 1 ponto

b) 2 pontos

c) 4 pontos

d) nenhum ponto

e) infinitos pontos

339 (Fuvest-SP) Sejam $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ e $g(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$, usando o mesmo par de eixos, esboce os gráficos de f(x) e g(x).

4. Inequações exponenciais

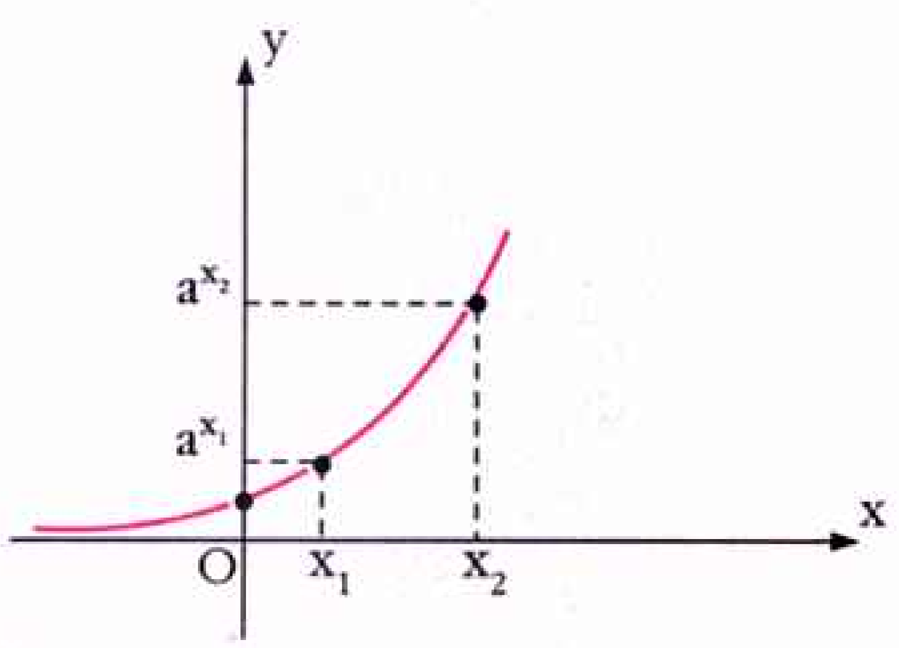
As inequações que envolvem funções exponenciais são consideradas inequações exponenciais. Veja os exemplos:

a) $9^x \leq 27$ b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} > \left(\frac{1}{2}\right)^4$

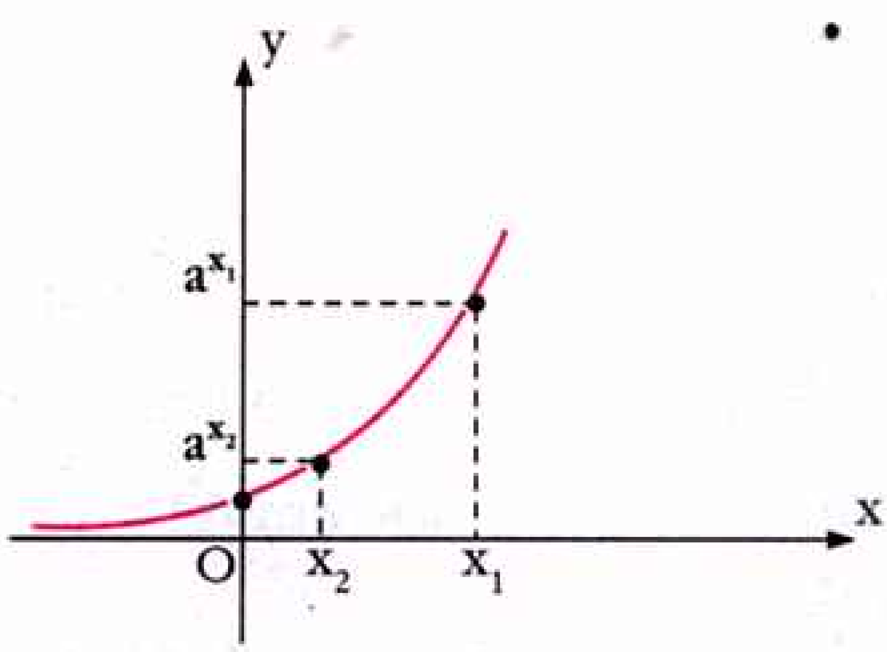
Na resolução das inequações exponenciais analisaremos os casos nos quais:

$a > 1$

Quando a função $f(x) = a^x$ apresenta base maior que 1, $(a > 1)$, desprezamos as bases comuns e mantemos o sinal da desigualdade em relação aos expoentes.



$$a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$$



$$a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2$$

Exemplo:

Para determinar o conjunto verdade da inequação $9^x \leqslant 27$, sendo $U = \mathbb{R}$, inicialmente tornamos as bases iguais:

$9^x \leqslant 27 \Rightarrow 3^{2x} \leqslant 3^3$

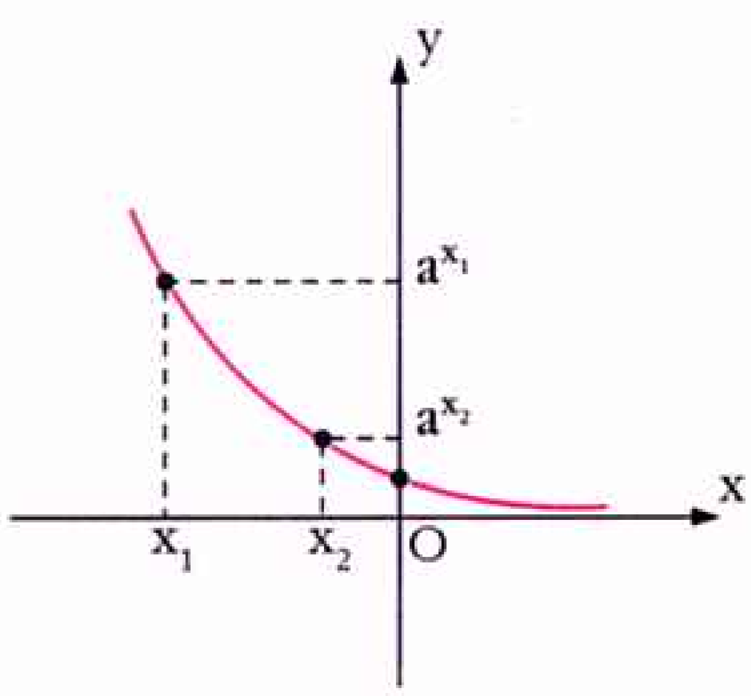
Como a base 3 é maior que 1, mantemos o sinal da desigualdade em relação aos expoentes.

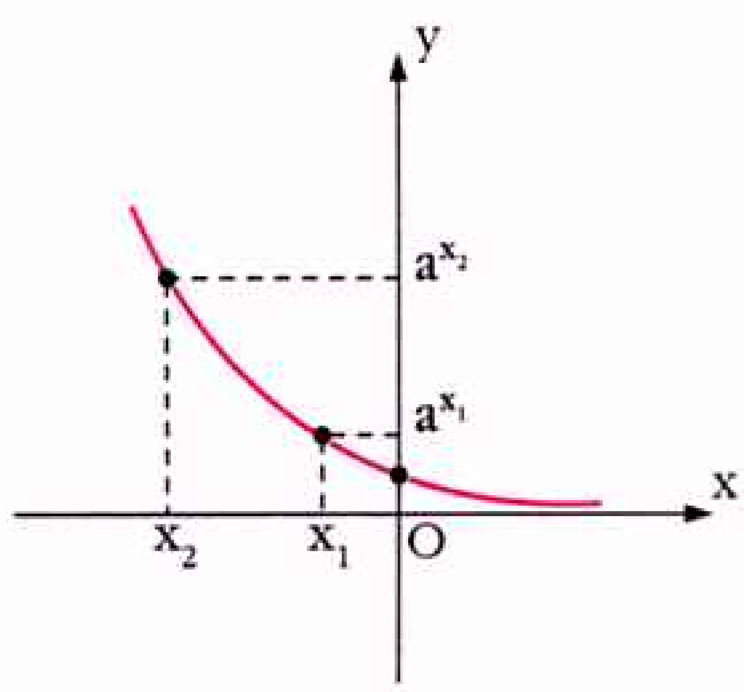
$3^{2x} \leqslant 3^3 \Rightarrow 2x \leqslant 3 \Rightarrow x \leqslant \frac{3}{2}$

$V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \frac{3}{2}\right\}$

$0 < a < 1$

Quando a função $f(x) = a^x$ apresenta base maior que zero e menor que 1 ($0 < a < 1$), desprezamos as bases comuns e invertemos o sinal da desigualdade em relação aos expoentes.





$\boxed{a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2}$

$\boxed{a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2}$

Exemplo:

Para determinar o conjunto verdade da inequação $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} > \left(\frac{1}{2}\right)^4$, sendo $U = \mathbb{R}$, observamos que, como a base $\frac{1}{2}$ é maior que 0 e menor que 1, invertemos o sinal da desigualdade em relação aos expoentes.

$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} > \left(\frac{1}{2}\right)^4 \Rightarrow 2x < 4 \Rightarrow x < 2$

$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$

Exercícios

Resolvido

Qual é o conjunto verdade das inequações considerando U = $\mathbb{R}$?

a) $(\sqrt{2})^{2x+4} \leqslant \dfrac{1}{(\sqrt{2})^{2x-1}}$ b) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{3x+1} > 1$

a) Inicialmente igualamos as bases:

$(\sqrt{2})^{2x+4} \leqslant (\sqrt{2})^{-2x+1}$

Como a base $\sqrt{2}$ é maior que 1, mantemos o sinal da desigualdade em relação aos expoentes.

$2x + 4 \leqslant -2x + 1 \Rightarrow 4x \leqslant -3 \Rightarrow x \leqslant -\dfrac{3}{4}$

$V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -\dfrac{3}{4}\right\}$

b) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{3x+1} > 1$

Inicialmente igualamos as bases:

$\left(\dfrac{2}{3}\right)^{3x+1} > \left(\dfrac{2}{3}\right)^{0}$

Como a base $\dfrac{2}{3}$ é maior que 0 e menor que 1, invertemos o sinal da desigualdade em relação aos expoentes.

$3x + 1 < 0 \Rightarrow 3x < -1 \Rightarrow x < -\dfrac{1}{3}$

$V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\dfrac{1}{3}\right\}$

Propostos

340 Determine o conjunto verdade das inequações, sendo U = $\mathbb{R}$.

a) $3^x > 27$ b) $2^x < 16$ c) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x > \dfrac{1}{9}$ d) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^x \leqslant \dfrac{1}{16}$

341 Para que valores reais de *x* são válidas as desigualdades?

a) $8^x \geqslant 64$ b) $49^{x+1} \leqslant 343$ c) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{x+3} < \dfrac{1}{25}$ d) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{x^2} \geqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^{3x-1}$

342 Determine o conjunto verdade das inequações, sendo U = $\mathbb{R}$:

a) $(\sqrt{5})^{x+2} < 1$

b) $a^{4x-1} > a^{2x+1}$, sendo $a > 1$

c) $(\pi)^{x^2} > (\pi)^{x+6}$

d) $a^{2(x+1)} \geqslant a^2$, para $0 < a < 1$

Ficha-resumo

Equações exponenciais

Uma equação é denominada exponencial quando apresenta incógnitas no expoente.

Se duas potências de mesma base *a*, $(0 < a \neq 1)$, são iguais, então seus expoentes também são iguais.

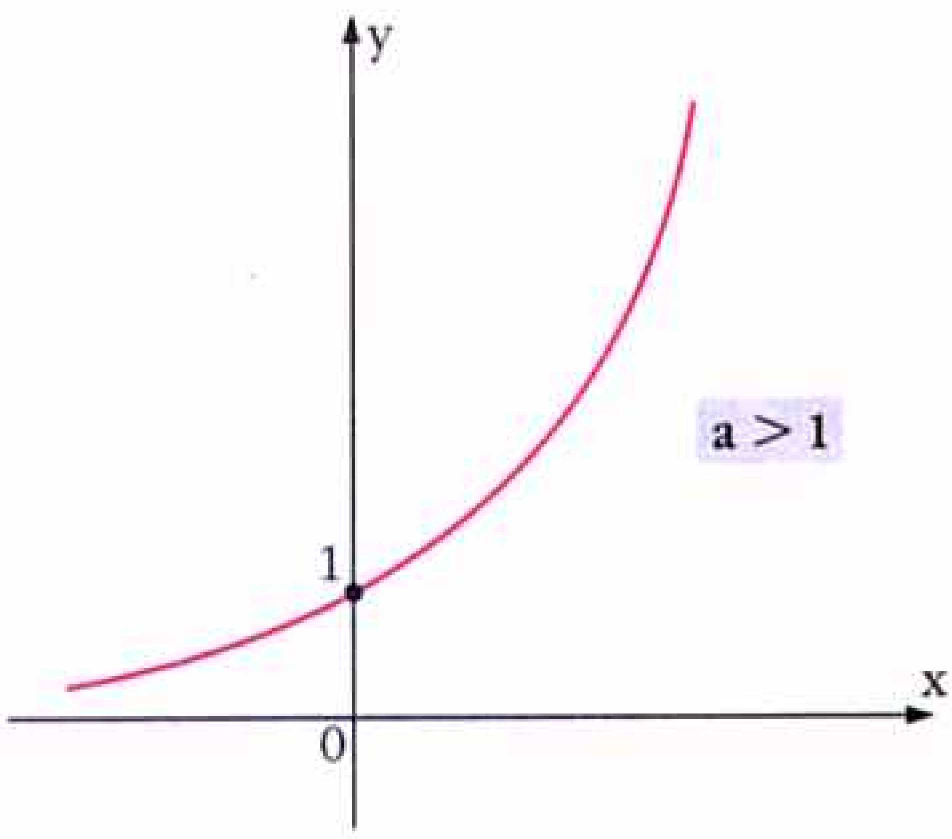
$$\boxed{a^x = a^k \Rightarrow x = k}$$

Função exponencial

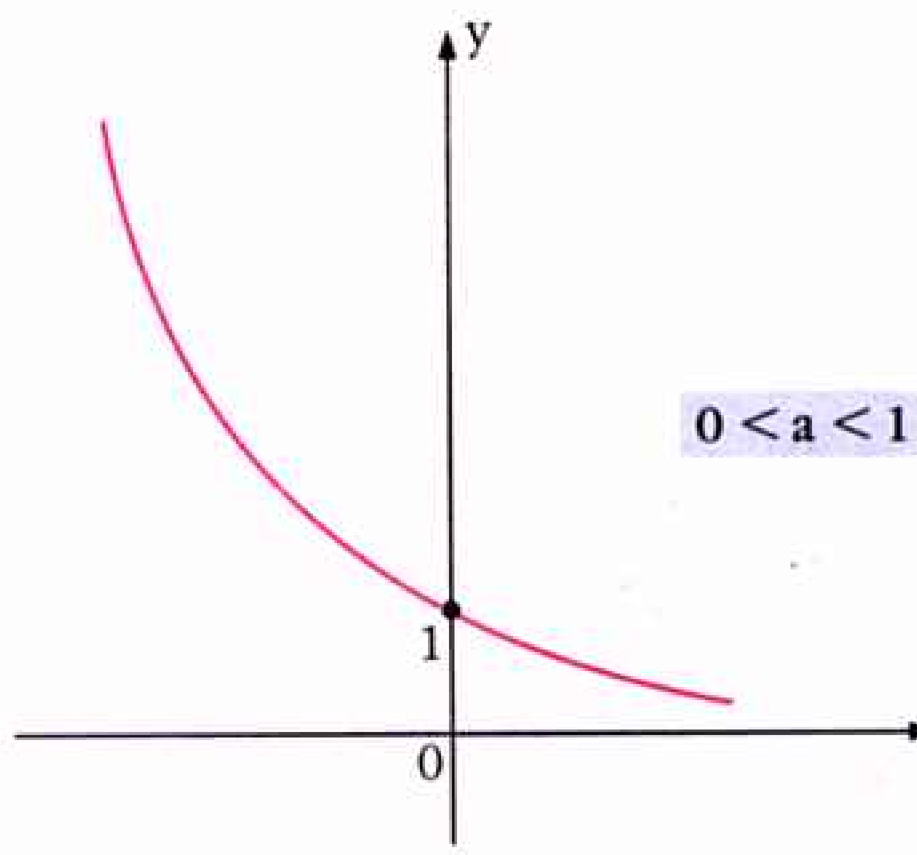
$f(x) = a^x$ para todo *x* real com $a > 0$ e $a \neq 1$

Gráfico da função exponencial

$$\begin{cases} D(f) = \mathbb{R} \\ Im(f) = \mathbb{R}_+^* \end{cases}$$



Função crescente



Função decrescente

Inequações exponenciais

São inequações que envolvem funções exponenciais.

$a > 1$

$$\boxed{a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2}$$

$$\boxed{a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2}$$

$0 < a < 1$

$$\boxed{a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2}$$

$$\boxed{a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2}$$

Exercícios

Complementares

343 Determine o conjunto verdade das equações exponenciais do 1º tipo:

a) $4^x = 16$
b) $25^x = \sqrt{5}$
c) $\left(\frac{1}{9}\right)^x = \sqrt{27}$
d) $\sqrt{10} = (0{,}01)^x$
e) $49^{2x+3} = 343$
f) $\left(\frac{5}{3}\right)^x = \frac{27}{125}$
g) $(2^x)^x = 8^x$
h) $17^{x^2-4x} = 1$
i) $3^{x^2-6x+5} = 1$
j) $4^{\frac{1}{3}(x^2-1)} = \sqrt[3]{16}$

344 Determine o conjunto verdade das equações exponenciais do 2º tipo:

a) $125^{x-9} = 1$
b) $2^{x+7} = \frac{1}{64}$
c) $3^{x+4} + 3^{x+2} = 90$
d) $5^{x-1} + 5^{x+1} = 26$
e) $10^{2x-1} - 11 \cdot 10^{x-1} + 1 = 0$
f) $5^{2x} + 4 \cdot 5^x - 5 = 0$

345 Determine o conjunto verdade das equações exponenciais do 3º tipo:

a) $4^x = 5 \cdot 2^x - 4$
b) $5^{10x} - 10 \cdot 5^{5x} + 25 = 0$
c) $4^x - 9 \cdot 2^x = -8$
d) $16^x - 48 = 13 \cdot 4^x$
e) $9^x - 10 \cdot 3^x + 9 = 0$
f) $5^{2x} + 20 \cdot 5^x - 125 = 0$

346 Esboce o gráfico e identifique como crescente ou decrescente as funções exponenciais.

a) $f(x) = 4^x$
b) $f(x) = 4^{-x}$
c) $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$
d) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

347 Determine o conjunto verdade das inequações exponenciais:

a) $9^x < 1$
b) $5^x < 125$
c) $7^{5x-9} > 7^{-x+1}$
d) $3^{x^2+2} > 3^{11}$
e) $a^{x^2} > a^{-6x-5}$, para $a > 1$
f) $\left(\frac{1}{4}\right)^x \geqslant \frac{1}{64}$
g) $\left(\frac{1}{7}\right)^{2x-1} < 1$
h) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} \geqslant \left(\frac{1}{243}\right)^{4x-3}$
i) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-4} \geqslant 9^{3x+6}$
j) $a^{x^2-4x} > a^{-3}$, para $0 < a < 1$

348 (PUC-RS) Seja a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2^x$. Então, $f(a + 1) - f(a)$ é igual a:

a) 2
b) 1
c) f(a)
d) f(1)
e) 2f(a)

349 (PUC-RS) Se $3^x - 3^{2-x} = 2^3$, então $15 - x^2$ vale:

a) 16
b) 15
c) 14
d) 11
e) 6

350 (Fatec-SP) O valor de x, $x \in \mathbb{R}$, que é solução da equação $(4^{3x+26})^3 = 2^{12}$, é:

a) 8
b) 4
c) 0
d) −4
e) −8

351 (UFMG) A soma das raízes da equação $7^{1+x} + \frac{1}{7^x} = 8$ é:

a) 0
b) −1
c) 1
d) 7
e) 8

352 (Fuvest) Leia e faça o que se pede:

a) Esboce, num mesmo sistema de coordenadas, os gráficos de $f(x) = 2^x$ e $g(x) = 2x$.
b) Baseado nos gráficos da parte *a*, resolva a inequação $2^x \leqslant 2x$.
c) Qual é o maior: $2^{\sqrt{2}}$ ou $2\sqrt{2}$? Justifique brevemente sua resposta.

353 (UFRS) O conjunto solução da inequação $3^{2-x} + 3^{2+x} > 18$ é:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 0\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 3\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 > 0\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

354 (PUC-SP) Se $a = 16$ e $x = 1{,}25$, quanto vale a^x?

a) $\sqrt{2}$
b) 32
c) 20
d) $16\sqrt{2}$
e) 64

355 (Mack-SP) O produto das raízes da equação $(3^{x^2} - 4\sqrt{5}) \cdot (3^{x^2} + 4\sqrt{5}) = 1$ é:

a) -4
b) -2
c) $\sqrt{2}$
d) -1
e) 2

356 (Mack-SP) Se $(2^x \cdot k^{y+1} \cdot 5^{z+3}) \cdot (2^{x-1} \cdot k^y \cdot 5^{z+1})^{-1} = 150$, então *k* vale:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

357 Numa determinada cultura há 200 bactérias em condições ideais. A cada duas horas a quantidade dobra. Determine o número de bactérias, 12 horas após o início do estudo.
Obs.: Antes de resolver este exercício veja "Saiba um pouco mais" deste capítulo, na pág. 149.

358 Um grupo de estudantes observa uma cultura de bactérias. A cada cinco horas a quantidade de bactérias triplica. O número de bactérias 15 horas após a primeira observação era de 8 100. Qual a quantidade inicial de bactérias nesse experimento?

359 (FGV-SP) Curva de Aprendizagem é um conceito criado por psicólogos que constataram a relação existente entre a eficiência de um indivíduo e a quantidade de treinamento ou experiência possuída por esse indivíduo. Um exemplo de Curva de Aprendizagem é dado pela expressão $Q = 700 - 400e^{-0{,}5t}$, onde

Q = quantidade de peças produzidas mensalmente por um funcionário
t = meses de experiência
$\mathbf{e} \cong 2{,}718$

a) De acordo com essa expressão, quantas peças um funcionário com dois meses de experiência deverá produzir mensalmente?
b) E um funcionário, sem qualquer experiência, quantas peças deverá produzir mensalmente?
Compare este resultado com o resultado do item *a*.
Há coerência entre eles?

360 (FGV-SP) Sendo $f(x) = e^{K \cdot x}$ e $f(2) = 5$, ($\mathbf{e}$ = número de Neper)

a) Calcule $f(6)$
b) Prove que *a* e *b* reais, $f(a + b) = f(a) \cdot f(b)$.

361 (UFGO) Os valores reais de *x* para os quais $(0{,}8)^{4x^2 - x} > (0{,}8)^{3(x+1)}$ são:

a) $-1{,}5 < x < 1{,}5$
b) $-1{,}5 < x < 0{,}5$
c) $x < -0{,}5$ ou $x > 1{,}5$
d) $-0{,}5 < x < 1{,}5$
e) n.d.a.

362 (FGV-SP) seja *a* um número maior que 1. Nestas condições, qual é o conjunto solução da inequação $a^{(x^3 - 1)} \leqslant a^{(x^2 - 1)}$?

363 (UEL-PR) Se o número real *K* satisfaz a equação $3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$, então K^2 é igual a:

a) 0 ou $\frac{1}{2}$
b) 0 ou 1
c) $\frac{1}{2}$ ou 1
d) 1 ou 2
e) 1 ou 3

364 Inicia-se a criação de certa espécie de peixe em um lago. Estudos indicam que o número *N* de peixes, decorrido *m* meses, é dado pela fórmula:
$N = 5 \cdot 10^3 - 5 \cdot 10^2 \cdot 2^{0{,}1\,m}$.
Assim, nesse lago, haverá aproximadamente 4 000 peixes para *m* igual a:

a) 2
b) 4
c) 6
d) 8
e) 10

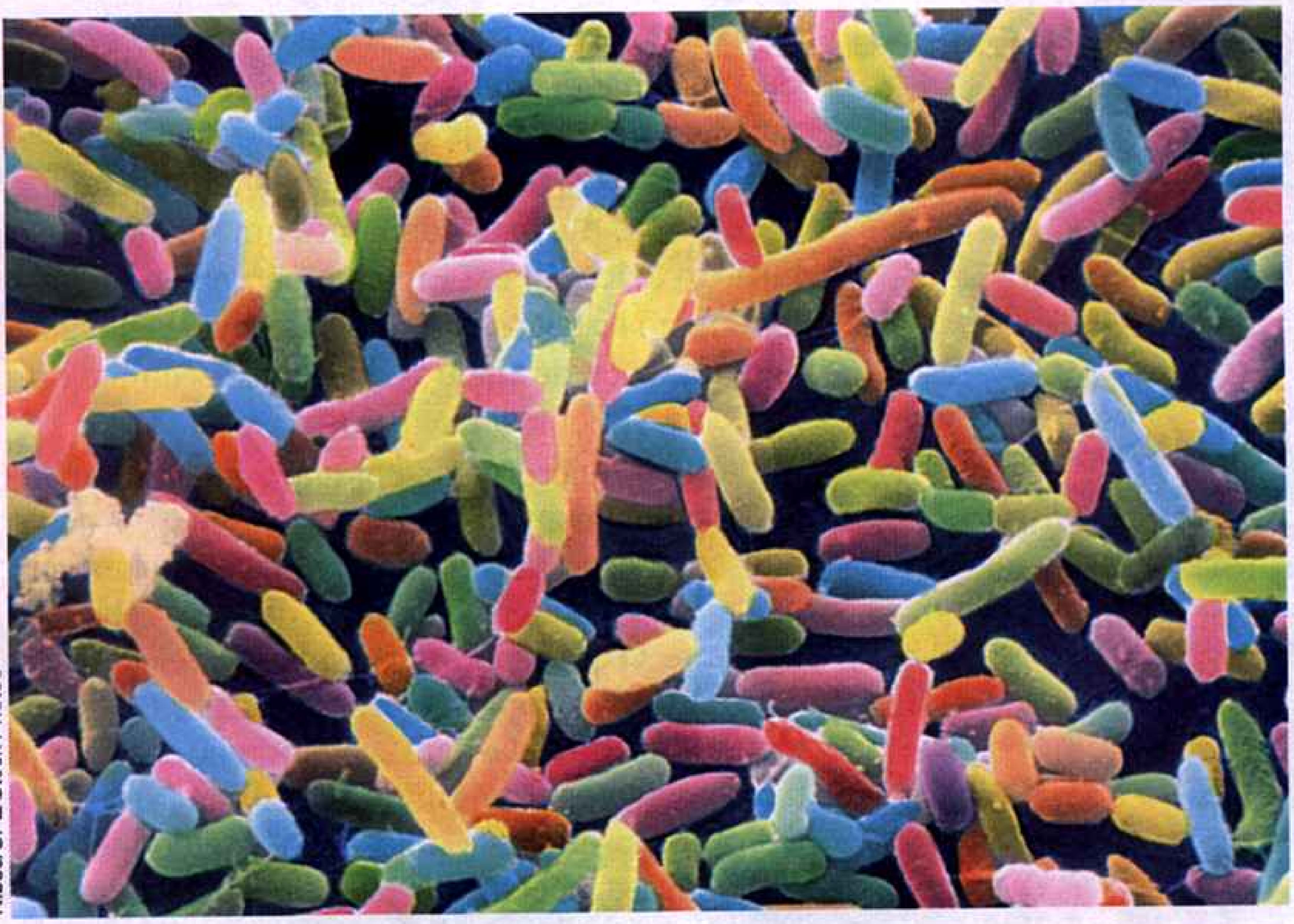
365 (FGV-SP) É dado o sistema $\begin{cases} 2^x = 8^{y+1} \\ 9^y = 3^{x-9} \end{cases}$

Pode-se dizer que $x + y$ é igual a:

a) 18
b) -21
c) 27
d) 3
e) -9

Saiba um pouco mais

A reprodução de bactérias e a Matemática



Nibsc/SPL/Stock Photos

Bactéria de *Escherichia coli*, colorida em micrografia eletrônica

Ao observarmos a reprodução das bactérias, percebemos que é um fenômeno biológico onde a representação matemática pode ser feita por uma lei exponencial. Vamos considerar a seguinte situação prática:

Um experimento apresenta no instante inicial $t = 0$, N_0 bactérias em reprodução. Se, hipoteticamente, o número de bactérias existentes no recipiente for proporcional ao nascimento de outras bactérias, podemos determinar o número de bactérias num determinado instante $t > 0$, por: $N(t) = N_0 \cdot K^t$, onde K é uma constante.

Os dinoflagelados possuem dois flagelos que lhes conferem grande mobilidade. Quando há proliferação exagerada dessas algas de cor avermelhada, ocorre a morte de milhares de peixes num fenômeno conhecido como maré vermelha.

Além do crescimento populacional, uma simples gota d'água, retirada de um córrego, sendo observada com o auxílio de lentes, pode nos revelar outros aspectos muito interessantes, como é o caso da incrível rapidez com que os microorganismos se locomovem.

Alguns microorganismos conseguem se movimentar graças a um órgão chamado flagelo, com o formato de uma hélice cilíndrica, produzindo em sua base um movimento giratório.

Essa observação microscópica fornece, ainda, uma imagem onde tudo parece se movimentar. Esse fenômeno já havia sido detectado por Robert Brown (botânico escocês), no início do século XIX. Aproximadamente um século mais tarde, o físico Albert Einstein percebeu que tal fenômeno tratava-se da agitação térmica devida às flutuações do meio e que hoje é conhecida como movimento *browniano*.

Alguns microrganismos apresentam somente esse movimento de pulsação contínua em suspensão, outros, porém, desenvolvem trajetórias lineares que podem mudar de direção, repentinamente. O que mais impressiona é a velocidade com que essa locomoção ocorre. Há tipos de bactérias que ultrapassam a velocidade de 300 micrômetros por segundo. Lembrando que o micrômetro (μm) é a milésima parte do metro, podemos transportar esses valores para uma escala microscópica, onde teríamos, por exemplo, o homem percorrendo 1 900 km em uma hora, ou seja, 1 900 km/h.

A perplexidade torna-se maior quando percebemos que o meio onde esse deslocamento se dá é viscoso e o movimento ocorre sob os efeitos de uma física aristotélica, onde a inércia praticamente desaparece. Em outras palavras, se já é difícil correr vencendo a resistência do ar, imagine correr num recipiente cheio de óleo.

Fonte: *Superinteressante*. Abril, ano 4, n. 5, maio, 1979, p. 43.