Função logarítmica

Criamos a época da velocidade, mas nos sentimos enclausurados dentro dela. A máquina, que produz abundância, tem-nos deixado em penúria. Nossos conhecimentos fizeram-nos céticos; nossa inteligência, empedernidos e cruéis. Pensamos em demasia e sentimos bem pouco. Mais do que de máquinas, precisamos de humanidade. Mais do que de inteligência, precisamos de afeição e doçura. Sem essas virtudes, a vida será de violência e tudo será perdido.

Charles Chaplin (Trecho de: O último discurso de *O grande ditador*)

1. Logaritmo

Vamos tomar como exemplo a igualdade: $2^3 = 8$, onde o número 2 é a base, o número 3 é o expoente e o número 8 é a potência. A operação que associa os números 2 e 3 (base e expoente, respectivamente) ao número 8 chama-se potenciação.

Podemos considerar que dessa operação derivam duas outras operações.

Observe as seguintes questões:

1ª) Conhecendo a potência e o expoente, encontrar o valor da base *x*, ou seja:

$$x^3 = 8$$

A esta operação vamos atribuir a seguinte notação:

$$\sqrt[3]{8} = x, \text{ onde } x = 2, \text{ pois } 2^3 = 8$$

A operação usada foi a radiciação.

2ª) Conhecendo a potência e a base, encontrar o valor do expoente *x*, ou seja:

$$2^x = 8$$

A esta operação vamos atribuir a seguinte notação:

$$\log_2 8 = x, \text{ onde } x = 3 \text{ pois } 2^3 = 8$$

A operação é denominada *logaritmação* e o expoente *x*, *logaritmo*.

Agora vamos considerar as seguintes séries:

Série geradora dos primeiros números naturais	1	2	3	4	5	6	7
Série geométrica qualquer	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7
Potências	2	4	8	16	32	64	128

Os números da série geradora são chamados de logaritmo na base 2, e, às potências obtidas, chamamos de logaritmando ou antilogaritmo desses logaritmos.

O exemplo nos dá a idéia da formação dos logaritmos.

Definição e existência

Considerando dois números reais, *a* e *b*, positivos com $a \neq 1$.

Chamaremos logaritmo do número *b* na base *a*, o expoente *c*, de forma que $a^c = b$.

Em símbolos:

$$\boxed{\begin{array}{l} \log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b \\ \text{Condições de existência (C.E.): } b > 0 \text{ e } 0 < a \neq 1 \end{array}}$$

Nomenclatura

Antilogaritmo ou logaritmando é o número *b*.
Base é o número *a*.
Logaritmo é o número *c*.

Exemplos:

a) $\log_2 16 = 4$, pois se $\log_2 16 = x$, então:

$$2^x = 16 \Rightarrow 2^x = 2^4 \Rightarrow x = 4, \text{portanto } \log_2 16 = 4$$

b) $\log_3 243 = 5$, pois se $\log_3 243 = x$, então:

$$3^x = 243 \Rightarrow 3^x = 3^5 \Rightarrow x = 5, \text{portanto } \log_3 243 = 5$$

c) $\log_7 \frac{1}{49} = -2$, pois se $\log_7 \frac{1}{49} = x$, então:

$$7^x = \frac{1}{49} \Rightarrow 7^x = \frac{1}{7^2} \Rightarrow 7^x = 7^{-2} \Rightarrow x = -2, \text{portanto } \log_7 \left(\frac{1}{49}\right) = -2$$

d) $\log_{10} 1\,000 = 3$, pois se $\log_{10} 1\,000 = x$, então:

$$10^x = 1\,000 \Rightarrow 10^x = 10^3 \Rightarrow x = 3, \text{portanto } \log_{10} 1\,000 = 3$$

e) $\log_2 2 = 1$, pois se $\log_2 2 = x$, então:

$$2^x = 2^1 \Rightarrow x = 1, \text{portanto } \log_2 2 = 1$$

f) $\log_{17} 1 = 0$, pois se $\log_{17} 1 = x$, então:

$$17^x = 1 \Rightarrow 17^x = 17^0 \Rightarrow x = 0, \text{portanto } \log_{17} 1 = 0$$

g) $\log_{\frac{5}{3}} 0{,}6 = -1$, pois se $\log_{\frac{5}{3}} 0{,}6 = x$, então:

$$\left(\frac{5}{3}\right)^x = 0{,}6 \Rightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^x = \frac{6}{10} \Rightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^x = \left(\frac{3}{5}\right)^1 \Rightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^x = \left(\frac{5}{3}\right)^{-1} \quad x = -1,$$

portanto $\log_{\frac{5}{3}} 0{,}6 = -1$

Exercícios

Resolvido

Calcular o valor de *x* na igualdade: $\log_9 3\sqrt{27} = x$.

$\log_9 3\sqrt{27} = x \Rightarrow 9^x = 3\sqrt{27} \Rightarrow 3^{2x} = 3\sqrt{3^3} \Rightarrow 3^{2x} = 3 \cdot 3^{\frac{3}{2}} \Rightarrow 3^{2x} = 3^{1+\frac{3}{2}}$

$\Rightarrow 3^{2x} = 3^{\frac{5}{2}} \Rightarrow 2x = \frac{5}{2} \Rightarrow x = \frac{5}{4}$, portanto $\log_9 3\sqrt{27} = \frac{5}{4}$

$\log_b a = \frac{\log a}{\log b}$

Propostos

366 Determine o valor de :

a) $\log_5 5\sqrt{5}$ b) $\log_4 \frac{\sqrt[3]{2}}{2}$ c) $\log_{0,2} 0{,}04$ d) $\log_{0,04} 0{,}2$

367 O valor de $\log_8 \sqrt[3]{16}$ é:

a) $\frac{4}{9}$ b) $\frac{4}{3}$ c) $\frac{1}{3}$ d) 3 e) 4

Condições de existência

Nos exemplos abaixo você poderá entender melhor as condições de existência dos logaritmos.

A base a de um logaritmo não pode ser negativa, não pode ser igual a zero nem igual a um.

Exemplos:
a) Não existe $\log_{-3} 27$, pois não existe x real para que se tenha $(-3)^x = 27$.
b) Não existe $\log_0 7$, pois não existe x real para que se tenha $0^x = 7$.
c) Não existe $\log_1 3$, pois não existe x real para que se tenha $1^x = 3$.

O logaritmando b não pode ser negativo e nem igual a zero.

Exemplos:
a) Não existe $\log_2 (-8)$, pois não existe x real para que se tenha $2^x = -8$.
b) Não existe $\log_5 0$, pois não existe x real para que se tenha $5^x = 0$.

2. Conseqüências da definição

Considerando a definição de logaritmo e as condições de existência, temos que:
a) $\log_a 1 = 0$

Exemplo:
$\log_5 1 = 0$, pois se $\log_5 1 = x$, então: $5^x = 1 \Rightarrow 5^x = 5^0 \Rightarrow x = 0$

b) $\log_a a = 1$

Exemplo:
$\log_3 3 = 1$, pois se $\log_3 3 = x$, então: $3^x = 3 \Rightarrow x = 1$

c) $\log_a a^\beta = \beta$

Exemplo:
$\log_2 2^5 = 5$, pois se $\log_2 2^5 = x$, então: $2^x = 2^5 \Rightarrow x = 5$

d) $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$

Exemplo:
$\log_3 x = \log_3 9 \Rightarrow \log_3 x = \log_3 3^2 \Rightarrow \log_3 x = 2 \Rightarrow x = 3^2 \Rightarrow x = 9$
então, $\log_3 x = \log_3 9$ implica que $x = 9$.
Fazendo o caminho de volta vemos que $x = 9$ implica que $\log_3 x = \log_3 9$.

e) $a^{\log_a b} = b$

Exemplo:
$5^{\log_5 25} = 25$, pois $5^{\log_5 25} = x \Leftrightarrow 5^{\log_5 5^2} = x$
então, $5^2 = x$ (pois $\log_5 5^2 = 2$), logo $x = 25$

Essa propriedade é uma decorrência da definição, ou seja:
$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$.
Como $x = \log_a b$, temos:
$a^{\log_a b} = b$

Sistemas de logaritmos

Chama-se sistema de logaritmos de base *a* ($1 \neq a > 0$), o conjunto dos logaritmos de todos os números reais positivos na base *a*.

Dois sistemas de logaritmos destacam-se pelo seu importante papel no campo das Ciências, são eles: sistema de logaritmos decimais (ou sistema de logaritmos de Briggs) e sistema de logaritmos neperianos (ou sistema de logaritmos naturais).

Sistema de logaritmos decimais

É um sistema de logaritmos no qual se adota a base 10, o que vem simplificar cálculos no campo da Matemática.

Para esse sistema de logaritmos, na notação iremos omitir a base.

Exemplos:
a) $\log_{10} 2 = \log 2$ b) $\log_{10} x = \log x$

Sistema de logaritmos neperianos

É o sistema de logaritmos de base **e** (e = 2,718 ..., denominado número de Euler), e é apresentado escrevendo-se uma das formas: $\log_e$ ou 1n.

Exemplos:
a) $\log_e 7 = 1\text{n}\, 7$ b) $\log_e 10 = 1\text{n}\, 10$ c) $\log_e 35 = 1\text{n}\, 35$

Exercícios

Resolvidos

1 Qual é o logaritmo de 49 na base 7? E o logaritmo de $\frac{1}{8}$ na base 4?

$\log_7 49 = x$

$7^x = 49$

$7^x = 7^2$

$x = 2 \Rightarrow \log_7 49 = 2$

$\log_4 \frac{1}{8} = x$

$4^x = \frac{1}{8}$

$2^{2x} = \frac{1}{2^3}$

$2^{2x} = 2^{-3}$

$x = -\frac{2}{3} \Rightarrow \log_4 \frac{1}{8} = -\frac{2}{3}$

2 Calcular com o auxílio da definição:

a) $\log_{\frac{1}{9}} \sqrt{27}$ b) $\log_{3\sqrt{3}} 27$

a) $\log_{\frac{1}{9}} \sqrt{27} = x$, logo $\left(\frac{1}{9}\right)^x = \sqrt{27}$

$\left(\frac{1}{3^2}\right)^x = \sqrt{3^3}$

$\left(3^{-2}\right)^x = 3^{\frac{3}{2}}$

$-2x = \frac{3}{2}$

$x = -\frac{3}{4} \therefore \log_{\frac{1}{9}} \sqrt{27} = -\frac{3}{4}$

b) $\log_{3\sqrt{3}} 27 = x$

$(3\sqrt{3})^x = 27$

$\left(3 \cdot 3^{\frac{1}{2}}\right)^x = 3^3$

$3^{\left(x + \frac{x}{2}\right)} = 3^3$

$x + \frac{x}{2} = 3$

$2x + x = 6$

$x = 2 \therefore \log_{3\sqrt{3}} 27 = 2$

3 Determinar a base *n* que verifica a igualdade $\log_n 16 = 4$.

$\log_n 16 = 4$; logo: $n^4 = 16$

$n^4 = 2^4$

$n = 2$ ou $n = -2$

O valor de $n = -2$ não convém, pois a base deve ser positiva ($n > 0$).

Então $n = 2$.

Propostos

368 Calcule os seguintes logaritmos:

a) $\log_{\frac{1}{9}} 3\sqrt{3}$

b) $\log_7 \frac{7}{\sqrt[3]{49}}$

c) $\log_{\frac{125}{27}} 0{,}6$

d) $\log_{1,4}\left(2 + \frac{93}{125}\right)$

e) $\log_{\frac{13}{12}} \frac{144}{169}$

f) $\log_{16} \sqrt[3]{8}$

g) $\log_{\frac{1}{25}} \sqrt[3]{5}$

h) $\log_2 16\sqrt{2}$

i) $\log_{100} \sqrt{0{,}001}$

j) $\log_{\frac{1}{7}} 7\sqrt[7]{7}$

369 Calcule os seguintes logaritmos:

a) $\log_2 32$

b) $\log_3 81$

c) $\log_{25} 125$

d) $\log_4 \sqrt{2}$

e) $\log_{10} 0{,}001$

f) $\log_5 625$

g) $\log_7 343$

h) $\log_3 \frac{1}{81}$

i) $\log_{0,01} 1\,000$

j) $\log_{0,01} 0{,}0001$

l) $\log_{0,0625} \frac{1}{1\,024}$

m) $\log_5\left(\frac{12^2}{3^2 \cdot 2^4}\right)$

n) $\log_{\frac{8}{9}} 0{,}888\ldots$

370 O valor de $\log_4\left(\dfrac{2}{\log_{16} 4}\right)$ é:

a) 4 b) $\frac{1}{2}$ c) 10 d) 1 e) 16

371 Determinar a base na qual o logaritmo de 1 menos a quarta parte da base é igual a − 1.

372 Determine um número, cujo logaritmo de base $\frac{25}{64}$ é -2.

373 Qual é a base de um sistema logarítmico, onde o logaritmo é $\frac{1}{2}$ e o antilogaritmo é $\frac{\sqrt{2}}{2}$?

374 Para quais valores de *x* cada expressão abaixo representa um número real?

a) $\log_5 (3x + 21)$ c) $\log_{(x+3)} (x - 4)$

b) $\log_{(6-x)} 8$ d) $\log_x^2 (4 - x^2)$

375 Calcule o valor de *x*, de modo que se tenha $\log_{\frac{1}{2}} x = \frac{1}{2}$.

376 (IME-RJ) Calcule o logaritmo de 625 na base $5\sqrt[3]{5}$.

377 Calcule a soma *S* em cada caso:

a) $S = \log_2 8 + \log_3 \frac{1}{9} + \log_5 \sqrt{5}$

b) $S = \log_{100} 0{,}1 + \log_{25} \sqrt[3]{5} - \log_{\sqrt{2}} 2$

c) $S = \log_{\frac{3}{5}} 0{,}6 - \log_{\sqrt{10}} 0{,}001 + \log_{\frac{1}{8}} \sqrt{2}$

3. Propriedades operatórias

Os logaritmos apresentam algumas propriedades que tornam fundamental a sua utilização, na simplificação de cálculos.

Logaritmo de um produto

O logaritmo de um produto de dois ou mais fatores reais e positivos, de base real, positiva e diferente de 1, é igual à soma dos logaritmos desses fatores, na mesma base.

Em linguagem matemática, temos:

$$\boxed{\log_a (m \cdot n) = \log_a m + \log_a n, \text{ sendo } 1 \neq a > 0,\ m > 0 \text{ e } n > 0}.$$

Essa propriedade pode ser considerada para *n* fatores reais positivos

$$\boxed{\log_a (M_1 \cdot M_2 \cdot \ldots M_n) = \log_a M_1 + \log_a M_2 + \ldots + \log_a M_n, \text{ sendo } 1 \neq a > 0}$$

Demonstração:

Supondo-se *x* e *y* os logaritmos de *m* e *n* na base *a*, teremos:

$\log_a m = x \Leftrightarrow m = a^x$ (I)

$\log_a n = y \Leftrightarrow n = a^y$ (II)

Multiplicando-se (I) e (II), teremos:

$m \cdot n = a^x \cdot a^y$

$m \cdot n = a^{x+y}$

Pela definição:

$\log_a (m \cdot n) = x + y$

ou

$\log_a (m \cdot n) = \log_a m + \log_a n$

Exercícios

Resolvidos

1 Determinar o valor de log 6, sabendo que log 2 = a e log 3 = b.

Sabemos que $\log 6 = \log (2 \cdot 3)$, então, aplicando a propriedade do logaritmo de produto, temos:

$\log 6 = \log (2 \cdot 3) = \underbrace{\log 2}_{a} + \underbrace{\log 3}_{b}$

Então, $\log_6 = a + b$

2 Se $\log_a b = 1$, então calcular $\log_a (a \cdot b)$.

Aplicando a propriedade do logaritmo do produto temos: $\log_a (a \cdot b) = \underbrace{\log_a a}_{1} + \underbrace{\log_a b}_{1}$

Então, $\log_a (a \cdot b) = 2$

Logaritmo de um quociente

O logaritmo de um quociente de dois números reais e positivos de base real, positiva e diferente de 1, é igual à diferença entre o logaritmo do dividendo e o logaritmo do divisor na mesma base.

Em linguagem matemática:

$$\boxed{\log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n, \text{ sendo } 1 \neq a > 0, m > 0 \text{ e } n > 0}$$

Demonstração:

Supondo-se *x* e *y* os logaritmos de *m* e *n* na base *a*, teremos:

$\log_a m = x \Leftrightarrow m = a^x$ (I)

$\log_a n = y \Leftrightarrow n = a^y$ (II)

Dividindo-se (I) e (II), obtemos:

$$\frac{m}{n} = \frac{a^x}{a^y} \Rightarrow \frac{m}{n} = a^{x-y}$$

Pela definição, temos:

$$\log_a \frac{m}{n} = x - y \quad \text{ou} \quad \log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n$$

Exercício

Resolvido

Se $\log_2 b - \log_2 a = 5$, então determinar o quociente $\frac{b}{a}$.

$\log_2 b - \log_2 a = 5$

$\log_2 \frac{b}{a} = 5 \Rightarrow 2^5 = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{b}{a} = 32$

Logaritmo de uma potência

Satisfeitas as condições de existência, o logaritmo de uma potência de expoente real é igual ao produto desse expoente pelo logaritmo da base dessa potência.

Em linguagem matemática, temos:

$$\boxed{\log_a n^k = k \cdot \log_a n, \text{ sendo } 1 \neq a > 0 \text{ e } n > 0}$$

Demonstração:

Supondo-se x o logaritmo de n^k na base a e y o logaritmo de n na base a, teremos:

$\log_a n^k = x \Leftrightarrow a^x = n^k$ (I)

$\log_a n = y \Leftrightarrow a^y = n$ (II)

Substituindo-se (II) em (I), temos:

$a^x = (a^y)^k$

$a^x = a^{y \cdot k}$

$x = y \cdot k$ ou $\log_a n^k = k \cdot \log_a n$

Exercícios

Resolvidos

1 (Fuvest-SP) Resolvendo-se $3 \cdot \log x = 2 \log 8$, obtemos:

a) $x = \pm 4$

b) $x = \pm\frac{1}{4}$

X c) $x = 4$

d) $x = \frac{1}{4}$

e) $x = (8)^{\frac{3}{2}}$

Com $x > 0$, vem que: $\log x = \frac{2}{3}\log 8$

$\log x = \log (2^3)^{\frac{2}{3}}$

$\log x = \log 2^2$

$\log x = \log 4$

$x = 4$

2 Considerando $\log_a 2 = 0{,}69$ e $\log_a 3 = 1{,}10$, calcular $\log_a \sqrt[4]{12}$.

$\log_a \sqrt[4]{12} = \log_a \sqrt[4]{2^2 \cdot 3} = \log_a (2^2 \cdot 3)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \log_a (2^2 \cdot 3) = \frac{1}{4} (\log_a 2^2 + \log_a 3) =$

$\frac{1}{4} (2 \log_a 2 + \log_a 3) = \frac{1}{4} (2 \cdot 0{,}69 + 1{,}10) = \frac{1}{4} (1{,}38 + 1{,}10) = 0{,}62$

então: $\log_a \sqrt[4]{12} = 0{,}62$

Propostos

378 Considerando $\log 2 = 0{,}3010$ e $\log 3 = 0{,}4771$, calcule:

a) $\log 8$
b) $\log 12$
c) $\log 72$
d) $\log \sqrt{2}$
e) $\log \sqrt{108}$
f) $\log 5$
g) $\log 0{,}0001$
h) $\log 200$
i) $\log 3\,000$
j) $\log \sqrt[3]{60}$
l) $\log \sqrt[4]{1{,}2}$
m) $\log (0{,}54)^{0{,}5}$

379 Calcule $\log 24$, sabendo que $\log 2 = a$ e $\log 3 = b$.

380 Determine $\log^3 x$ e $\log x^3$, sabendo que $\log x = \frac{1}{10}$.

381 Aplicar as propriedades operatórias nas seguintes expressões:

a) $\log a^3 \cdot b$
b) $\log \pi \cdot r^2$
c) $\log_2 \frac{\ell^2 \cdot \sqrt{2}}{4}$
d) $\log a^2 \frac{\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt{c}}$

382 (FAAP-SP) Ache y real sabendo-se que: $\log_2 y = \log_2 3 + \log_2 6 - 3 \log_2 4$

383 (Objetivo-SP) Se $\log_x y = 2$, então o valor de $\log_x (xy)$ é:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

384 (FGV-SP) Considerando $\log_{10} 2 = 0{,}3010$ e $\log_{10} 3 = 0{,}4771$, então $\log_{10} 0{,}6$ é igual a:

a) 1,7781
b) −0,7781
c) 0,7781
d) −0,2219
e) 0,2219

385 (PUC-SP) O valor de $\log_{0{,}04} 125$ é igual a:

a) $-\frac{2}{3}$ b) $-\frac{4}{3}$ c) $-\frac{3}{2}$ d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{4}{3}$

386 (Fuvest-SP) Sendo $a^2 + b^2 = 70\,ab$, calcule $\log_5 \frac{(a+b)^2}{ab}$ em função de $m = \log_5 2$ e $n = \log_5 3$.

387 (PUCCAMP-SP) O sistema

$$\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 1 \\ 4x - 3y = 5 \end{cases}$$

tem solução, tal que $x + y$ seja igual a:

a) 3 b) 1 c) $-\frac{11}{7}$ d) $\frac{41}{12}$

4. Mudança de base

Nos casos em que o logaritmo apresentar uma base que não convém, esta poderá ser substituída por outra.

Considerando-se o logaritmo de um número real e positivo b, numa base a real, positiva e diferente de 1, faremos a mudança para uma base c, real, positiva e diferente de 1.

$$\boxed{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \text{ sendo: } b > 0,\ 0 < a \neq 1,\ 0 < c \neq 1}$$

Demonstração:
Se $\log_a b = x$, então $a^x = b$.

Aplicando o logaritmo na base *c*, em ambos os membros, temos:
$\log_c a^x = \log_c b$
$x \cdot \log_c a = \log_c b$
então: $x = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

Exemplo:
Mudar para a base 2 os logaritmos:
a) $\log_4 5$

$$\log_4 5 = \frac{\log_2 5}{\log_2 4} \text{ ou } \log_4 5 = \frac{\log_2 5}{2}$$

b) $\log_{\frac{1}{8}} 9$

$$\log_{\frac{1}{8}} 9 = \frac{\log_2 9}{\log_2 \frac{1}{8}} \text{ ou } \log_{\frac{1}{8}} = \frac{\log_2 9}{-3} \text{ ou } \log_{\frac{1}{8}} 9 = -\frac{\log_2 9}{3}$$

Cologaritmo

Chama-se cologaritmo de um número real $b \in \mathbb{R}_+^*$, numa base $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$ ao oposto do logaritmo de *b* na base *a*.

$$\boxed{\text{colog}_a b = -\log_a b}$$

Exemplos:
a) $\text{colog}_2 8 = -\log_2 8 = -3$

b) $\text{colog}_3 \frac{1}{9} = -\log_3 \frac{1}{9} = -(-2) = 2$

Exercícios

Resolvido

Sabendo-se que $\log_{14} 7 = a$ e $\log_{14} 5 = b$, determinar o valor do $\text{colog}_{35} 28$.

Vamos escrever o número 28 na forma: $28 = 14 \cdot 2 = 14 \cdot \frac{14}{7} = \frac{14^2}{7}$. Então, teremos:

$$\text{colog}_{35} 28 = -\log_{35} 28 = -\frac{\log_{14} 28}{\log_{14} 35} = \frac{\log_{14}\left(\frac{14^2}{7}\right)}{\log_{14}(5 \cdot 7)} = \frac{\log_{14} 14^2 - \log_{14} 7}{\log_{14} 5 + \log_{14} 7} = -\frac{2 - a}{b + a} = \frac{a - 2}{a + 2}$$

Propostos

388 Considerando $\log 2 = 0{,}3010$ e $\log 3 = 0{,}4771$, calcule:

a) $\log_6 4$
b) $\log \sqrt{6}$
c) $\log \sqrt[3]{12}$
d) $\text{colog } 72$
e) $\text{colog } \sqrt[3]{108}$
f) $\text{colog } 15^{-1}$

389 Considere $\log 2 = 0{,}301$ e $\log 3 = 0{,}477$ e mostre que $\text{colog}_3 2 = \log_{\frac{1}{3}} 2$.

390 Se $\log_3 a = x$, então $\log_9 a^2$ é igual a:

a) $2x^2$
b) x^2
c) $x + 2$
d) $2x$
e) x

391 (Fuvest-SP) Se $x = \log_4 7$ e $y = \log_{16} 49$, então $x - y$ é igual a:

a) $\log_4 7$
b) $\log_{16} 7$
c) 1
d) 2
e) 0

392 Supondo $\log_n m = 2$, determine $\log_{\left(\frac{1}{n}\right)^2} \sqrt[3]{m}$.

5. Equações logarítmicas

São aquelas que apresentam a incógnita no logaritmando ou na base do logaritmo.

Exemplos:
$\log_3 (\log_2 x) = 2$
$\log (x + 2) + \log (x + 3) = \log 12$
$\log_8 x - \log_2 (2x) = 1$

As equações logarítmicas podem se apresentar em três tipos principais:

1º tipo Aquelas em que aplicaremos apenas a definição de logaritmo para sua resolução.

Exemplos:
Determinar o conjunto solução (ou o conjunto verdade) das seguintes equações logarítmicas:

a) $\log_5 (\log_2 x) = 0$

Aplicando a definição, duas vezes, obtemos a solução desta equação.

$\log_5 (\log_2 x) = 0$ — **Condição de existência (C.E.)** $x > 0$

$\log_2 x = 5^0$
$\log_2 x = 1$
$x = 2^1$
$x = 2$
$S = \{2\}$

b) $\log_x (x + 6) = 2$

Inicialmente vamos aplicar a definição do logaritmo e, em seguida, resolver a equação do 2º grau.

$\log_x (x + 6) = 2$ C.E. $x + 6 > 0$

$1 \neq x > 0$

$x^2 = x + 6$

$x^2 - x - 6 = 0$

$a = 1, b = -1$ e $c = -6$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25$

$$x = \frac{1 \pm 5}{2} \begin{cases} x' = -2 \rightarrow \text{(não convém, pois contraria a C.E. } x > 0) \\ x'' = 3 \end{cases}$$

$V = \{3\}$

Exercícios

Resolvidos

1 Resolver as equações:

a) $\log_{\frac{1}{2}} (\log_9 x) = 1$ b) $\log_3 (2x - 1) = 4$

a) $\log_{\frac{1}{2}} \log_9 x = 1$

$\log_9 x = \left(\frac{1}{2}\right)^1$

$9^{\frac{1}{2}} = x \rightarrow x = 3$

C.E. $x > 0$

$V = \{3\}$

b) $\log_3 (2x - 1) = 4$

$2x - 1 = 3^4$

$x = \frac{81 + 1}{2}$

$x = 41$

$\begin{cases} \text{C.E. } 2x - 1 > 0 \\ x > 1/2 \end{cases}$

$V = \{41\}$

2 Resolver a equação $\log_2 [\log_x (x + 2)] = 1$

$\log_2 [\log_x (x + 2)] = 1$

$\log_x (x + 2) = 2^1$

$x + 2 = x^2$

$x^2 - x - 2 = 0$

C.E. $x \neq 1$

$x > 0$

$x + 2 > 0 \Rightarrow x > -2$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} \begin{cases} x' = 2 \\ x'' = -1 \text{ (não convém)} \end{cases}$$

$V = \{2\}$

3 Dê o conjunto solução da equacão $\log_2(-x^2 + 6x) = 3$.

$2^3 = -x^2 + 6x$ C.E.: $-x^2 + 6x > 0 \Rightarrow 0 < x < 6$
$x^2 - 6x + 8 = 0$
$x' = 2$ ou $x'' = 4$
Portanto, $S = \{2, 4\}$

Propostos

393 Determine o conjunto verdade das seguintes equações logarítmicas:

a) $\log_7(\log_2 x) = 0$

b) $\log_3(\log_5 x) = 1$

c) $\log_2(x + 4) = 3$

d) $\log_{25}(\log_3 y) = \frac{1}{2}$

394 Determine o conjunto solução das equações logarítmicas:

a) $\log_x(x + 20) = 2$

b) $\log_x(2x + 3) = 2$

c) $\log_3(x^2 - 5x + 5) = 0$

d) $\log_7(x - 1)^2 = 0$

395 Determine o conjunto verdade das equações logarítmicas:

a) $\log_2(2x^2 + 5x + 4) = 4$

b) $\log_{\sqrt{3}}(3x^2 + 7x + 3) = 0$

c) $\log_5(x + 2)^2 = 2$

d) $\log_7[\log_3(\log_2 x)] = 0$

e) $\log_8\{\log_3[\log_2(3x - 1)]\} = 0$

2º tipo **Aquelas em que aplicaremos as propriedades do logaritmo para a resolução.**

Exemplo:
Determinar o conjunto solução da equação logarítmica:
$\log_3(x + 7) + \log_3(x - 1) = 2$.

Inicialmente aplicaremos a propriedade de logaritmo do produto, ou seja:

$\log_3(x + 7) + \log_3(x - 1) = 2$
$\log_3[(x + 7) \cdot (x - 1)] = 2$

C.E.: $\begin{cases} x + 7 > 0 \text{ e } x - 7 > 0 \\ x > -7 \text{ e } x > 1 \end{cases}$

Em seguida, vamos aplicar a definição do logaritmo e resolver a equação do 2º grau.

$(x + 7) \cdot (x - 1) = 3^2$
$x^2 - x + 7x - 7 - 9 = 0$
$x^2 + 6x - 16 = 0$
$a = 1, b = 6 \text{ e } c = -16$
$\Delta = 36 + 64$
$\Delta = 100$

$x = \frac{-6 \pm 10}{2}$ → $x' = -8$ (não convém); $x'' = 2$

$V = \{2\}$

Exercícios

Resolvidos

1 Resolver a equação $\log_2 (x - 1) + \log_2 (x - 2) = 1$.

$\log_2 (x - 1) + \log_2 (x - 2) = 1$

$\log_2 [(x - 1) \cdot (x - 2)] = 1$

$(x - 1) \cdot (x - 2) = 2^1$

$x^2 - 3x = 0 \begin{cases} x' = 0 \text{ (não convém)} \\ x'' = 3 \end{cases}$

$V = \{3\}$

C.E. $\begin{cases} x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1 \\ x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2 \end{cases}$

2 Qual é o conjunto verdade de $\log_x (3x + 4) = \log_x (4x + 2)$?

$\log_x (3x + 4) = \log_x (4x + 2)$

$3x + 4 = 4x + 2$

$-x = -2$

$x = 2$

$V = \{2\}$

C.E.

$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ 3x + 4 > 0 \rightarrow x > -\frac{4}{3} \\ 4x + 2 > 0 \rightarrow x > -\frac{1}{2} \end{cases}$

Propostos

396 Determine o conjunto solução das seguintes equações logarítmicas.

a) $\log_3 (x + 2) + \log_3 (x - 1) = 2$

b) $\log_4 x + \log_4 (x + 12) = 3$

c) $\log_3 (2x + 1) + \log_3 (x + 8) = 3$

397 (UFSC) Qual o valor de *x* compatível para a equação $\log (x^2 - 1) - \log (x - 1) = 2$?

398 Resolva $\log_3 (x + 4) = \log_3 (2x - 1)$.

399 Resolva as equações:

a) $\log (x - 3) + \log\sqrt{16} = 2\log x$

b) $\log_2 (x + 2) - \log_2 (x - 4) = 2$

c) $\log (3x + 1) - \log (10x + 70) = -1$

400 (AFA-SP) A raiz da equação $\log (x - 1) - \frac{\log(x + 7)}{2} = \log 2$ é:

a) -9 b) -3 c) 3 d) 9

401 (FAAP-SP) Calcular *x* se: $\log 1\,000^x - \log (0{,}001)^x = 1$.

402 Para que valores de *x* temos $\log_{\frac{1}{2}} (x + 2)^2 = \log_{\frac{1}{2}} 36$?

403 Determine o conjunto verdade das equações:

a) $\log_x (4x - 3) = \log_x (2x - 1)$

b) $\log_3 (x + 3) + \log_3 (2x - 9) = \log_3 8$

c) $\log_{\frac{1}{3}} (x + 1) + \log_{\frac{1}{3}} (x - 5) = \log_{\frac{1}{3}} (2x - 3)$

d) $\log_2 (2x - 1) - \log_2 (x + 2) = \log_2 (4x + 1) - \log_2 (x + 10)$

3º tipo Aqueles em que aplicaremos a mudança de base para a resolução.

Exemplo:

Determinar o conjunto solução da equação logarítmica:

$\log_4 x + \log_2 x = 6 \qquad$ C.E. $x > 0$

1º passo: Deixar os logaritmos na mesma base; para isso vamos mudar $\log_4 x$ para base 2.

$$\log_4 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \frac{\log_2 x}{2}$$

2º passo: Substituir $\frac{\log_2 x}{2}$ na equação e fazer a mudança de variável.

$$\frac{\log_2 x}{2} + \log_2 x = 6$$

Fazendo $\log_2 x = n$, temos:

$$\frac{n}{2} + n = 6$$

3º passo: Resolver a equação do 1º grau e determinar o valor de x.

$$\frac{n}{2} + \frac{n}{1} = \frac{6}{1}$$

$$\frac{n + 2n}{2} = \frac{12}{2}$$

$$3n = 12 \quad \rightarrow \quad n = 4$$

Sendo $\log_2 x = n$, então:

$\log_2 x = 4 \Rightarrow x = 2^4 \Rightarrow x = 16$

$V = \{16\}$

Exercícios

Resolvido

Resolver o sistema $\begin{cases} 2 \cdot \log_2 x + \log_{\frac{1}{2}} y = 4 \\ x\sqrt{y} = 2^6 \end{cases}$.

Para $x > 0$ e $y > 0$:

(I) $2 \cdot \log_2 x + \log_{\frac{1}{2}} y = 4$

$$2 \cdot \log_2 x + \frac{\log_2 y}{\log_2 \frac{1}{2}} = 4$$

$$2 \cdot \log_2 x - \log_2 y = 4$$

(II) $x\sqrt{y} = 2^6$

$$\log_2 (\sqrt{y}) = \log_2 2^6$$

$$\log_2 x + \log_2 \sqrt{y} = 6$$

$$\log_2 x + \log_2 y^{\frac{1}{2}} = 6$$

$$\log_2 x + \frac{1}{2} \log_2 y = 6$$

Temos, portanto, um sistema equivalente: $\begin{cases} 2 \cdot \log_2 x - \log_2 y = 4 \\ \log_2 x + \frac{1}{2} \log_2 y = 6 \end{cases}$

fazendo: $n = \log_2 x$ e $t = \log_2 y$

obtemos: $\begin{cases} 2n - t = 4 \\ n + \frac{t}{2} = 6 \end{cases}$

Resolvendo o sistema, a solução será $n = 4$ e $t = 4$, portanto:

$\log_2 x = 4$ e $\log_2 y = 4$

$x = 16$ $\quad$ $y = 16$

$S = \{(16, 16)\}$

Propostos

404 Determine o conjunto verdade das seguintes equações logarítmicas:

a) $\log_3 x + \log_9 x = 3$

b) $\log_5 x + \log_{25} x = 6$

c) $\log_2 x - \log_{16} x = 3$

d) $\log_2 (x + 1) + \log_4 (x + 1) = \frac{9}{2}$

405 Existe algum número real *x* tal que $\log_2 x + \log_x 2 = 2$? Qual?

406 (FEI-SP) Resolvendo a equação: $2 \log_2 x + \log_{\frac{1}{2}} x = \log_2 3$ em $\mathbb{R}$, obtemos a solução:

a) 1 b) 2 c) 4 d) 3 e) 5

407 (Fuvest-SP) Resolva $\log_{10} x + 2 \log_x 10 = 3$.

408 Para que valor real de *x* temos $\log_3 (2x + 5) + \log_{\frac{1}{3}} (x + 1) = \log_3 (x + 1)$?

409 (UFAL) A solução real da equação $\log_2 x + 2 \log_4 x + 3 \log_8 x = -3$ é um número real *m* tal que m^2 é igual a:

a) 16 b) 4 c) 1 d) $\frac{1}{4}$ e) $\frac{1}{2}$

410 Resolver a equação:

$\log_2 x \cdot \log_4 x = 8$

411 (Unicamp-SP) Resolva o sistema $\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y = 4 \\ xy = 8 \end{cases}$.

6. Função logarítmica

Seja a função exponencial $y = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$. A sua inversa chama-se função logarítmica e indica-se $y = \log_a x$.

Características

Conjunto domínio

O domínio da função logarítmica é o conjunto dos números reais estritamente positivos.

$D(f) = \mathbb{R}_+^*$

Conjunto imagem

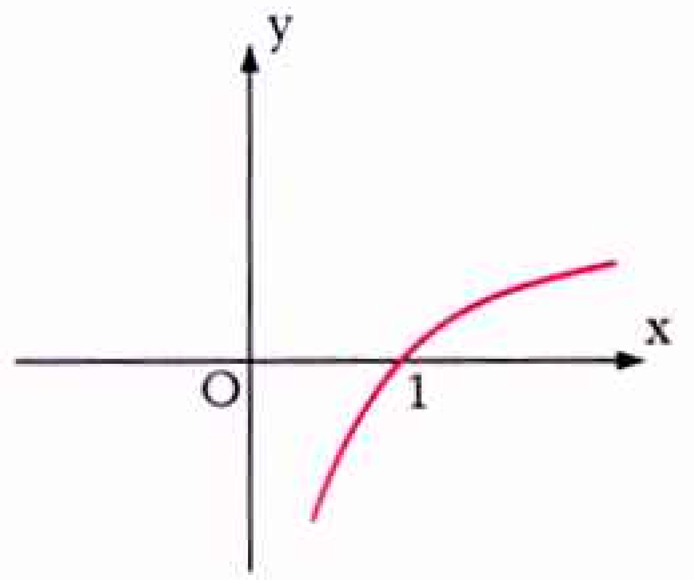
O conjunto imagem da função logarítmica é o conjunto dos números reais.

$Im(f) = \mathbb{R}$

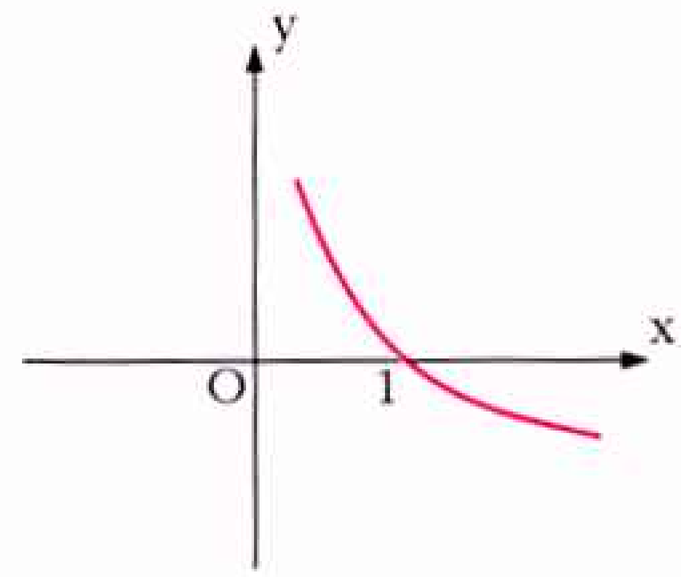
Gráfico

Quanto ao gráfico da função logarítmica $y = \log_a x$ temos dois casos a considerar:

1º caso quando $a > 1$
f será crescente:



2º caso quando $0 < a < 1$
f será decrescente:

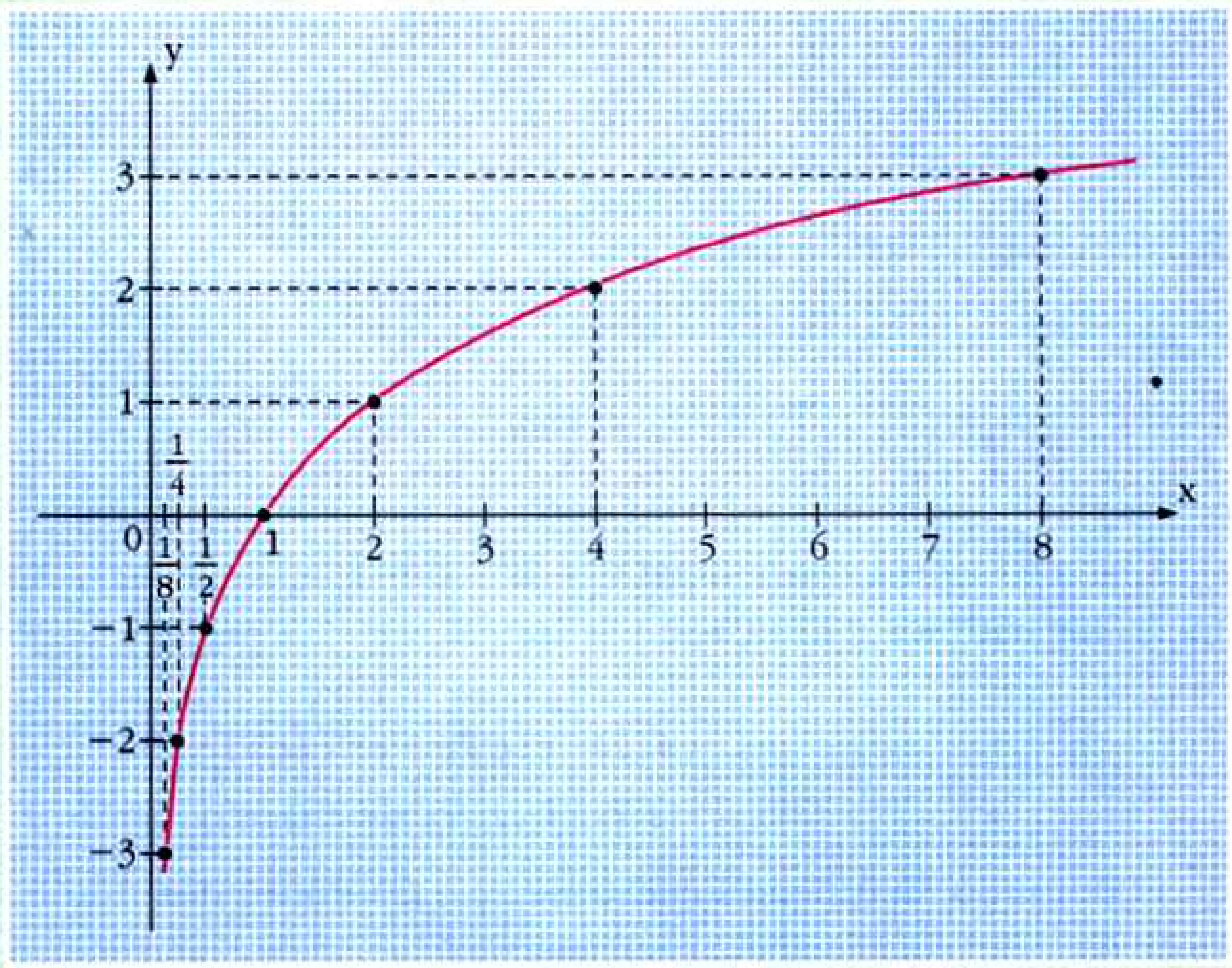


Exemplos:

Construir o gráfico cartesiano das funções:

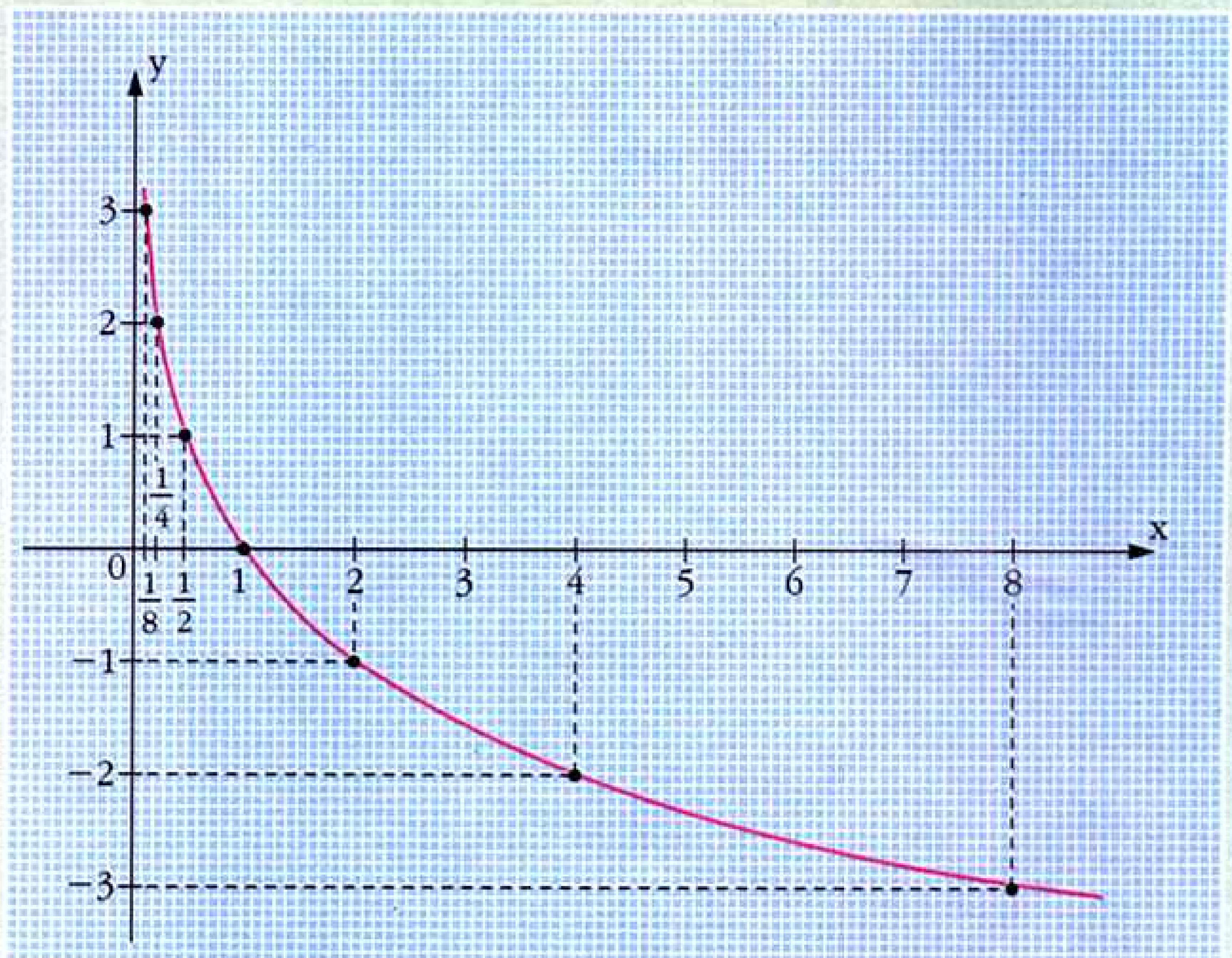
a) $y = \log_2 x$

x	$y = \log_2 x$
$\frac{1}{8}$	-3
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2
8	3



b) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

x	$\log_{\frac{1}{2}} x$
$\frac{1}{8}$	3
$\frac{1}{4}$	2
$\frac{1}{2}$	1
1	0
2	−1
4	−2
8	−3



Comparando as inversas

As funções exponencial e logarítmica são funções inversas.

Função exponencial

$y = a^x$

Domínio: $D(f) = \mathbb{R}$

Imagem: $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$

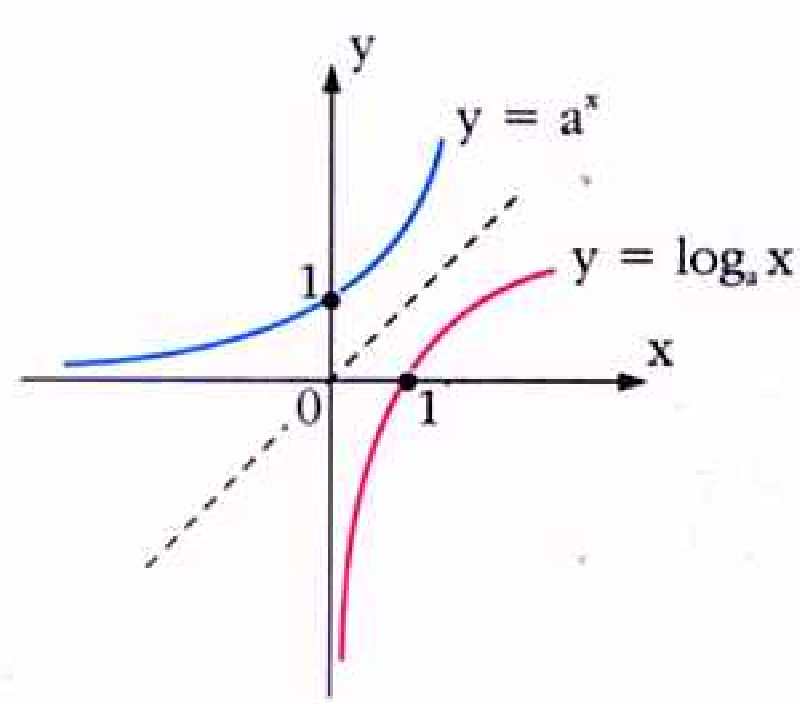
Função logarítmica

$y = \log_a x$

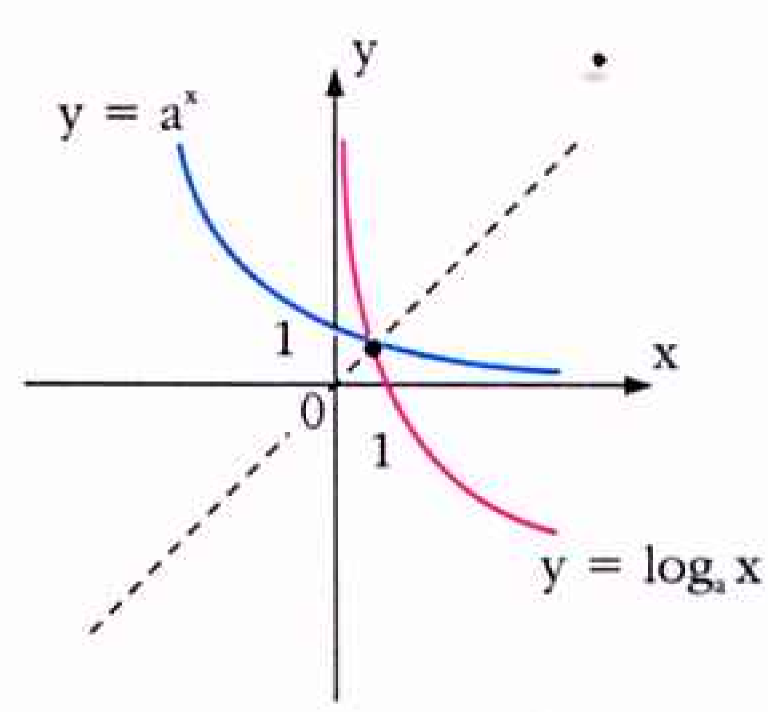
Domínio: $D(f) = \mathbb{R}_+^*$

Imagem: $Im(f) = \mathbb{R}$

$a > 1$



$0 < a < 1$

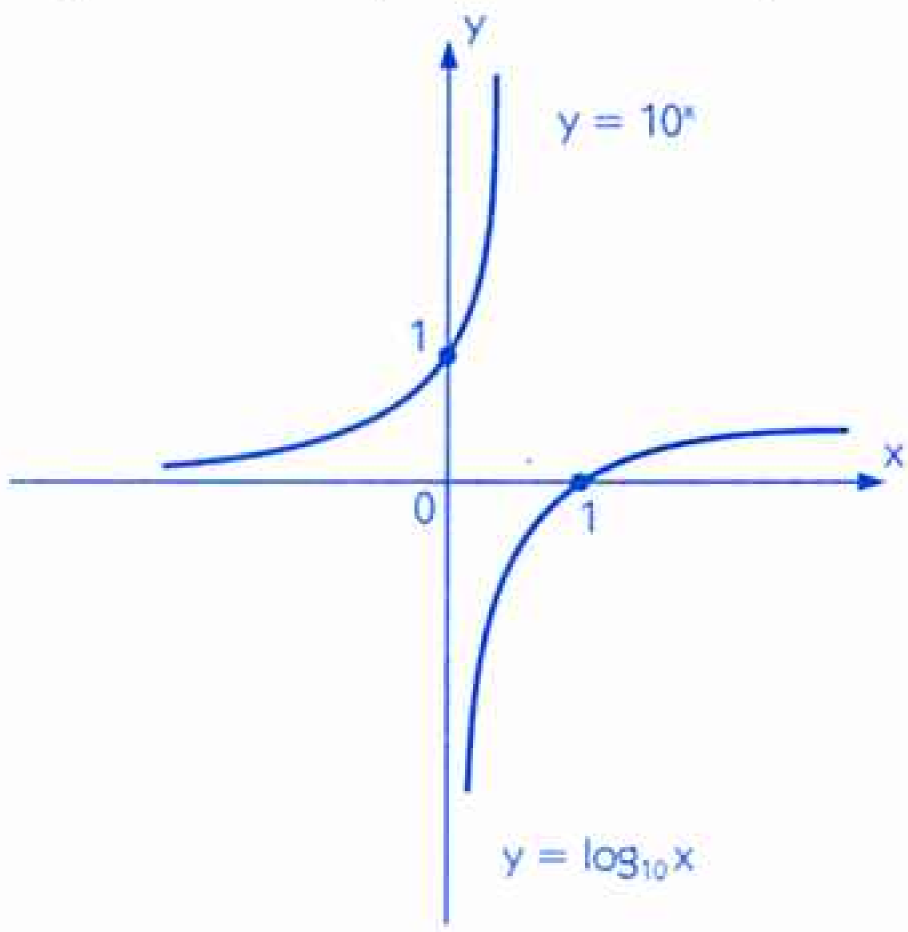


Observamos que os gráficos de a^x e $\log_a x$ são simétricos em relação à bissetriz do 1º e 3º quadrantes.

Exercícios

Resolvido

Faça no mesmo plano cartesiano, o esboço do gráfico das funções $y = 10^x$ e $y = \log_{10} x$.



Propostos

412 Construir o esboço do gráfico cartesiano das seguintes funções:

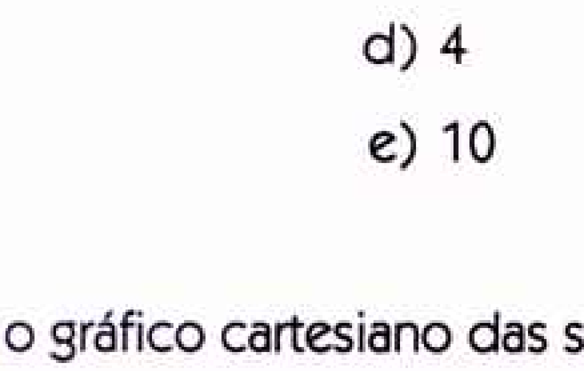
a) $y = \log_3 x$

b) $y = \log_4 x$

c) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$

d) $y = \log_{\frac{1}{10}} x$

413 (Fuvest-SP) A figura abaixo mostra o gráfico da função logaritmo na base *b*. O valor de *b* é:



a) $\frac{1}{4}$

b) 2

c) 3

d) 4

e) 10

414 Esboçar o gráfico cartesiano das seguintes funções:

a) $y = \log_3 x + 1$

b) $y = \log_2 (x - 1)$

c) $y = \log_2 x - 1$

415 Dê o domínio e o conjunto imagem das funções:

a) $y = \log_3 x$

b) $y = \log_{\frac{1}{10}} x$

c) $y = \log_2 (x - 1)$

d) $y = \log_2 (1 - x)$

416 Determine o domínio e o conjunto imagem das funções:

a) $f(x) = \log (x - 4)$

b) $f(x) = \log_3 (x + 5)$

c) $f(x) = \log_2 (1 - x^2)$

d) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} (x^2 - x)$

e) $f(x) = \log_{\frac{3}{5}} \sqrt{2x - 1}$

f) $f(x) = \log_{\frac{1}{7}} (x - 3) + \log_{\frac{1}{7}} (x - 8)$

417 Determine o domínio de validade das seguintes funções:

a) $f(x) = \log_{(x - 2)} x$

b) $f(x) = \log_{(x - 9)} (x^2 - 16)$

c) $f(x) = \log_{(x - 2)} (x^2 - 5x + 6)$

d) $f(x) = \log_{(x - 1)} (-x^2 + 4x - 3)$

e) $f(x) = \log_3 |x - 3|$

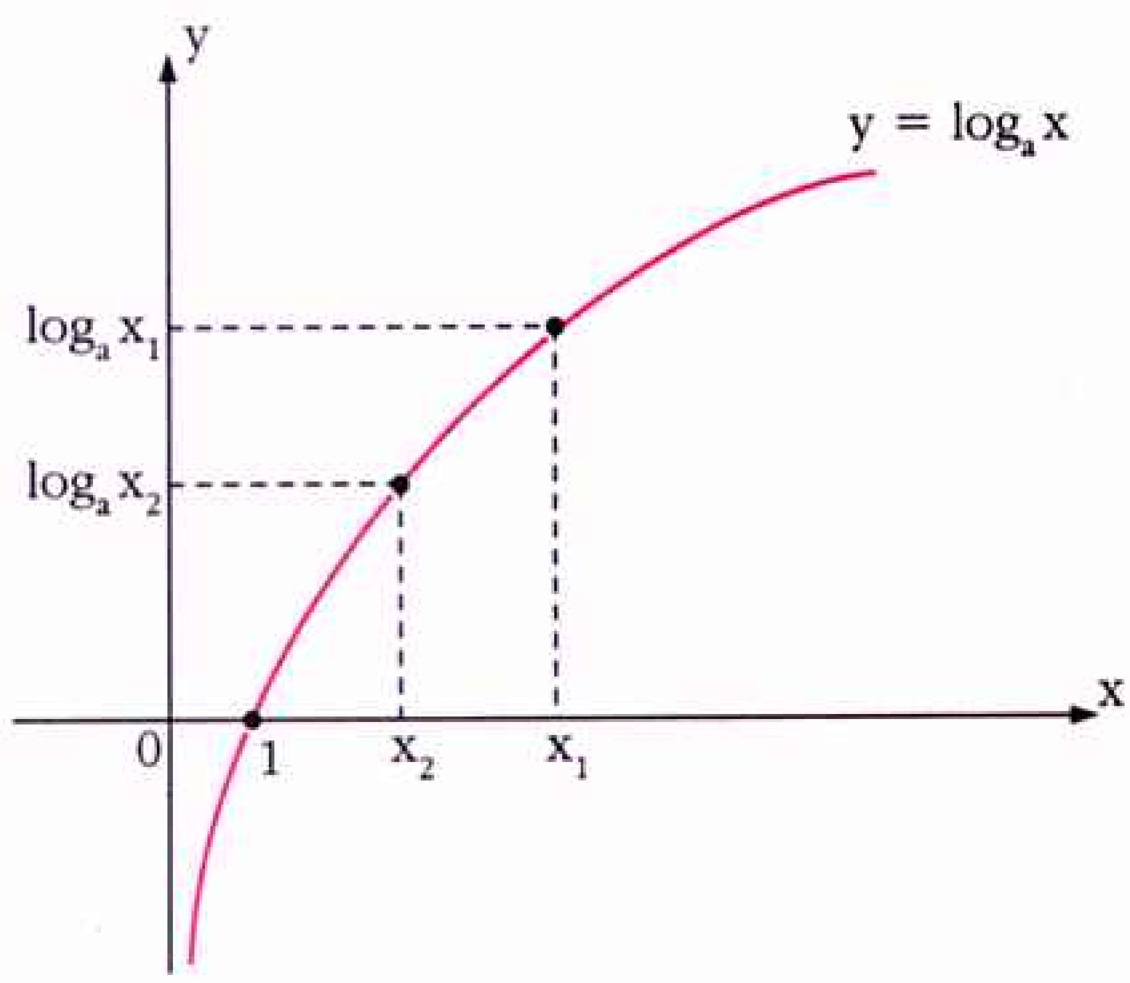
7. Inequações logarítmicas

As inequações logarítmicas caracterizam-se por envolverem a função logarítmica.

Exemplos:
$\log_3 (2x - 5) > 1$
$\log (x^2 + 4) \leqslant \log x - 2$

Vamos analisar o comportamento da função através do gráfico.

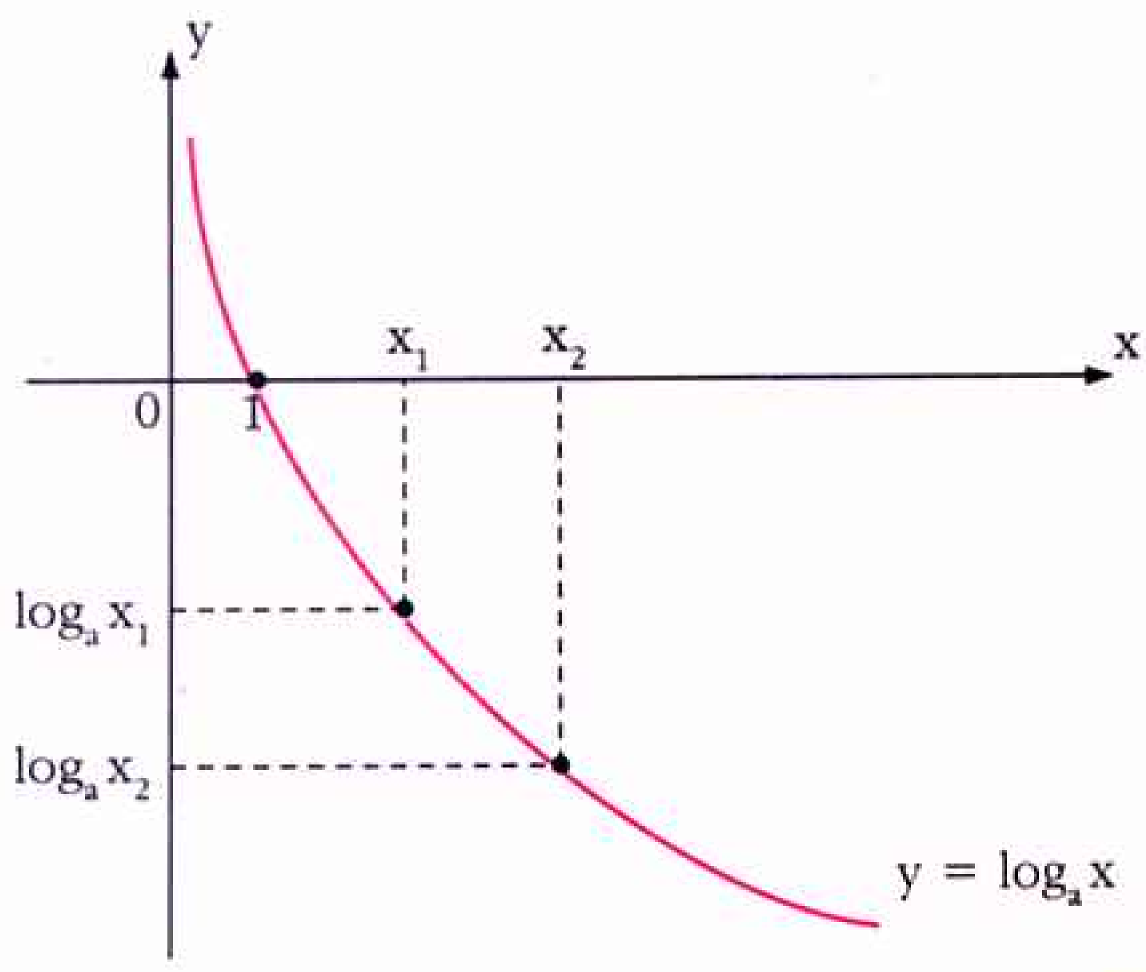
1º caso quando $a > 1$



Nesse caso a função é *crescente*. Então, se $\log_a x_1 > \log_a x_2$ podemos afirmar que $x_1 > x_2$, ou seja, conservamos o sentido da desigualdade para comparar os logaritmandos.

Exemplo:
Se $\log_2 x > \log_2 5$, então $x > 5$

2º caso quando $0 < a < 1$



Nesse caso a função é *decrescente*. Então, se $\log_a x_1 > \log_a x_2$ podemos afirmar que $0 < x_1 < x_2$, ou seja, invertemos o sentido da desigualdade para comparar os logaritmandos.

Exemplo:
Se $\log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}} 5$, então $0 < x < 5$

Resolvidos

1 Resolver em $\mathbb{R}$ as seguintes inequações:

a) $\log_2 (x + 2) < 3$ b) $\log_{0,3} (2x - 3) \leqslant \log_{0,3} 4$

a) $\log_2 (x + 2) < 3$

Condição de existência: $x + 2 > 0$

(I) $x > -2$

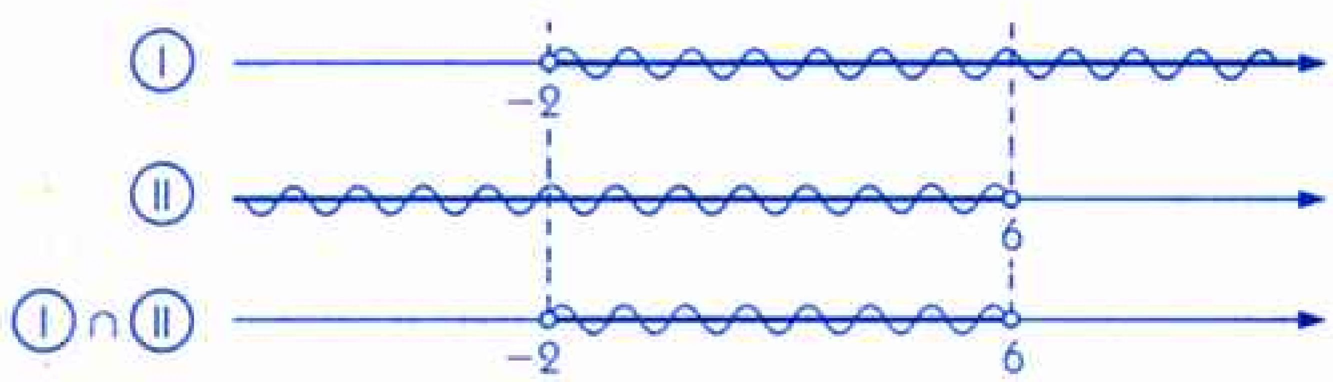
Vamos substituir 3 por $\log_2 8$, na inequação:

$\log_2 (x + 2) < \log_2 8$

Como a base é maior que 1, basta conservar o sinal da desigualdade e resolver $x + 2 < 8$.

(II) $x < 6$

A solução da inequação logarítmica é o conjunto dos números reais que satisfazem (I) e (II), ou seja, é dada por (I) $\cap$ (II).



$V = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 6\}$

b) $\log_{0,3} (2x + 3) \leqslant \log_{0,3} 4$

Condição de existência: $2x - 3 > 0$

$2x > 3$

(I) $x > \frac{3}{2}$

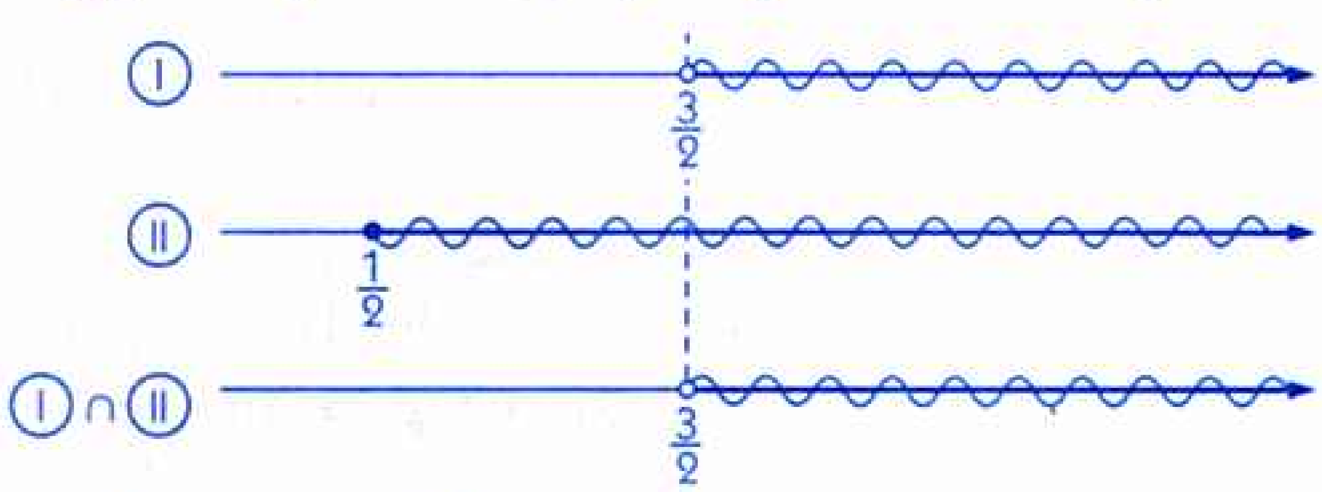
Como a base é menor que 1, basta inverter o sinal da desigualdade e resolver

$2x + 3 \geqslant 4$

$2x \geqslant 1$

(II) $x \geqslant \frac{1}{2}$

Logo, a solução da inequação logarítmica é o conjunto intersecção (I) $\cap$ (II).



$V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{3}{2}\right\}$

2 Classifique em falsa ou verdadeira a sentença $\log_{2,4} < 9 \log_{2,4} 3$.

Sendo a função $f(x) = \log_{2,4} x$ uma função crescente, pois a base é $2,4 > 1$, então $\log_{2,4} 9 > \log_{2,4} 3$ e, portanto, a sentença dada é *falsa*.

Propostos

418 Discutir cada uma das sentenças, quanto à sua veracidade:

a) $\log_3 7 > \log_3 5$ b) $\log_{2,5} 15 < \log_{2,5} 8$ c) $\log_{0,3} 1{,}3 \geq \log_{0,3} 0{,}4$

419 Determine uma condição para x, de modo a tornar verdadeiras as desigualdades.

a) $\log_3 x > \log_3 6$

b) $\log_5 x \leq \log_5 8$

c) $\log_{\frac{1}{5}} x > \log_{\frac{1}{5}} 3$

d) $\log_{0,7} x < \log_{0,7} 2$

e) $\log_8 (x + 2) \geq \log_8 9$

f) $\log_{0,1} (2x - 3) < \log_{0,1} (x - 4)$

g) $\log (-4x + 1) \geq \log (-3x - 2)$

h) $\log_{\frac{5}{3}} (1 - x) < \log_{\frac{5}{3}} (4x + 2)$

420 Resolva em $\mathbb{R}$ as seguintes inequações:

a) $\log_3 (x + 1) < 2$

b) $\log_{\frac{1}{2}} (2x - 4) > 1$

c) $\log_2 (x^2 + x) < \log_2 6$

d) $\log_6 (5x + 1) > \log_6 (4x - 2)$

e) $\log_{\frac{1}{2}} (x^2 + 4x - 5) > -4$

f) $-1 + \log_{\frac{1}{2}} (x - 1) > 0$

g) $\log_3 x + \log_3 (x + 1) < \log_3 (2x + 6)$

h) $\log_{\frac{1}{3}} (x - 1) + \log_{\frac{1}{3}} (3x - 2) \geq -2$

i) $\log_7 (2x - 1) - \log_7 (x + 2) < \log_7 3$

j) $\log_{\frac{1}{2}} (x - 1) + \log_{\frac{1}{2}} (3x - 2) \geq -2$

421 (Mauá-SP) Resolva a inequação $\log_{\frac{1}{2}} (x - 1) - \log_{\frac{1}{2}} (x + 1) < \log_{\frac{1}{2}} (x - 2) + 1$.

422 (Mack-SP) Os valores de x para os quais $\log_5 \left(x^2 - \frac{3}{2}x\right) < 0$, são:

a) $-\frac{1}{2} < x < 0$ ou $\frac{3}{2} < x < 2$

b) $0 < x < \frac{3}{2}$

c) $-\frac{1}{2} < x < 2$

d) $x < 0$ ou $x > \frac{3}{2}$

423 (Osec-SP) A solução da inequação $\log_3 (2x + 1) > \log_3 (x^2 - 2)$ é:

a) $\mathbb{R}$ b) $\varnothing$ c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$ d) $\{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{2} < x < 3\}$

424 (Osec-SP) Se $\log (2x - x^2) \geq 0$, então:

a) $x = 0$ b) $x = 1$ c) $0 < x \neq 1$ d) $1 < x < 2$

425 Resolver em $\mathbb{R}$ as inequações:

a) $\log_{\frac{1}{3}} (\log_2 x) > 0$

b) $\log_{\frac{1}{2}} [\log_3 (\log_{\frac{1}{2}} x)] \geq 0$

426 O conjunto de todos os números inteiros que satisfazem a inequação:
$\log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} (x - 2) > -3$ é:

a) $\{-2, 4\}$ b) $\{-2, 1, 2\}$ c) $\{4\}$ d) $\{3\}$

Ficha-resumo

Logaritmos

$$\boxed{\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b}$$

sendo *a* e *b* números reais, com:

$\begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ b > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} b \text{ é o logaritmando} \\ a \text{ é a base} \\ c \text{ é o logaritmo} \end{cases}$

- $\log_a 1 = 0$
  $\log_a a = 1$
  $\log_a a^m = m$

Propriedades operatórias

P1) $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$

P2) $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$

P3) $\log_a b^k = k \cdot \log_a b$

Mudança de base

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Cologaritmo

$\text{colog}_a b = -\log_a b$

Equações logarítmicas

São aquelas que apresentam a incógnita no logaritmando ou na base do logaritmo.

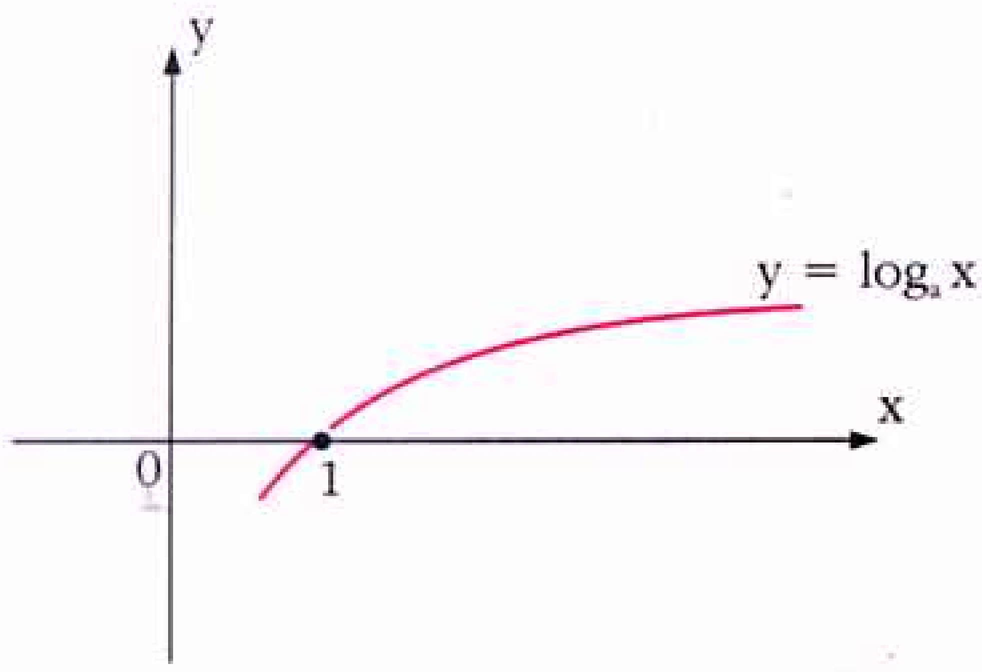
Função logarítmica

$y = \log_a x$

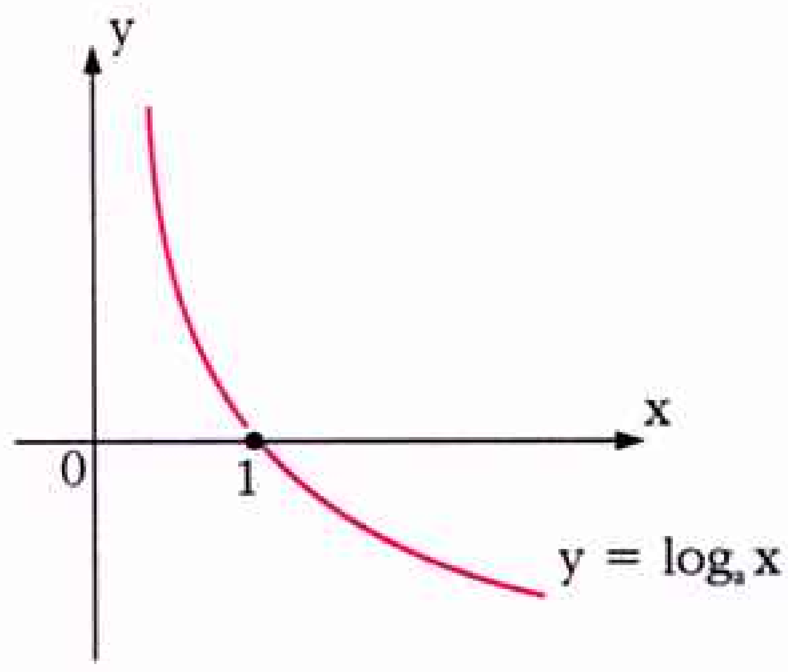
$D(f) = \mathbb{R}_+^*$

$I(f) = \mathbb{R}$

$a > 1$ Função crescente



$0 < a < 1$ Função decrescente



Inequação logarítmica

1º caso

$a > 1$

$\log_a x_1 > \log_a x_2 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 > x_2 > 0$

2º caso

$0 < a < 1$

$\log_a x_1 > \log_a x_2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < x_1 < x_2$

Exercícios

Complementares

427 Calcule os seguintes logaritmos:

a) $\log_{\frac{1}{7}} 49$
b) $\log_{\frac{1}{125}} 125$
c) $\log_2 \sqrt[4]{2}$
d) $\log_9 \sqrt[5]{81}$
e) $\log_{13} 1$
f) $\log_{0,04} 0,04$
g) $\log_{\frac{5}{3}} 0,6$
h) $\log_{625} 5\sqrt[3]{25}$

428 (IME-RJ) Calcule o logaritmo de 625 na base $5\sqrt[3]{5}$.

429 Resolva $\log_3 (\log_x 27) = 1$.

430 (ITA-SP) $\text{Log}_2 16 - \log_4 32$ é igual a:

a) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{3}{2}$
c) $\frac{1}{2 \log_4 2}$
d) 1

431 (FGV-SP) Seja x o número cujo logaritmo na base $\sqrt[3]{9}$ vale 0,75. Então $x^2 - 1$ vale:

a) 2
b) $\sqrt{2} - 1$
c) $\sqrt{3} - 1$
d) 0,75

432 Encontre os valores de x para os quais existe:

a) $y = \log_2 (x + 4)$
b) $y = \log_5 (-3x - 1)$
c) $y = \log_{(-3x+9)} 10$
d) $y = \log (x^2 - 7x + 10)$

433 (UFSCar-SP) O domínio de definição da função $f(x) = \log_{x-1} (x^2 - 5x + 6)$ é:

a) $x < 2$ ou $x > 3$
b) $2 < x < 3$
c) $1 < x < 2$ ou $x > 3$
d) $x < 1$ ou $x > 3$
e) $1 < x < 3$

434 Considerando que $\log 2 = 0,3010$ e $\log 3 = 0,4771$, calcule os seguintes logaritmos:

a) $\log 16$
b) $\log \sqrt{12}$
c) $\log 125$
d) $\log \sqrt[3]{54}$

435 (UFPR) Considerando $\log 2 = 0,301$ e $\log 7 = 0,845$, qual é o valor de $\log 28$?

a) 1,146
b) 1,447
c) 1,690
d) 2,107
e) 1,107

436 (PUC-SP) Todo número real positivo pode ser escrito na forma 10^x. Tendo em vista que $2 = 10^{0,30}$, então o expoente x tal que $5 = 10^x$ vale, aproximadamente:

a) 0,33
b) 0,50
c) 0,20
d) 0,70
e) 0,15

437 (Mack-SP) Considerando $\log_{10} 2 = 0,301$ e $\log_{10} 3 = 0,477$, então $\log_{10} 450$ será igual a:

a) 45
b) 0,667
c) 2,500
d) 2,653
e) 2,454

438 Se $\log_2 (a + b) = y$ e $a - b = \sqrt{2}$, então $\log_2 (a^2 - b^2)$ é igual a:

a) $2y$
b) $y^2 - 2$
c) $y + \frac{1}{2}$
d) y^2
e) $\frac{1}{2}$

439 Resolver a equação $\frac{2 - \log x}{1 - \log x} = 3$ no campo dos números reais.

Saiba um pouco mais

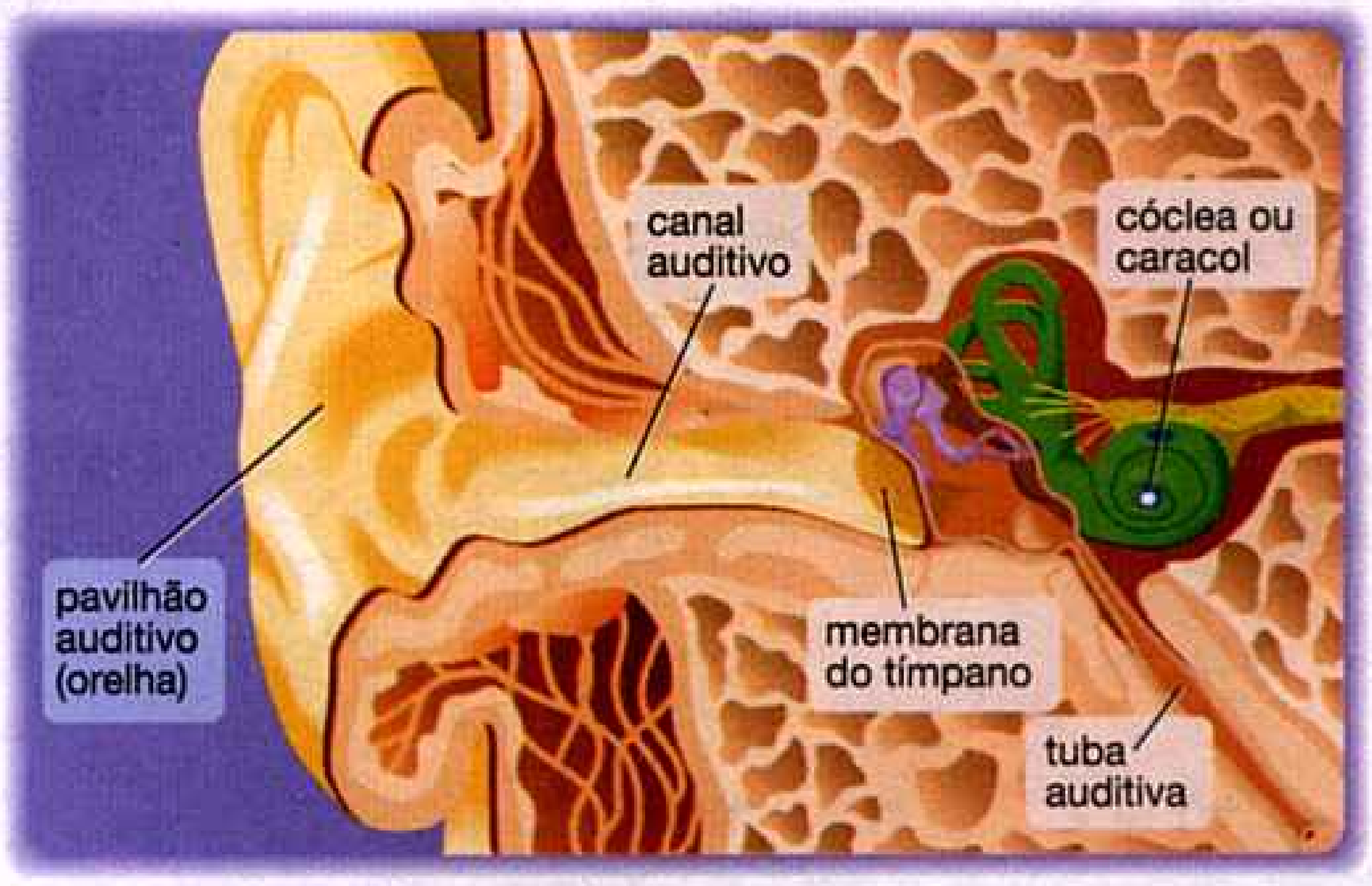
Acústica e logaritmo

A ciência, nas suas várias ramificações, foi beneficiada pelo advento do logaritmo. A título de ilustração, citaremos uma dessas aplicações

Ao estudarmos ondas sonoras, percebemos que o som apresenta características como: altura, intensidade e timbre.

No caso da ***intensidade*** (I), que representa a potência de uma onda sonora por unidade de área $\left(\frac{W}{m^2}\right)$, encontramos detalhes interessantes como é o caso da limitação auditiva.

Para perceber a onda sonora, o tímpano humano (veja esquema) necessita que ela tenha, no mínimo, uma intensidade $I_0 = 10^{-12}\left(\frac{W}{m^2}\right)$, chamado de *limiar de audibilidade* e, no máximo, de $1\left(\frac{W}{m^2}\right)$, chamado de *limiar da dor.*



O nível sonoro (N) representa a comparação entre a intensidade sonora (I) e o limiar da audibilidade (I_0). A sua unidade mais prática é o decibel (dB).

A grandeza nível sonoro (N) obedece a uma escala logarítmica, sendo definida por:

$$N = 10 \cdot \log \frac{1}{I_0}$$

Podemos relacionar esses conceitos com algumas situações do cotidiano.

- O ouvido humano apresenta lesões irrecuperáveis sempre que é exposto, por um determinado tempo, a níveis sonoros (N) superiores a 80 (dB).
- As unidades bel (B) e decibel (dB) representam uma homenagem ao físico escocês Alexander Graham Bell (1847-1922).