Função modular

Com a abolição das distâncias, os homens passaram a se reconhecer uns aos outros como irmãos... No plano moral nossa sociedade avança tateando. Suas prioridades parecem ser mal-orientadas. Os problemas de espaço a preocupam mais que a procura ética... A matéria a interessa mais que o coração do homem. Este, por sua vez, passeia sobre a Lua, mas não se aproxima de seus semelhantes. Explora as profundezas do oceano e os limites do Universo, porém o seu vizinho mais próximo é para ele um desconhecido.

Elie Wiesel

1. Função modular

Denomina-se função modular a função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, tal que:

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ se } x \geq 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}.$$

Notação: $f(x) = |x|$

Leitura: f de x é igual ao módulo de x.

Domínio: é o conjunto dos números reais: $D(f) = \mathbb{R}$.

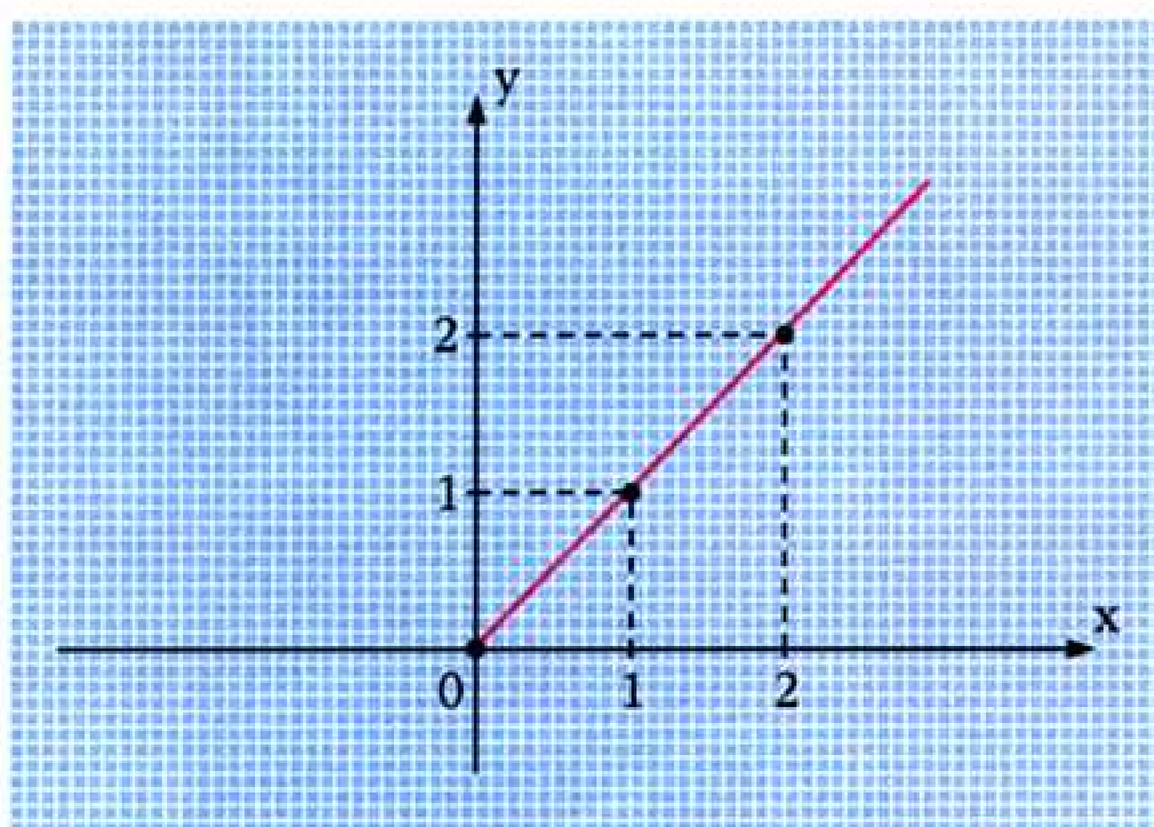
Conjunto imagem é o conjunto dos números reais não-negativos: $Im(f) = \mathbb{R}_+$.

Gráfico da função modular

Como a função modular é definida através de duas sentenças, vamos construir o gráfico para cada sentença e fazer a reunião em um mesmo sistema de eixos.

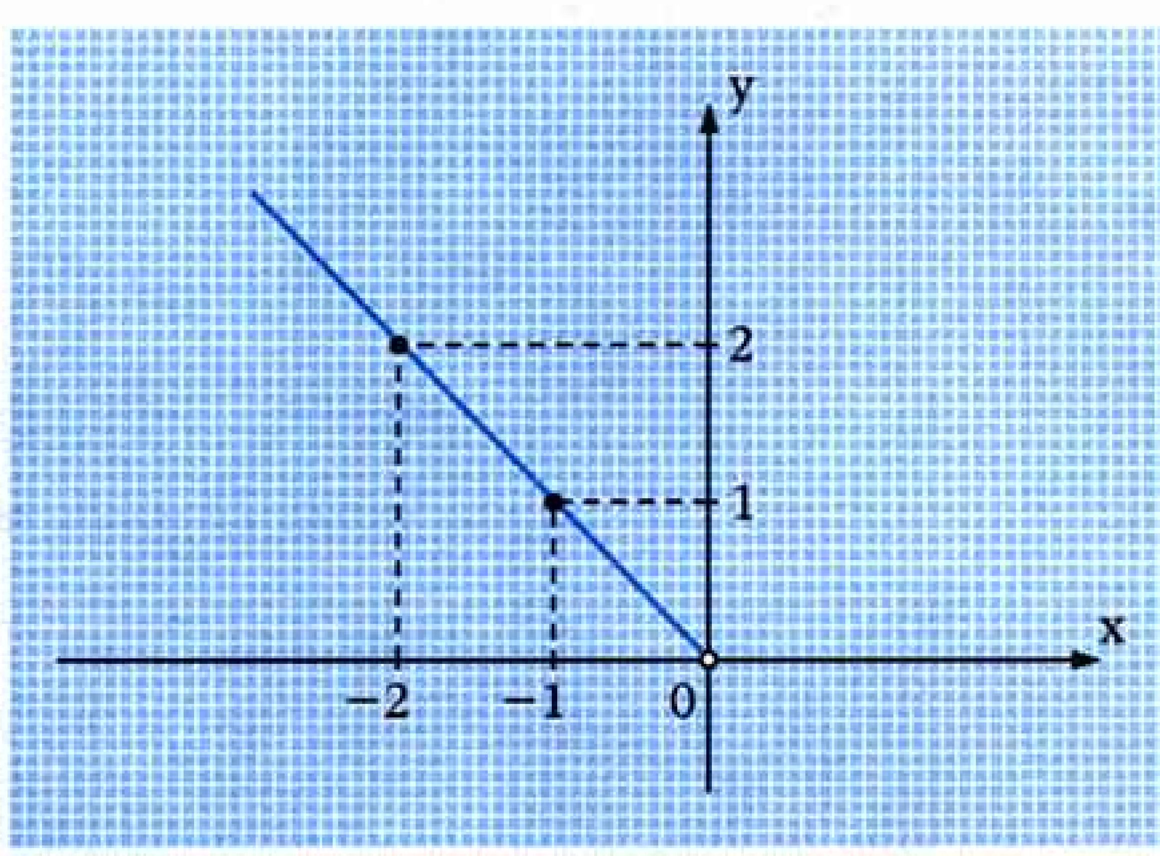
I) $f(x) = x$, se $x \geq 0$

x	y
0	0
1	1
2	2

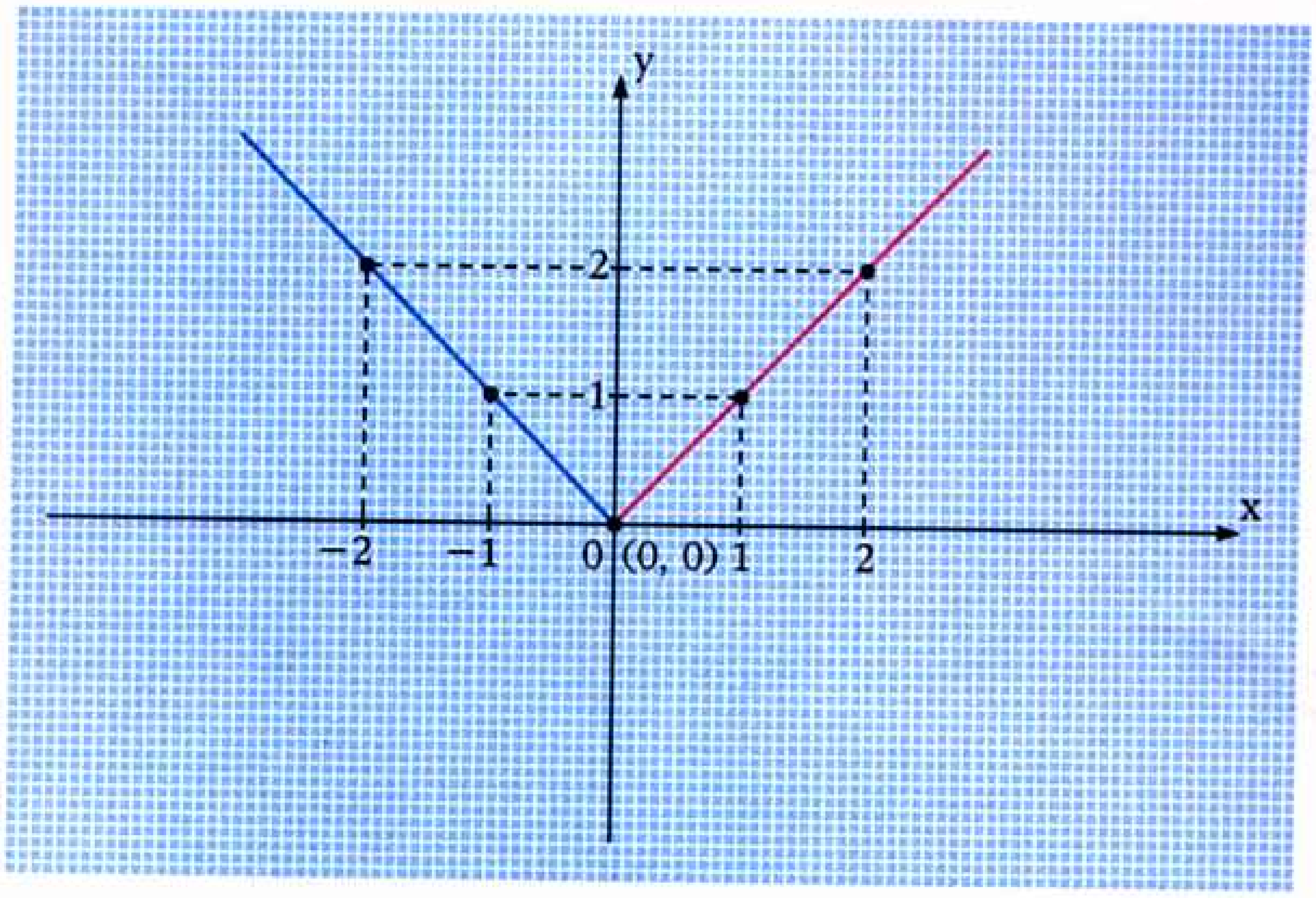


II) $f(x) = -x$, se $x < 0$

x	y
0	0
−1	1
−2	2



Fazendo a reunião dos dois gráficos obtemos o gráfico da função modular.



Observe que as semi-retas que compõem o gráfico são bissetrizes do 1º e 2º quadrantes e têm origem no ponto (0, 0).

Exercícios

Resolvido

Esboçar o gráfico cartesiano e dar o domínio e o conjunto imagem das funções:

a) $y = |x + 1|$

b) $y = |x| + |x - 2|$

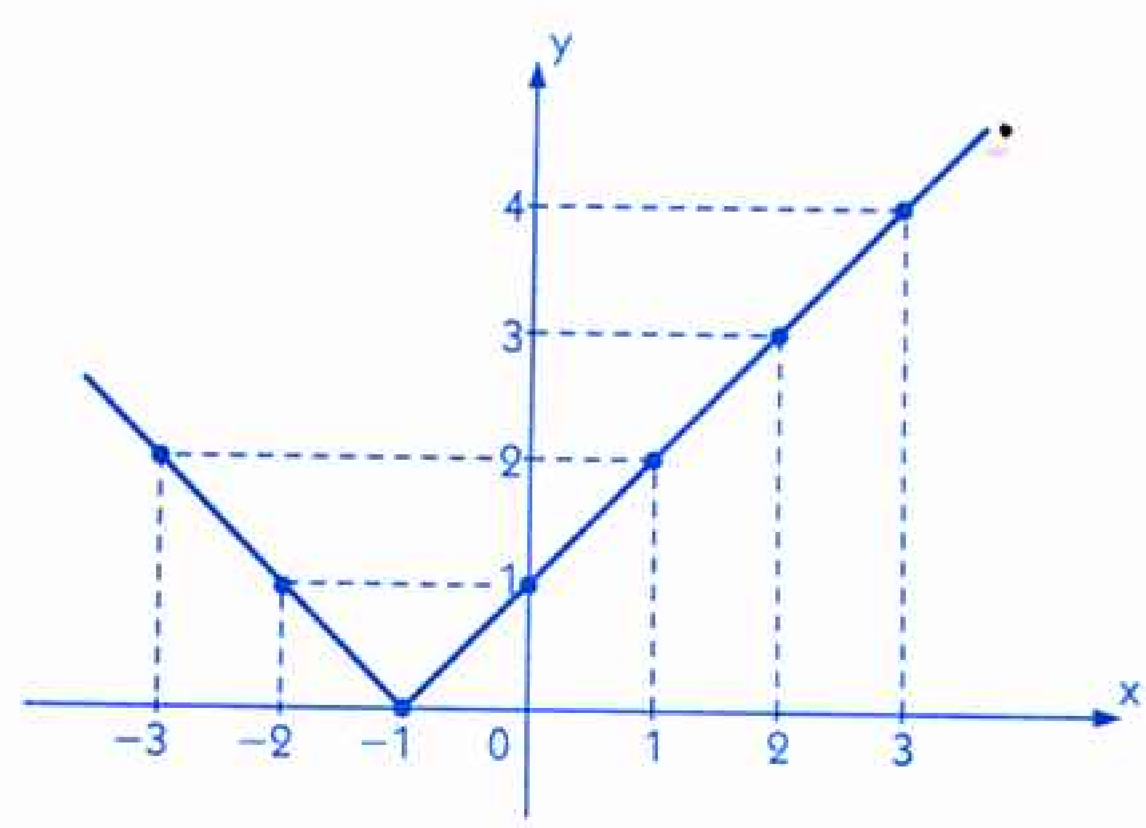
c) $y = |x| - |x - 2|$

d) $y = |x^2 - 3x + 2|$

▶ Nas tabelas há uma coluna com cálculo auxiliar.

a) $y = |x + 1|$

x	x + 1	y = |x + 1|
−3	−2	2
−2	−1	1
−1	0	0
0	1	1
1	2	2
2	3	3
3	4	4

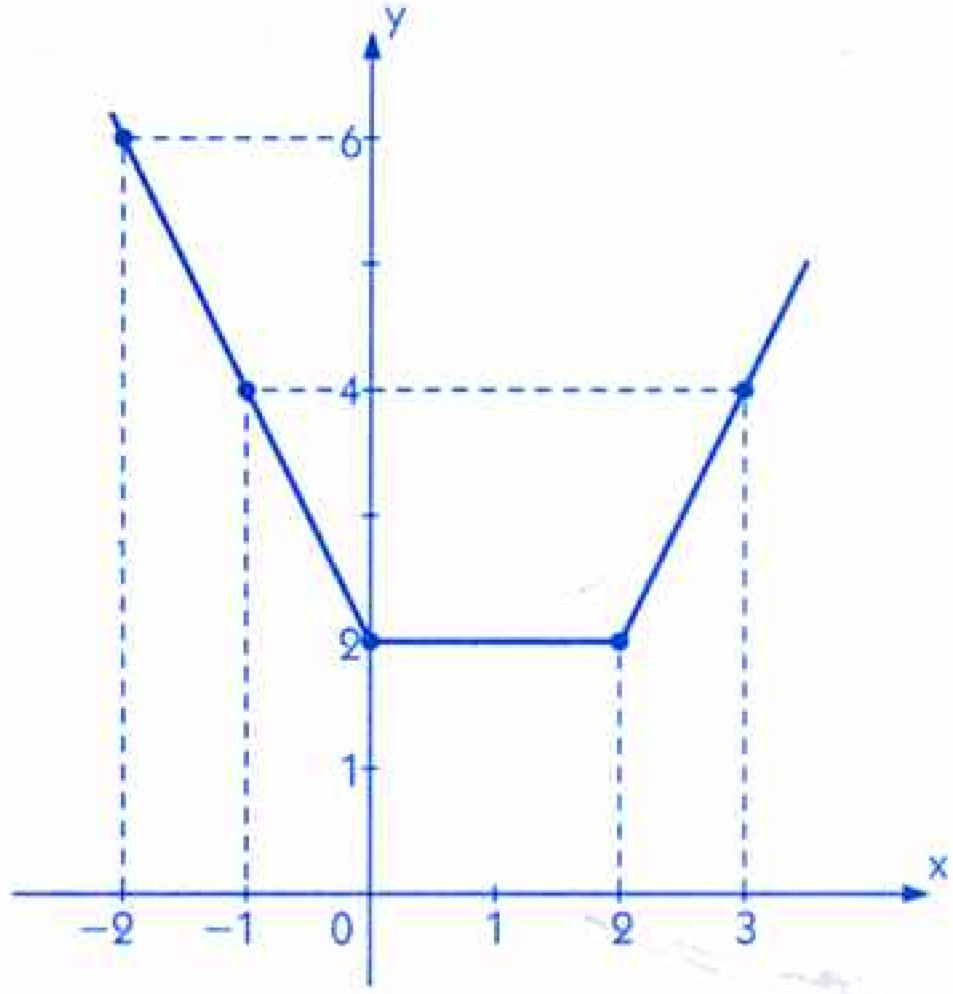


$D(f) = \mathbb{R}$

$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$

b) $y = |x| + |x - 2|$

x	$\|x\| + \|x - 2\|$	$y = \|x\| + \|x - 2\|$
-2	$2 + 4$	6
-1	$1 + 3$	4
0	$0 + 2$	2
1	$1 + 1$	2
2	$2 + 0$	2
3	$3 + 1$	4

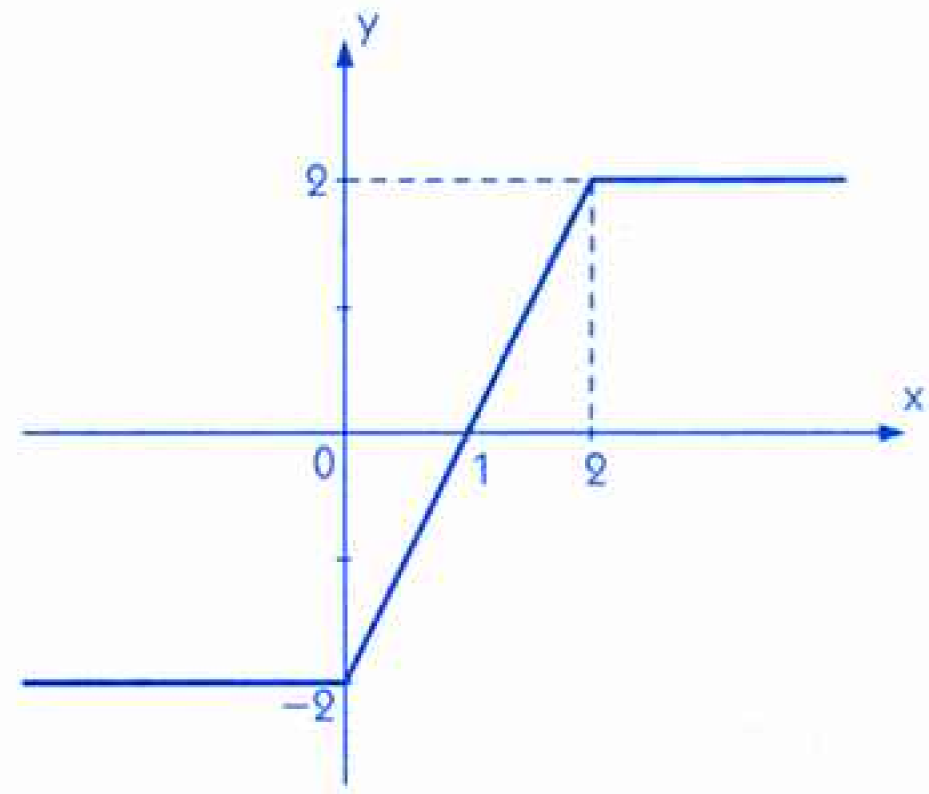


$D(f) = \mathbb{R}$

$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 2\}$

c) $y = |x| - |x - 2|$

x	$\|x\| - \|x - 2\|$	$y = \|x\| - \|x - 2\|$
-3	$3 - 5$	-2
-2	$2 - 4$	-2
-1	$1 - 3$	-2
0	$0 - 2$	-2
1	$1 - 1$	0
2	$2 - 0$	2
3	$3 - 1$	2



$D(f) = \mathbb{R}$

$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -2 \leq y \leq 2\}$

d) $y = |x^2 - 3x + 2|$

Cálculos auxiliares

Para a função quadrática $f(x) = x^2 - 3x + 2$, vamos calcular:

Zeros da função

$a = 1, b = -3$ e $c = 2$

$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2$

$\Delta = 9 - 8$

$\Delta = 1$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$x' = 1$

$x'' = 2$

Coordenadas do vértice

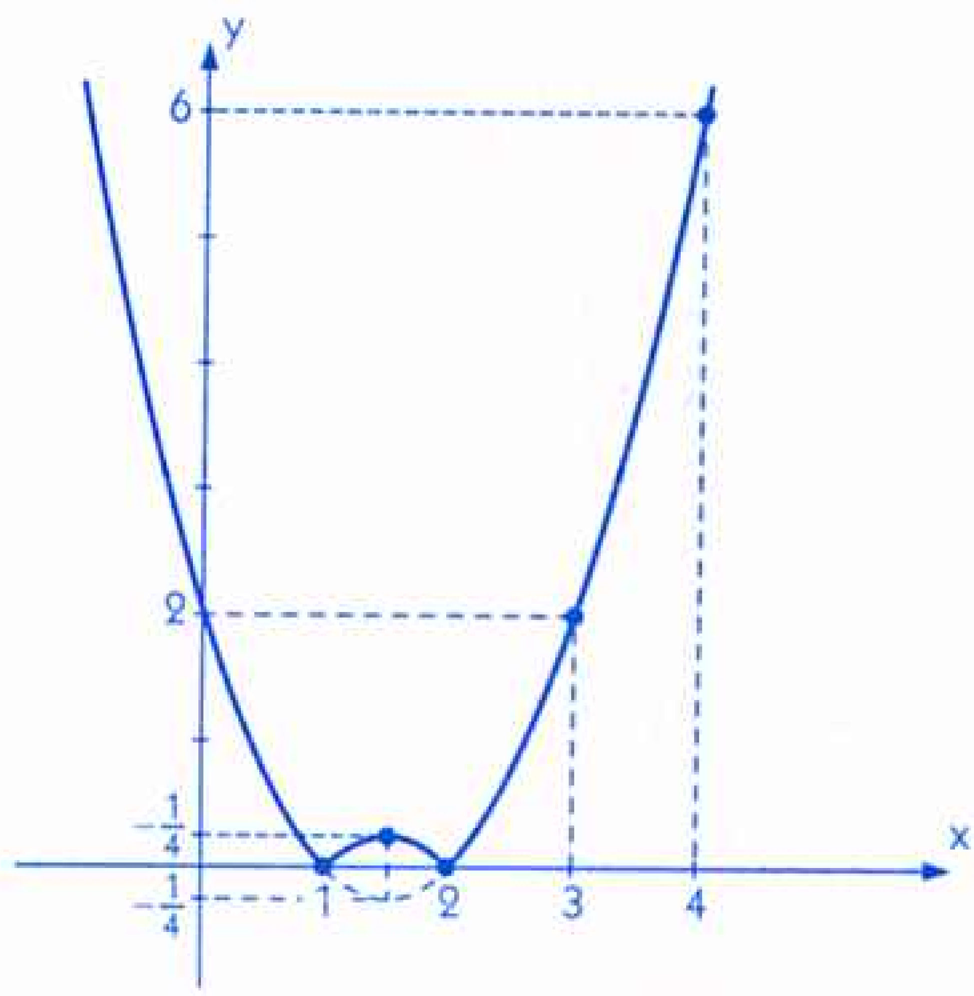
$$x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{3}{2}$$

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{1}{4}$$

$D(f) = \mathbb{R}$

$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$

x	$x^2 - 3x + 2$	$y = \|x^2 - 3x + 2\|$
0	2	2
1	0	0
2	0	0
3	2	2
4	6	6



Propostos

440 Para cada função dada pela lei, determine o domínio e o conjunto imagem e faça o esboço do gráfico:

a) $y = |x - 1|$

b) $y = |x| + 1$

c) $y = |x - 2| + 2$

d) $y = |x + 1| + |x - 2|$

441 Construa o esboço do gráfico, determine o domínio e o conjunto imagem das seguintes funções:

a) $y = |x^2 - 5x + 6|$

b) $y = |x^2 - 3x|$

c) $y = ||x + 1| - x|$

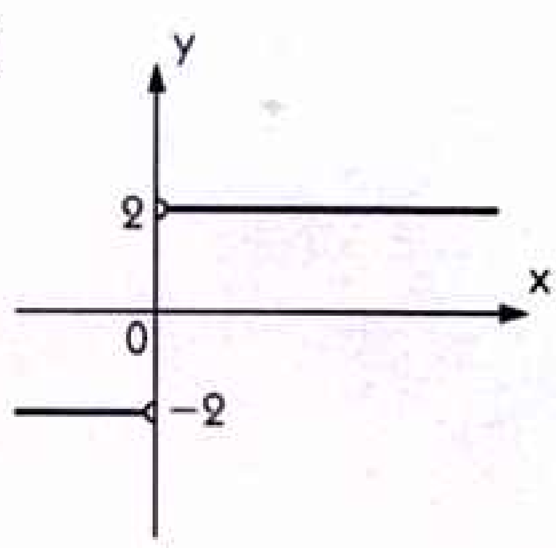
442 (EEM-SP) No plano cartesiano (x, y) esboce os gráficos, no intervalo $-1 \leq x \leq 1$, das curvas:

a) $y = x^2$

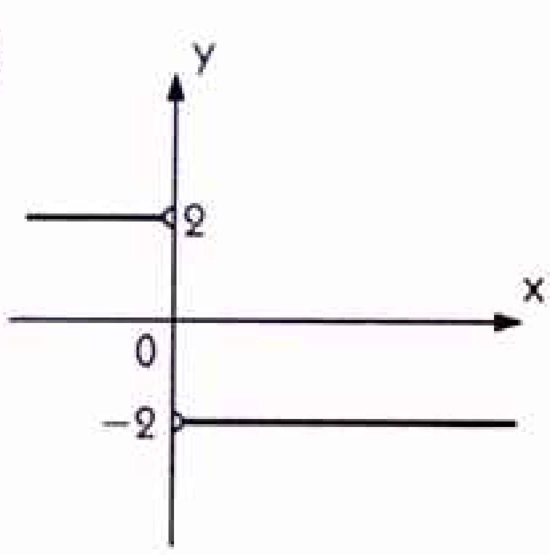
b) $y = x \cdot |x|$

443 (Mack-SP) O gráfico que melhor representa a função $f: \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R}$ definida por $y = \dfrac{2\,|x - 2|}{x - 2}$ é:

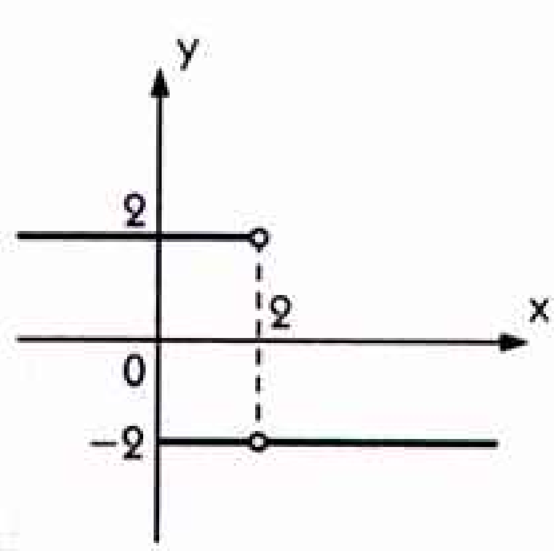
a)



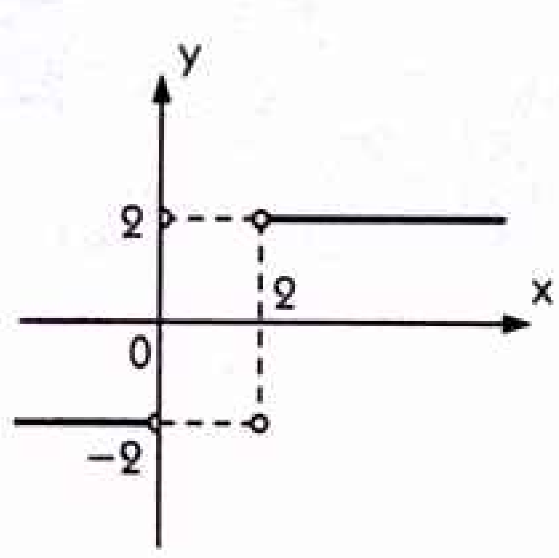
b)



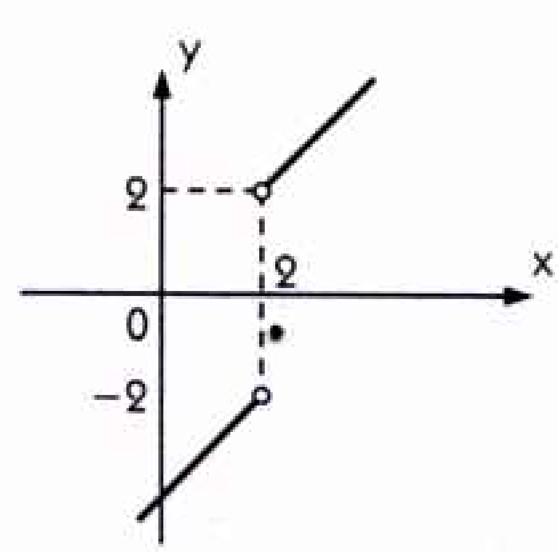
c)



d)



e)



2. Equações modulares

Equações modulares são equações onde a incógnita aparece em módulo.
Na equação modular mais simples temos:

$$|x| = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = a, \text{ se } x \geqslant 0 \\ -x = a, \text{ se } x < 0 \text{ ou } x = -a, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

A sua resolução fundamenta-se nas condições acima.

Exercícios

Resolvidos

1 Determinar no campo dos números reais o conjunto solução das equações:

a) $|x - 3| = 5$

b) $\left|\frac{3x + 2}{4}\right| = 2$

a) $|x - 3| = 5$

Inicialmente devemos estabelecer as duas condições e, em seguida, resolver cada uma das equações e fazer a reunião das soluções.

1ª parte:

$x - 3 = 5$
$x = 8$

2ª parte:

$x - 3 = -5$
$x = -2$

$S = \{-2; 8\}$

b) $\left|\frac{3x + 2}{4}\right| = 2$

1ª parte:

$\frac{3x + 2}{4} = 2$

$3x + 2 = 8$

$3x = 6$

$x = 2$

2ª parte:

$\frac{3x + 2}{4} = -2$

$3x + 2 = -8$

$3x = -10$

$x = -\frac{10}{3}$

$S = \left\{-\frac{10}{3}, 2\right\}$

2 Resolver em $\mathbb{R}$ as equações:

a) $|4x - 6| = x - 3$

b) $|x|^2 - 3|x| + 2 = 0$

a) $|4x - 6| = x - 3$

Para este tipo de equação devemos impor uma condição inicial, pois $x - 3$ é resultado de $|4x - 6|$; logo, deve ser maior ou igual a zero.
($|x| = y$ só está definido para $y \geqslant 0$)

Condição inicial

$x - 3 \geq 0$ ou $x \geq 3$

1ª parte:

$|4x - 6| = x - 3$

$4x - 6 = x - 3$

$3x = 3$

$x = 1$

não convém, pois *x* deve ser maior ou igual a 3

Então, $S = \varnothing$

2ª parte:

$|4x - 6| = x - 3$

$4x - 6 = -x + 3$

$5x = 3$

$x = \frac{9}{5}$

não convém, pois *x* deve ser maior ou igual a 3

b) $|x|^2 - 3|x| + 2 = 0$

1ª parte:

se $x \geq 0$, então $|x|^2 = x^2$ e $|x| = x$

$|x|^2 - 3|x| + 2 = 0 \Rightarrow$

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$a = 1$, $b = -3$ e $c = 2$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2$

$\Delta = 1$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} \quad \begin{cases} x' = 2 \\ x'' = 1 \end{cases}$$

2ª parte:

se $x < 0$, então $|x|^2 = x^2$ e $|x| = -x$

$|x|^2 - 3|x| + 2 = 0 \Rightarrow$

$x^2 + 3x + 2 = 0$

$a = 1$, $b = 3$ e $c = 2$

$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2$

$\Delta = 1$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} \quad \begin{cases} x' = -1 \\ x'' = -2 \end{cases}$$

$V = \{-2, -1, 1, 2\}$

Propostos

444 Determine, no campo dos números reais, o conjunto verdade das equações:

a) $|4 + x| = 2$

b) $|2 + x| = 3$

c) $|3x - 1| = 4$

d) $|2x - 5| + 3 = 4$

e) $\left|\frac{x - 4}{2}\right| = 1$

f) $\left|\frac{2x - 3}{4}\right| = \frac{1}{2}$

445 Resolva em $\mathbb{R}$, as equações:

a) $|2x - 1| = x + 3$

b) $|4x + 5| = x + 2$

c) $|4 - 5x| = 4 - 5x$

d) $|2x^2 - 3x + 1| = 1$

e) $|x^2 - 1| = 2x - 1$

446 Resolva em $\mathbb{R}$ as equações:

a) $|x|^2 - 4|x| + 3 = 0$

b) $|x|^2 + |x| - 6 = 0$

c) $3|x|^2 = 2|x| + 1$

3. Inequações modulares

Considerando a definição de módulo de x, podemos resolver as inequações modulares, analisando os casos:

1º caso

$$|x| > a \Leftrightarrow \begin{cases} x > a \\ \text{ou} \\ x < -a \end{cases} \quad (\text{com } a > 0)$$

2º caso

$$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a \quad (\text{com } a > 0)$$

Exercícios

Resolvidos

1 Resolver, em $\mathbb{R}$, as inequações:

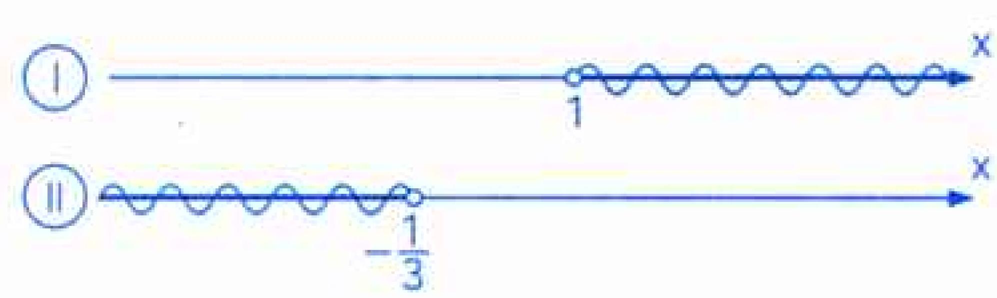
a) $|3x - 1| > 2$

b) $|x + 3| \leqslant 1$

a) $|3x - 1| > 2$

Aplicando a condição do 1º caso, vem:

$$|3x - 1| > 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 1 > 2 \Rightarrow x > 1 \\ 3x - 1 < -2 \Rightarrow x < -\frac{1}{3} \end{cases}$$



Fazendo a reunião das soluções parciais, obtemos o conjunto verdade:

$V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{1}{3} \text{ ou } x > 1\right\}$

b) $|x + 3| \leqslant 1$

Aplicando a condição do 2º caso, vem:

$$|x + 3| \leqslant 1 \Leftrightarrow -1 \leqslant x + 3 \leqslant 1$$
$$-1 - 3 \leqslant x \leqslant 1 - 3$$
$$-4 \leqslant x \leqslant -2$$

Assim, obtemos o conjunto verdade:

$V = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leqslant x \leqslant -2\}$

2 Determinar, no campo dos reais, o conjunto verdade da inequação: $\left|\dfrac{2x-1}{x-2}\right| < 1$.

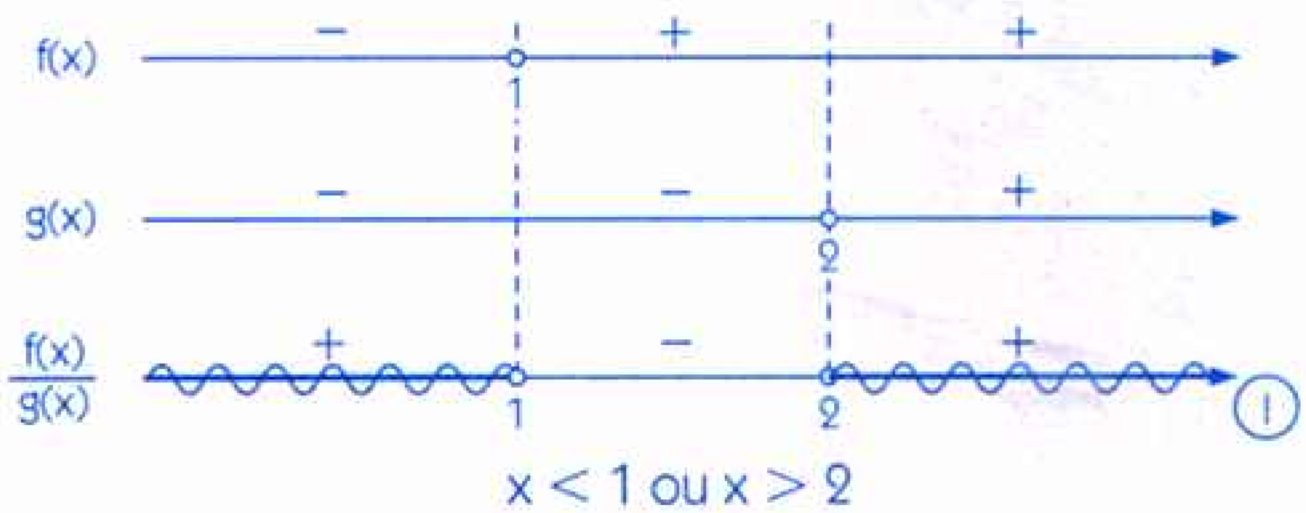
$$\left|\frac{2x-1}{x-2}\right| < 1$$

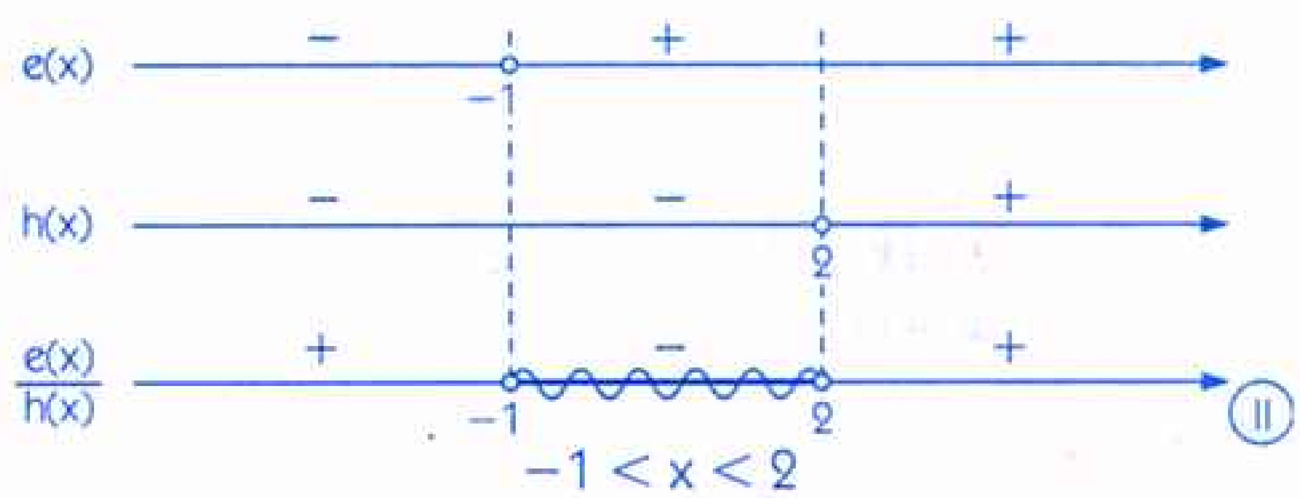
Aplicando a condição do 2º caso, vem:

$$\left|\frac{2x-1}{x-2}\right| < 1 \Leftrightarrow -1 < \frac{2x-1}{x-2} < 1$$

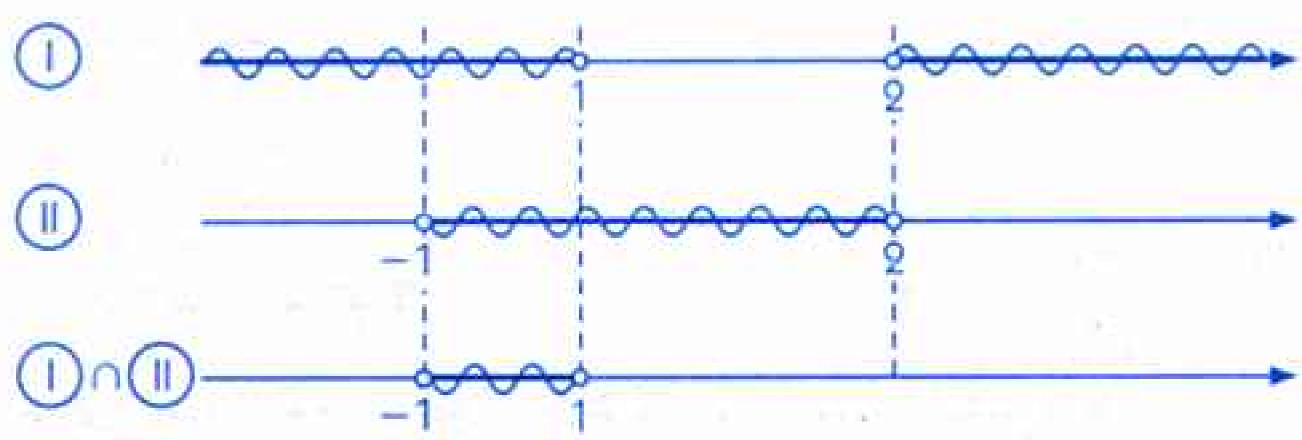
Resolvendo a desigualdade em forma de sistema, temos:

$$\begin{cases} \dfrac{2x-1}{x-2} > -1 \Rightarrow \dfrac{3x-3}{x-2} > 0 \\ f(x) = 3x - 3 \text{ e } g(x) = x - 2 \\ \text{e} \\ \dfrac{2x-1}{x-2} < 1 \Rightarrow \dfrac{x+1}{x-2} < 0 \\ e(x) = x + 1 \text{ e } h(x) = x - 2 \end{cases}$$





Fazendo a intersecção das soluções parciais, obtemos a solução final:



$V = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$

Propostos

447 Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações:

a) $|x + 4| > 1$

b) $|x + 1| < 3$

c) $|3x - 4| \leqslant 1$

d) $|-x + 1| \geqslant \dfrac{1}{2}$

448 Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações:

a) $|x^2 - x| > 2$

b) $|x^2 - 3x + 2| > 0$

c) $|x^2 - 6| < 3$

449 Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações:

a) $\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right| > 2$

b) $\left|\dfrac{2x-3}{x+2}\right| < 1$

c) $\left|\dfrac{x-1}{x}\right| \leqslant 1$ (em $\mathbb{R}^*$)

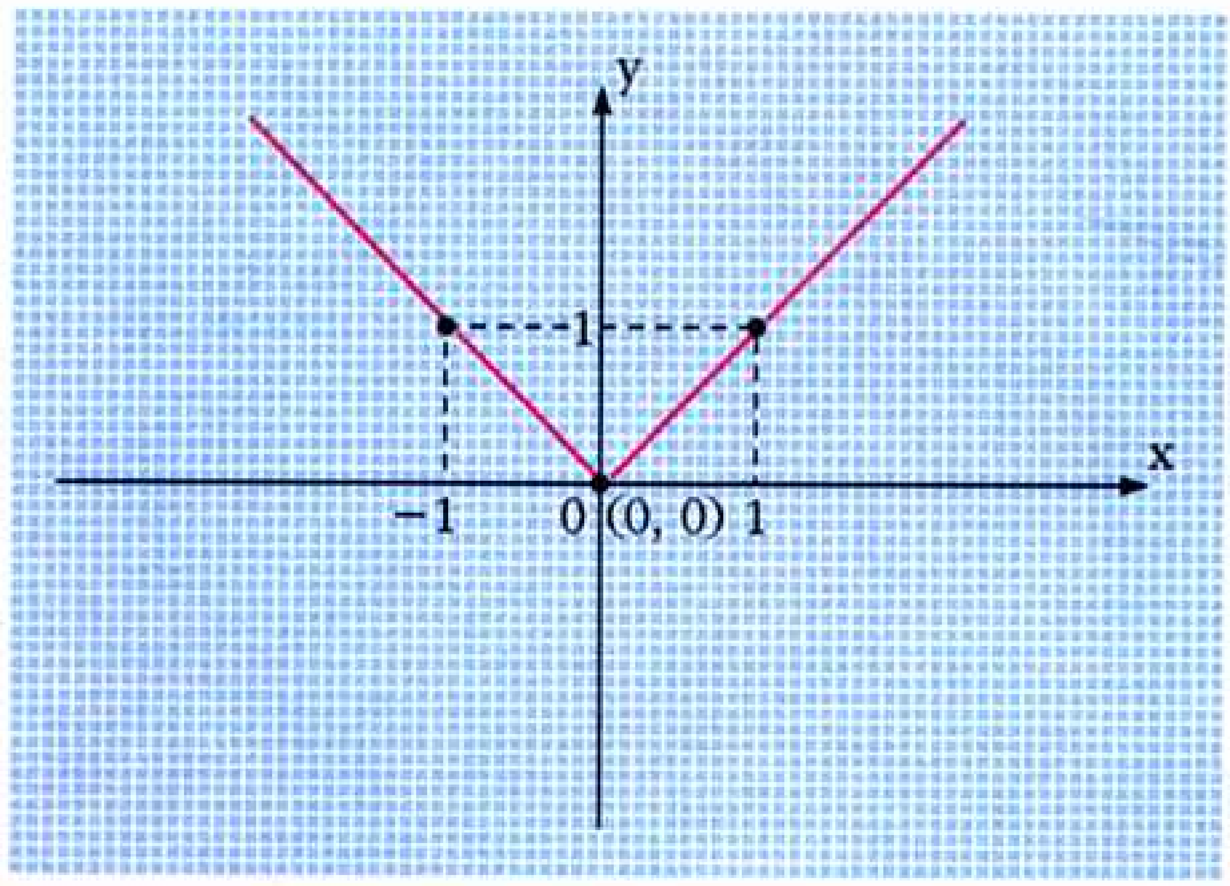
d) $\left|\dfrac{x+3}{-x-1}\right| > \dfrac{1}{4}$

Ficha-resumo

Função modular

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \text{ sendo } f(x) = \begin{cases} x, \text{ se } x \geqslant 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Notação: $f(x) = |x|$



$D(f) = \mathbb{R}$
$Im(f) = \mathbb{R}_+$

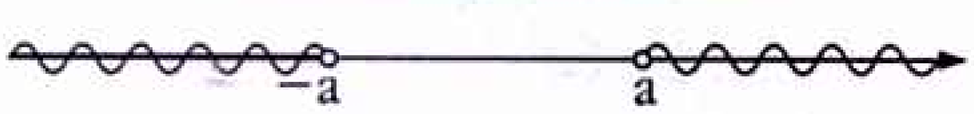
Equação modular

$$|x| = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = a, \text{ se } x \geqslant 0 \\ x = -a, \text{ se } x < 0, \text{ então } S = \{-a, a\} \end{cases}$$

Inequação modular

1º caso

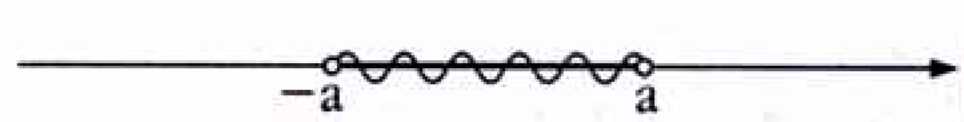
$$|x| > a \Leftrightarrow \begin{cases} x > a \\ \text{ou} \\ x < -a \end{cases}$$
com $a > 0$



$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -a \text{ ou } x > a\}$

2º caso

$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$
com $a > 0$



$V = \{x \in \mathbb{R} \mid -a < x < a\}$

Exercícios

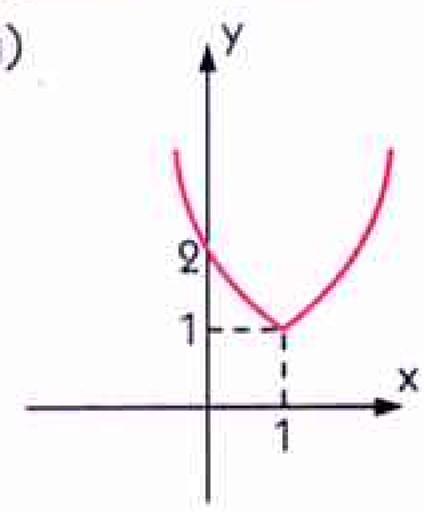
Complementares

450 (FAAP-SP) Esboce o gráfico de $y = \frac{x}{|x|}$.

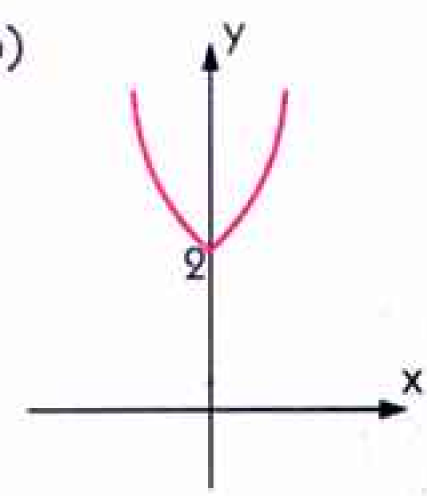
451 Qual é o conjunto imagem da função definida por: $f(x) = |x^2 - 7x + 12|$, com $3 \leq x \leq 4$?

452 (UFBA) O esboço gráfico da função $f(x) = 2^{|1-x|}$ é:

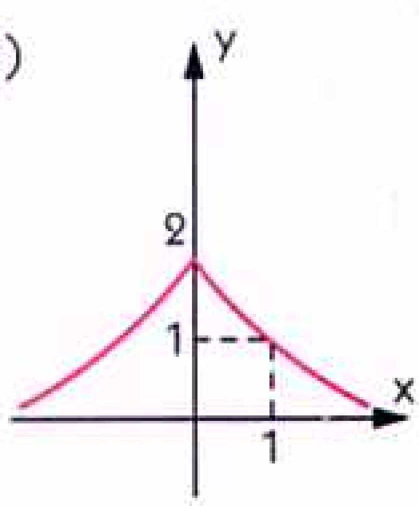
a)



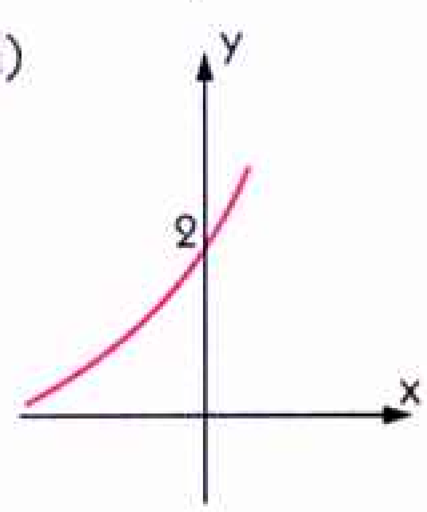
b)



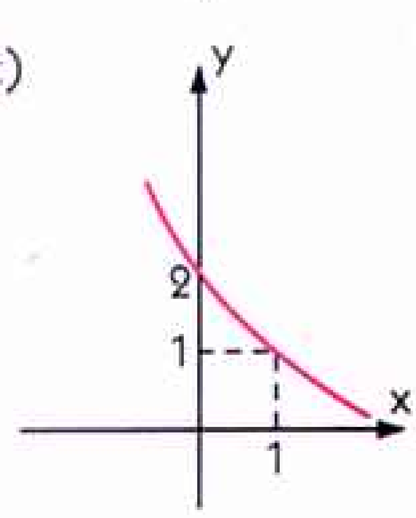
c)



d)



e)



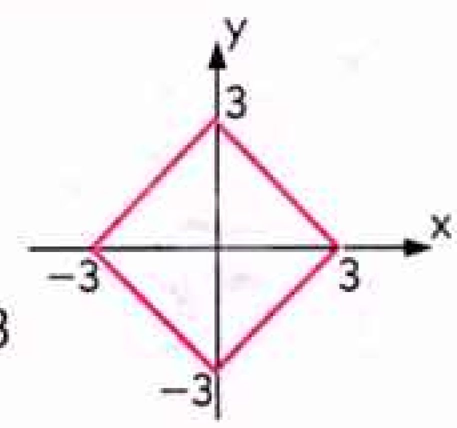
453 (Fuvest-SP) Esboçar os gráficos das seguintes funções:

a) $f(x) = 2^x$

b) $g(x) = |2^x - 2|$

454 (Fuvest-SP) Resolva a inequação $x|x| > x$.

455 (Mack-SP) A figura é gráfico de:



a) $|x + y| = 3$

b) $|x| + |y| = 3$

c) $x^2 + y^2 = 9$

d) $|x| = 3$ e $|y| = 3$

e) $|x - y| = 3$

456 Determine o conjunto verdade da equação: $|x - 1| = 1 - |x - 2|$

457 (FEI-SP) Resolver a seguinte equação: $|x - 1| + |x + 2| = 3$

458 Resolver $|x^2 - 1| = x^2 - 1$.

459 Resolver a inequação $\left|\frac{x}{2 - x}\right| \geq 1$.

460 (Cesgranrio-RJ) Seja *f* a função definida no intervalo aberto $]-1, 1[$ por $f(x) = \frac{x}{1 - |x|}$; então $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ é:

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{4}$

c) $-\frac{1}{2}$

d) -1

e) -2

461 (FGV-SP) Relativamente à função *f*, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, dada por $f(x) = |x| + |x - 1|$, é correto afirmar que:

a) o gráfico de *f* é a reunião de duas semi-retas

b) o conjunto imagem de *f* é o intervalo $[1, +\infty[$

c) *f* é crescente para todo $x \in \mathbb{R}$

d) *f* é decrescente para todo $x \in \mathbb{R}$ e $x \geq 0$

e) o valor mínimo de *f* é 0

Saiba um pouco mais

Insetos

As abelhas contam objetos e se orientam

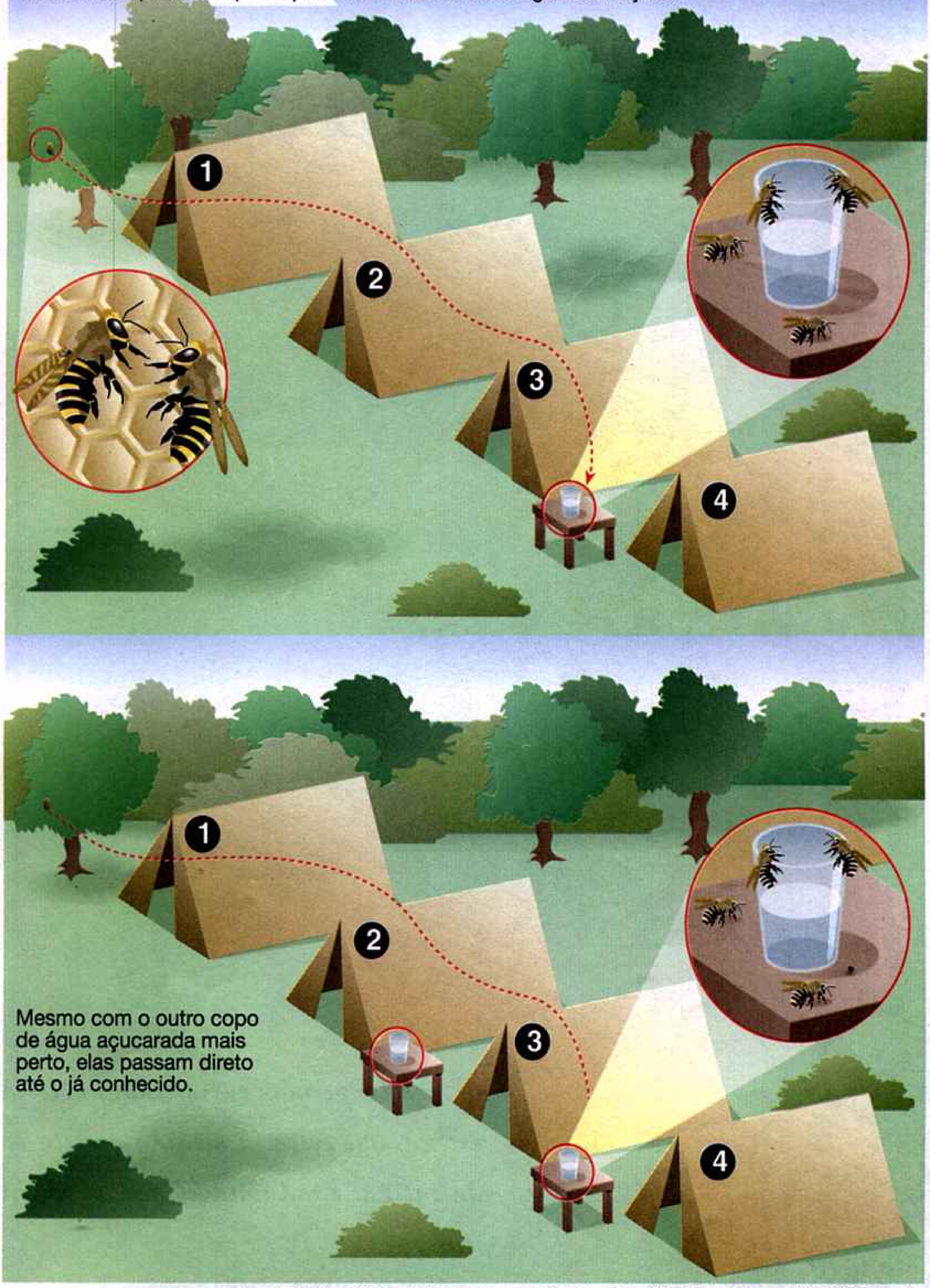
O faro delas está nas antenas: delicados sensores identificam no ar o "cheiro" de flores com néctar. Mas as abelhas podem voltar à fonte de alimento orientadas apenas pela visão. A descoberta é de dois entomologistas (especialistas em insetos) da Universidade Livre de Berlim, Alemanha. Lars Chittka e Karl Geiger treinaram os insetos para buscar água com açúcar num copo a 230 metros da colmeia. E perceberam que eles voltavam à comida "contando" o número de barracas até lá (*veja o infográfico).* Mesmo trocando os marcos de lugar, as abelhas iam direto até a terceira barraca.

David Maitland/Keystone

As abelhas utilizam suas antenas para identificar flores com néctar.

O roteiro da comida

As abelhas aprendem que depois da barraca **3** existe água com açúcar.



Fonte: *Superinteressante*, São Paulo, Abril, n. 6, ano 9, 1995, p. 9.