Trigonometria

A dúvida permite extrair um núcleo de certeza, que cresce à medida que ela se radicaliza: é indubitável que, se duvido, penso.

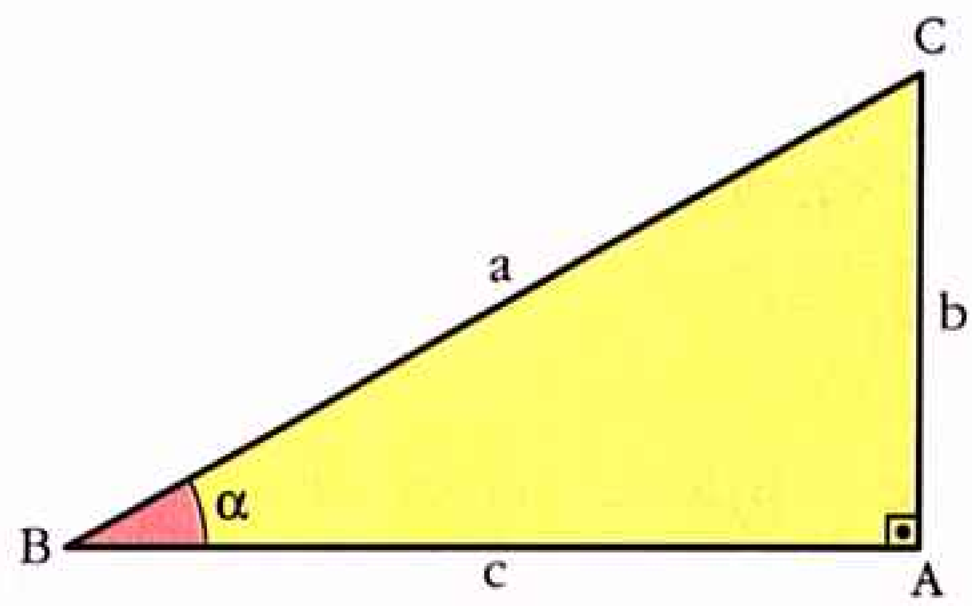
René Descartes

1. Trigonometria no triângulo retângulo

Razões trigonométricas no triângulo retângulo

Num triângulo retângulo, podemos estabelecer razões entre as medidas dos seus lados: catetos (que formam o ângulo reto) e hipotenusa (que se opõe ao ângulo reto).

Consideremos um triânguloABC retângulo em $\hat{A}$ e um ângulo agudo $\hat{B}$ de medida α.



As medidas (na mesma unidade) *a, b* e *c* são, respectivamente, da hipotenusa, do cateto oposto a $\hat{B}$ e do cateto adjacente a $\hat{B}$.

Razão 1 Seno de um ângulo agudo

> **Num triângulo retângulo, o seno de um ângulo agudo é a razão entre as medidas do cateto oposto a esse ângulo e da hipotenusa.**

Então, sen $\hat{B} = \dfrac{b}{a}$; onde sen $\hat{B}$; lê-se "seno de $\hat{B}$".

Também escrevemos sen $\alpha = \dfrac{b}{a}$, onde sen α; lê-se: "seno de α" e entende-se "seno do ângulo de medida α", ou seja:

$$\text{seno de } \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}$$

Razão 2 Cosseno de um ângulo agudo

> **Num triângulo retângulo, o cosseno de um ângulo agudo é a razão entre as medidas do cateto adjacente a esse ângulo e da hipotenusa.**

Então, $\cos \hat{B} = \frac{c}{a}$, onde $\cos \hat{B}$; lê-se: "cosseno de $\hat{B}$".

Também escrevemos $\cos \alpha = \frac{c}{a}$, onde $\cos \alpha$; lê-se: "cosseno de α" e entende-se "cosseno do ângulo de medida α", ou seja:

$$\boxed{\text{cosseno de } \alpha = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}}$$

Razão 3 Tangente de um ângulo agudo

Num triângulo retângulo, a tangente de um ângulo agudo é a razão entre as medidas do cateto oposto e do cateto adjacente a esse ângulo.

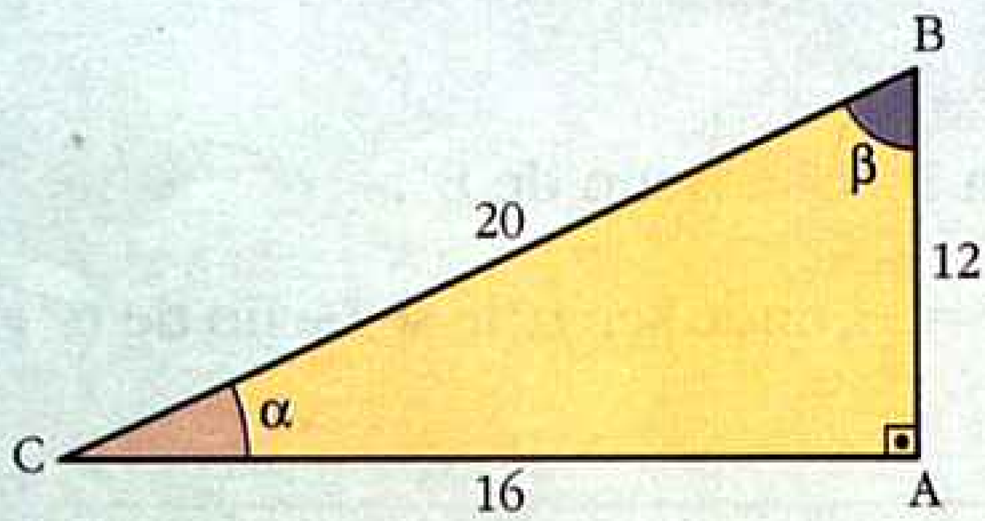
Então, $\text{tg } \hat{B} = \frac{b}{c}$, onde $\text{tg } \hat{B}$; lê-se: "tangente de $\hat{B}$".

Também escrevemos $\text{tg } \alpha = \frac{b}{c}$, onde $\text{tg } \alpha$; lê-se: "tangente de α" e entende-se "tangente do ângulo de medida α", ou seja:

$$\boxed{\text{tangente de } \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}}$$

Exemplos:

a) Consideremos o triângulo ABC, retângulo em *A*.



Então:

$\text{sen } \alpha = \frac{12}{20} = 0,6$ $\quad$ $\text{sen } \beta = \frac{16}{20} = 0,8$

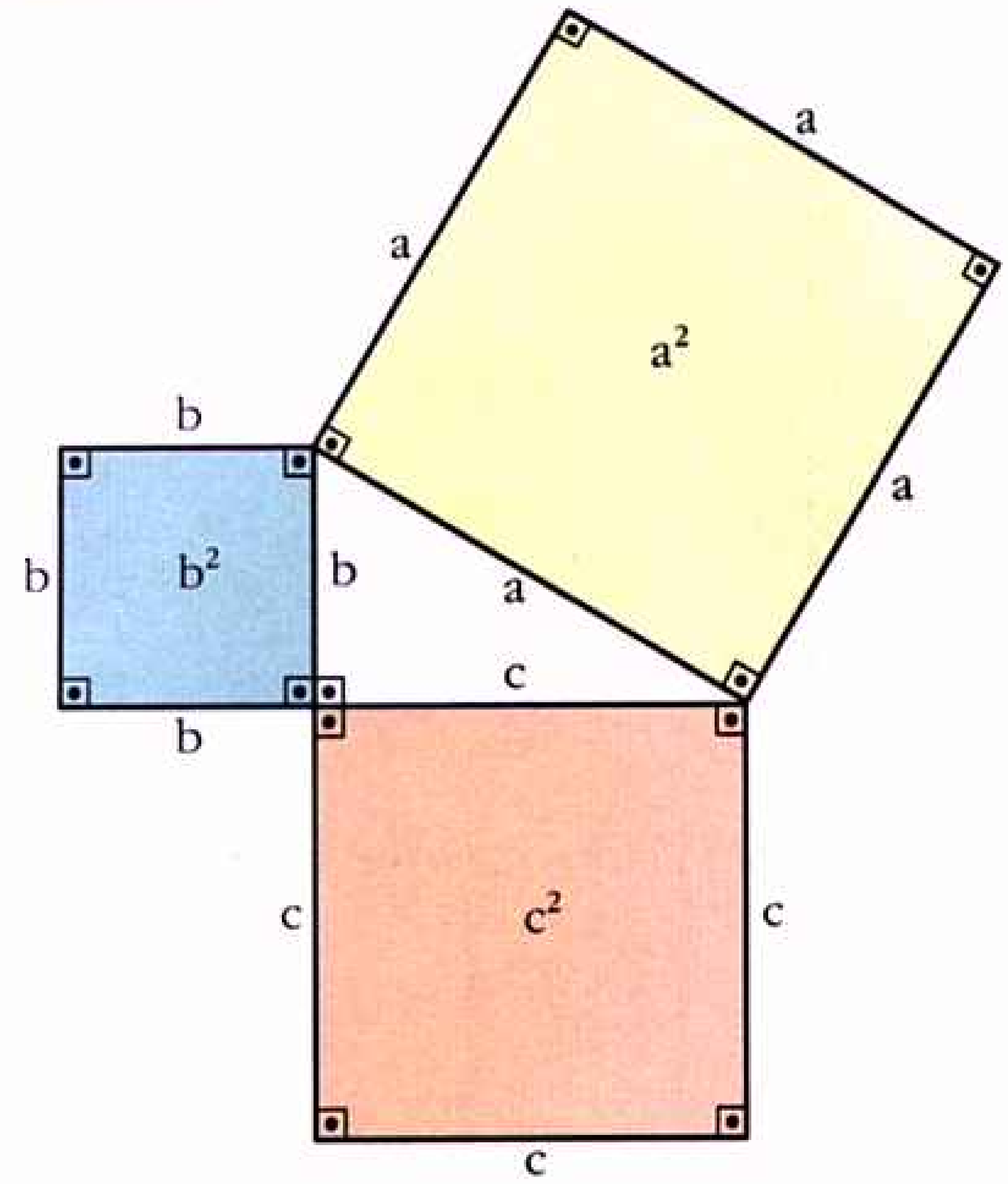
$\cos \alpha = \frac{16}{20} = 0,8$ $\quad$ $\cos \beta = \frac{12}{20} = 0,6$

$\text{tg } \alpha = \frac{12}{16} = 0,75$ $\quad$ $\text{tg } \beta = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$

Teorema de Pitágoras

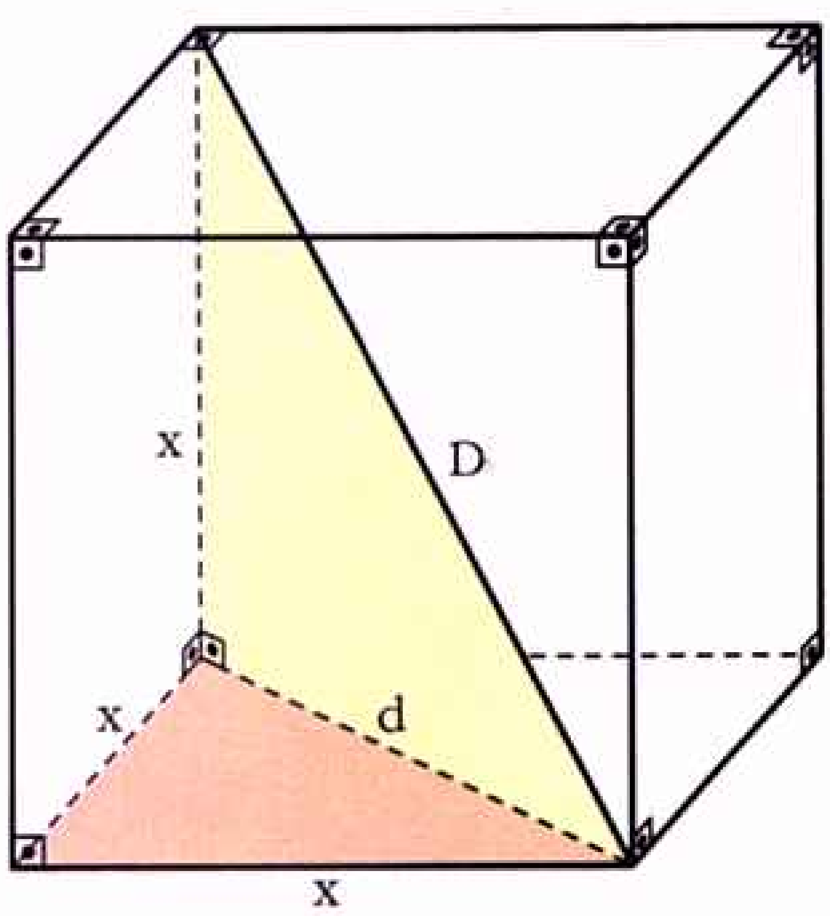
Em todo triângulo retângulo o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

Observe:

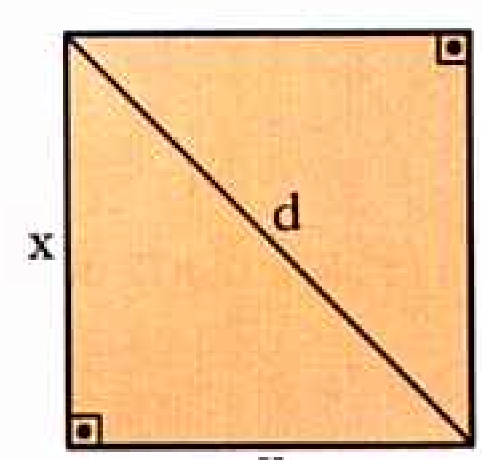


Temos: $\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$

Observe o cubo:

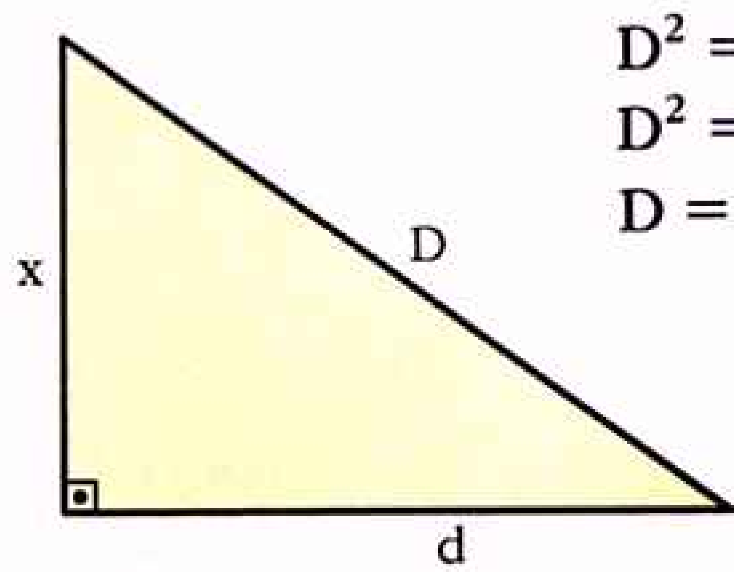


No cubo, como *d* é diagonal da face, temos:



$$d^2 = x^2 + x^2$$
$$d = x\sqrt{2}$$

E ainda podemos fazer:

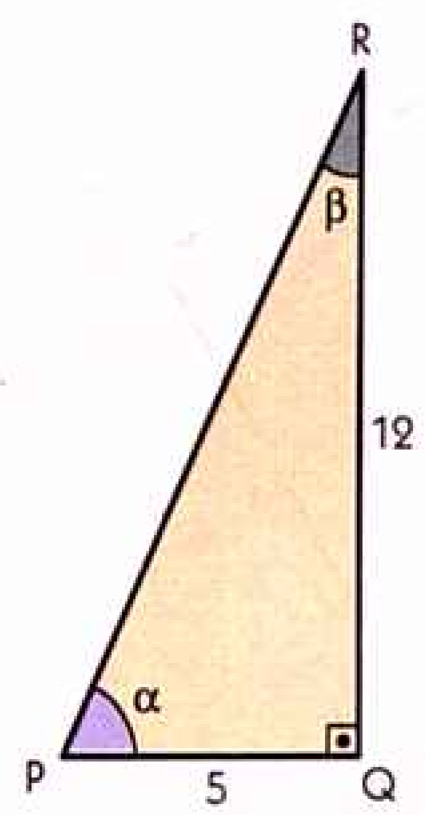


$$D^2 = x^2 + d^2$$
$$D^2 = x^2 + 2x^2$$
$D = x\sqrt{3}$, diagonal do cubo

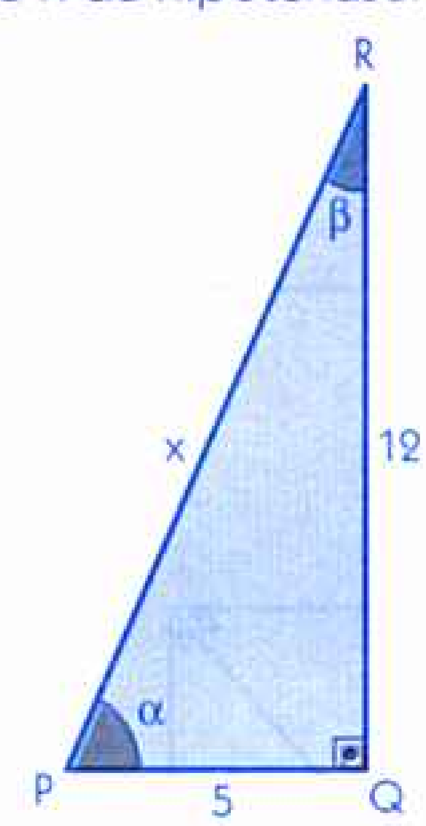
Exercícios

Resolvidos

1 Determinar o valor do seno, cosseno e tangente de α e de β no triângulo PQR.



Nesse caso, devemos calcular inicialmente a medida *x* da hipotenusa. Para isso, aplicaremos o teorema de Pitágoras.



$x^2 = 5^2 + 12^2$
$x^2 = 25 + 144$
$x = \sqrt{169}$
$x = 13$

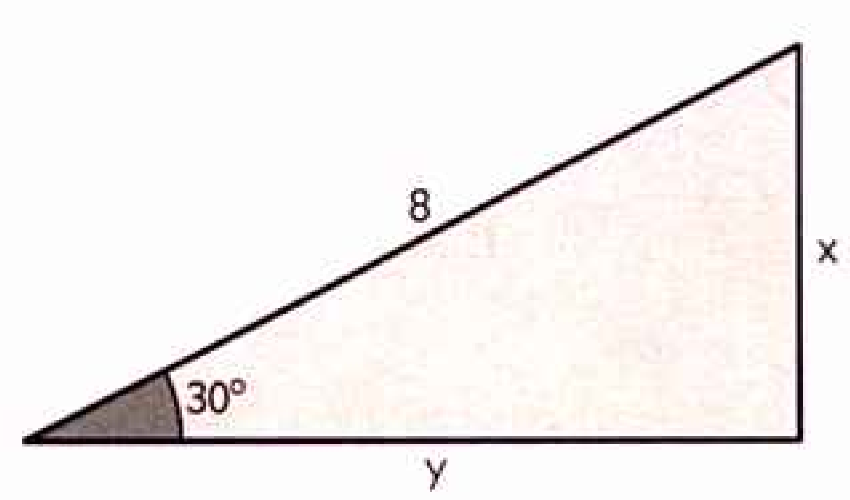
$\text{sen}\ \alpha = \dfrac{12}{13}$ $\qquad$ $\text{sen}\ \beta = \dfrac{5}{13}$

$\cos \alpha = \dfrac{5}{13}$ $\qquad$ $\cos \beta = \dfrac{12}{13}$

$\text{tg}\ \alpha = \dfrac{12}{5} = 2{,}4$ $\qquad$ $\text{tg}\ \beta = \dfrac{5}{12}$

2 Determinar *x* e *y* na figura representada abaixo:

Dado: $\text{sen}\ 30° = \dfrac{1}{2}$



$\text{sen}\ 30° = \dfrac{x}{8} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{x}{8} \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4$

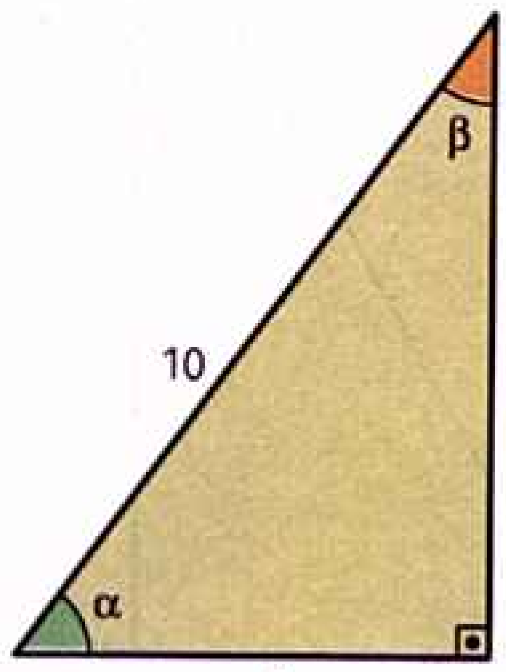
Para o cálculo de *y*, aplicaremos o teorema de Pitágoras:

$8^2 = 4^2 + y^2 \Rightarrow 64 = 16 + y^2 \Rightarrow 48 = y^2 \Rightarrow y = \sqrt{48}$

$y = 4\sqrt{3}$

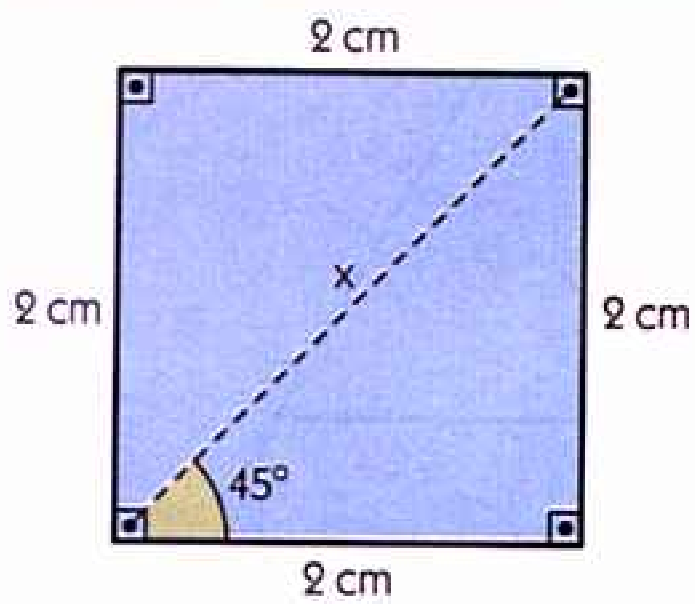
Propostos

462 Considere o triângulo retângulo representado abaixo e determine:



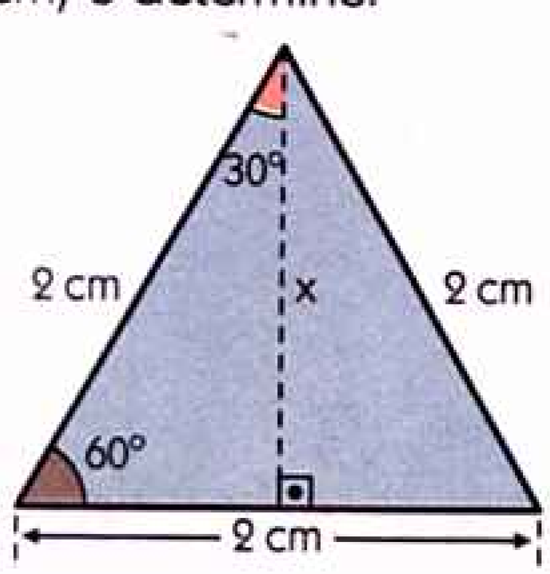
a) sen α
b) cos α
c) tg α
d) $\frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$
e) $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha$
f) sen β
g) cos β
h) tg β
i) $\frac{\text{sen } \beta}{\cos \beta}$
j) $\text{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta$

463 Considere o quadrado representado abaixo, cujo lado mede 2 cm e determine:



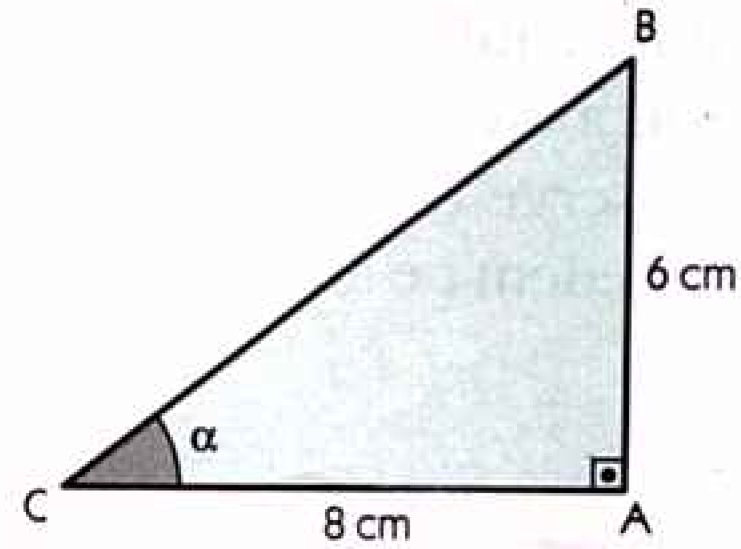
a) o valor de x (aplicando o teorema de Pitágoras)
b) sen 45°
c) cos 45°
d) tg 45°

464 Considere o triângulo eqüilátero, cujo lado mede 2 cm, e determine:



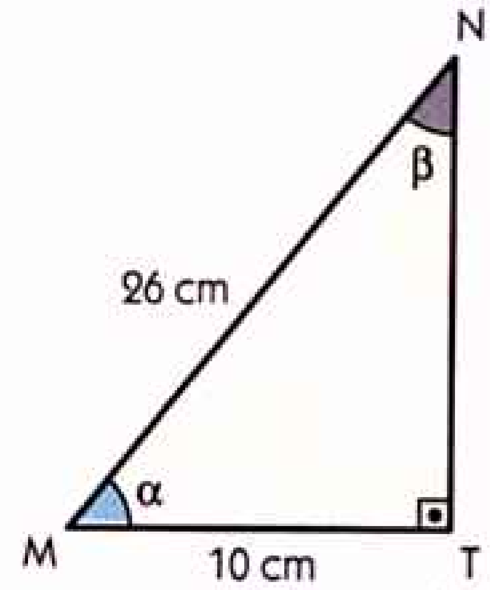
a) sen 30°
b) cos 30°
c) tg 30°
d) sen 60°
e) cos 60°
f) tg 60°

465 Dado o triângulo retângulo ABC, calcule:



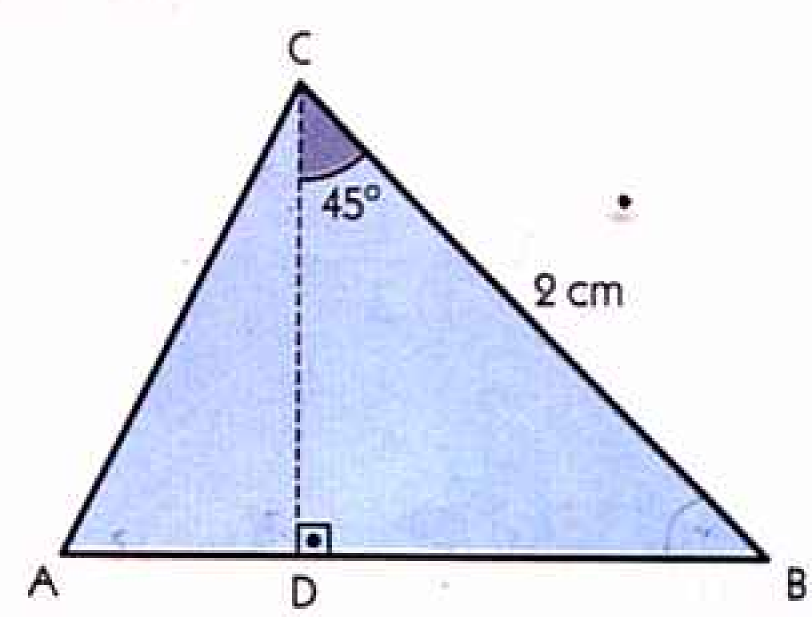
a) sen α
b) cos α

466 Dado o triângulo retângulo MNT, calcule:



a) sen β
b) cos β
c) tg α

467 (Mack-SP) Na figura, o perímetro do triângulo BCD é:

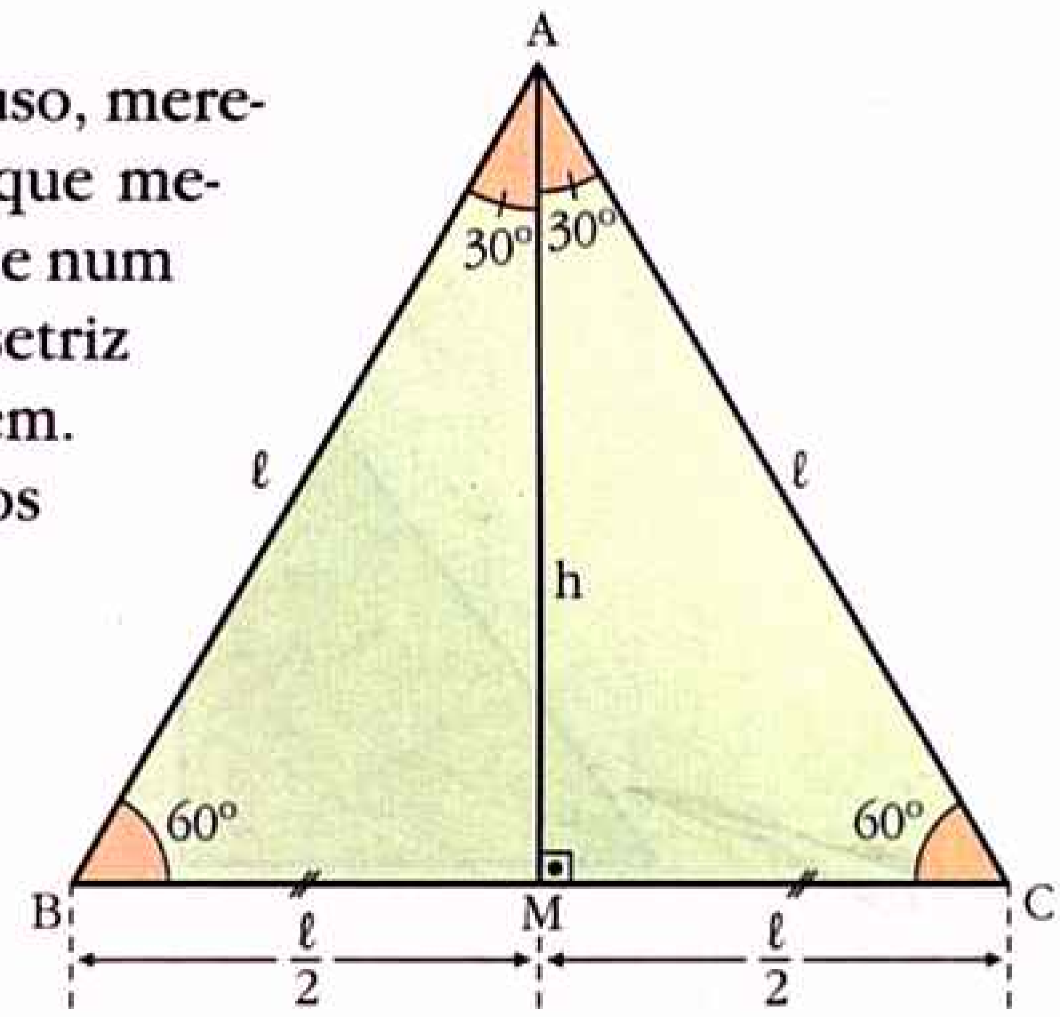


a) $(\sqrt{2} + 1)$ cm
b) $4(\sqrt{2} + 1)$ cm
c) 4 cm
d) $2(\sqrt{2} + 1)$ cm
e) $2\sqrt{2}$ cm

Ângulos notáveis: 30º, 45º e 60º

Alguns ângulos, devido ao seu constante uso, merecem um estudo especial. É o caso daqueles que medem 30° e 60°. Para tanto, vamos considerar que num triângulo eqüilátero a mediana, a altura e a bissetriz relativas a um mesmo ângulo interno coincidem.

Observe o triângulo eqüilátero ABC, cujos lados medem ℓ e alturas medem *h*.



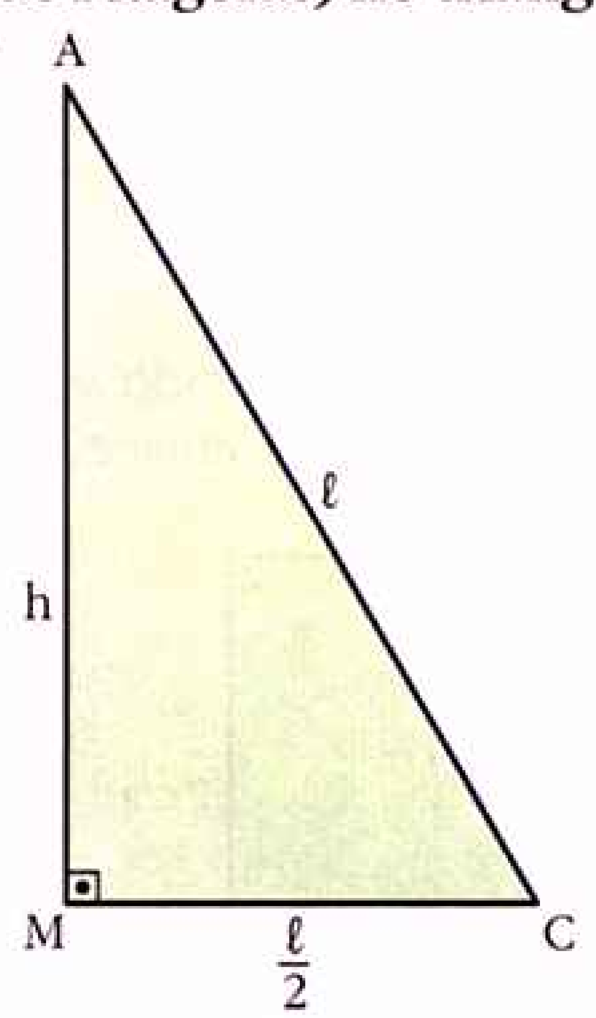
Cálculo da altura *h* (aplicando o teorema de Pitágoras) no triângulo retângulo AMC:

$$h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \ell^2$$

$$h^2 = \ell^2 - \frac{\ell^2}{4}$$

$$h^2 = 3\,\frac{\ell^2}{4}$$

$$\boxed{h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}}$$

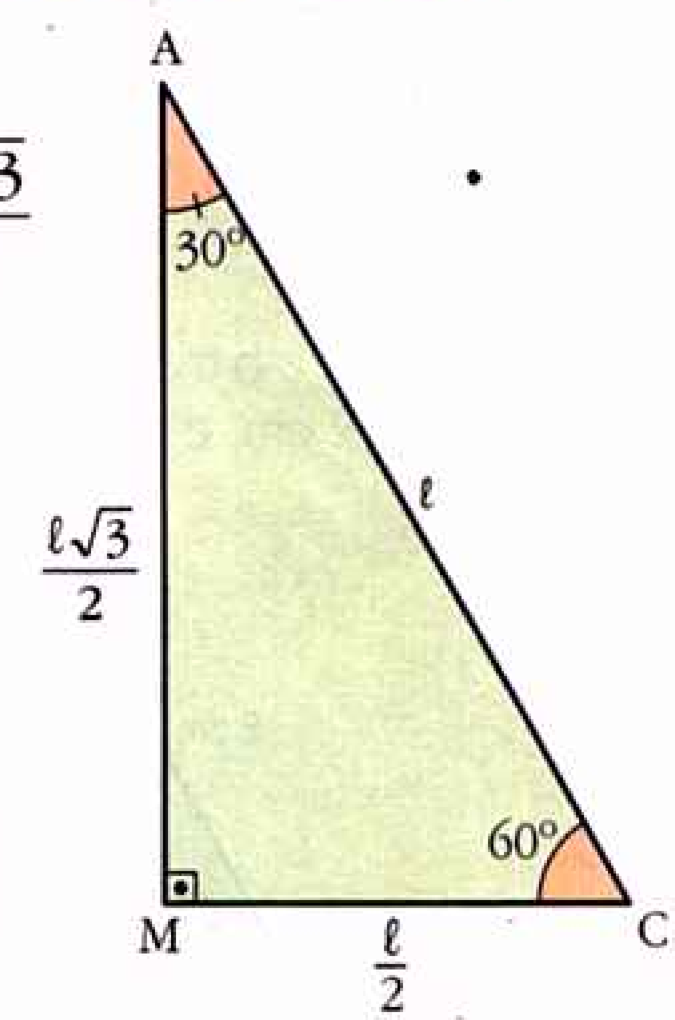


Cálculo do seno, cosseno e tangente de 30° e 60°

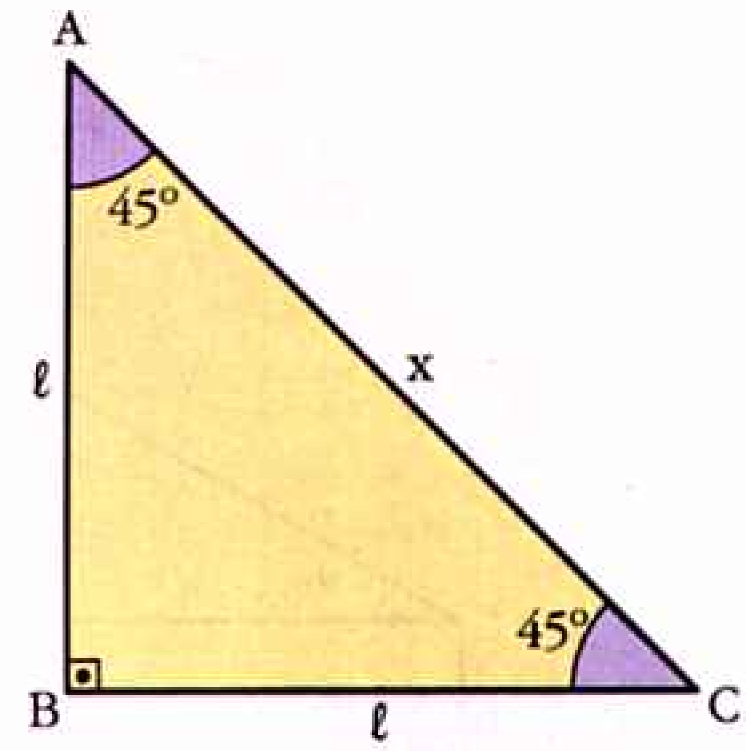
$$\text{sen } 30^\circ = \frac{\frac{\ell}{2}}{\ell} = \frac{1}{2} \qquad \text{sen } 60^\circ = \frac{\ell\sqrt{\frac{3}{2}}}{\ell} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\ell\sqrt{\frac{3}{2}}}{\ell} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60^\circ = \frac{\frac{\ell}{2}}{\ell} = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg } 30^\circ = \frac{\frac{\ell}{2}}{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \text{tg } 60^\circ = \frac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\frac{\ell}{2}} = \sqrt{3}$$



Outro ângulo importante é o de 45°. Nesse caso, vamos considerar um triângulo retângulo e isósceles ABC cujos catetos medem ℓ e a hipotenusa mede x. Observe-o.



Cálculo da hipotenusa x aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ABC:

$$x^2 = \ell^2 + \ell^2 \Rightarrow x^2 = 2\ell^2 \Rightarrow x = \sqrt{2\ell^2} \Rightarrow x = \ell\sqrt{2}$$

Cálculo do seno, cosseno e tangente 45°:

$$\text{sen } 45° = \frac{\ell}{\ell\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45° = \frac{\ell}{\ell\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg } 45° = \frac{\ell}{\ell} = 1$$

Organizando os resultados, construímos a tabela:

	30°	**45°**	**60°**
seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Exercícios

Resolvidos

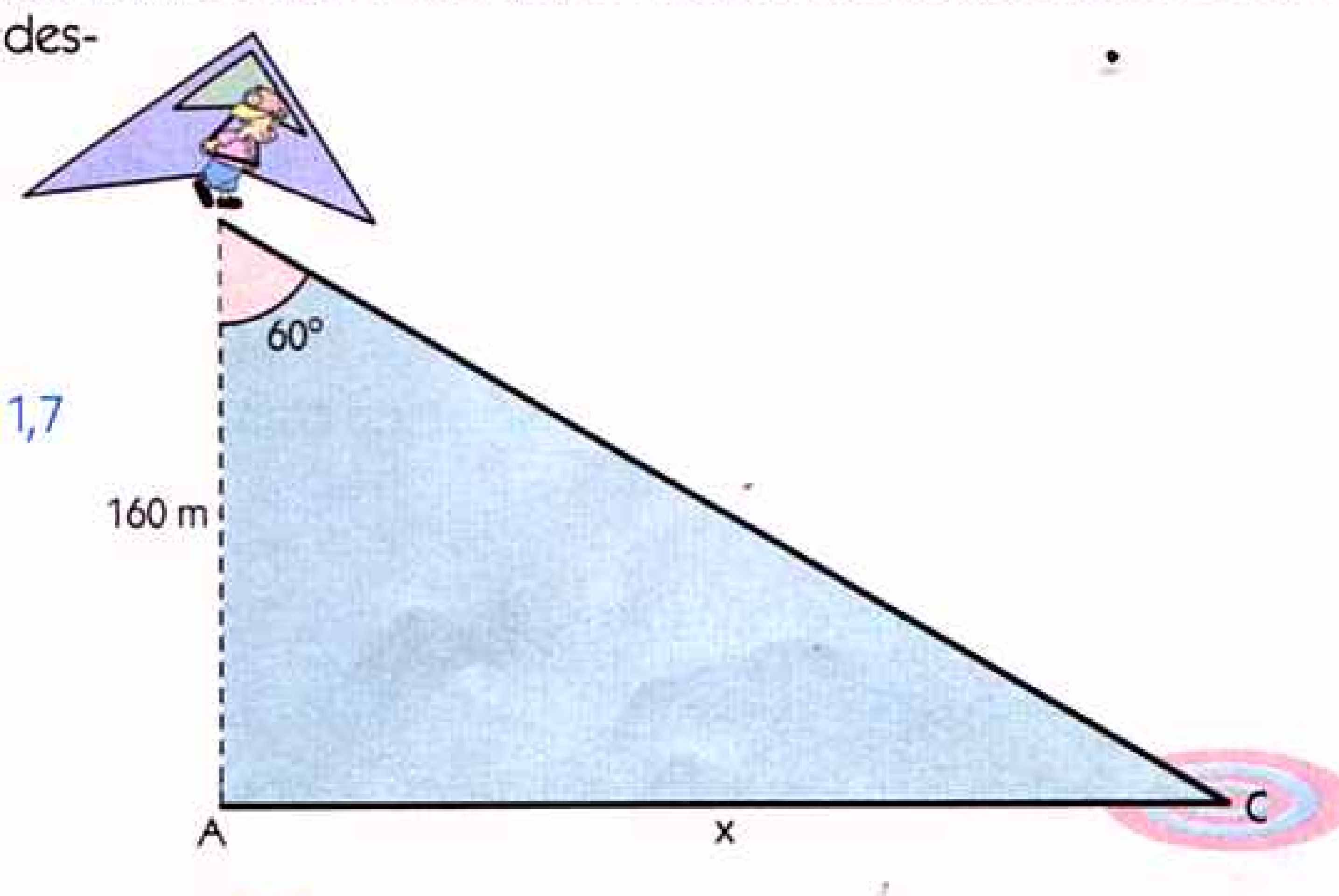
1 Num campeonato de asa-delta, um participante se encontra a uma altura de 160 m e vê o ponto de chegada a um ângulo de 60°, conforme a figura. Calcular a componente horizontal x da distância aproximada em que ele está desse ponto de chegada.

$\text{tg } 60° = \frac{x}{160} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{x}{160}$

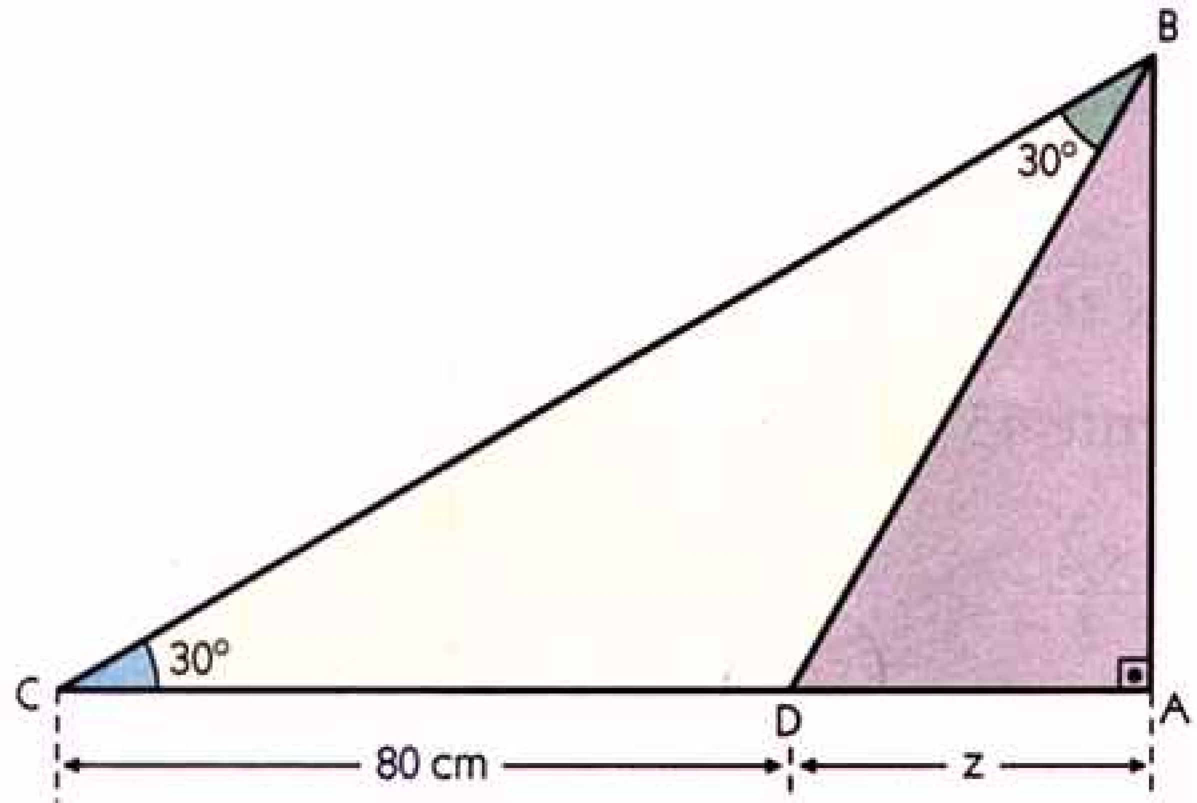
$\Rightarrow x = 160\sqrt{3}$

como $\sqrt{3} \simeq 1,7$ m, $x \simeq 160 \cdot 1,7$

$\Rightarrow x \simeq 272$ m

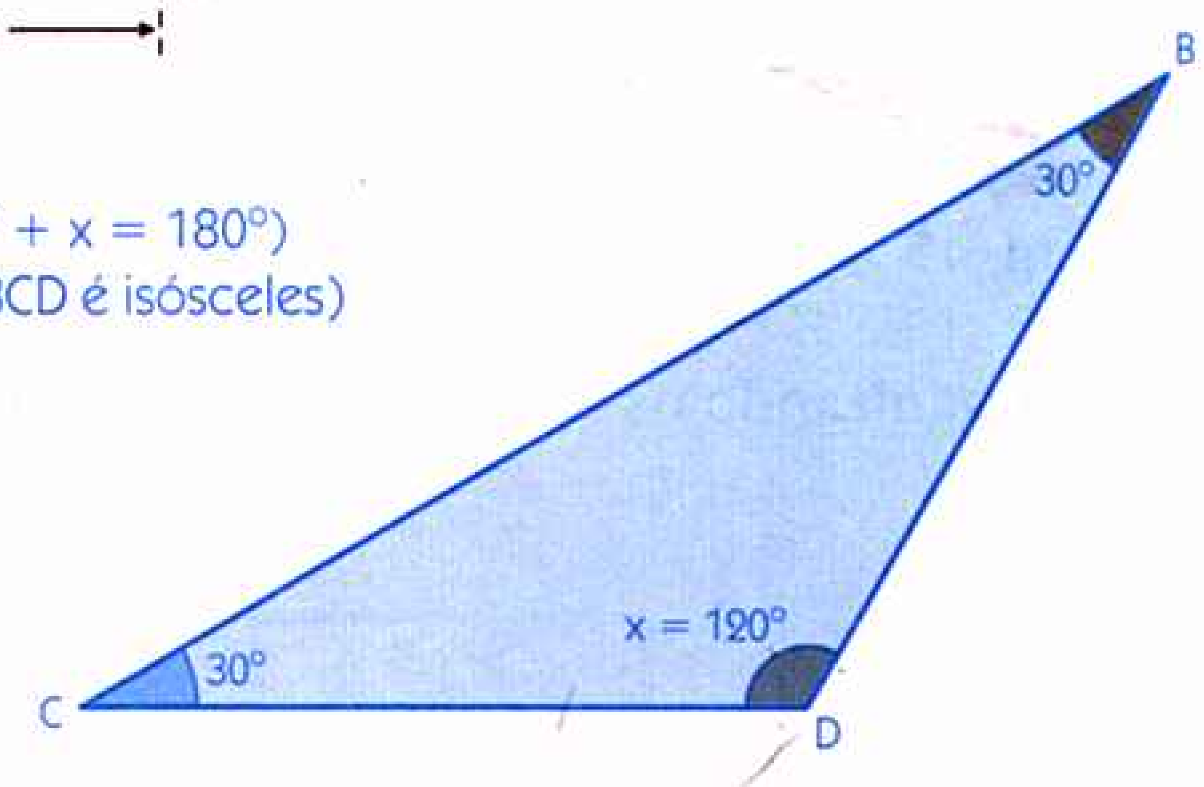


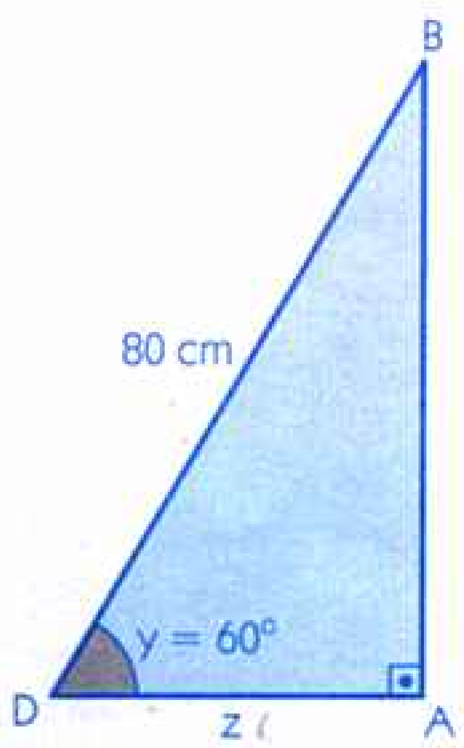
2 Calcular a medida *z* na figura:



No triângulo BCD:

- o ângulo CDB mede 120° (pois 30° + 30° + x = 180°)
- o lado $\overline{BD}$ mede 80 cm (pois o triângulo BCD é isósceles)





No triângulo ABD:

- o ângulo ADB mede 60° (pois y = 180° − 120°)

Cálculo da medida *z*:

$\cos 60° = \dfrac{z}{80}$

$\dfrac{1}{2} = \dfrac{z}{80}$

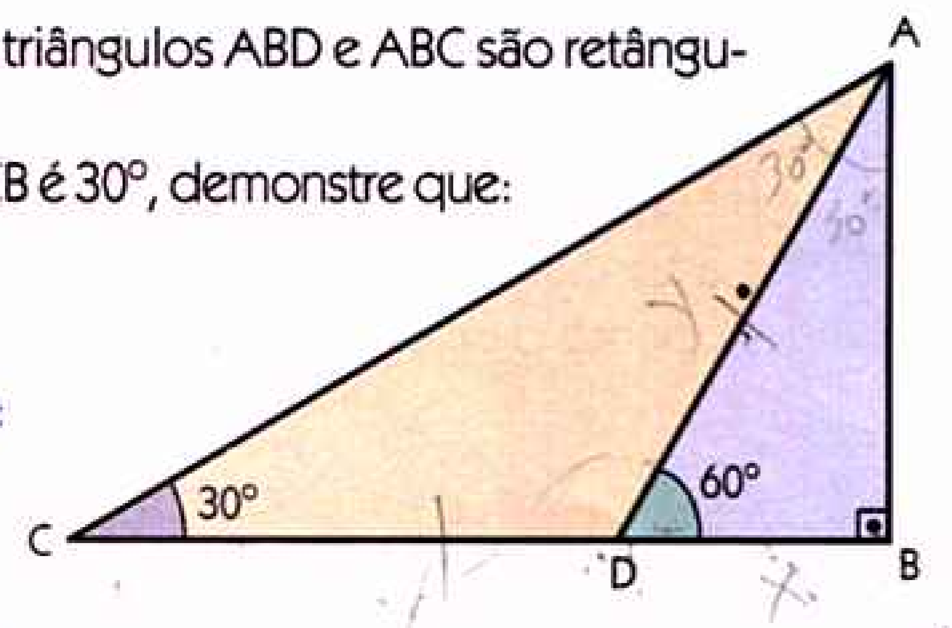
$2z = 80$

$z = 40$ cm

3 (Vunesp) Na figura, os pontos *C*, *D* e *B* são colineares e os triângulos ABD e ABC são retângulos em *B*.

Se a medida do ângulo ADB é 60° e a medida do ângulo ACB é 30°, demonstre que:

a) AD = DC b) CD = 2DB



a) AD = DC

Considerando o teorema do ângulo externo, vejamos:

$m(C\hat{A}D) + m(A\hat{C}D) = m(A\hat{D}B)$

$m(C\hat{A}D) + 30° = 60°$

$m(C\hat{A}D) = 30°$

Portanto, o triângulo ADC é isósceles, com base $\overline{AC}$, ou seja, AD = DC.

b) CD = 2DB

Considerando o triângulo ADB:

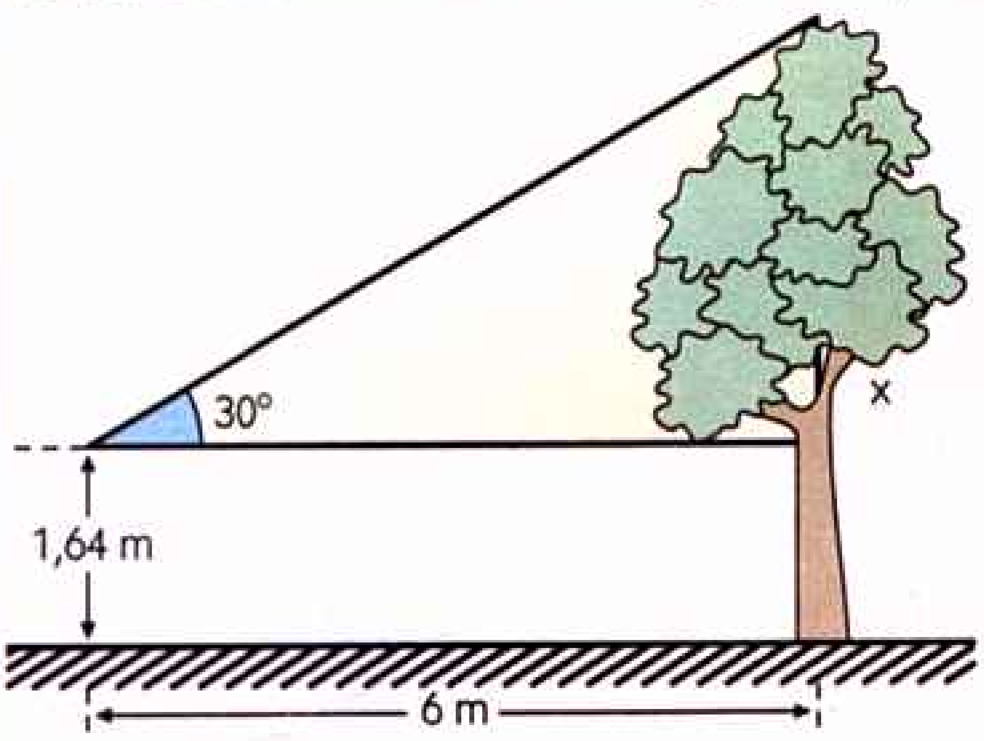
$\dfrac{DB}{AD} = \cos 60°$

Se AD = CD, então: $\dfrac{DB}{CD} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow CD = 2DB$

Propostos

468 Uma escada faz um ângulo de 30° com a parede vertical de um prédio, ao tocar o topo distante 6 m do solo. Determine o comprimento da escada.

469 Uma pessoa de 1,64 m de altura observa o topo de uma árvore sob um ângulo de 30° com a horizontal. Conhecendo a distância de 6,0 m do observador até a árvore, calcular a altura da árvore. Considere tg 30° = 0,58.



470 Para forrar o chão da garagem da casa de dona Inês são assentadas 8 colunas com 28 fileiras de piso cerâmico retangular, do tipo da figura 1, conforme a disposição da figura 2. Qual é a razão entre as áreas da cor predominante para aquela que menos aparece?

Figura 1

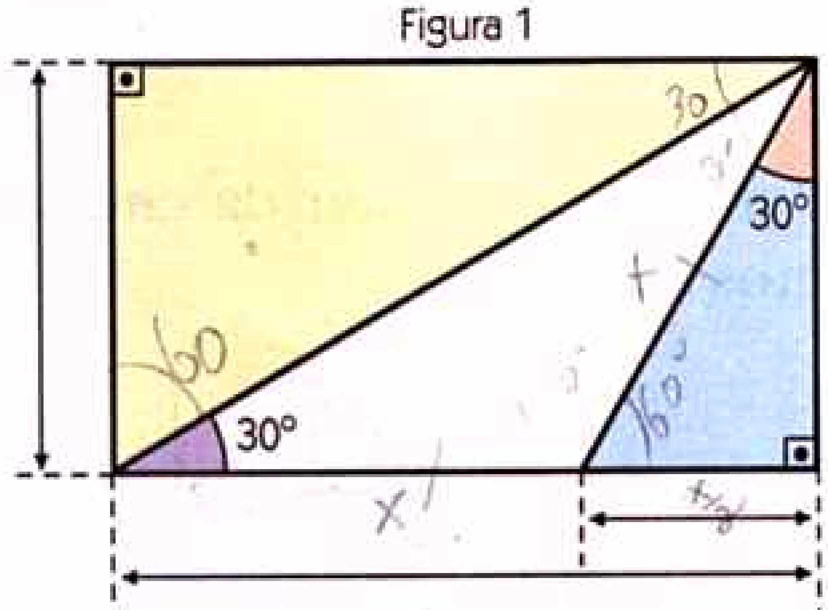
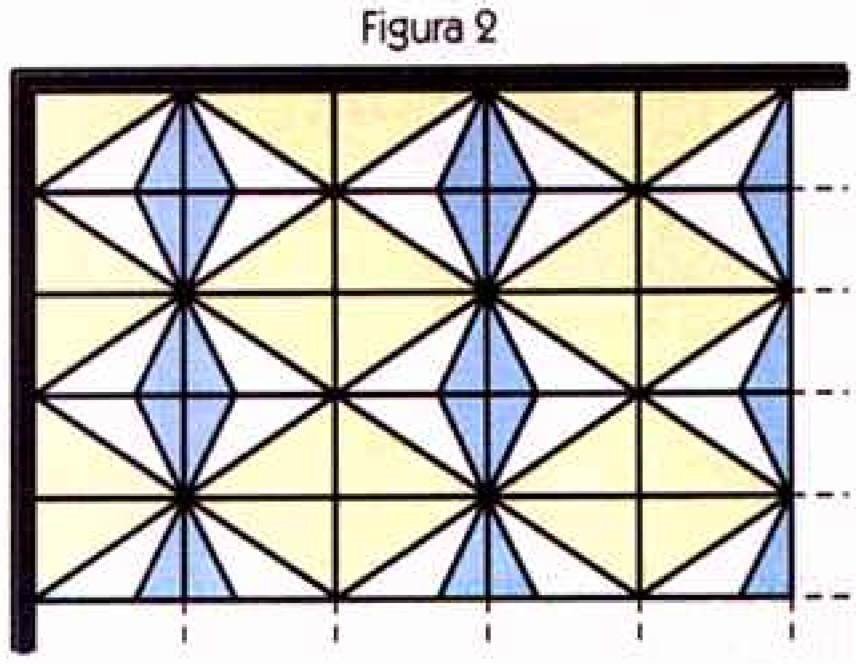
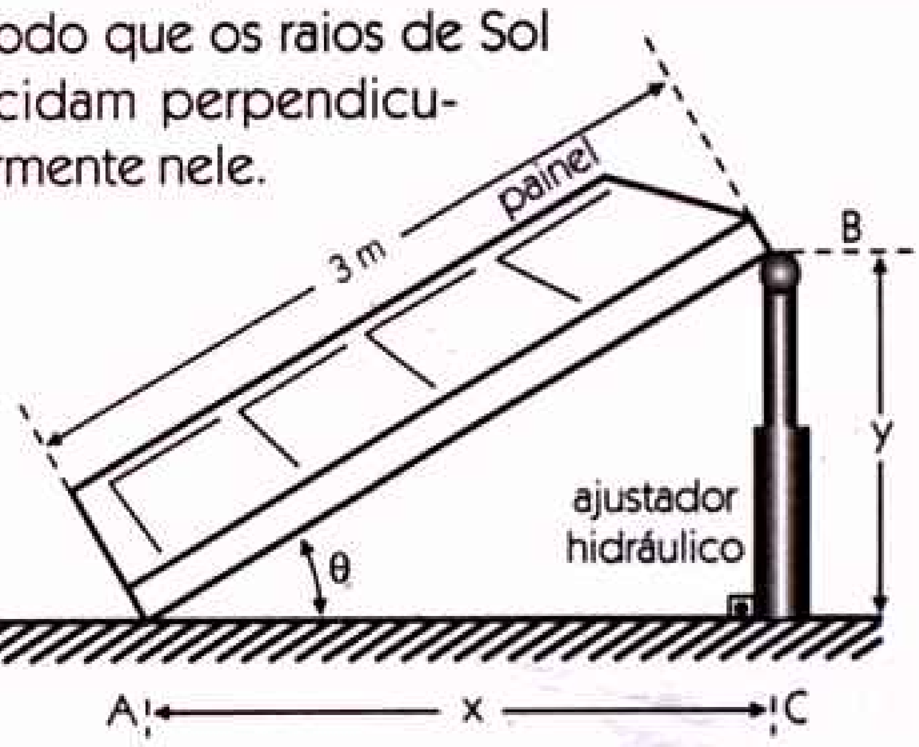


Figura 2



A figura abaixo mostra um painel solar de 3 m de largura equipado com um ajustador hidráulico. À medida que o Sol se eleva, o painel é ajustado automaticamente de modo que os raios de Sol incidam perpendicularmente nele.



Considere esse enunciado para as três questões seguintes:

471 (FAAP-SP) Determine o valor de y (em metros) em função de θ:

a) $y = 3\ \text{sen}\ \theta$
b) $y = 3\ \text{sen}\ \theta + 3$
c) $y = 3\ \text{tg}\ \theta$
d) $y = 3\cos\theta$
e) impossível de ser determinado

$\text{sen}\ \theta = \frac{y}{3}$

$y = 3\ \text{sen}\ \theta$

472 (FAAP-SP) Para $\theta = 60°$, o valor de y (em metros) é:

a) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
b) $\frac{3}{2}$
c) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$
d) 3
e) impossível de ser determinado

473 (FAAP-SP) Para $\theta = 60°$, o valor de x (em metros) é:

a) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$
b) $\frac{5}{2}$
c) $\frac{3}{2}$
d) 3
e) impossível de ser determinado

$\frac{x}{3} = \frac{1}{2}$

$x = \frac{3}{2}$

474 (FAAP-SP) Num trabalho prático de topografia, um estudante de Engenharia Civil deve determinar a altura de um prédio situado em terreno plano. Instalado o aparelho adequado num ponto do terreno, o topo do prédio é visto sob um ângulo de 60°. Afastando-se o aparelho mais 10 metros do edifício, seu topo passa a ser visto sob um ângulo de 45°. Desprezando-se a altura do aparelho, a altura do edifício (em metros) é:

a) $10\sqrt{3} + 1$

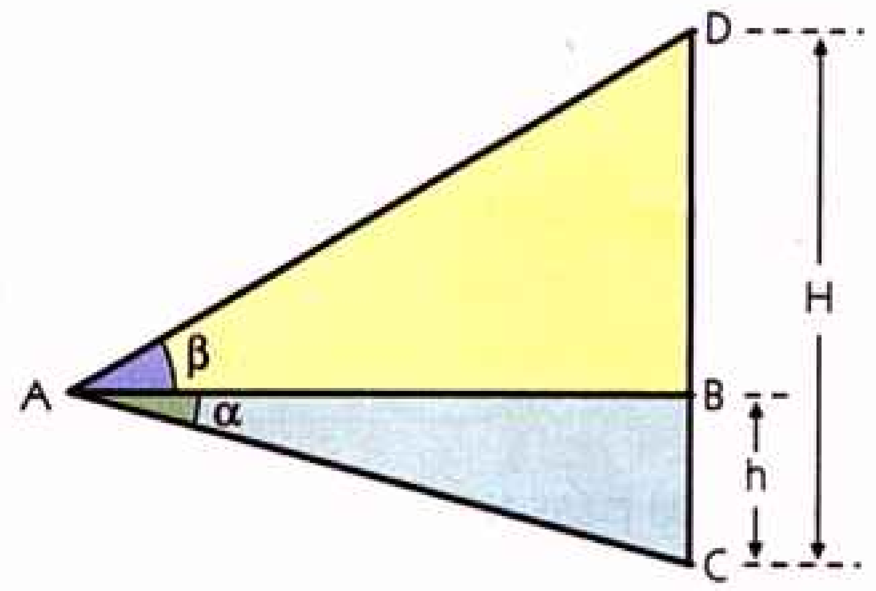
b) $\dfrac{\sqrt{3}}{3} + 10$

c) $\dfrac{10\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}$

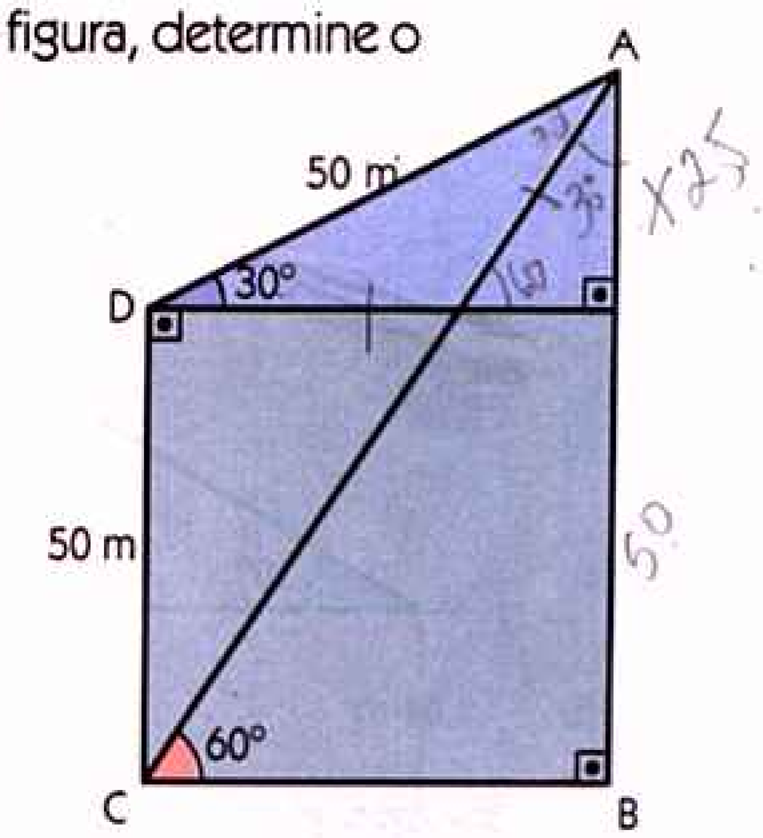
d) $\dfrac{3\sqrt{3}}{10 + \sqrt{3}}$

e) $\dfrac{10 + \sqrt{3}}{3}$

475 (Mauá-SP) Para obter a altura *H* de uma chaminé, um engenheiro, com um aparelho especial, estabeleceu a horizontal AB e mediu os ângulos α e β, tendo a seguir medido BC = h. Determine a altura da chaminé.



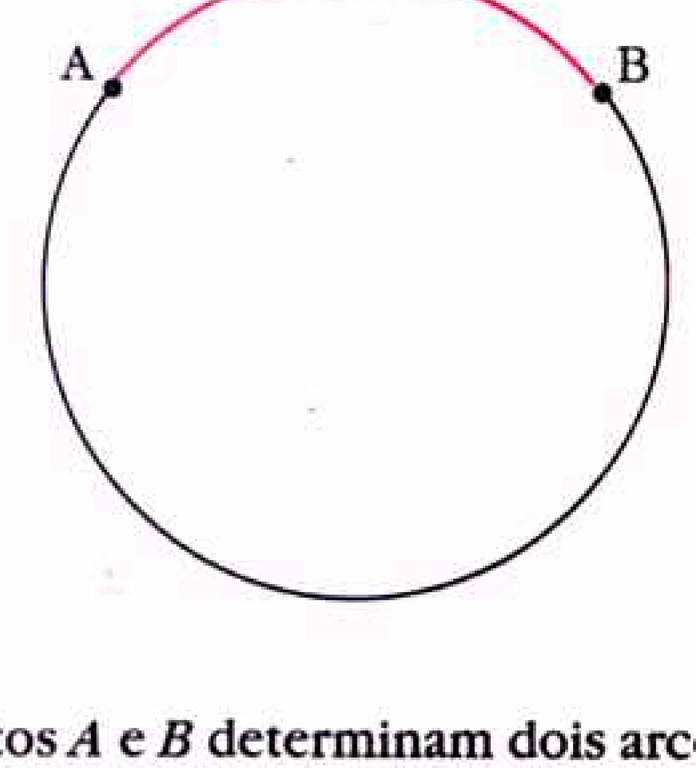
476 (Mack-SP) Na figura, determine o valor de AB.



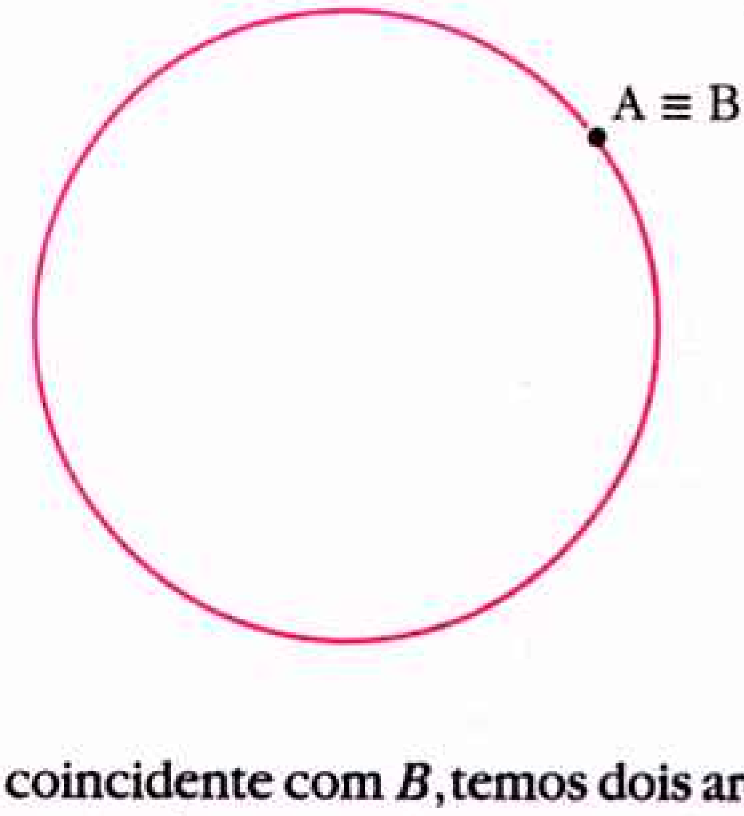
2. Trigonometria no círculo

Utilizando os conhecimentos de sen x, cos x e tg x, extraídos do triângulo retângulo, vamos ampliar nosso estudo aplicando esses conceito em arcos.

Arco de circunferência é um segmento qualquer da circunferência, limitado por dois de seus pontos distintos.



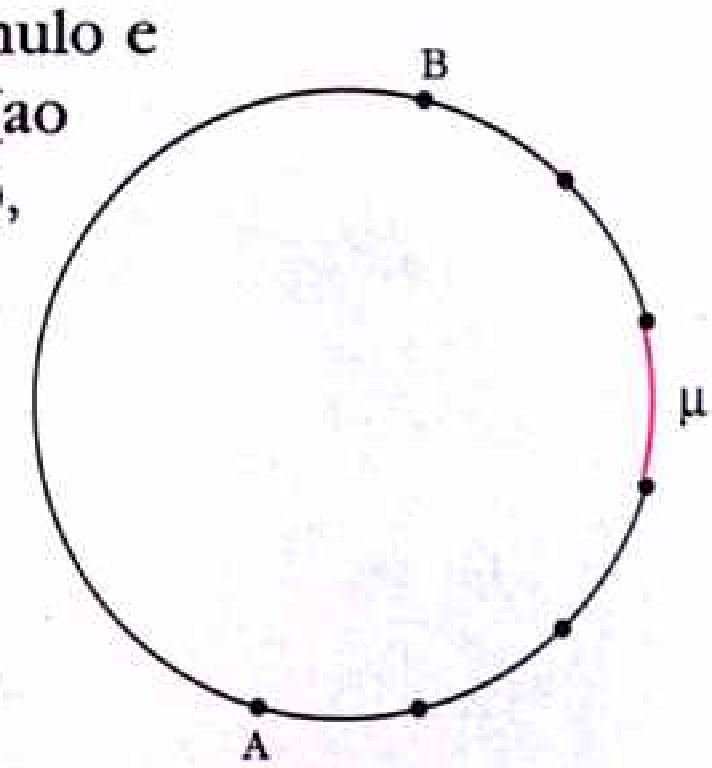
Os pontos *A* e *B* determinam dois arcos e são extremidades de ambos.



Sendo *A* coincidente com *B*, temos dois arcos especiais determinados: um nulo e outro de uma volta.

Medida de um arco

Consideremos um arco AB e um arco unitário *u* (não-nulo e de mesmo raio). Ao compararmos o arco AB com o arco *u* (ao determinarmos quantas vezes o arco *u* cabe no arco AB), estamos medindo o comprimento do arco AB na unidade *u*.



Na figura, *u* cabe seis vezes em $\widehat{AB}$.
Então: med($\widehat{AB}$) = 6 u
Lemos: a medida do arco AB é igual a seis na unidade *u*.

Unidades

Grau (°)

Dividimos a circunferência em 360 partes iguais e a cada arco unitário, que corresponde a $\frac{1}{360}$ da circunferência, chamamos de grau.

Então, a circunferência mede 360 graus, que indicamos por 360°.

Os submúltiplos do grau são o minuto (') e o segundo (").

1 grau = 60 minutos $\quad 1^\circ = 60'$
1 minuto = 60 segundos $\quad 1' = 60''$

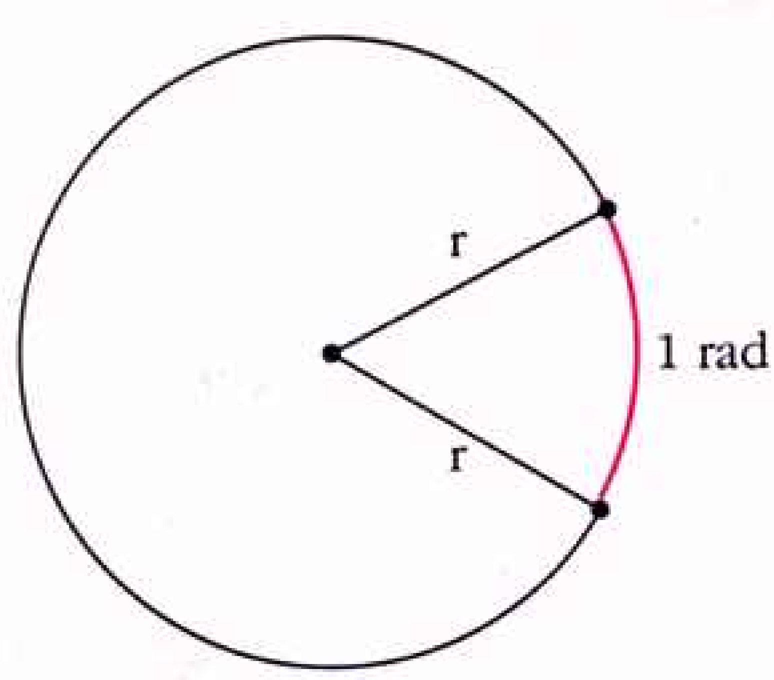
Grado (gr)

Dividimos a circunferência em 400 partes iguais e a cada arco unitário que corresponde a $\frac{1}{400}$ da circunferência chamamos de grado.

Então, a circunferência mede 400 grados, que indicamos por 400 gr.

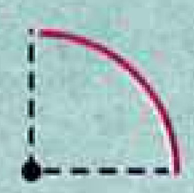
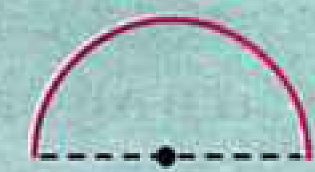
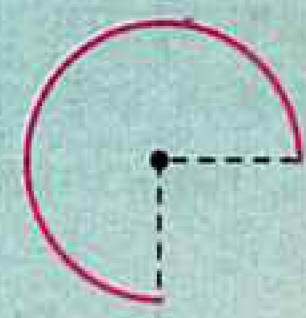
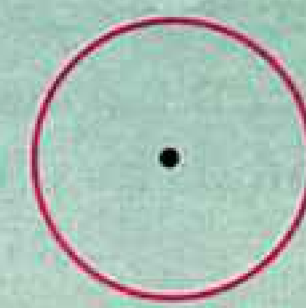
Radiano (rad)

Radiano é um arco unitário cujo comprimento é igual ao comprimento do raio de circunferência no qual está contido.



Uma circunferência de raio r = 1 possui como medida 2π radianos (2π rad).

Relação entre as unidades

Arco				
Grau	90°	180°	270°	360°
Grado	100 gr	200 gr	300 gr	400 gr
Radiano	$\frac{\pi}{2}$ rad	π rad	$\frac{3\pi}{2}$ rad	2π rad

Para fazer a conversão entre as unidades, podemos utilizar a relação:

$$\boxed{180° \text{———} \pi \text{ rad}}$$

Exemplos:

a) Para converter 120° em *x* radianos, montamos a regra de três:

$$\begin{array}{l} 180° \text{———} \pi \text{ rad} \\ 120° \text{———} x \end{array} \qquad \text{onde } x = \frac{120° \, \pi}{180°}, \text{ ou seja, } x = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$$

b) Para converter $\frac{5\pi}{4}$ rad em *x* graus, montamos a regra de três:

$$\begin{array}{l} 180° \text{———} \pi \text{ rad} \\ x \quad \text{———} \frac{5\pi}{4} \text{ rad} \end{array} \qquad \text{onde } x = \frac{\frac{5\pi}{4} \cdot 180}{\pi}, \text{ ou seja, } x = 225°$$

Exercícios

Propostos

477 Converter em radianos:

a) 45°
b) 72°
c) 36°
d) 135°
e) 240°
f) 600°

478 Converter em graus:

a) $\frac{\pi}{6}$ rad
b) $\frac{2\pi}{3}$ rad
c) $\frac{\pi}{10}$ rad
d) $\frac{5\pi}{4}$ rad
e) 3π rad
f) $\frac{12\pi}{5}$ rad

479 Um atleta percorre $\frac{1}{3}$ de uma pista circular, correndo sobre a linha de uma circunferência. Determine a medida do arco percorrido em graus e em radianos.

480 Determine, em graus, o menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio, nos seguintes casos:

a) 2h 15min
b) 9h 10min
c) 1h 30min
d) 3h 15min

Comprimento de arco

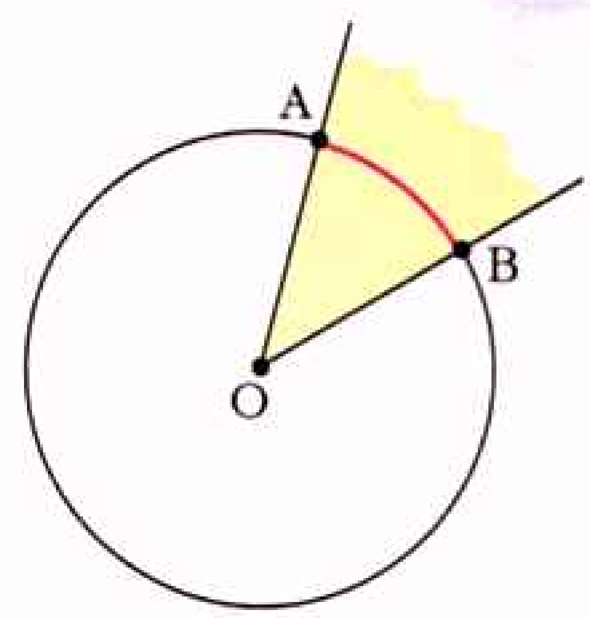
Considerando uma circunferência com centro *O* e raio medindo *r*, um ângulo central AOB de medida γ, em radianos, e o correspondente arco AB contido nesse ângulo, podemos estabelecer a seguinte regra de três:

$$r \text{ --- } 1$$

$$\text{med}(\widehat{AB}) \text{ --- } \gamma$$

$$\frac{r}{\text{med}(\widehat{AB})} = \frac{1}{\gamma}$$

$$r \cdot \gamma = \text{med}(\widehat{AB}) \cdot 1$$



$$\boxed{\gamma = \frac{\text{med}(\widehat{AB})}{r} \quad \text{ou} \quad \text{med}(\widehat{AB}) = \gamma \cdot r}$$

A medida do ângulo central AOB = γ, em radianos, é determinada pelo quociente entre o comprimento do arco AB e a medida do raio da circunferência que o contém.

Exemplo:
Para determinar, em radianos, a medida do arco AB de comprimento 20 cm contido numa circunferência de diâmetro 20 cm, fazemos:

$$r = \frac{\text{diâmetro}}{2} = \frac{20 \text{ cm}}{2} = 10 \text{ cm}$$

Logo, a medida de γ, em radianos, é obtida por:

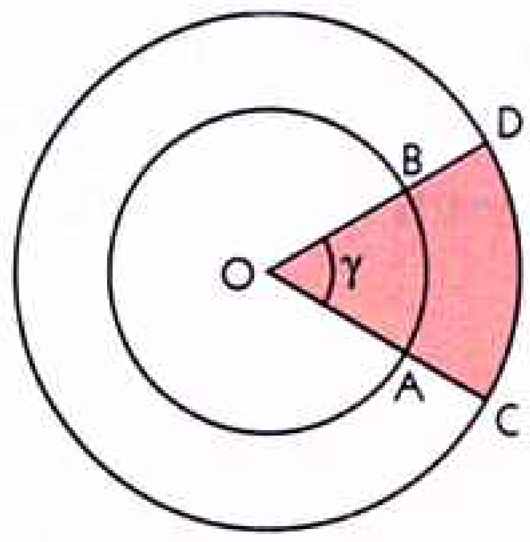
$$\gamma = \frac{\text{med}(\widehat{AB})}{r} \Rightarrow \gamma = \frac{20 \text{ cm}}{10 \text{ cm}} \Rightarrow \gamma = 2 \text{ rad}$$

Exercícios

Resolvido

Na figura abaixo, temos duas circunferências concêntricas, cujos raios medem OB = x cm e OD = 20 cm.

As medidas do comprimento dos arcos AB e CD são, repectivamente, 4 cm e 16 cm. Determinar a medida OB do raio, sabendo que a medida do ângulo central AOB é γ (em radianos).



Em ambas as circunferências temos med(AÔB) = γ, então:

$$\gamma = \frac{\text{med}(\widehat{AB})}{OB} = \frac{4}{x}$$

$$\gamma = \frac{\text{med}(\widehat{CD})}{OD} = \frac{16}{20}$$

$$\frac{4}{x} = \frac{16}{20} \Rightarrow 16x = 4 \cdot 20 \Rightarrow x = 5 \text{ cm}$$

Propostos

481 Determine, em radianos, a medida do arco AB, de comprimento 10 cm, contido na circunferência de raio 5 cm.

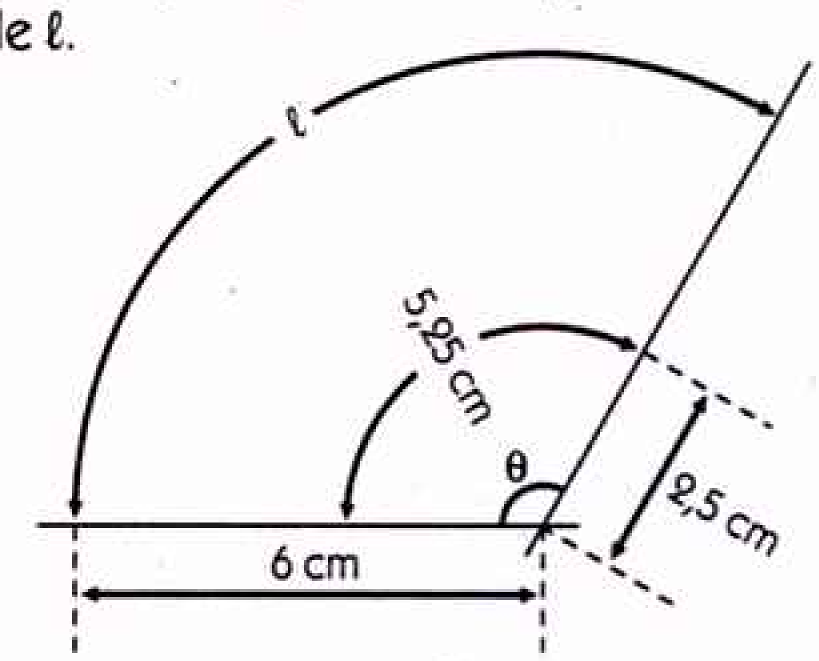
482 Determine, em centímetros, o comprimento de um arco AB correspondente a um ângulo central AOB cuja medida é 3 rad, contido numa circunferência de raio r = 6.

483 Determine, em radianos, a medida de um arco de circunferência cujo comprimento mede 30 m e o diâmetro dessa circunferência, 20 m.

484 Qual a medida aproximada do raio de uma circunferência cujo arco mede π rad e o seu comprimento, 3,14 cm?

485 Uma circunferência de raio r_1 = 5 cm contém um arco AB de 15 cm de comprimento. Outra circunferência, concêntrica à primeira, tem raio r_2 = 10 cm e contém um arco CD de comprimento *x* centímetro. Determine o valor de *x* sabendo-se que γ é a medida, em radianos, do ângulo central, que determina os dois arcos.

486 Determine, na figura abaixo, o valor de θ e o de ℓ.

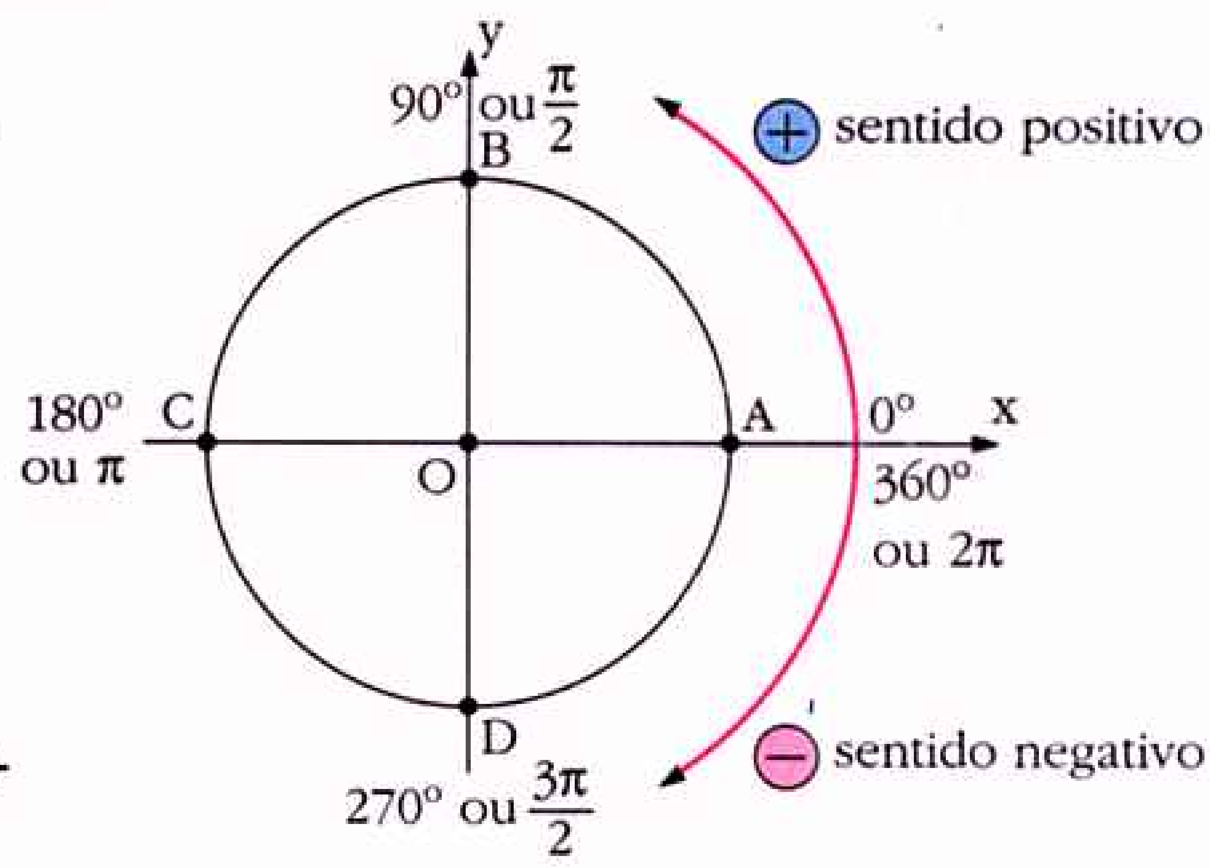


3. Funções trigonométricas

Ciclo trigonométrico

Chamamos de ciclo trigonométrico toda circunferência orientada, em que:

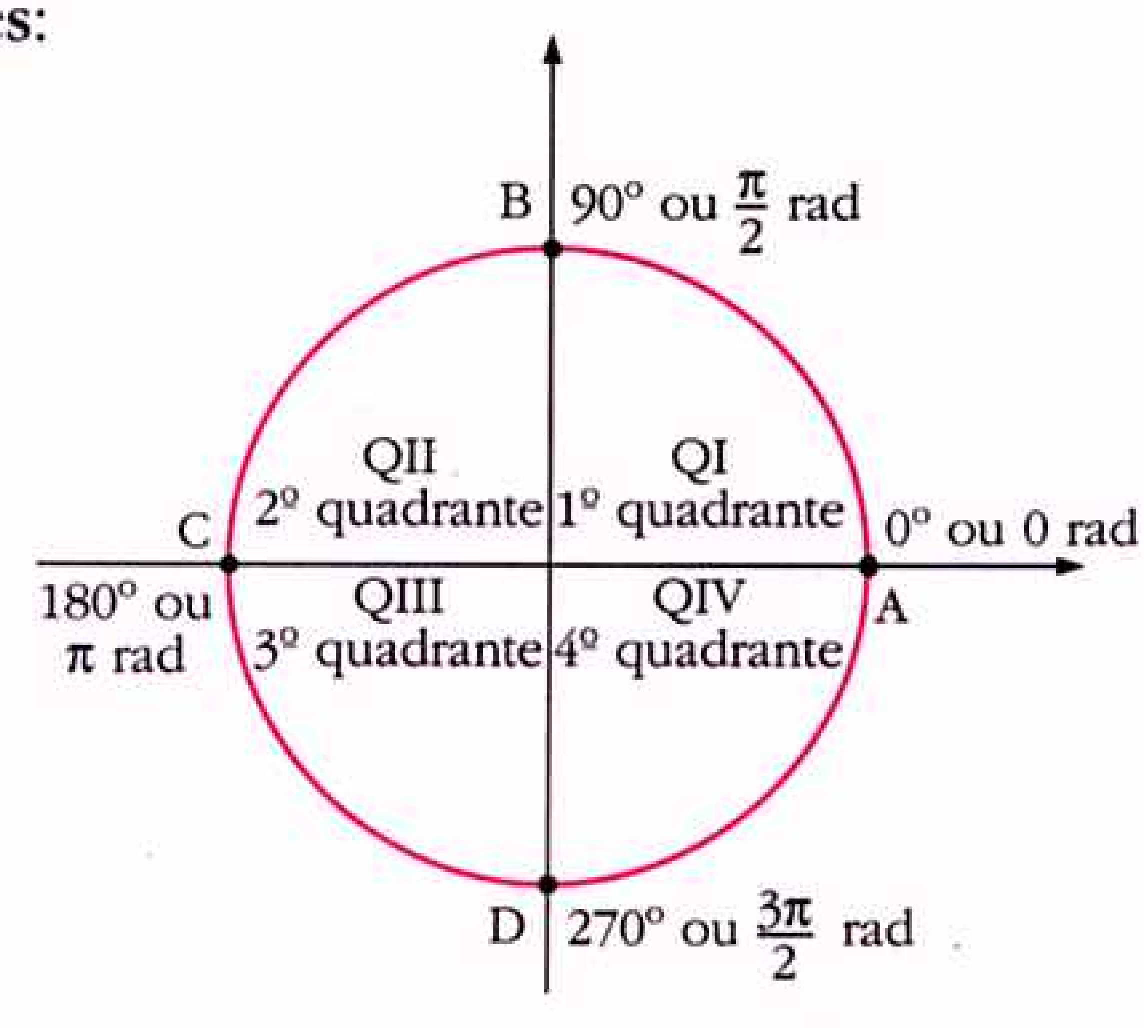
- o centro é a origem do plano cartesiano
- o raio (r) é unitário ($r = 1$)
- o sentido positivo é o anti-horário (sentido contrário ao do movimento dos ponteiros de um relógio)
- o sentido negativo é o horário (sentido do movimento dos ponteiros de um relógio)
- o ponto A é a origem do ciclo trigonométrico. A localização da extremidade de um arco varia conforme o comprimento desse arco.



Localização da extremidade de um arco no ciclo trigonométrico

Os eixos cartesianos dividem o ciclo trigonométrico em quatro arcos, cada qual contido em um *quadrante*.

Um arco AP do ciclo trigonométrico, de medida x, com $0° \leq x < 360°$ ou $0 \text{ rad} \leq x < 2\pi \text{ rad}$, tem a extremidade P pertencente a um dos quadrantes conforme as desigualdades:



$P \in QI$, se e somente se, $0° < x < 90°$ ou $0 < x < \frac{\pi}{2}$

$P \in QII$, se e somente se, $90° < x < 180°$ ou $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

$P \in QIII$, se e somente se, $180° < x < 270°$ ou $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$

$P \in QIV$, se e somente se, $270° < x < 360°$ ou $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$

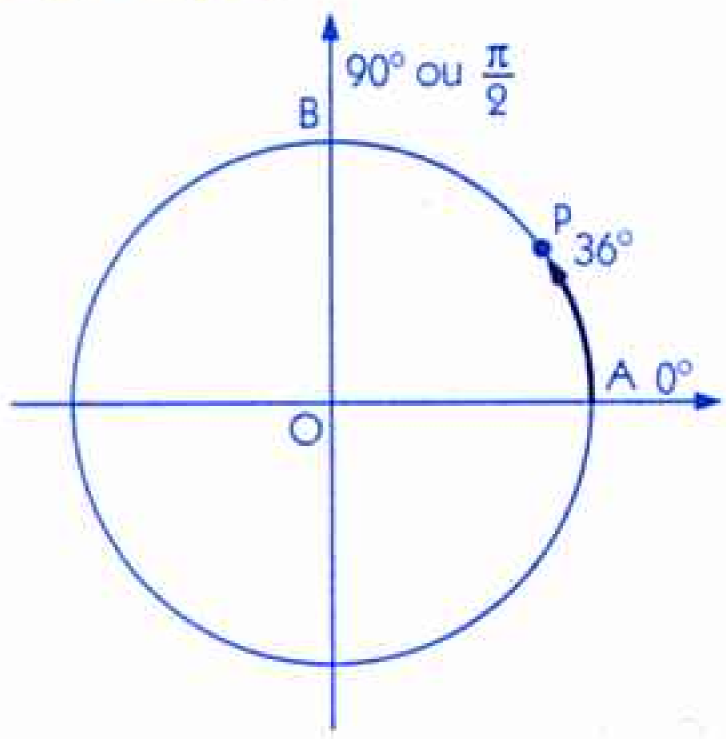
Exercícios

Resolvidos

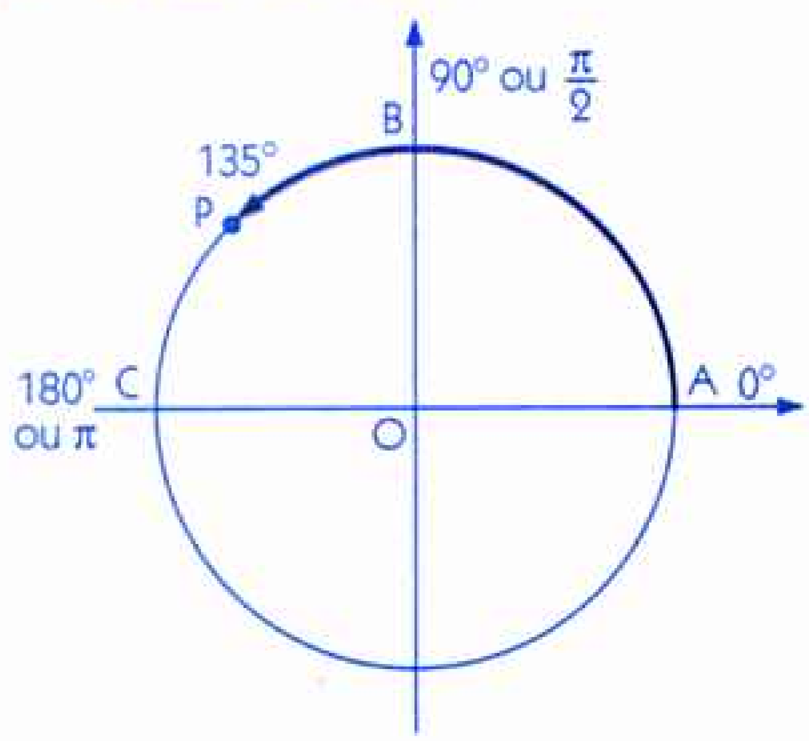
1 Determinar o quadrante a que pertence a extremidade P:

a) do arco de 36°
b) do arco de 135°
c) do arco de 220°
d) do arco de 300°

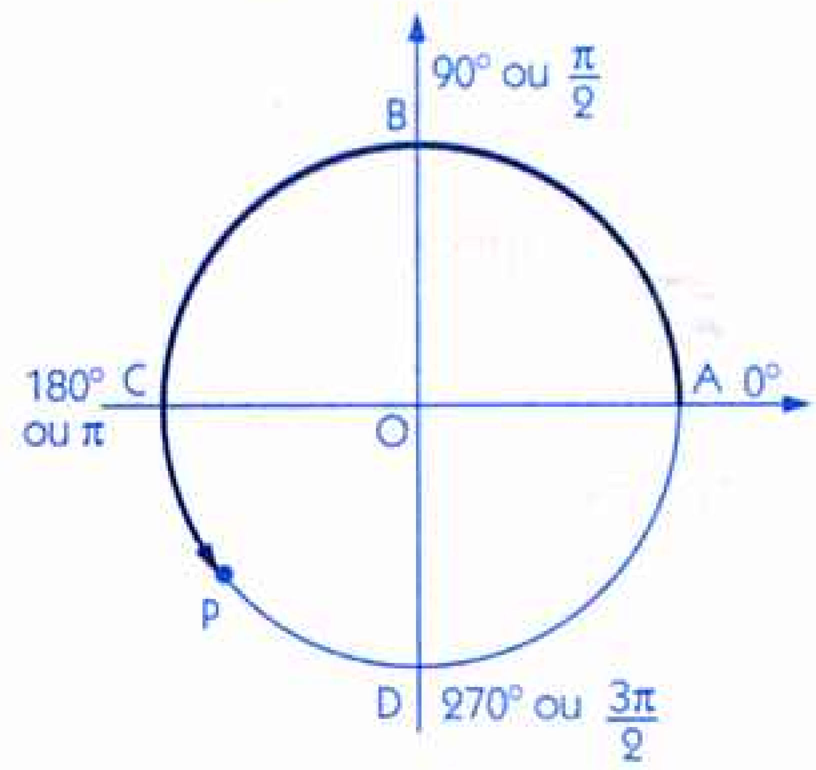
a) A extremidade de P do arco de 36° pertence ao 1º quadrante, pois $0° < 36° < 90°$.



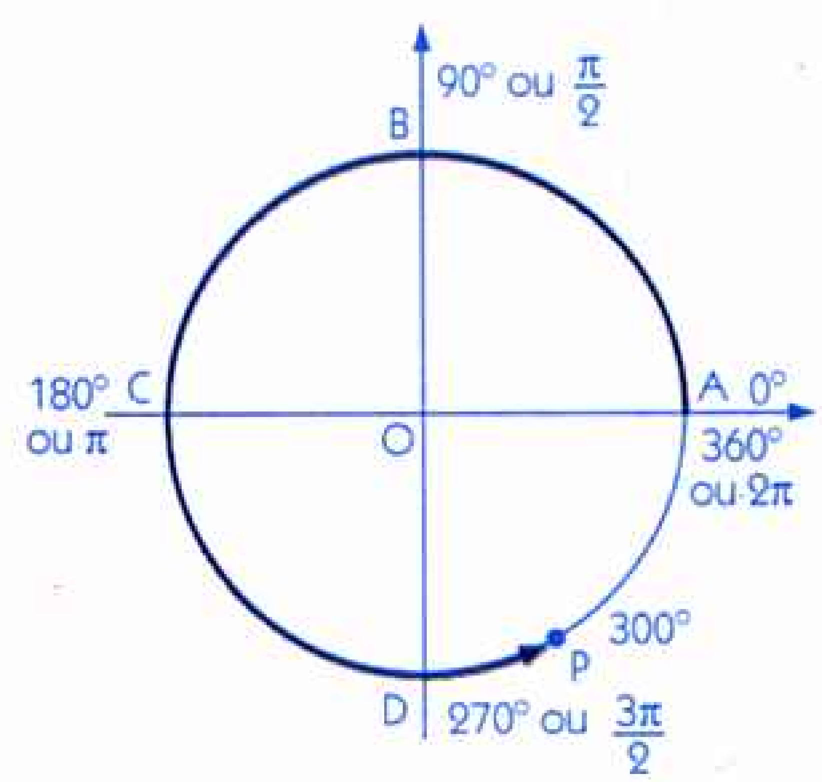
b) A extremidade P do arco de 135° pertence ao 2º quadrante, pois $90° < 135° < 180°$.



c) A extremidade P do arco de 220° pertence ao 3º quadrante, pois $180° < 220° < 270°$.



d) A extremidade P do arco de 300° pertence ao 4º quadrante, pois $270° < 300° < 360°$.



2 Determinar o quadrante a que pertence a extremidade P:

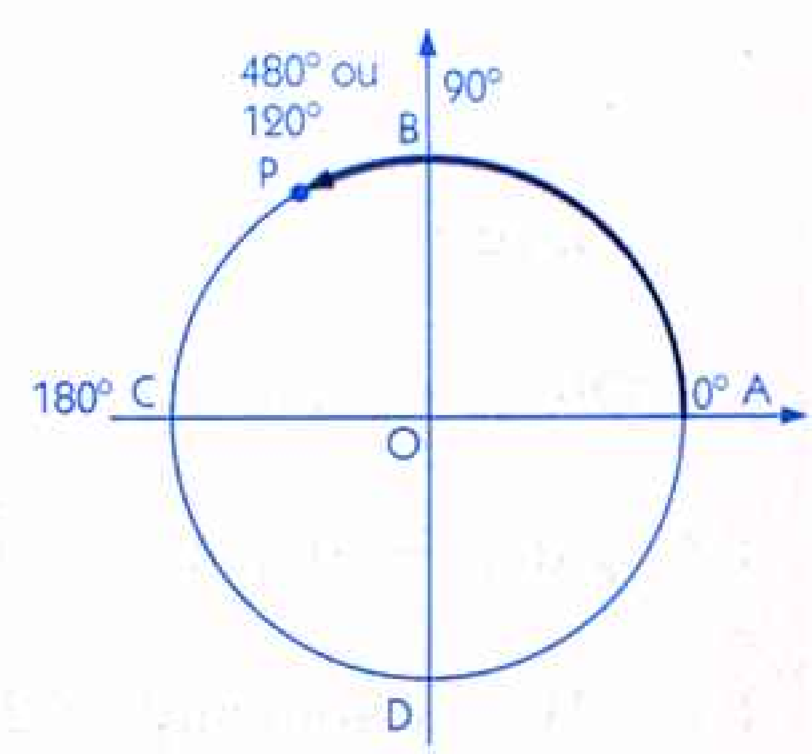
a) do arco de 480°
b) do arco de −110°

a) Um arco de 480° tem mais que uma volta, pois $480° > 360°$. Vamos, então, calcular quantos graus ele tem a mais que 360°:

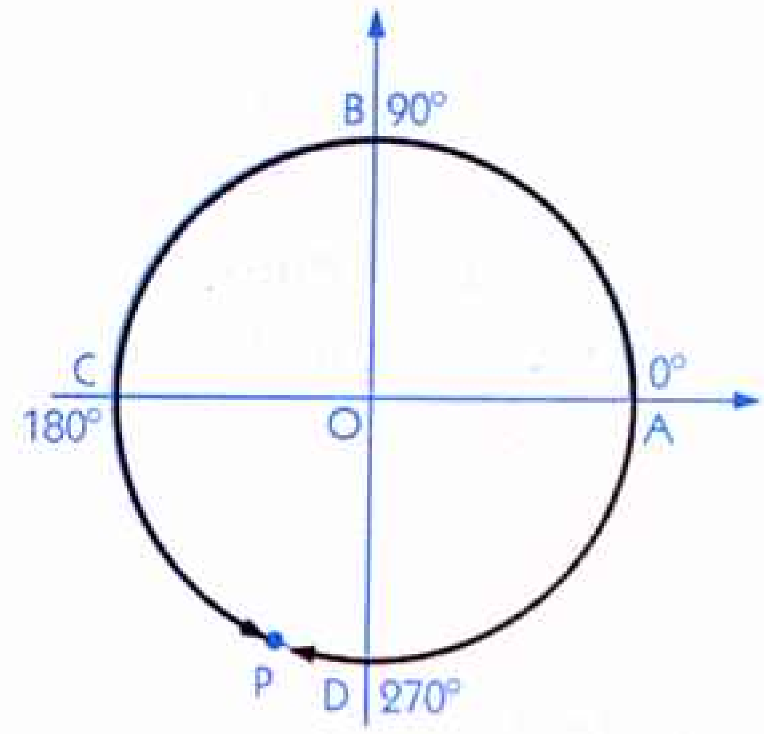
$$\begin{array}{r} 480° \\ -\ 360° \\ \hline 120° \end{array}$$

$90° < 120° < 180°$

Assim, um arco de 480° tem a mesma extremidade P de um arco de 120°, que pertence ao 2º quadrante.



b) Um arco de $-110°$ está na 1ª volta negativa. Saindo de P e andando uma volta no sentido anti-horário ($+360°$) recaímos em P.



$-110° + 360° = 250°$

$180° < 250° < 270°$

Assim, um arco de $-110°$ tem a mesma extremidade P de um arco de $250°$, que pertence ao 3º quadrante.

Arcos côngruos

Dois arcos são congruentes, ou côngruos, quando possuem a mesma extremidade.

Convém trabalharmos com arcos da 1ª volta, do sentido positivo. Caso isso não ocorra, como por exemplo com 480°, determinamos o seu côngruo da 1ª volta positiva.

Uma forma mais simples de obtermos esse resultado é dividir 480° por 360° para extrair o número de voltas. O resto da divisão é a medida do arco de mesma extremidade:

$$\begin{array}{r|l} 480° & 360° \\ \cline{2-2} \underbrace{120°}_{\text{medida do arco de mesma extremidade}} & 1 \longrightarrow \text{número de voltas no sentido positivo} \end{array}$$

$480° = 1 \cdot 360° + 120°$

Para medidas negativas, esse procedimento nos leva ao arco côngruo da 1ª "volta negativa". Daí basta somarmos 360° para chegarmos à 1ª "volta positiva".

Exemplos:

a) $-157°$

$-157°$ **já está na 1ª volta negativa**

Daí, $-157° + 360° = 203°$

$203°$ **é a medida do arco da 1ª volta com a mesma extremidade que** $-157°$.

Veja:

$-157° = 203° - 1 \cdot 360°$

b) $-1\,237°$

$$\begin{array}{r|l} 1\,237 & 360° \\ \cline{2-2} 157° & 3 \longrightarrow \text{número de voltas no sentido negativo} \end{array}$$

Daí, $-157° + 360° = 203°$

Veja: $-1\,237° = 203° - 3 \cdot 360° - 360°$

$-1\,237° = 203° - 4 \cdot 360°$

- Considerando β a medida de um arco, a expressão geral das medidas dos arcos côngruos a ele é dada por:

$$\alpha + K \cdot 360^\circ \text{ (em graus) ou } \alpha + K \cdot 2\pi \text{ (em radianos)}$$

onde α é a medida do arco côngruo da 1ª volta positiva e $K \in \mathbb{Z}$.
α é chamada de 1ª determinação positiva.

Exercícios

Resolvidos

1 Determinar em qual quadrante situam-se as extremidades dos seguintes arcos:

a) 72° c) −300° e) $\frac{3\pi}{4}$ rad

b) 1 280° d) −400° f) $\frac{11\pi}{3}$ rad

Para isso obtemos a medida do arco côngruo que está na 1ª volta positiva.

a) 72°

1º quadrante, pois $0^\circ < 72^\circ < 90^\circ$

b) 1 280°

$$\begin{array}{r|l} 1\,280^\circ & 360^\circ \\ \hline 200^\circ & 3 \end{array}$$

3º quadrante, pois $180^\circ < 200^\circ < 270^\circ$

c) −300°

Como este arco está na 1ª volta negativa, basta fazer $-300^\circ + 360^\circ = 60^\circ$.

1º quadrante, pois $0 < 60^\circ < 90^\circ$

d) −400°

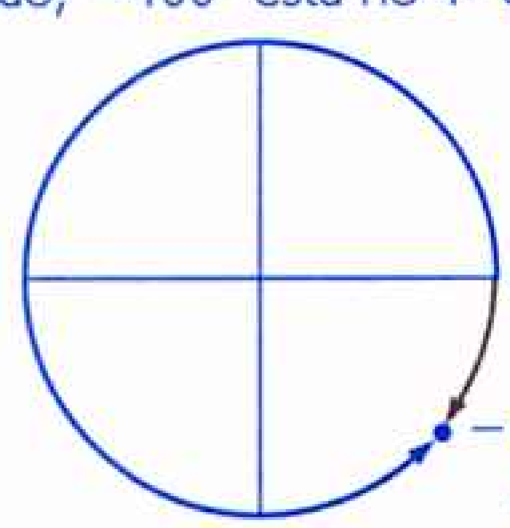
$$\begin{array}{r|l} 400^\circ & 360^\circ \\ \hline 40^\circ & 1 \longrightarrow \text{número de voltas no sentido negativo} \end{array}$$

Daí, $-40^\circ + 360^\circ = 320^\circ$.

320° está no 4º quadrante, pois

$270^\circ < 320^\circ < 360^\circ$

Então, −400° está no 4º quadrante.



e) $\frac{3\pi}{4}$ rad

Convertendo $\frac{3\pi}{4}$ rad em graus, temos

$$\frac{3 \cdot 180^\circ}{4} = 135^\circ.$$

2º quadrante, pois $90^\circ < 135^\circ < 180^\circ$

f) $\frac{11\pi}{3}$ rad

Convertendo $\frac{11\pi}{3}$ rad em graus, temos

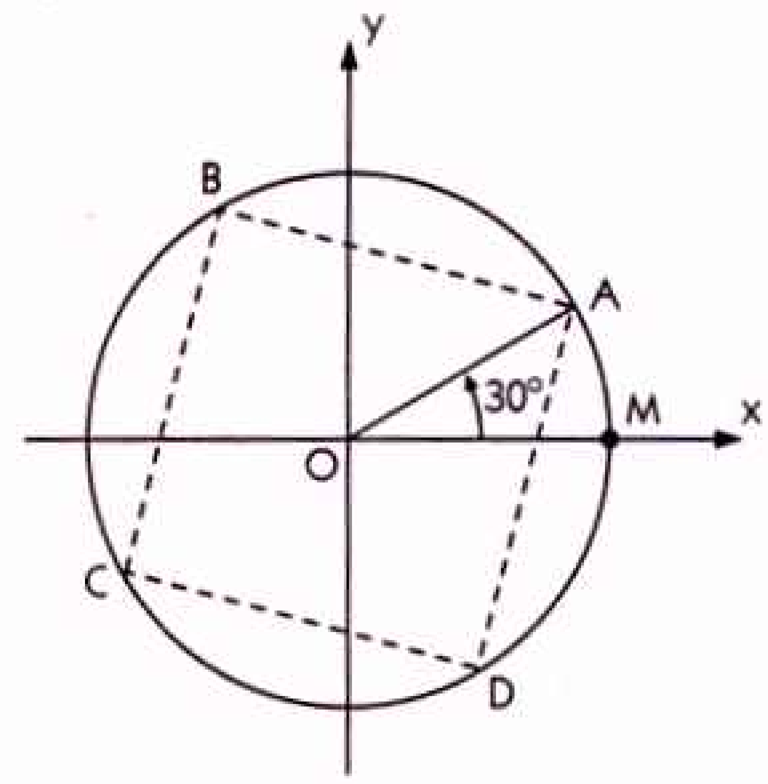
$$\frac{11 \cdot 180^\circ}{4} = 660^\circ.$$

Como o arco tem mais que uma volta, dividimos por 360° e consideramos o resto da divisão:

$$\begin{array}{r|l} 660^\circ & 360^\circ \\ \hline 300^\circ & 1 \end{array}$$

4º quadrante, pois $270^\circ < 300^\circ < 360^\circ$

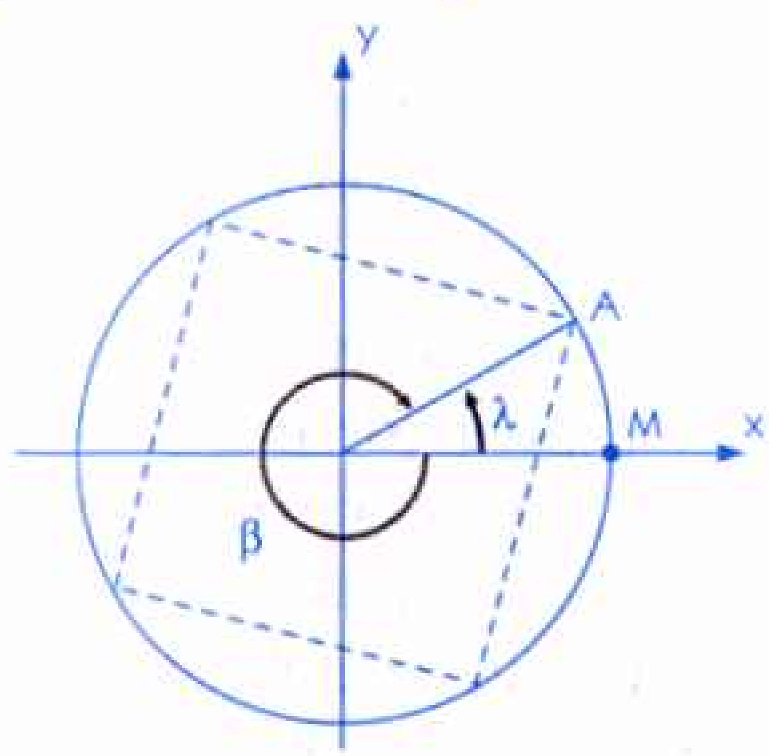
2 Na circunferência trigonométrica são marcados quatro pontos, *A*, *B*, *C* e *D*, formando um polígono regular (*veja figura*). Escrever, em graus e radianos, as medidas β (da 1ª volta negativa) dos arcos determinados pelos vértices do quadrilátero.



4 pontos → 360° : 4 = 90°; logo, para irmos de um vértice a outro consecutivo avançamos 90° (no sentido positivo) ou recuamos 90° (no sentido negativo).

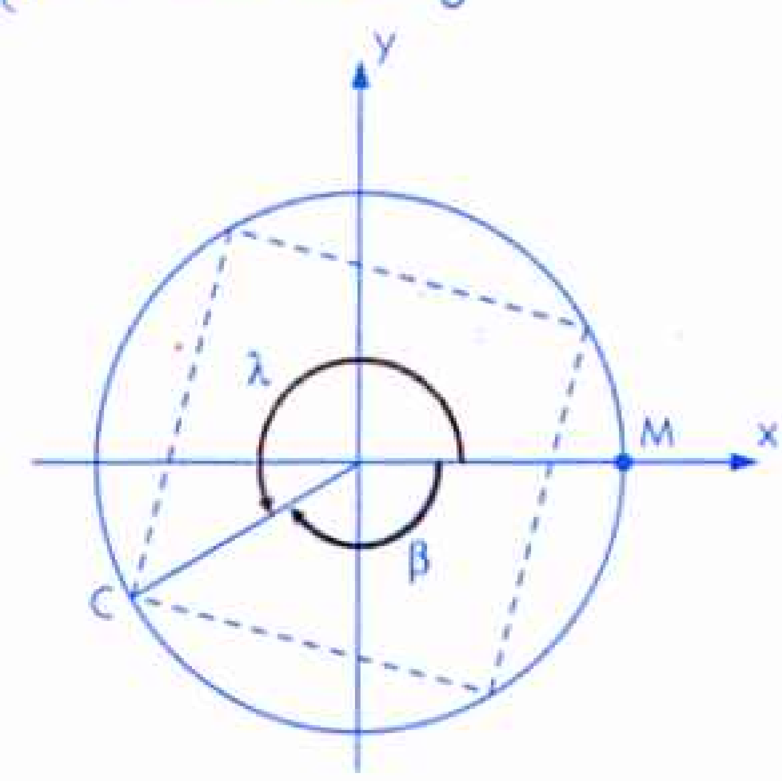
Vértice *A*: λ (A) = 30° (dado)

$$A \begin{cases} \lambda = 30° \text{ ou } \dfrac{\pi}{6} \\ \beta = -330° \text{ ou } -\dfrac{11\pi}{6} \end{cases}$$



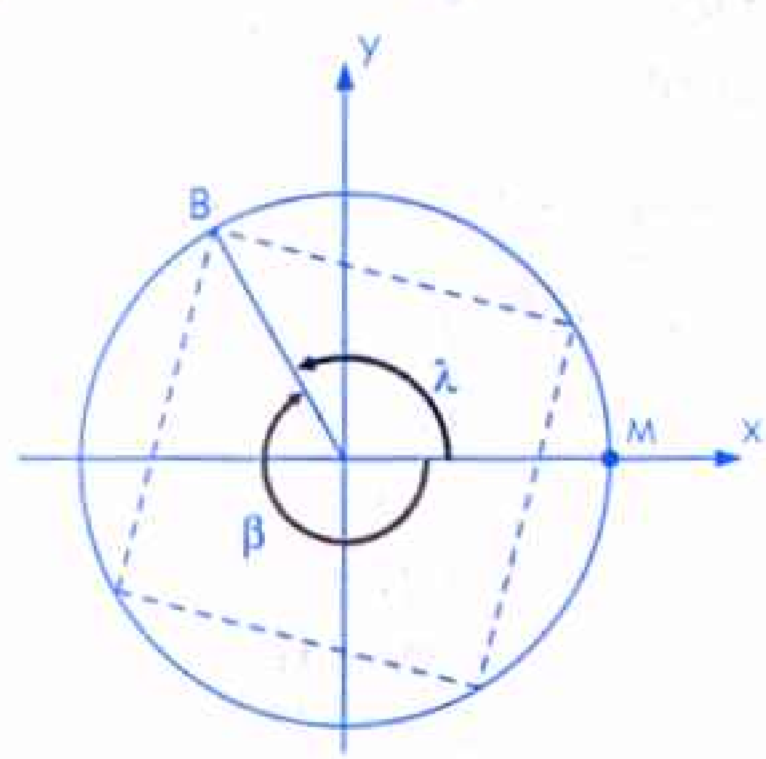
Vértice *C*: λ (C) = λ (B) + 90°

$$C \begin{cases} \lambda = 210° \text{ ou } \dfrac{7\pi}{6} \\ \beta = -150° \text{ ou } -\dfrac{5\pi}{6} \end{cases}$$



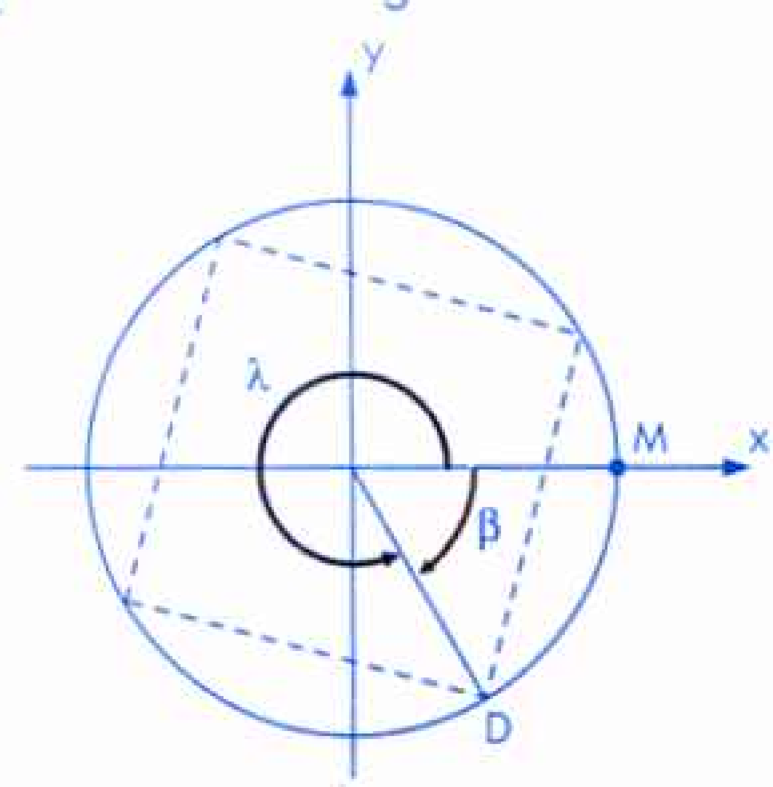
Vértice *B*: λ (B) = λ (A) + 90°

$$B \begin{cases} \lambda = 120° \text{ ou } \dfrac{2\pi}{3} \\ \beta = -240° \text{ ou } -\dfrac{4\pi}{6} \end{cases}$$



Vértice *D*: λ (D) = λ (c) + 90°

$$D \begin{cases} \lambda = 300° \text{ ou } \dfrac{5\pi}{3} \\ \beta = -60° \text{ ou } -\dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$



Propostos

487 Determine os quadrantes a que pertencem as extremidades dos seguintes arcos:

a) $18°$
b) $141°$
c) $-100°$
d) $1\,998°$
e) $\frac{\pi}{6}$ rad
f) $\frac{5\pi}{4}$ rad

488 Determine os quadrantes a que pertencem as extremidades dos seguintes arcos:

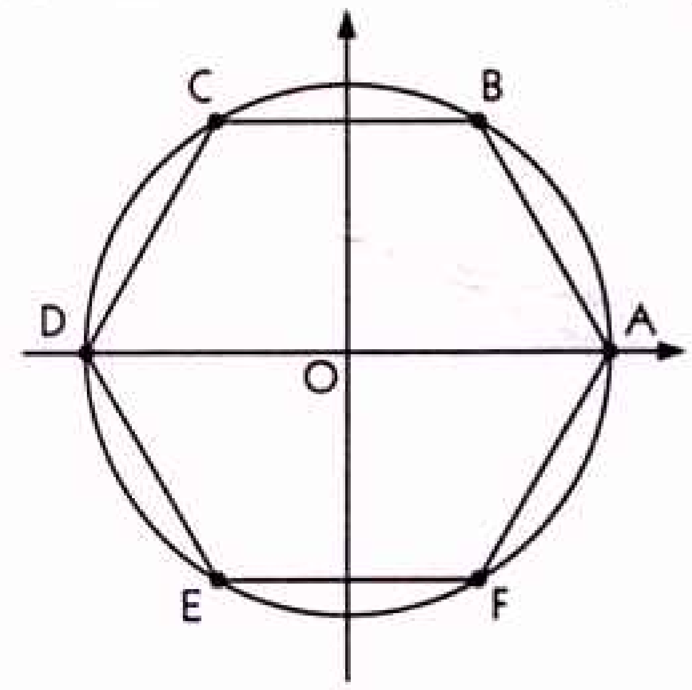
a) $\frac{7\pi}{3}$ rad
b) $-\frac{7\pi}{4}$ rad
c) $-\frac{11\pi}{4}$ rad
d) $\frac{190\pi}{4}$ rad

489 Identifique em cada item se os arcos são côngruos:

a) $\frac{\pi}{6}$ rad e $\frac{25\pi}{6}$ rad

b) $-\frac{\pi}{3}$ rad e $-\frac{13\pi}{3}$ rad

490 Numa circunferência foram marcados seis pontos, *A*, *B*, *C*, *D*, *E* e *F*, formando um polígono regular. Determine, em graus e radianos, as medidas dos arcos côngruos de extremidades nos vértices do polígono.

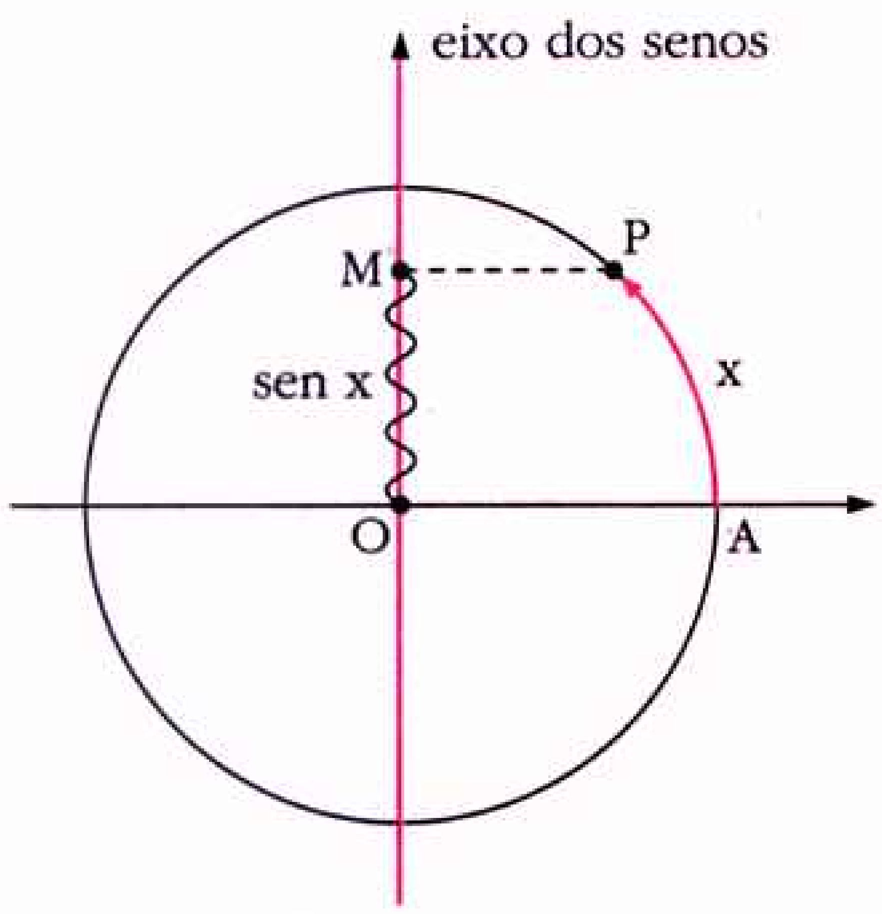


Função seno

y = sen x

Considerando um arco AP, cuja medida é o número real *x*, denominamos seno do arco AP o valor da ordenada do ponto *P*.

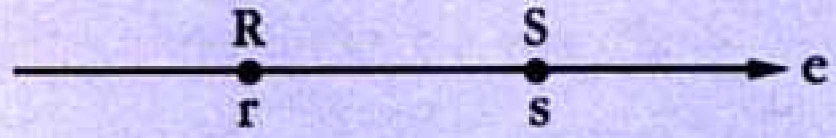
No ciclo trigonométrico:



$$\boxed{\text{sen } x = \overline{OM}}$$

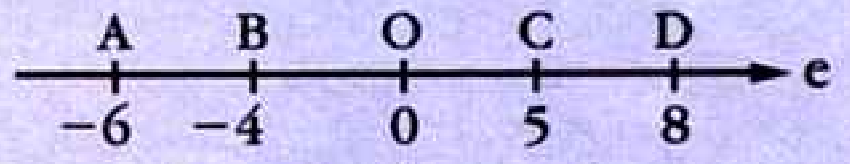
Uma nova medida

Já vimos que podemos associar a cada ponto de um eixo um único número real e vice-versa. Considere dois pontos, *R* e *S*, de um eixo *e*, associados aos números *r* e *s*, respectivamente.



Chamamos de *medida algébrica* de um segmento RS, indicada por $\overline{RS}$, o número dado por $\overline{RS} = s - r$

Exemplos:



$\overline{AB} = (-4) - (-6) = 2$

$\overline{BC} = 5 - (-4) = 9$

$\overline{CB} = (-4) - 5 = -9$

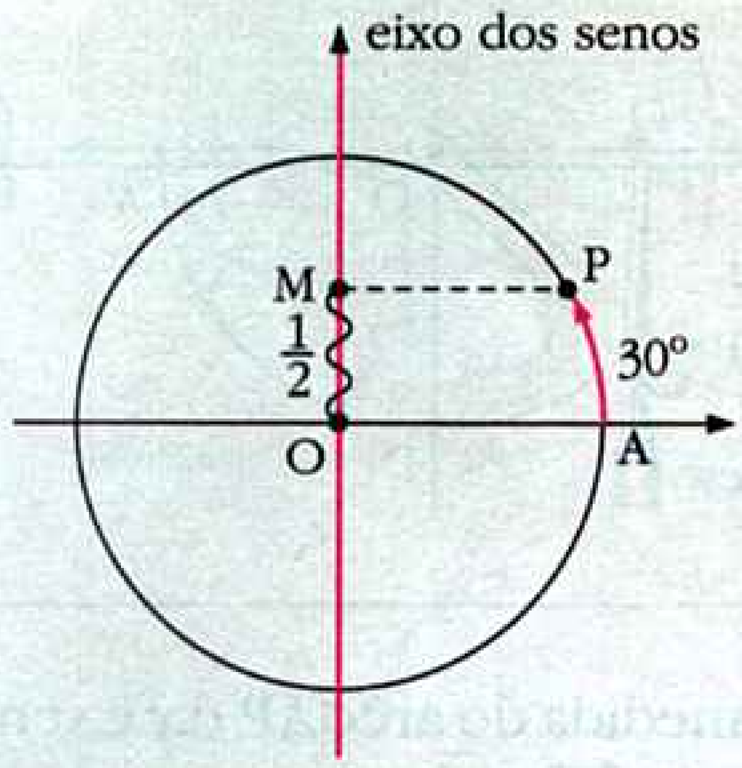
$\overline{OD} = 8 - 0 = 8$

$\overline{OA} = -6 - 0 = -6$

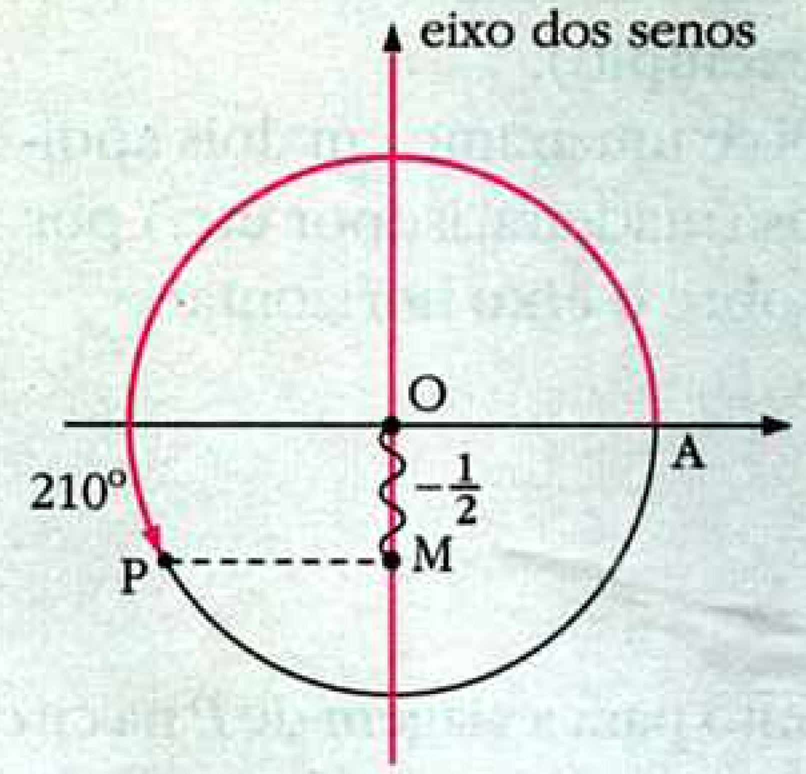
$\overline{OC} = 5 - 0 = 5$

Exemplo:
Veja no ciclo trigonométrico:

O seno do arco de 30° é igual a $\frac{1}{2}$.

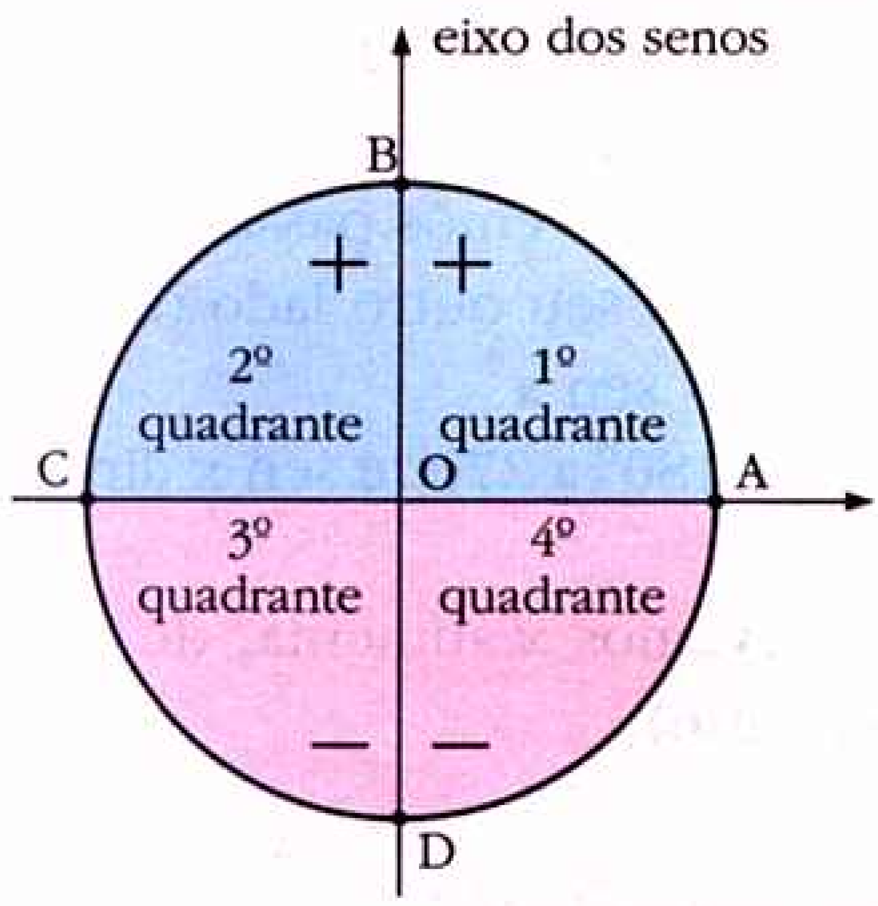


O seno do arco de 210° é igual a $\left(-\frac{1}{2}\right)$.



Sinais

Como os valores do seno são marcados no eixo das ordenadas Oy, então o seno será positivo no 1º e 2º quadrantes e negativo no 3º e 4º quadrantes:



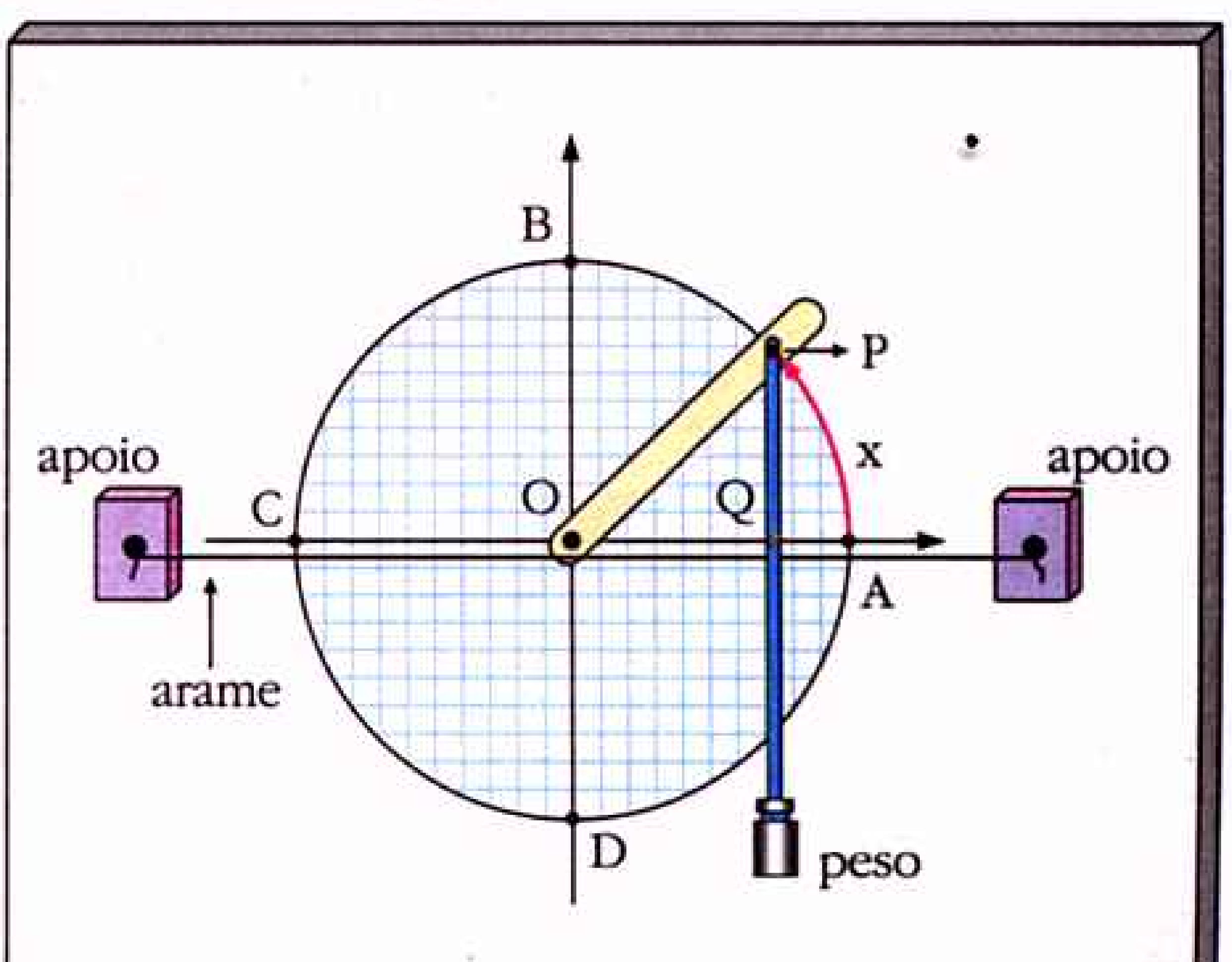
Sinais				
Quadrantes	1º	2º	3º	4º
Seno	+	+	−	−

Para analisar a variação da função y = sen x, construa o seu ciclo trigonométrico:

a) Desenhe um círculo com 1 dm de raio em um papel quadriculado, reforçando os eixos $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BD}$.

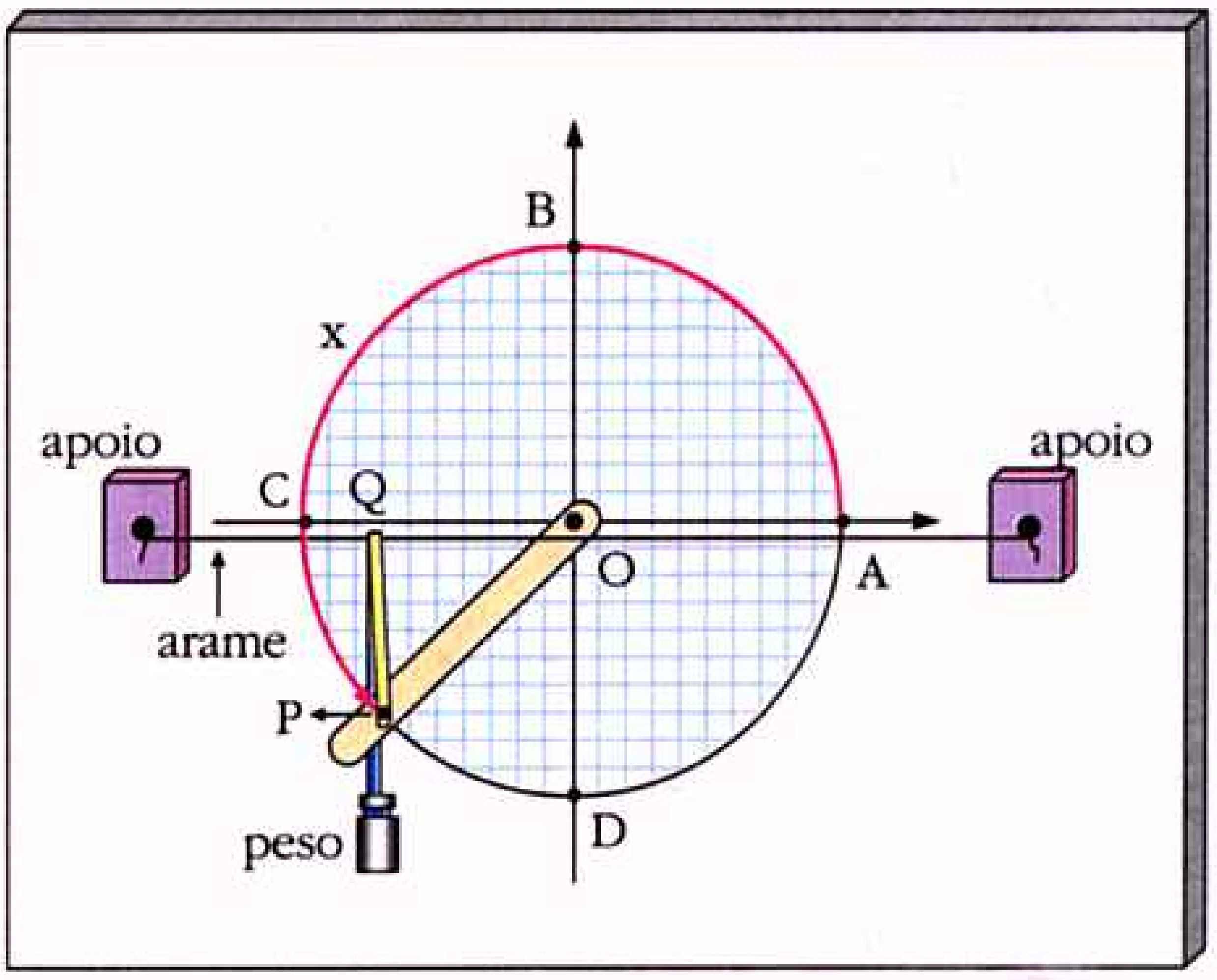
b) Cole-o em um papel cartão ou cartolina.

c) Fixe no centro *O* do círculo, com uma tachinha, um palito (de sorvete, de churrasco etc.).



d) Amarre na ponta P do palito uma fita com um pequeno peso na outra extremidade. Cada lado da fita deve ter uma cor (azul e amarela, por exemplo).

e) Fixe um arame em dois apoios (madeira, isopor etc.) por sobre o eixo horizontal.



Pronto para a viagem de P na circunferência: a medida do arco AP é x e sen x = $\overline{PQ}$ (inicialmente visto pelo lado azul da fita, acima do eixo $\overleftrightarrow{AC}$; depois visto pelo lado amarelo da fita, abaixo do eixo $\overleftrightarrow{AC}$).

Posicionando P sobre A, gire lentamente o palito no sentido anti-horário.

Observe que enquanto P vai de A para B, x aumenta de 0° a 90° e $\overline{PQ}$, isto é, sen x, aumenta de 0 a 1 (aqui a função é crescente).

Depois que passa de B e caminha para C vemos que x vai de 90° a 180°, enquanto sen x diminui de 1 para 0 (aqui a função é decrescente).

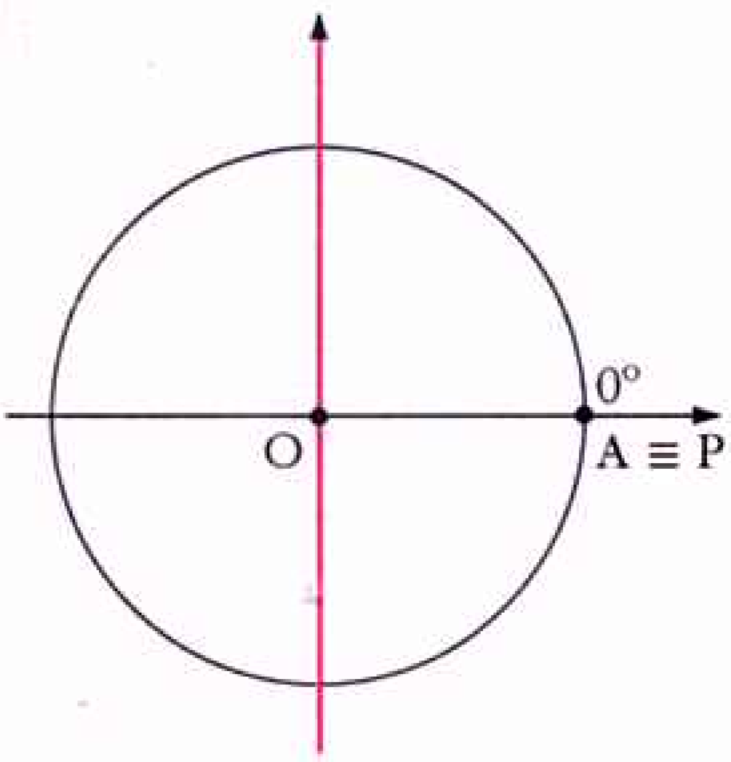
Para as 3ª e 4ª etapas (de C até D e de D até A) devemos passar a ponta da fita com o peso por sobre o arame e então aparecerá o seu outro lado (amarelo) cuja parte da ponta do palito até o arame indicará $\overline{PQ}$ = sen x.

Quando P caminha de C até D, x aumenta de 180° a 270° e sen x diminui de 0 a −1 (aqui a função é decrescente).

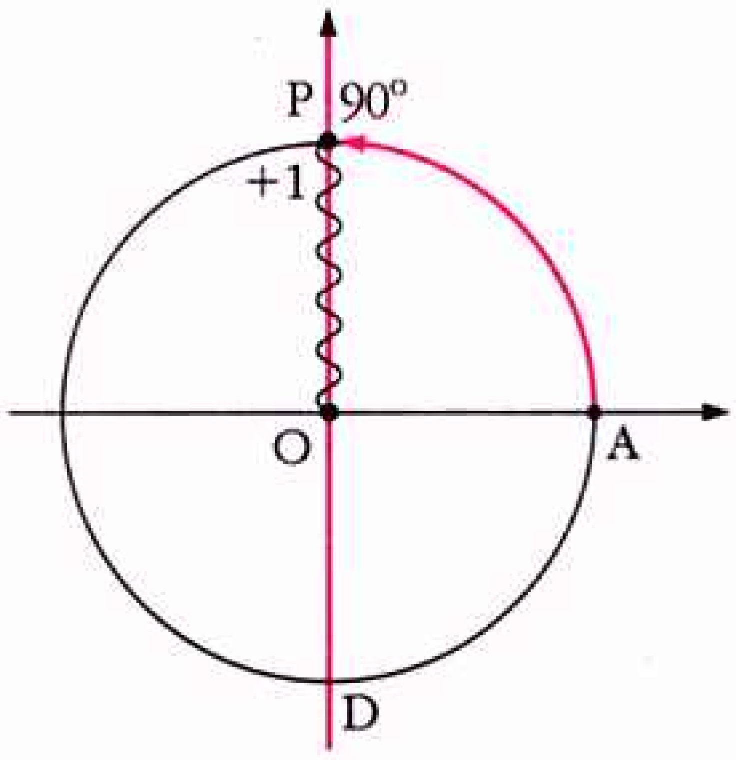
Finalmente, quando P sai de D e chega a A, vemos x aumentar de 270° a 360°, enquanto sen x cresce de −1 a 0 (função crescente).

Seno dos arcos notáveis

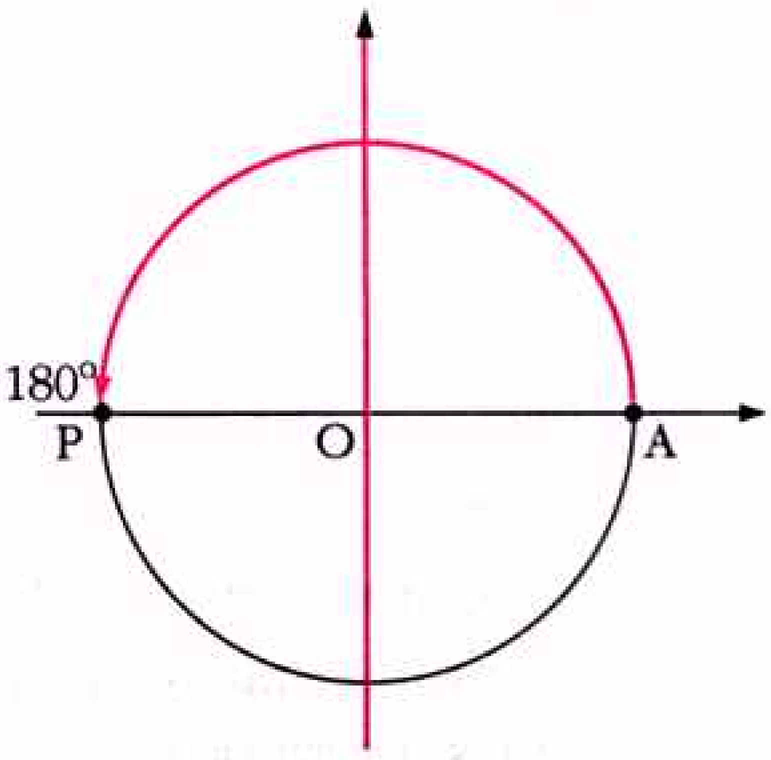
Em cada figura, o seno do arco em destaque é a ordenada do ponto P.



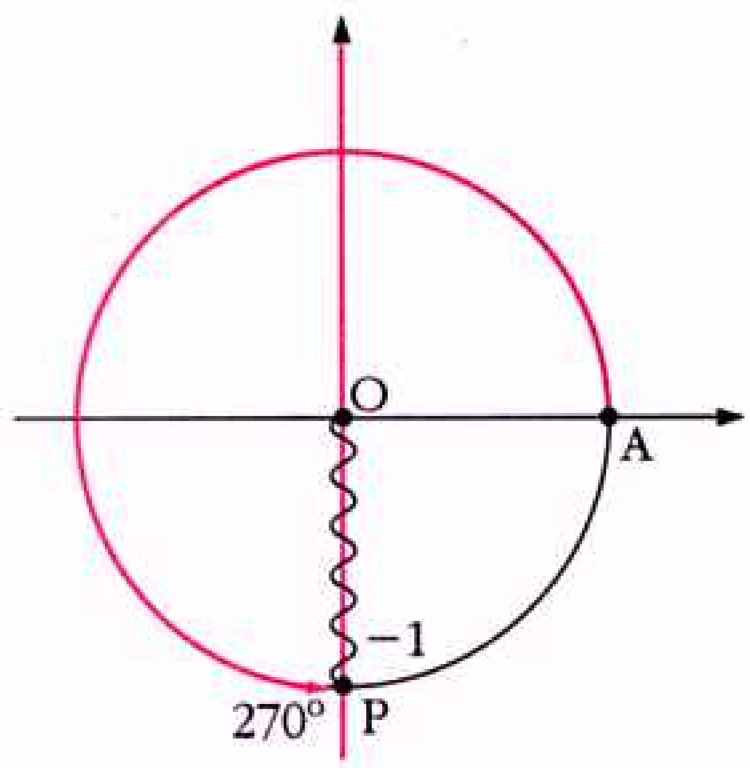
sen 0° = 0



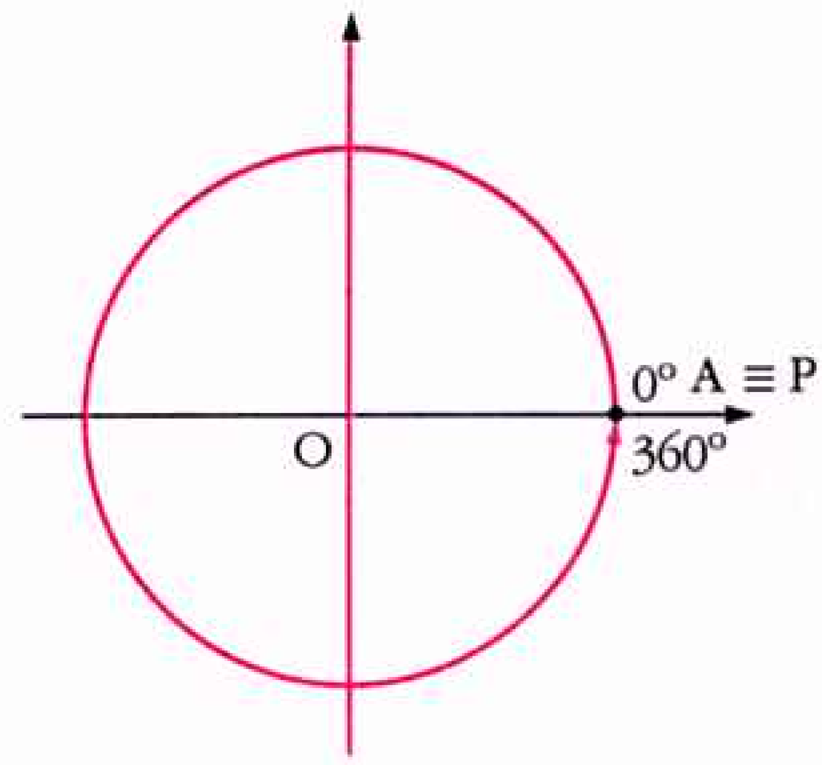
sen 90° = +1



sen 180° = 0



sen 270° = −1



sen 360° = 0

x	0° ou 0 rad	90° ou $\frac{\pi}{2}$ rad	180° ou π rad	270° ou $\frac{3\pi}{2}$ rad	360° ou 2π rad
sen x	0	+1	0	−1	0

Em resumo:

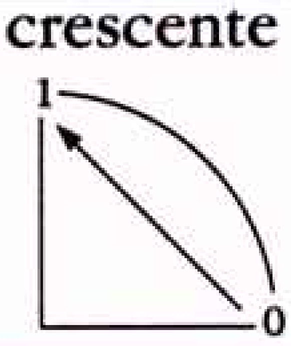
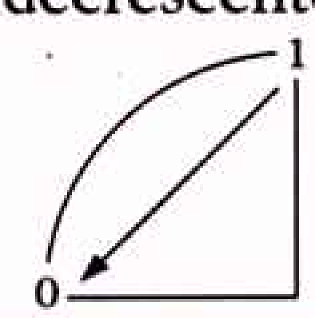
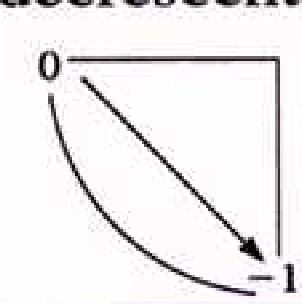
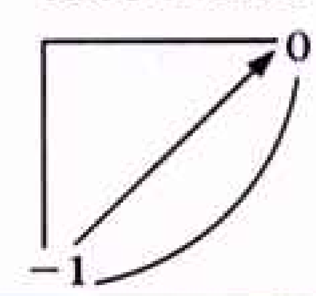
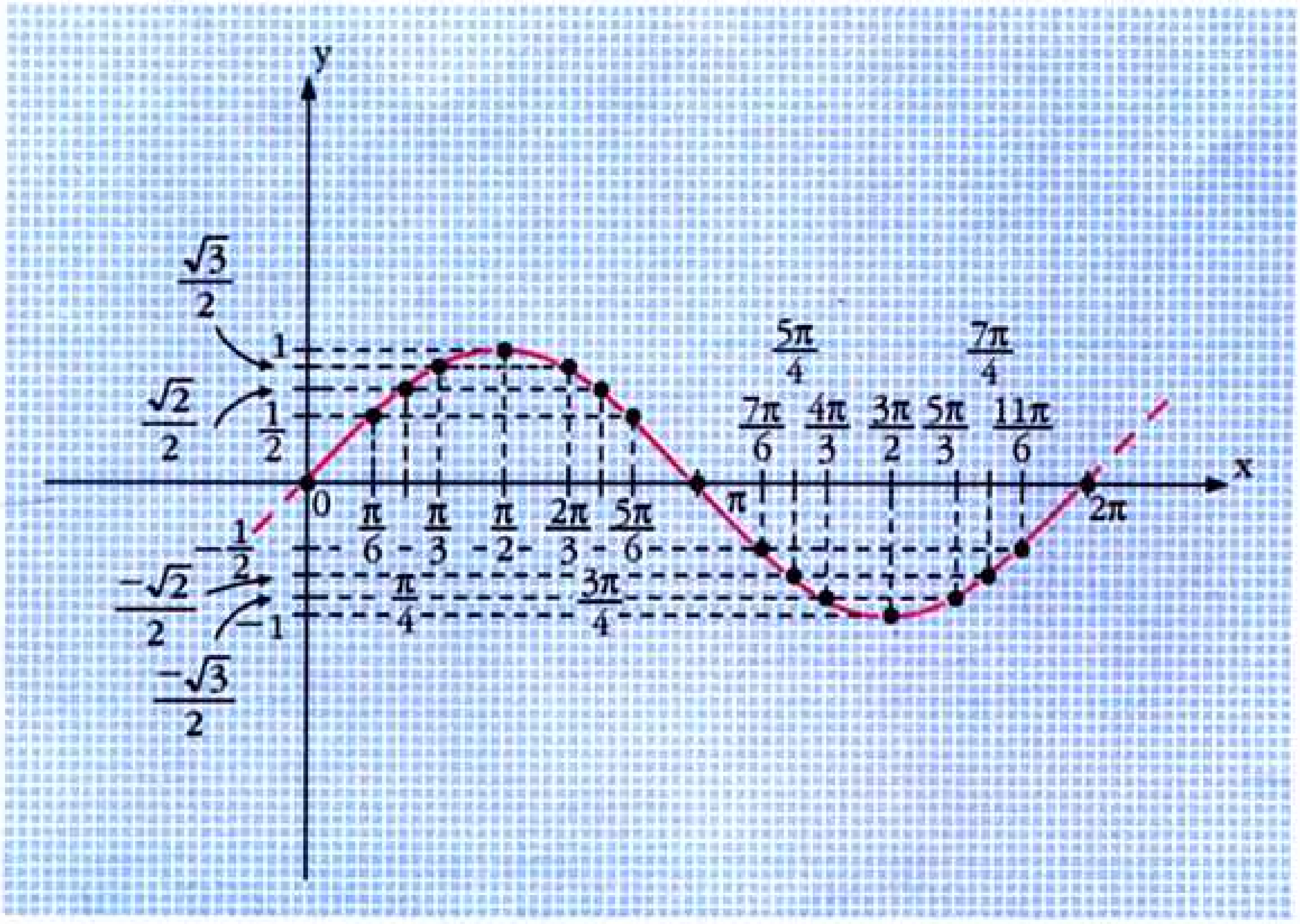
	Seno			
Quadrantes	1º	2º	3º	4º
Sinal	+	+	−	−
Variação	crescente 	decrescente 	decrescente 	crescente 

Gráfico da função seno (y = sen x)

Para construir o gráfico da função seno, vamos fazer uso da seguinte tabela:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y = sen x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	−1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0



Conclusões

- O domínio da função seno é o conjunto dos números reais; portanto, a curva continua à direita de 2π e à esquerda de 0:

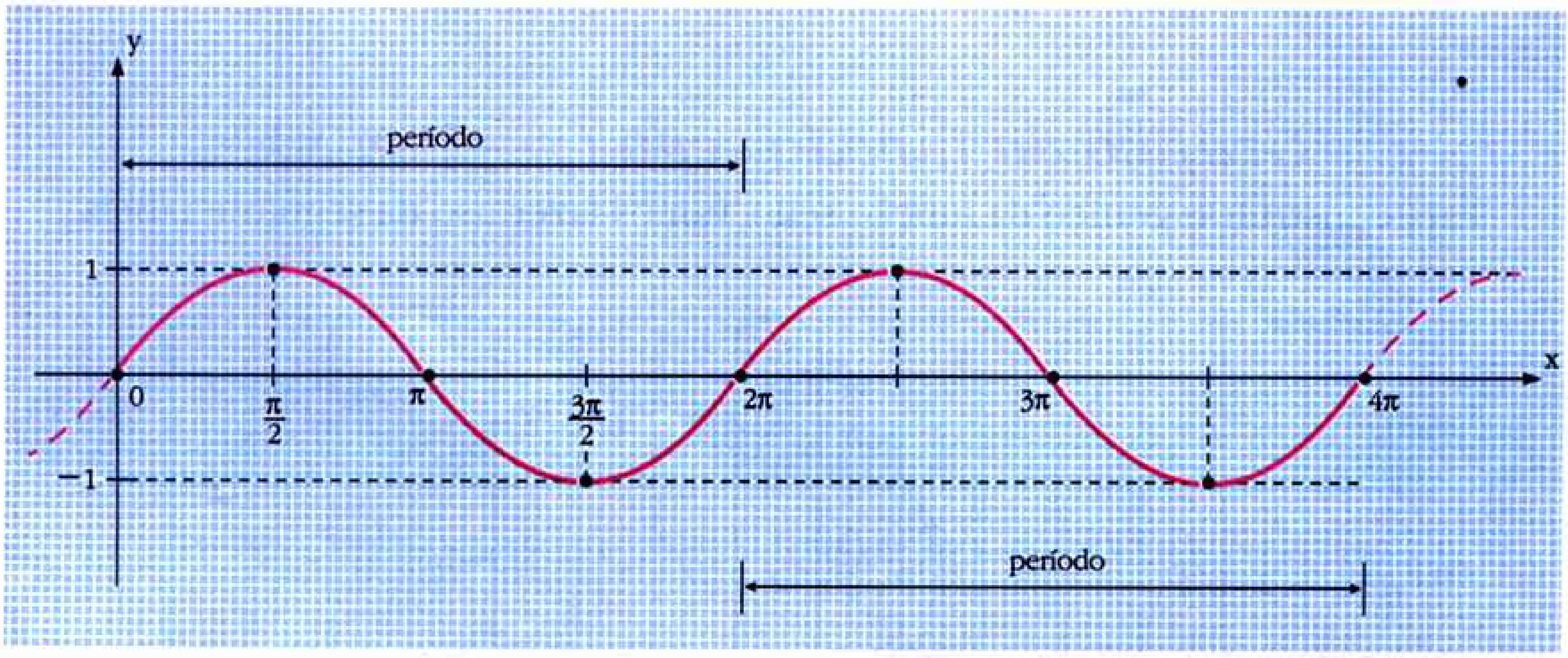
$$D(f) = \mathbb{R}$$

- O conjunto imagem da função é o intervalo $[-1, 1]$; portanto, a função seno assume como valor mínimo -1 e como valor máximo $+1$:

$$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$$

- O período da função seno é o número 2π, pois o valor de f(x) da função seno se repete a cada intervalo de amplitude 2π para valores de x:

$$P = 2\pi$$



Exercícios

Resolvidos

1 Quais valores *k* pode assumir para tornar possível a igualdade sen x = 2k − 5?

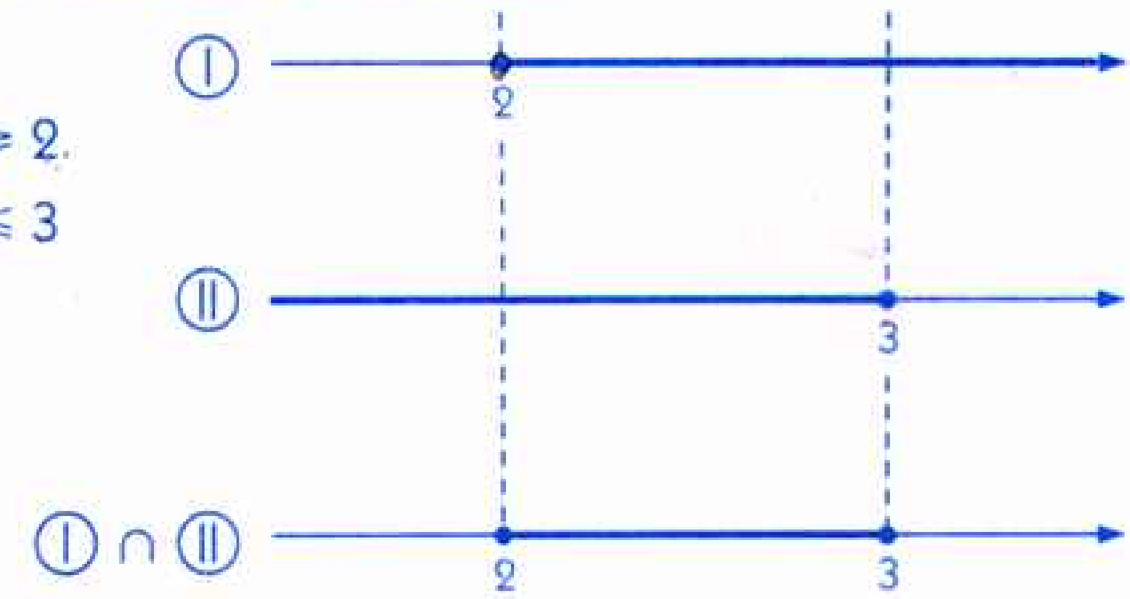
A função seno assume os seguintes valores:

$-1 \leq \text{sen}\, x \leq 1$

$-1 \leq 2k - 5 \leq 1$

Essa desigualdade pode ser resolvida como um sistema de inequações:

$$\begin{cases} -1 \leq 2k - 5 & \text{(I)} \\ 2k - 5 \leq 1 & \text{(II)} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} -2k \leq -4 \\ 2k \leq 6 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} k \geq 2 \\ k \leq 3 \end{cases}$$



Identificando os valores *k*, temos:
$V = \{k \in \mathbb{R} \mid 2 \leq k \leq 3\}$.

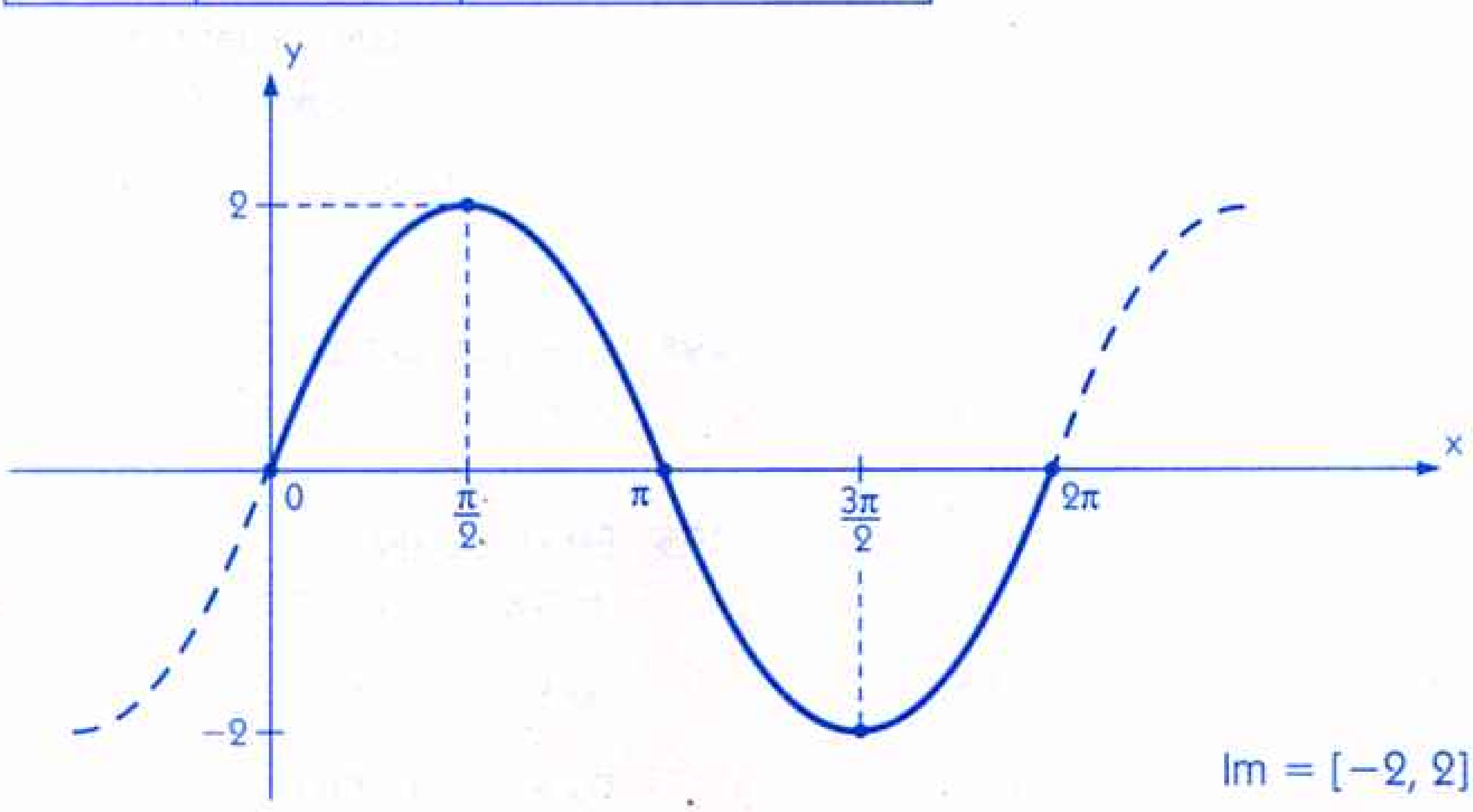
2 Esboçar o gráfico das funções e identificar o conjunto imagem e o período: $2 \leq K \leq 3$

a) y = 2 sen x b) y = sen 2x c) y = | sen x |

a) y = 2 sen x

Construímos a tabela e transferimos os valores para os eixos:

x	sen x	y = 2 sen x
0	0	$y = 2 \cdot 0 = 0$
$\frac{\pi}{2}$	1	$y = 2 \cdot 1 = 2$
π	0	$y = 2 \cdot 0 = 0$
$\frac{3\pi}{2}$	-1	$y = 2 \cdot (-1) = -2$
2π	0	$y = 2 \cdot 0 = 0$

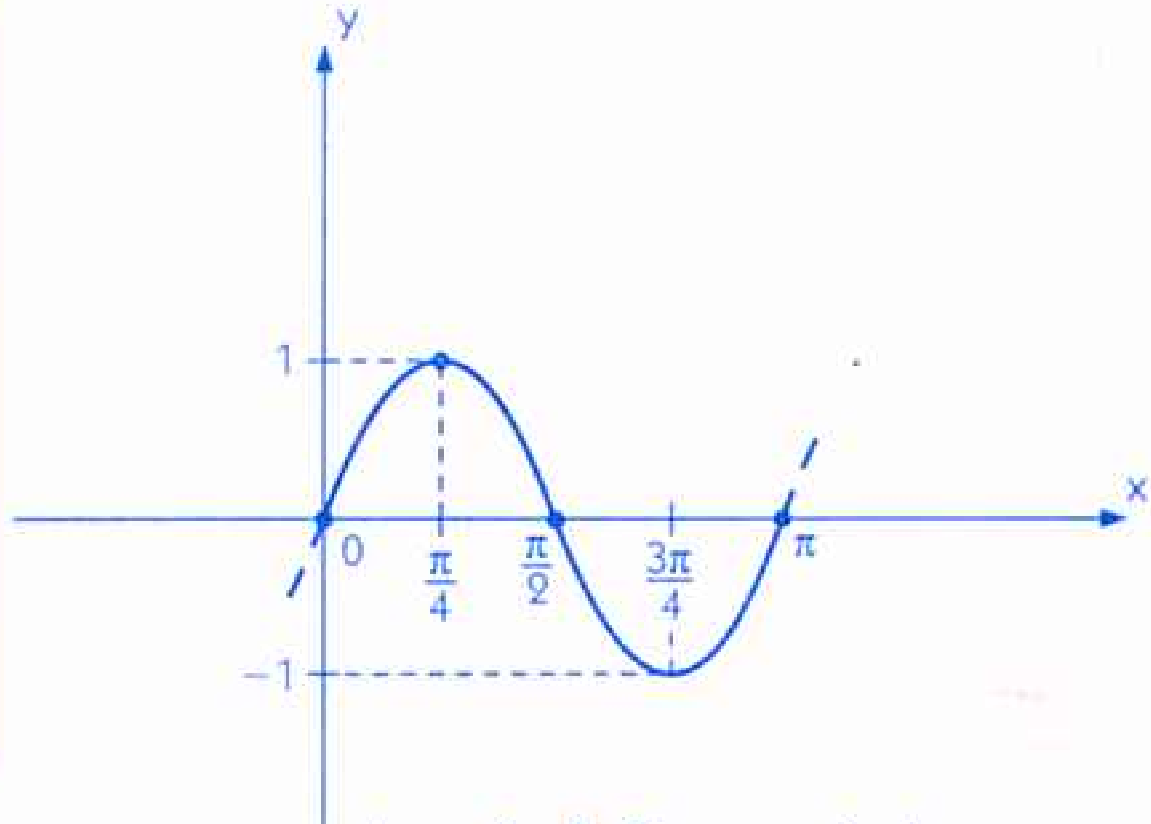


Im = [−2, 2] e período 2π

b) $y = \text{sen } 2x$

Nesse caso, usamos o seguinte artifício: $\begin{cases} 2x = \mu \\ y = \text{sen } \mu \end{cases}$

μ	$\mu = \frac{\mu}{2}$	$y = \text{sen } \mu$
0	0	0
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	1
π	$\frac{\pi}{2}$	0
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	−1
2π	π	0

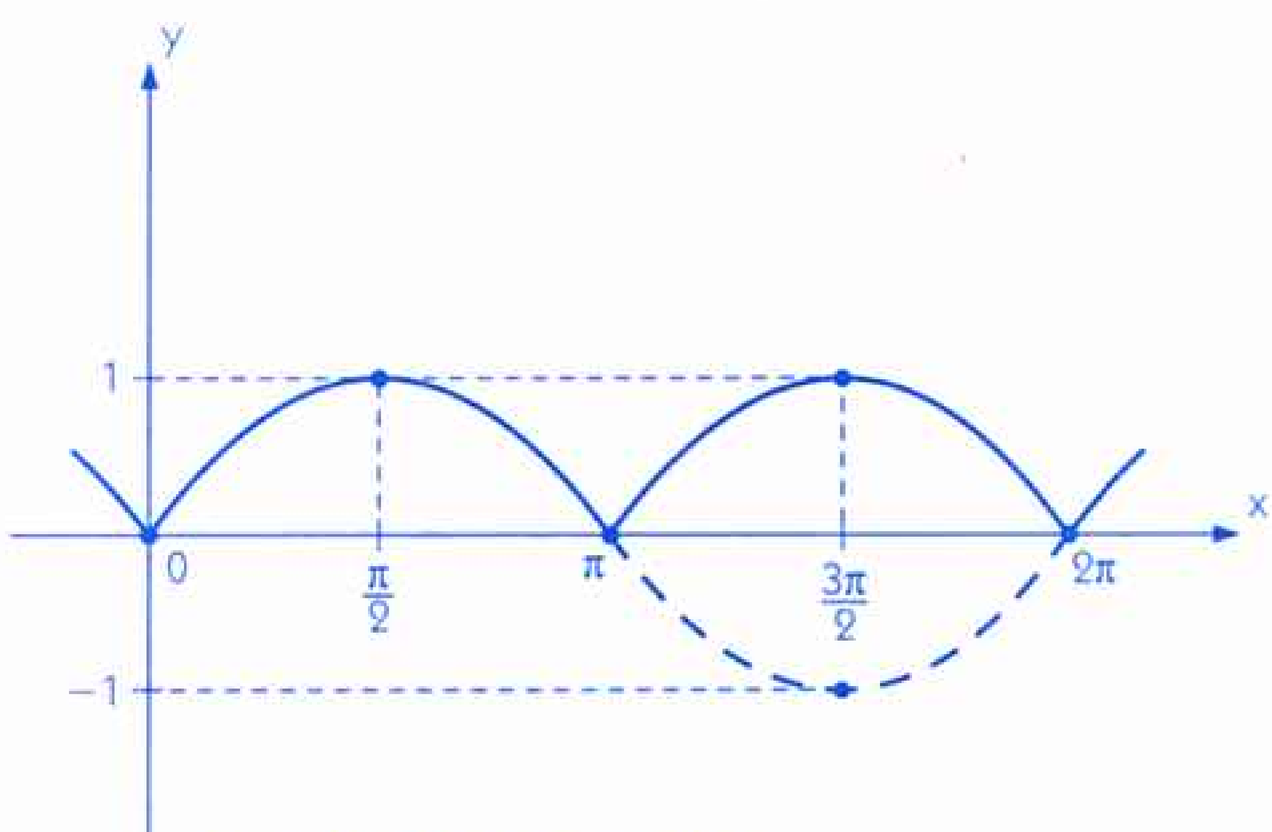


$\text{Im} = [-1, 1]$ e o período π

c) $y = |\text{sen } x|$

Inicialmente construímos o gráfico da função $y = \text{sen } x$ fazendo, em seguida, o rebatimento dos pontos situados abaixo do eixo do x, obtendo $y = |\text{sen } x|$.

x	sen x
0	0
$\frac{\pi}{2}$	1
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	−1
2π	0



$\text{Im} = [0, 1]$ e o período π

Propostos

491 Indique o valor de:

a) $\text{sen } \frac{3\pi}{2}$

b) $\text{sen } \pi$

c) $\text{sen } \frac{5\pi}{2}$

d) $\text{sen } \frac{11\pi}{2}$

e) $\text{sen } 0°$

f) $\text{sen } 1\,530°$

g) $\text{sen } (-90°)$

h) $\text{sen } 810°$

492 Quais valores *k* pode assumir para tornar possível a igualdade?

a) $\text{sen } x = k + 3$

b) $\text{sen } x = 2k + 9$

493 Construir o gráfico das funções e identificar o conjunto imagem e o período:

a) $y = 3 \text{ sen } x$

b) $y = \text{sen } \frac{x}{2}$

494 Para que valores de *k* temos: $\text{sen } x = k^2 + k + 1$?

495 Esboce o gráfico, escreva o conjunto imagem e determine o período das funções:

a) $y = \left|\text{sen } \frac{x}{2}\right|$

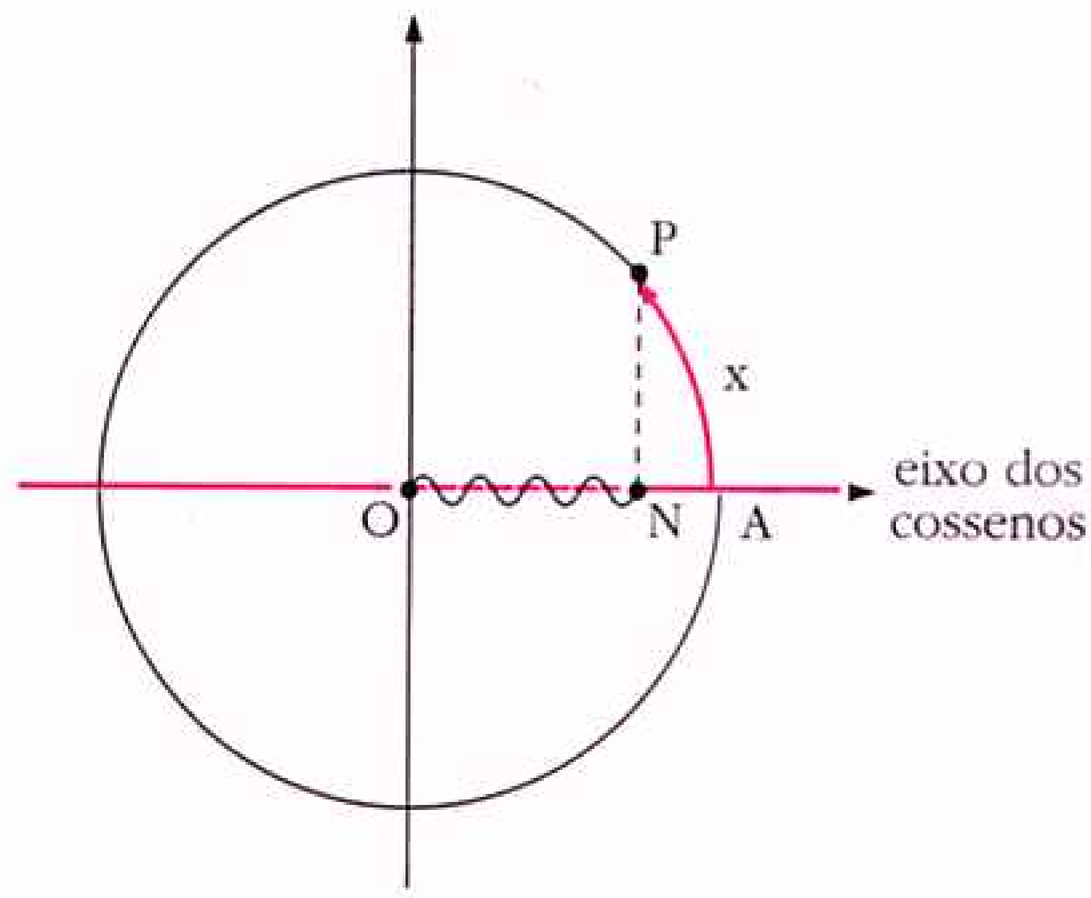
b) $y = 2 + \text{sen } x$

Função cosseno

$y = \cos x$

Considerando um arco AP, cuja medida é o número real x, denominamos cosseno do arco AP o valor da abscissa do ponto P.

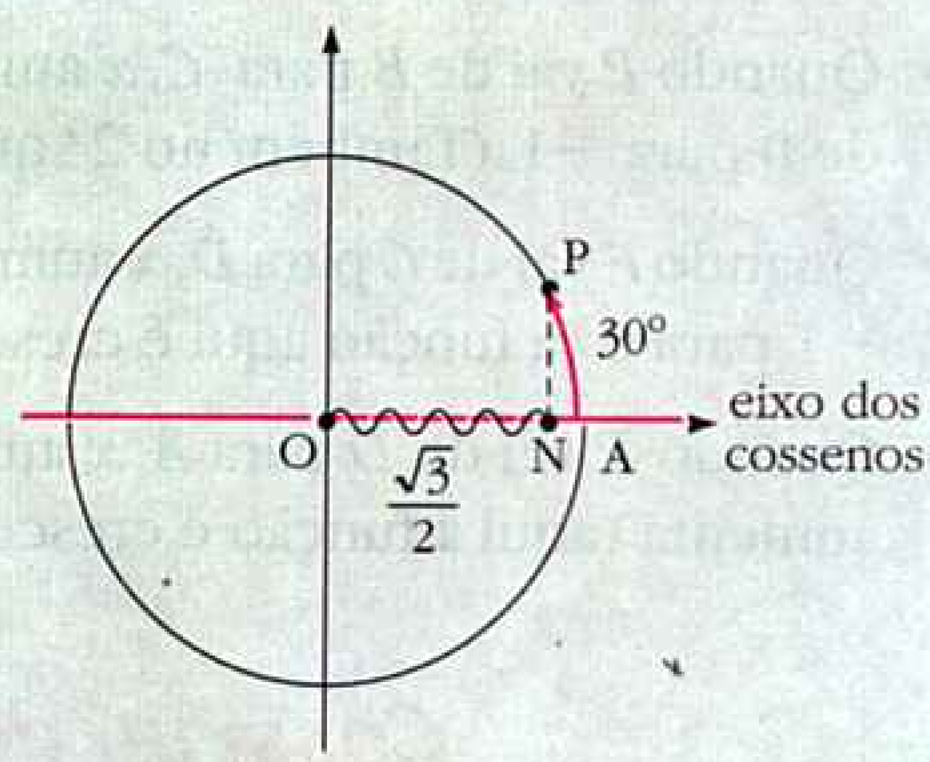
$\cos x = \overline{ON}$



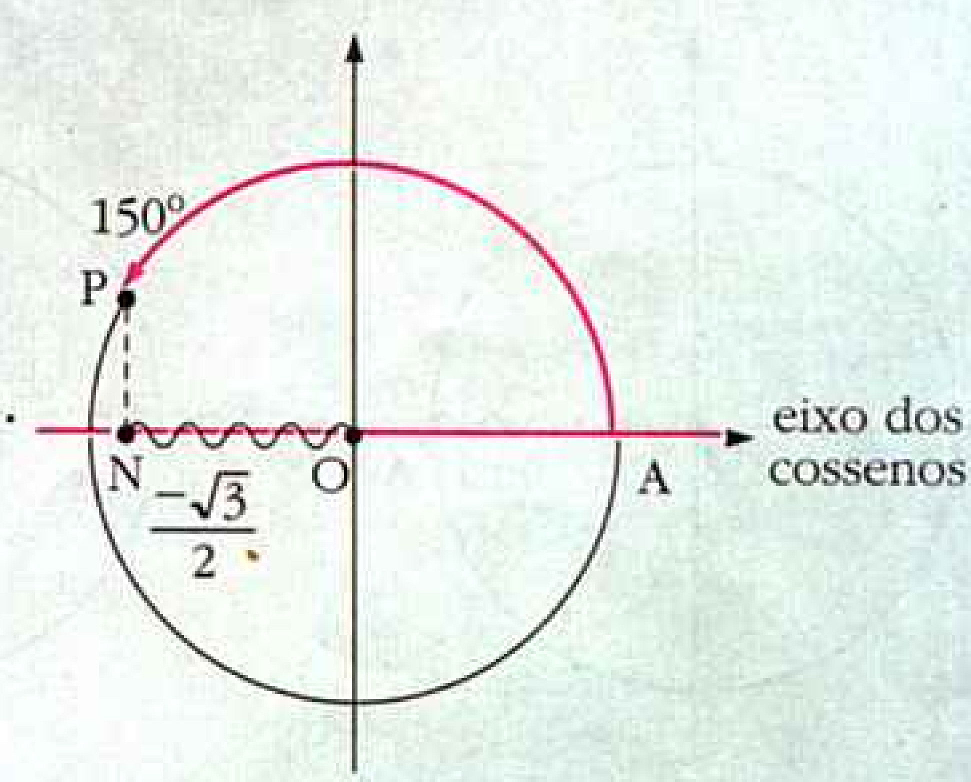
Exemplo:

Veja no ciclo trigonométrico:

O cosseno do arco de 30° é igual a $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

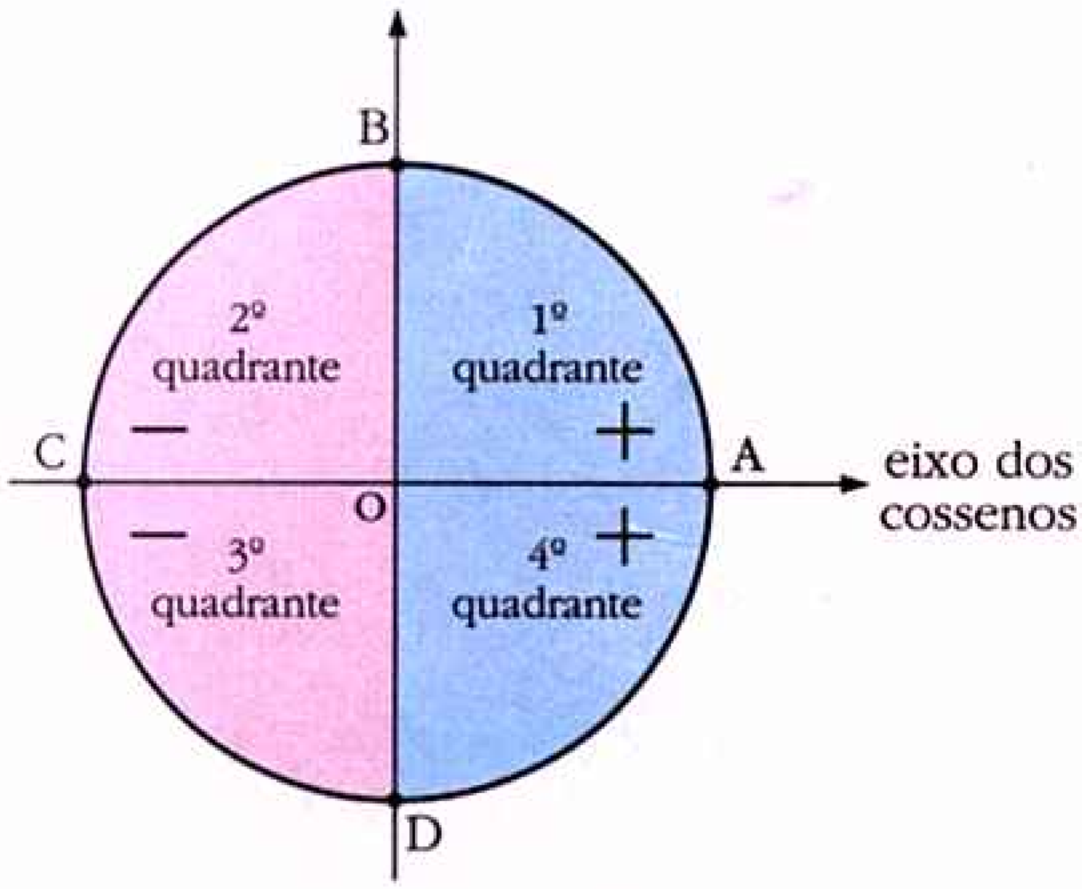


O cosseno do arco de 150° é igual a $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.



Sinais

Como os valores do cosseno são marcados no eixo das abscissas Ox, então o cosseno será positivo no 1º e 4º quadrantes e negativo, no 2º e 3º quadrantes.



Sinais				
Quadrantes	1º	2º	3º	4º
Cosseno	+	–	–	+

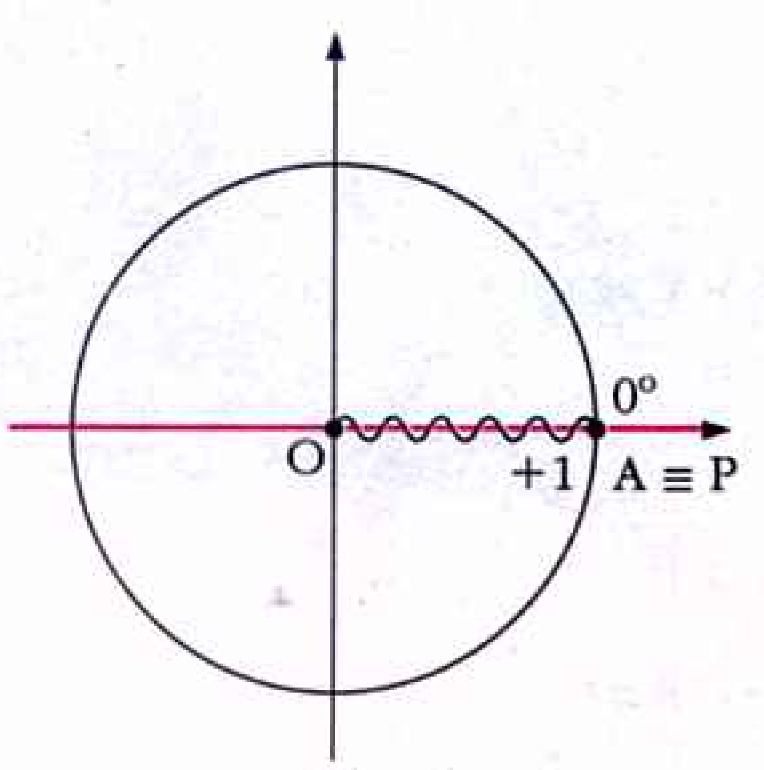
Retome o ciclo trigonométrico (pág. 205).

Novamente faça *P* percorrer o ciclo de *A* até *A* no sentido anti-horário, mas agora acompanhe a variação de $\overline{OQ}$.

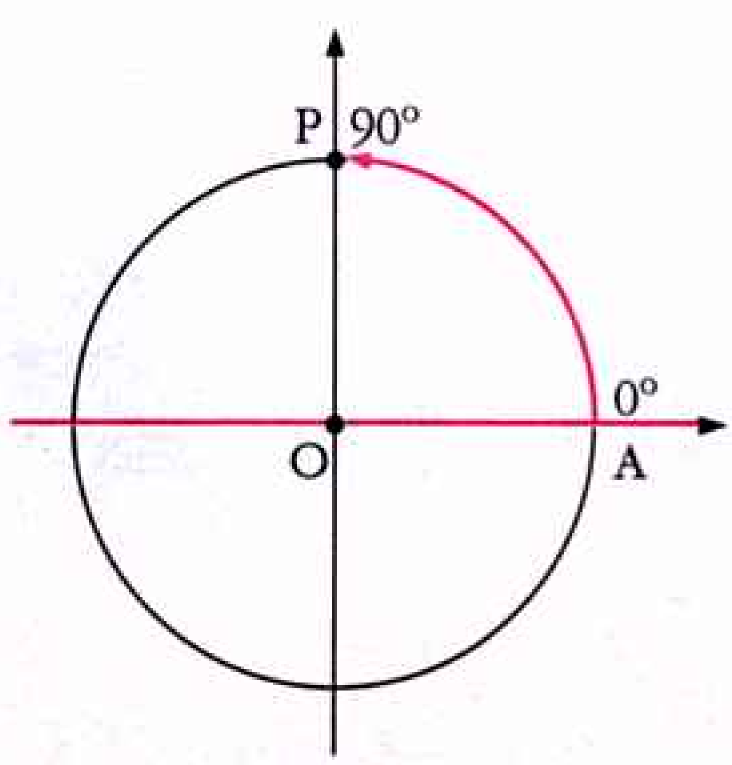
- Quando *P* vai de *A* para *B*, *x* aumenta de 0° para 90° e o cos x = OQ diminui de 1 para 0 (no 1º quadrante a função y = cos x é decrescente).
- Quando *P* vai de *B* para *C*, *x* aumenta de 90° para 180° e o cos x = OQ diminui de 0 para −1. (Também no 2º quadrante a função y = cos x é decrescente.)
- Quando *P* vai de *C* para *D*, *x* aumenta de 180° a 270°, enquanto cos x aumenta de −1 para 0 (a função aqui é crescente).
- Quando *P* vai de *D* para *A*, *x* aumenta de 270° a 360°, enquanto cos x também aumenta (aqui a função é crescente).

Cosseno dos arcos notáveis

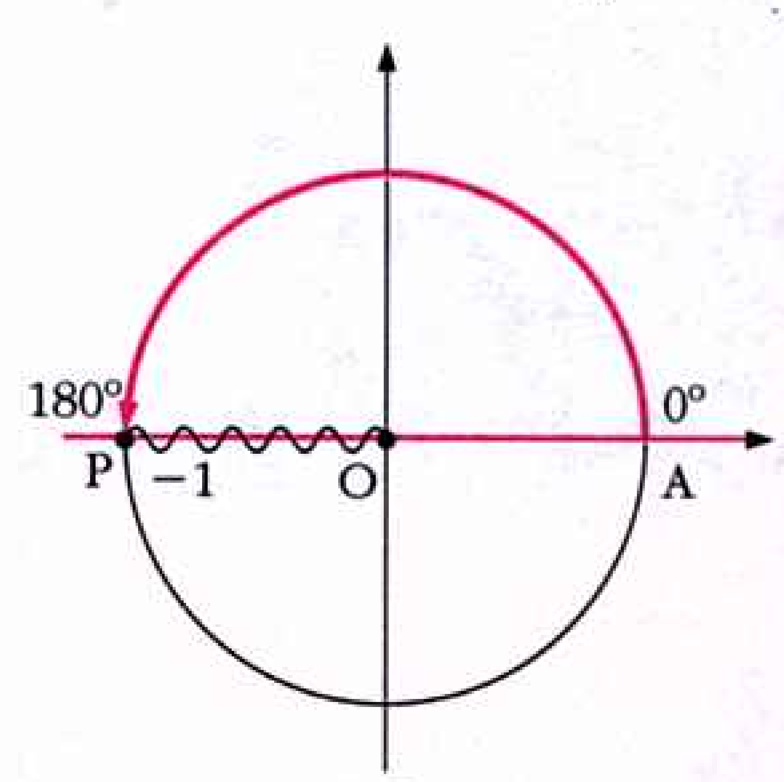
Em cada figura, o cosseno do arco em destaque é a abscissa do ponto *P*.



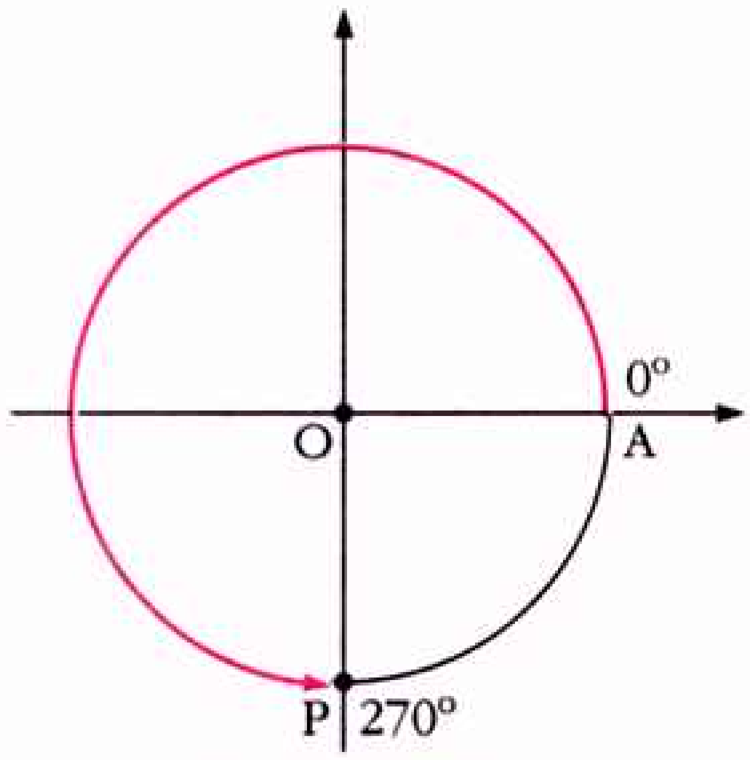
cos 0° = 1



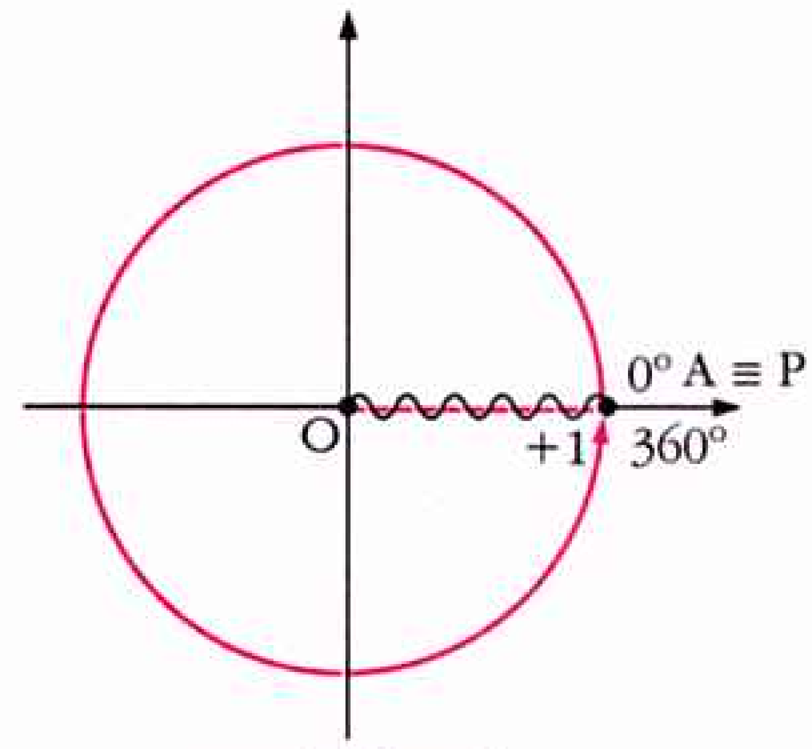
cos 90° = 0



cos 180° = −1



cos 270° = 0



cos 360° = 1

x	**0° ou 0 rad**	**90° ou $\frac{\pi}{2}$ rad**	**180° ou π rad**	**270° ou $\frac{3\pi}{2}$ rad**	**360° ou 2π rad**
cos x	+1	0	−1	0	+1

Em resumo:

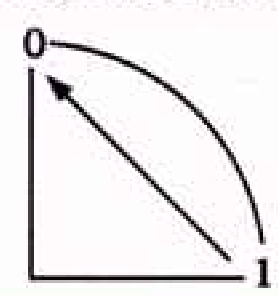
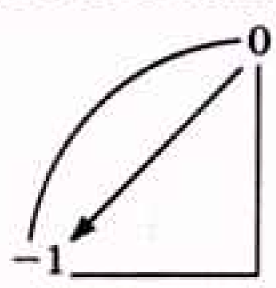
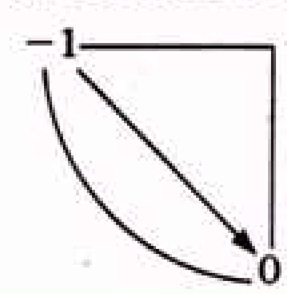
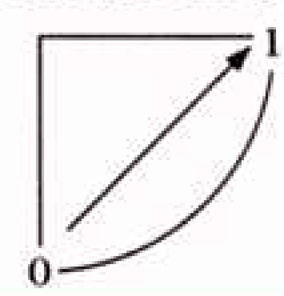
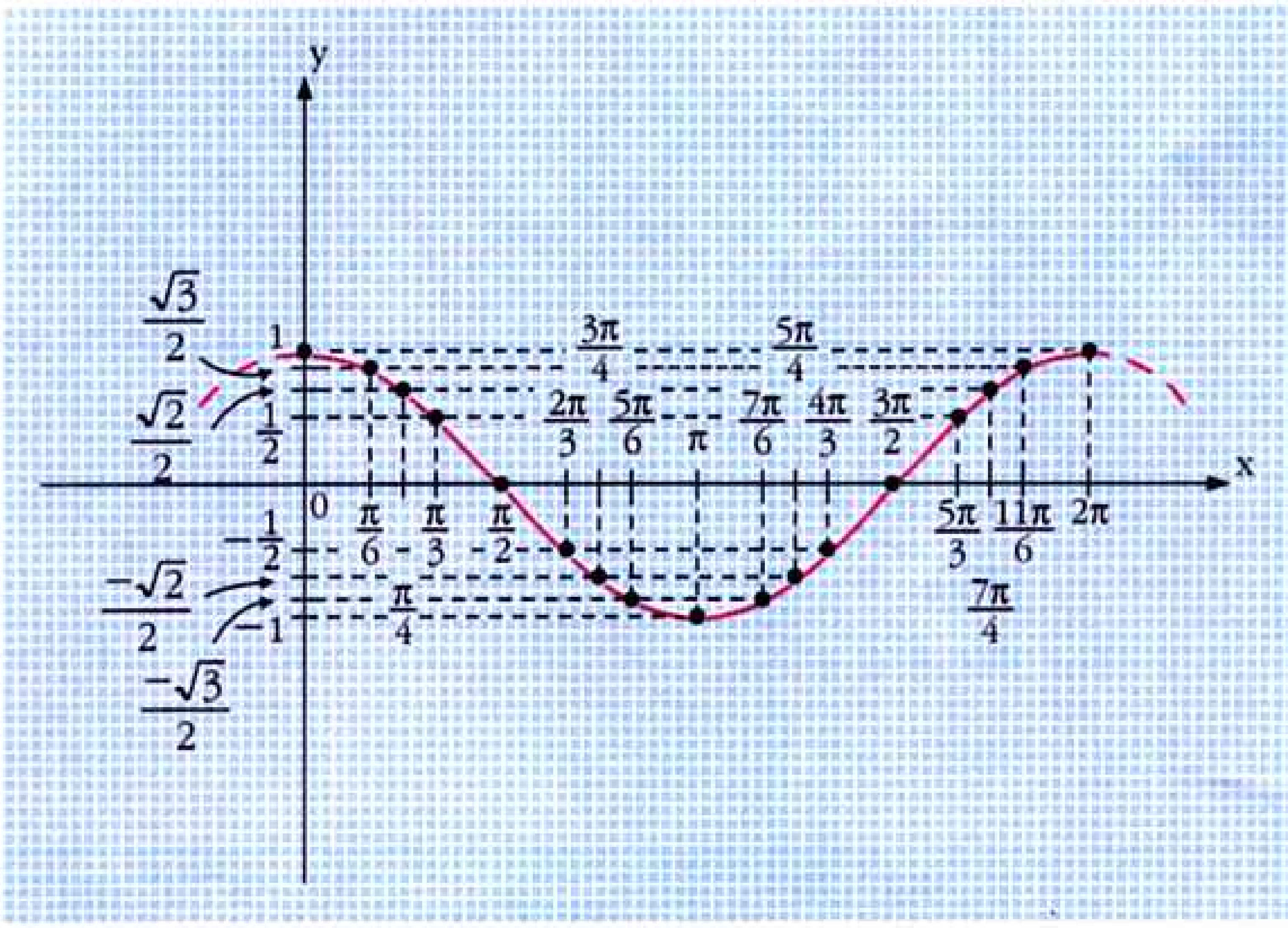
	Cosseno			
Quadrantes	1º	2º	3º	4º
Sinal	+	−	−	+
Variação	decrescente 	decrescente 	crescente 	crescente 

Gráfico da função cosseno (y = cos x)

Para construir o gráfico da função cosseno, vamos fazer uso da seguinte tabela:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y = cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	−1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



Conclusões

- O domínio da função cosseno é o conjunto dos números reais; portanto, a curva continua à direita de 2π e à esquerda de 0:

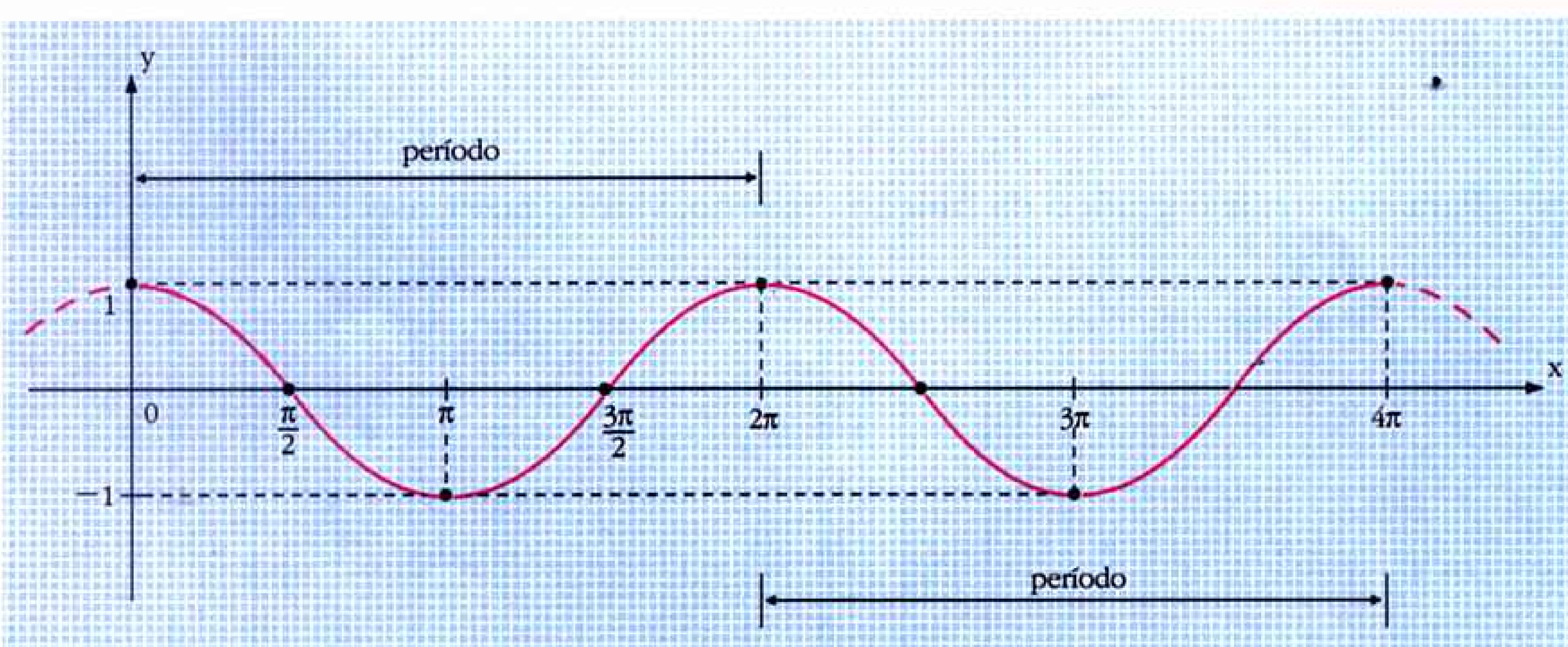
$$D(f) = \mathbb{R}$$

- O conjunto imagem da função é o intervalo $[-1, 1]$; portanto, a função cosseno assume como valor mínimo -1 e como valor máximo, $+1$:

$$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$$

- O período da função cosseno é o número 2π, pois o valor de f(x) da função cosseno se repete a cada intervalo de amplitude 2π para valores de x:

$$P = 2\pi$$



Exercícios

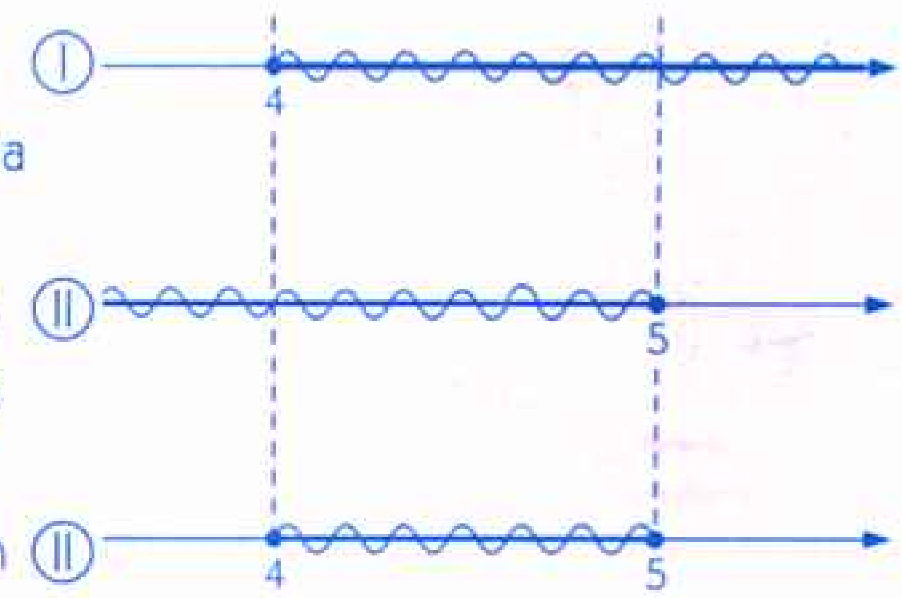
Resolvidos

1 Quais valores *k* pode assumir para tornar possível a igualdade $\cos x = 2k - 9$?

A função cosseno assume os seguintes valores:

$-1 \leq \cos x \leq 1$

$-1 \leq 2k - 9 \leq 1$



Essa desigualdade pode ser resolvida como um sistema de inequações:

$$\begin{cases} -1 \leq 2k - 9 & \text{I} \\ 2k - 9 \leq 1 & \text{II} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} -2k \leq -8 \\ 2k \leq 10 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} k \geq 4 \\ k \leq 5 \end{cases}$$

Identificando os valores de *k*, teremos:

$V = \{k \in \mathbb{R} \mid 4 \leq k \leq 5\}$.

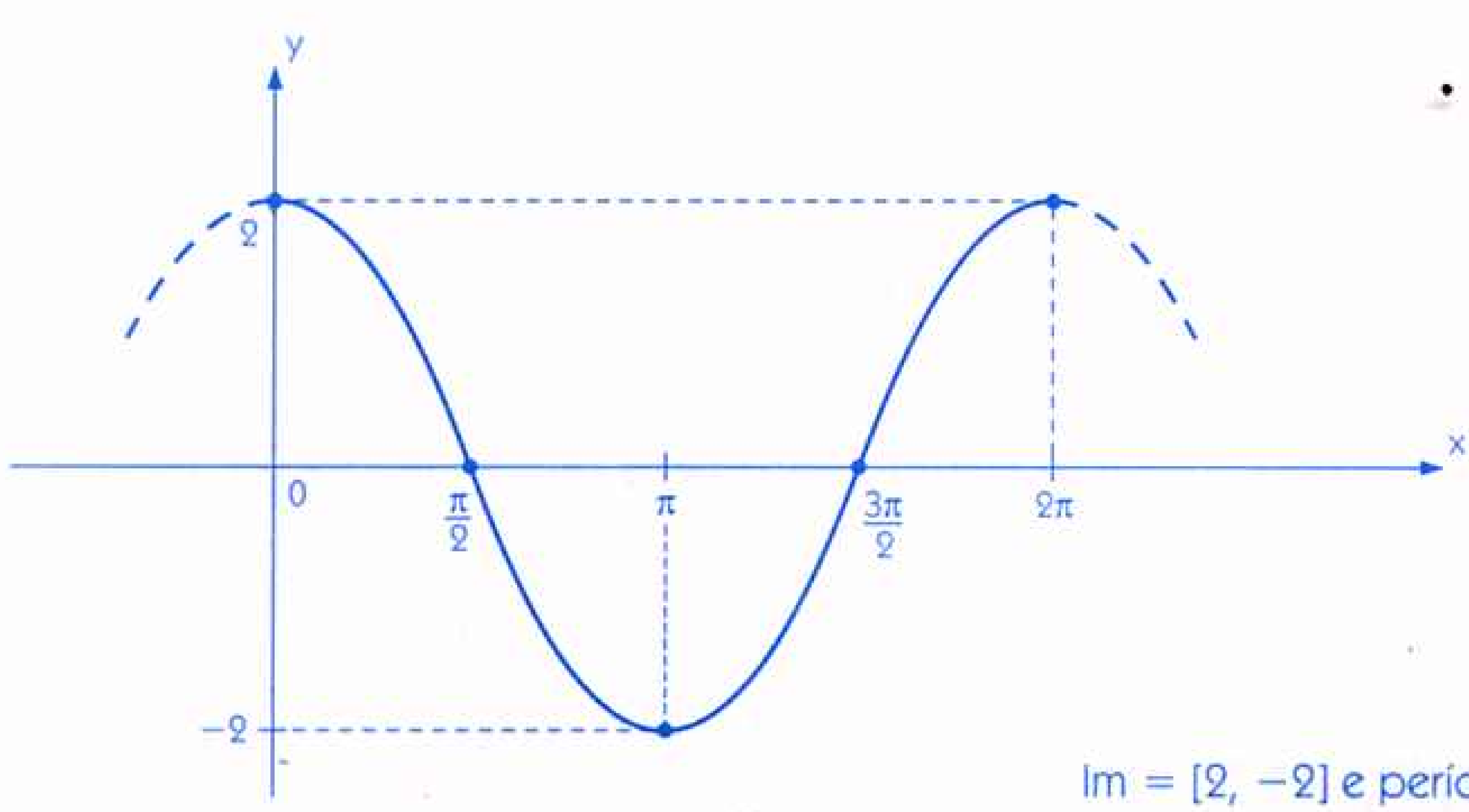
2 Esboçar o gráfico das funções e identificar o conjunto imagem e o período:

a) $y = 2 \cos x$ b) $y = \cos 2x$ c) $y = |\cos x|$

a) $y = 2 \cos x$

Construímos a tabela e transferimos os valores para os eixos:

x	cos x	y = 2 cos x
0	1	$y = 2 \cdot 1 = 2$
$\frac{\pi}{2}$	0	$y = 2 \cdot 0 = 2$
π	-1	$y = 2 \cdot (-1) = -2$
$\frac{3\pi}{2}$	0	$y = 2 \cdot 0 = 0$
2π	1	$y = 2 \cdot 1 = 2$

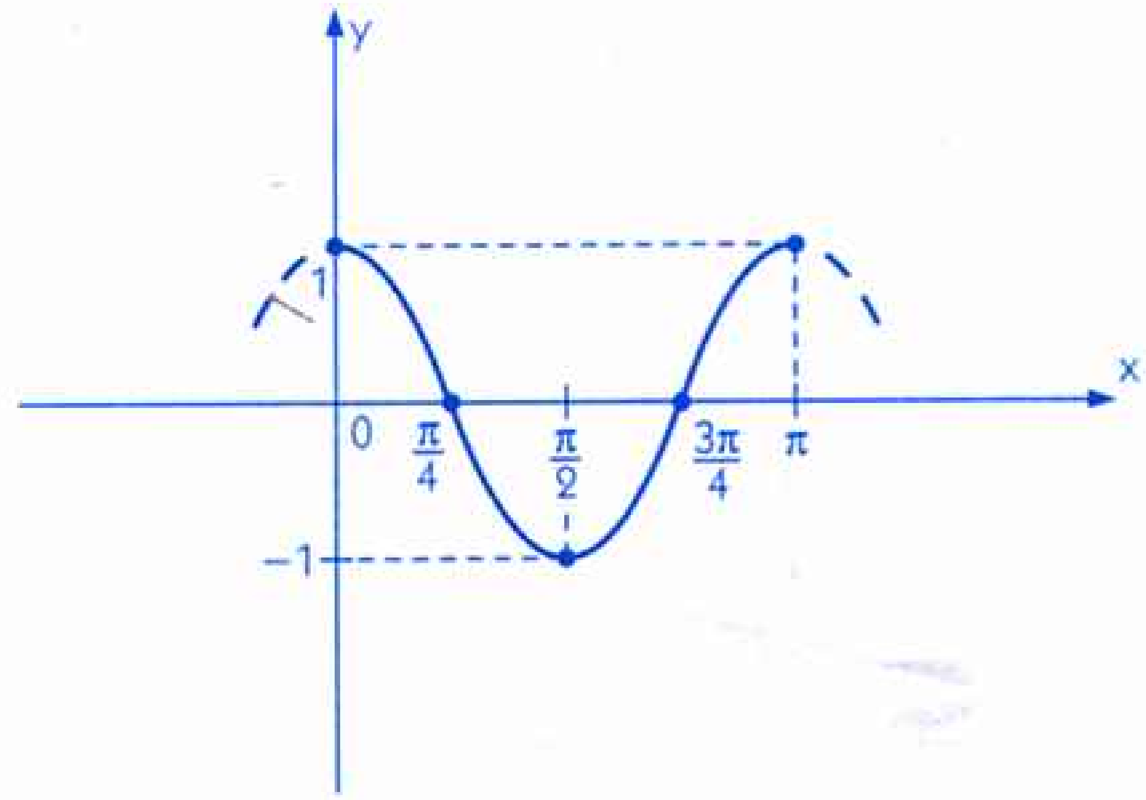


$\text{Im} = [2, -2]$ e período 2π

b) $y = \cos 2x$

Nesse caso, usamos o seguinte artifício: $\begin{cases} 2x = \mu \\ y = \cos \mu \end{cases}$

μ	$\mu = \frac{\mu}{2}$	$y = \cos \mu$
0	0	1
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	0
π	$\frac{\pi}{2}$	−1
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	0
2π	π	1

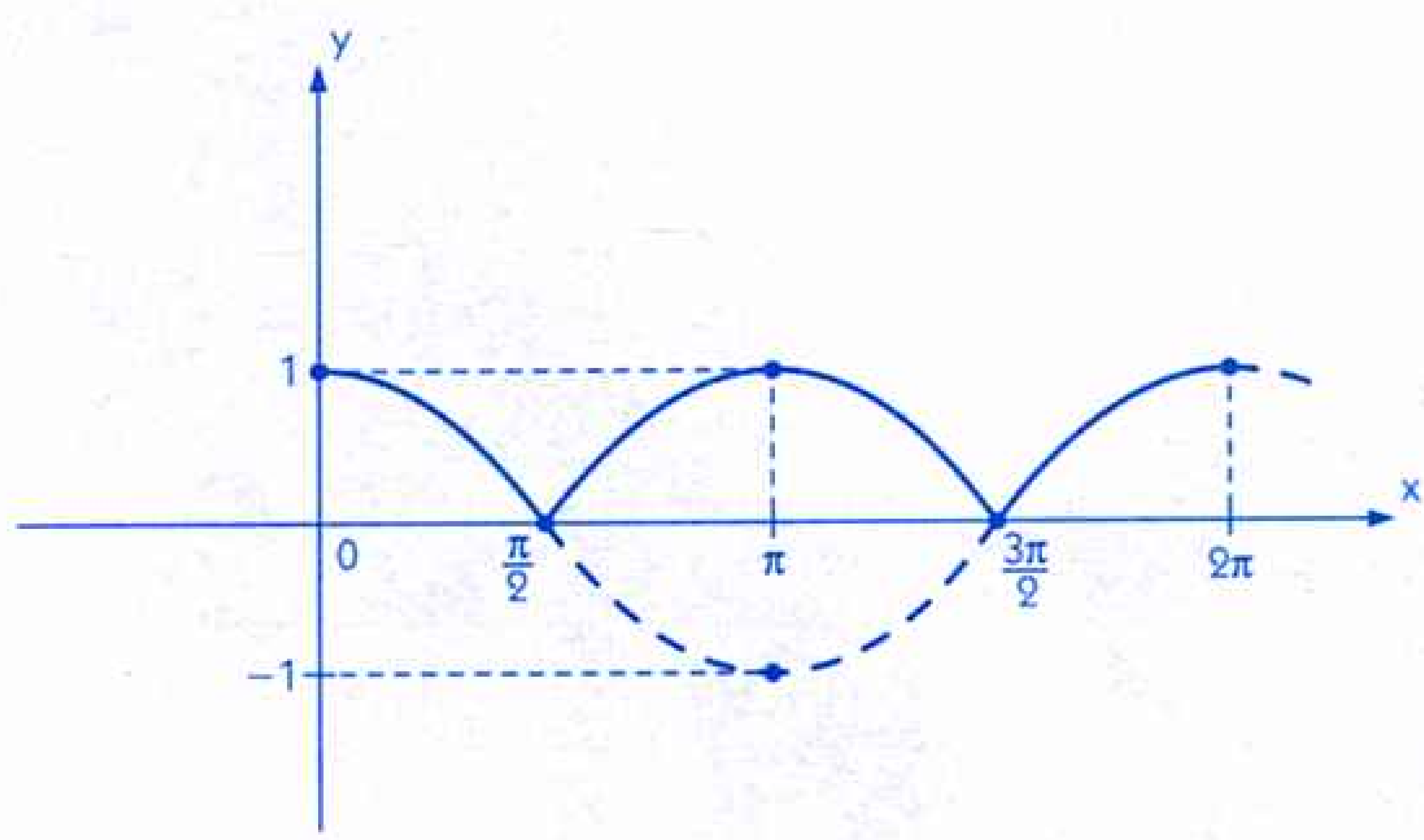


Im = [−1, 1] e o período π

c) $y = |\cos x|$

Inicialmente, construímos o gráfico da função $y = \cos x$, fazendo em seguida o rebatimento dos pontos situados abaixo do eixo do *x*, obtendo $y = |\cos x|$.

x	cos x
0	0
$\frac{\pi}{2}$	1
π	−1
$\frac{3\pi}{2}$	0
2π	1



Im = [0, 1] e período π

3 Simplificar a expressão: $y = \dfrac{\text{sen}\,\frac{3\pi}{2} + 2\cos\pi}{3 \cdot \text{sen}\,\frac{\pi}{2}}$.

Sabendo que: $\text{sen}\,\frac{3\pi}{2} = -1$, $\cos\pi = -1$ e $\text{sen}\,\frac{\pi}{2} = 1$

Substituindo esses valores na expressão, fica:

$$y = \frac{-1 + 2 \cdot (-1)}{3 \cdot (1)} \Rightarrow y = -1$$

Propostos

496 Indique o valor de:

a) $\cos \frac{\pi}{2}$

b) $\cos 2\pi$

c) $\cos \frac{5\pi}{2}$

d) $\cos \frac{7\pi}{2}$

e) $\cos 630°$

f) $\cos 1\,080°$

g) $\cos(-180°)$

h) $\cos 540°$

497 Quais valores *k* pode assumir para tornar possível a igualdade?

a) $\cos x = k + 5$

b) $\cos x = 2k + 7$

498 Construa o gráfico das funções e identifique a imagem e o período.

a) $y = 3 \cos x$

b) $y = \cos \frac{x}{2}$

499 Simplifique as seguintes expressões:

a) $y = 3 \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} + \cos 2\pi$

b) $y = \frac{2 \operatorname{sen} \pi + 3 \cos 2\pi}{3}$

c) $y = \frac{4 \cos \pi - 3 \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}}{2 \cos 0}$

500 Para que valores de *k* temos: $\cos x = k^2 + k - 1$?

501 Esboce o gráfico, escreva o conjunto imagem e determine o período das funções:

a) $y = \left|\cos \frac{x}{2}\right|$

b) $y = 2 + \cos x$

502 Simplifique as seguintes expressões:

a) $y = \cos(-90°) + \operatorname{sen} 450°$

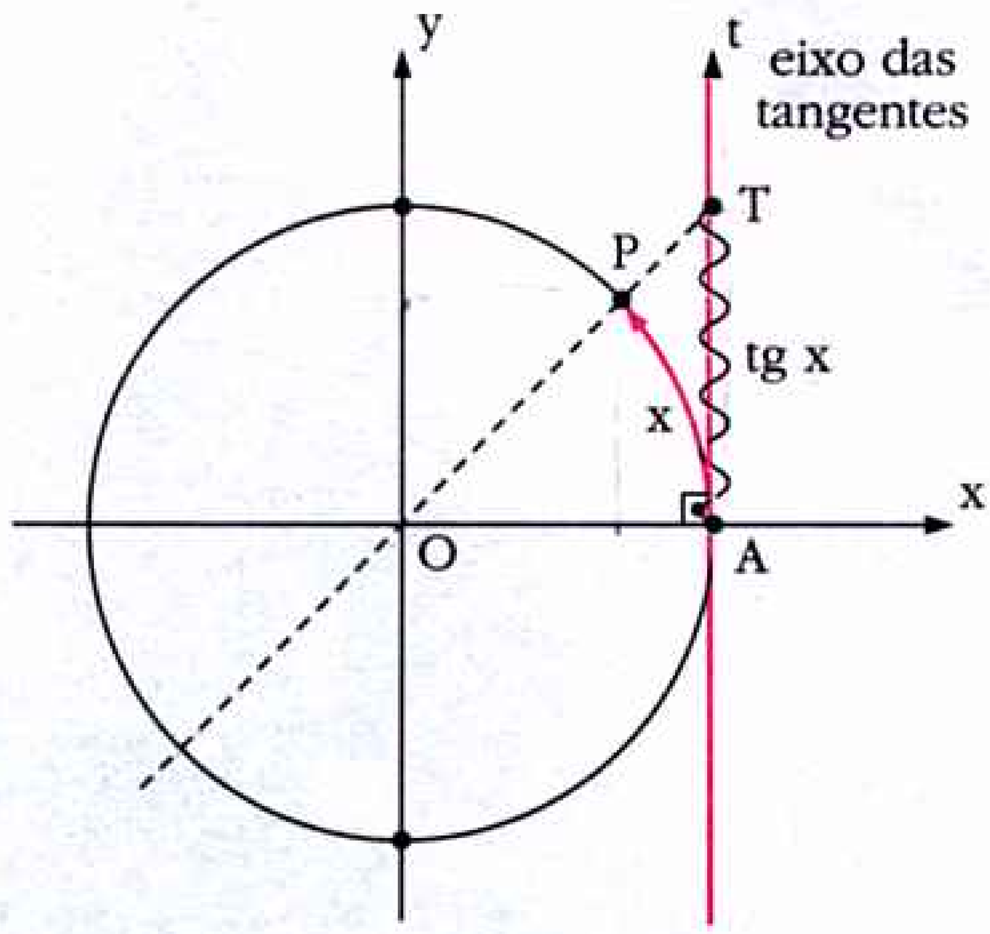
b) $y = \cos \frac{3\pi}{2} + \cos(-\pi) + 5 \operatorname{sen}\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$

Função tangente

y = tg x Considerando um arco AP, cuja medida é o número real *x*, temos:

$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, sendo $\cos x \neq 0$.

No ciclo trigonométrico:

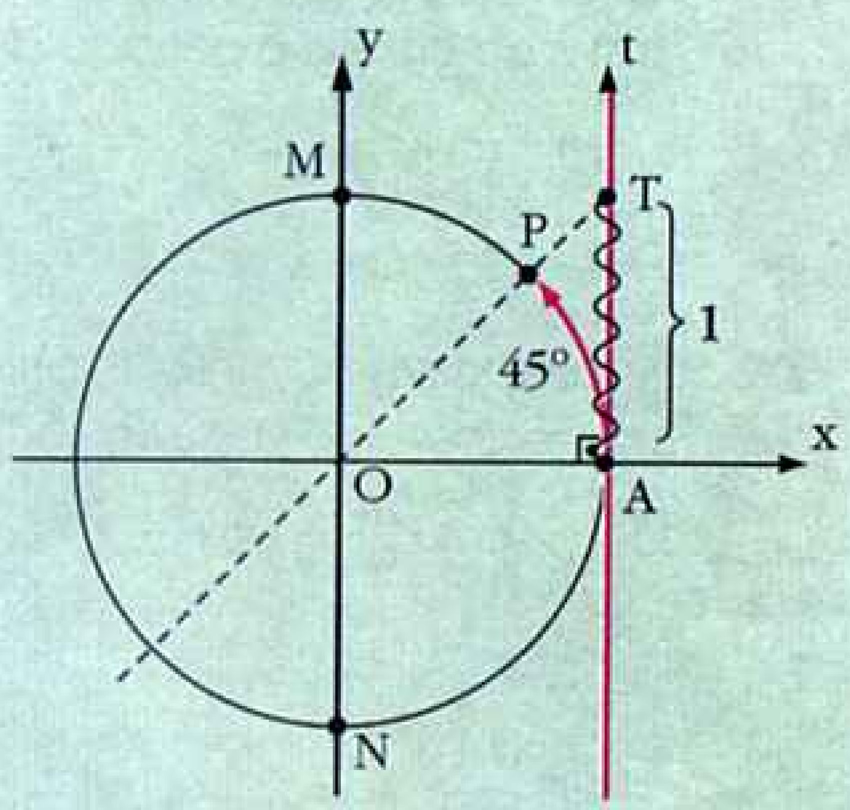


O eixo das tangentes (*t*) é orientado no mesmo sentido do eixo das ordenadas Oy, tendo como origem o ponto *A*.

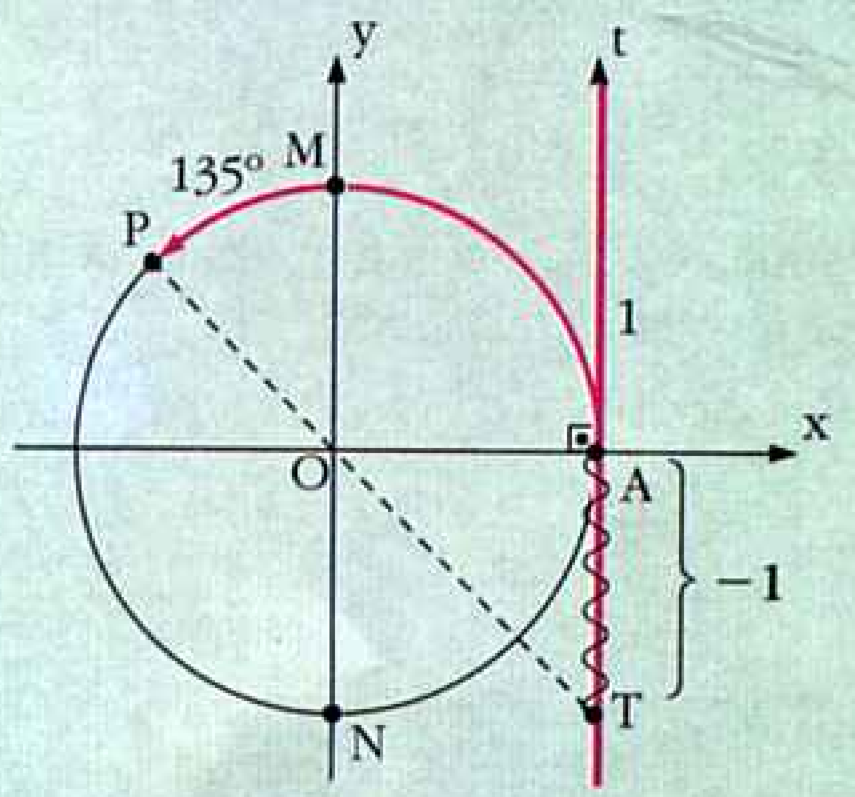
A tangente de um arco AP é determinada pela reta auxiliar (tracejada), que passa pelo centro *O* e pela extremidade do arco (ponto *P*), marcando o ponto *T*, no eixo das tangentes (*t*).

$$\boxed{\text{tg } x = \overline{AT}}$$

Exemplo:
Para determinar as tangentes dos arcos de 45° e de 135° observe, em cada figura, que o triângulo OAT é isósceles de base $\overline{OT}$; logo, $|\overline{AT}| = |\overline{OA}| = 1$.



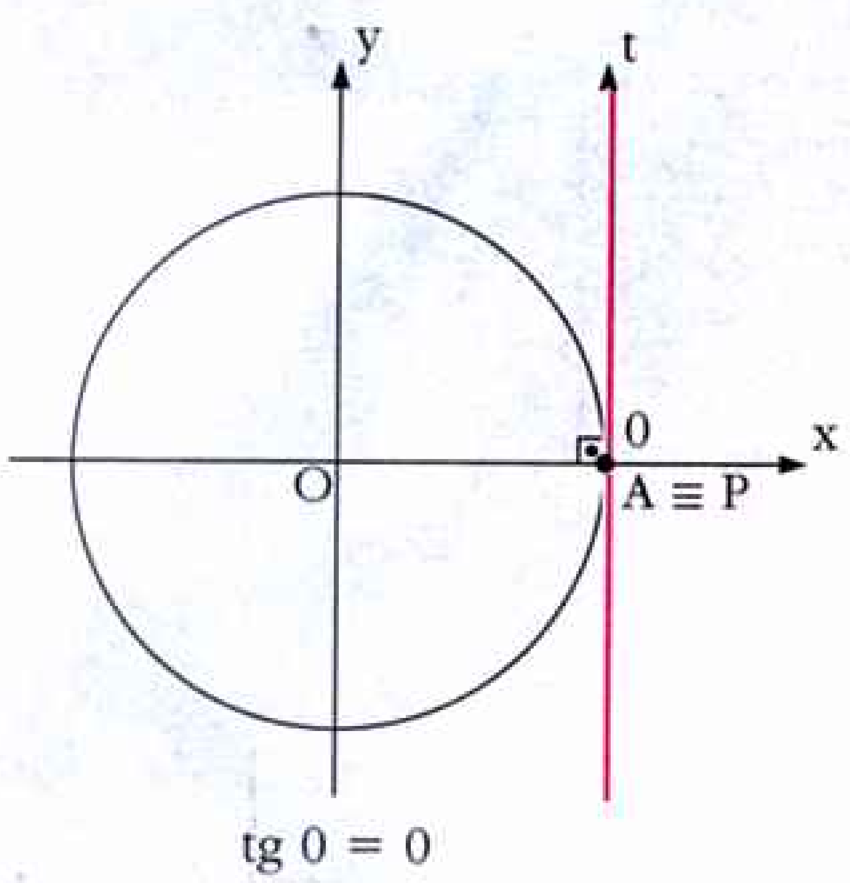
tg 45° = 1



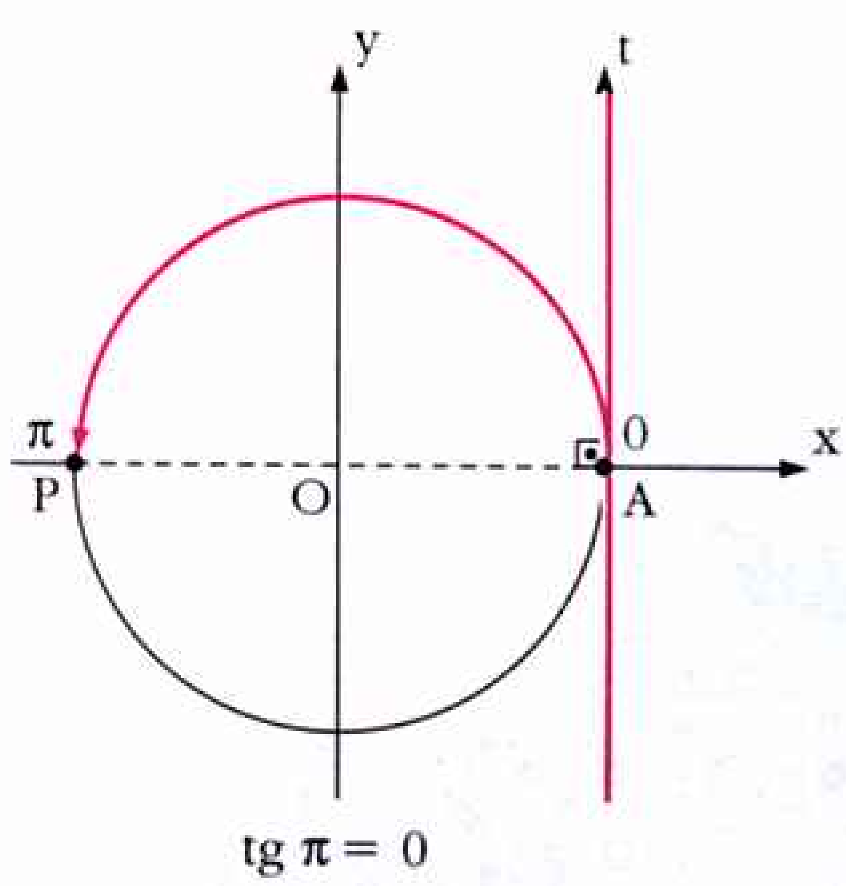
tg 135° = −1

A tangente dos arcos com extremidade nos pontos *M* e *N* não é definida (não existe), pois para esses arcos a reta auxiliar torna-se paralela ao eixo das tangentes, não havendo, assim, intersecção.

Valores notáveis

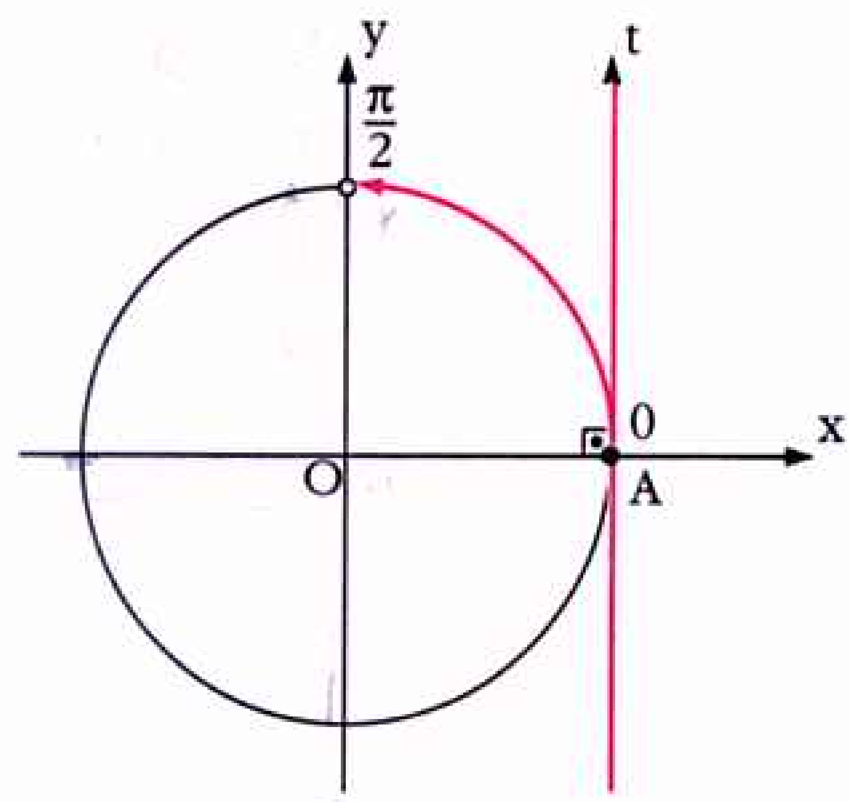


tg 0 = 0

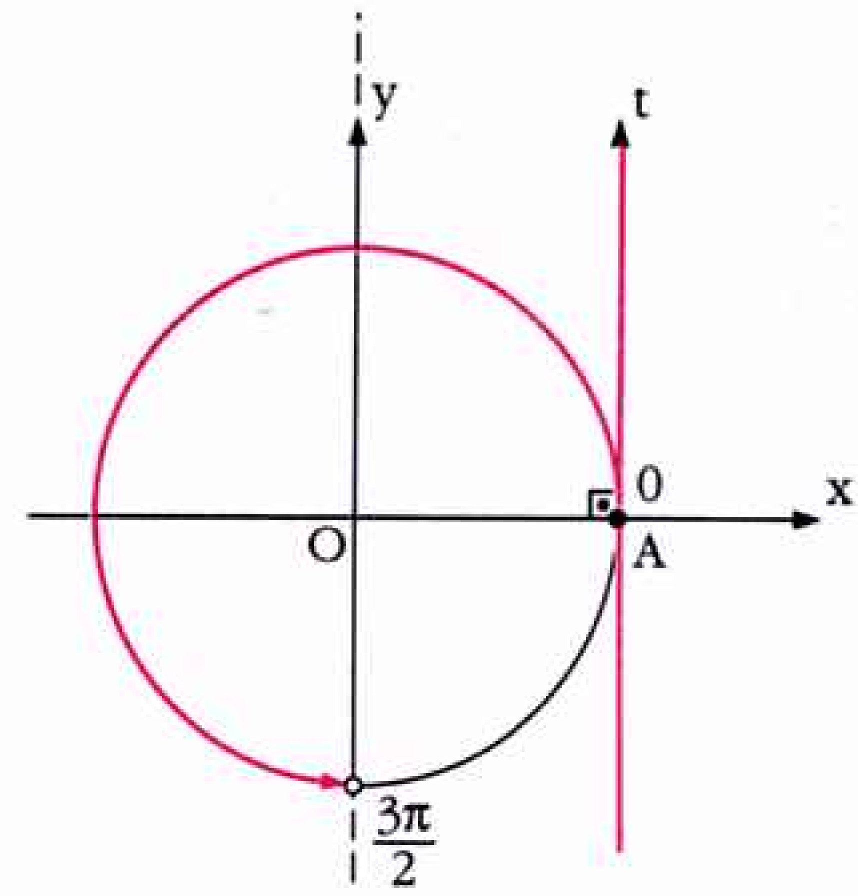


tg π = 0

A reta tracejada que liga o centro à extremidade do arco intercepta o eixo das tangentes no zero.



$\text{tg}\,\frac{\pi}{2} = \nexists$



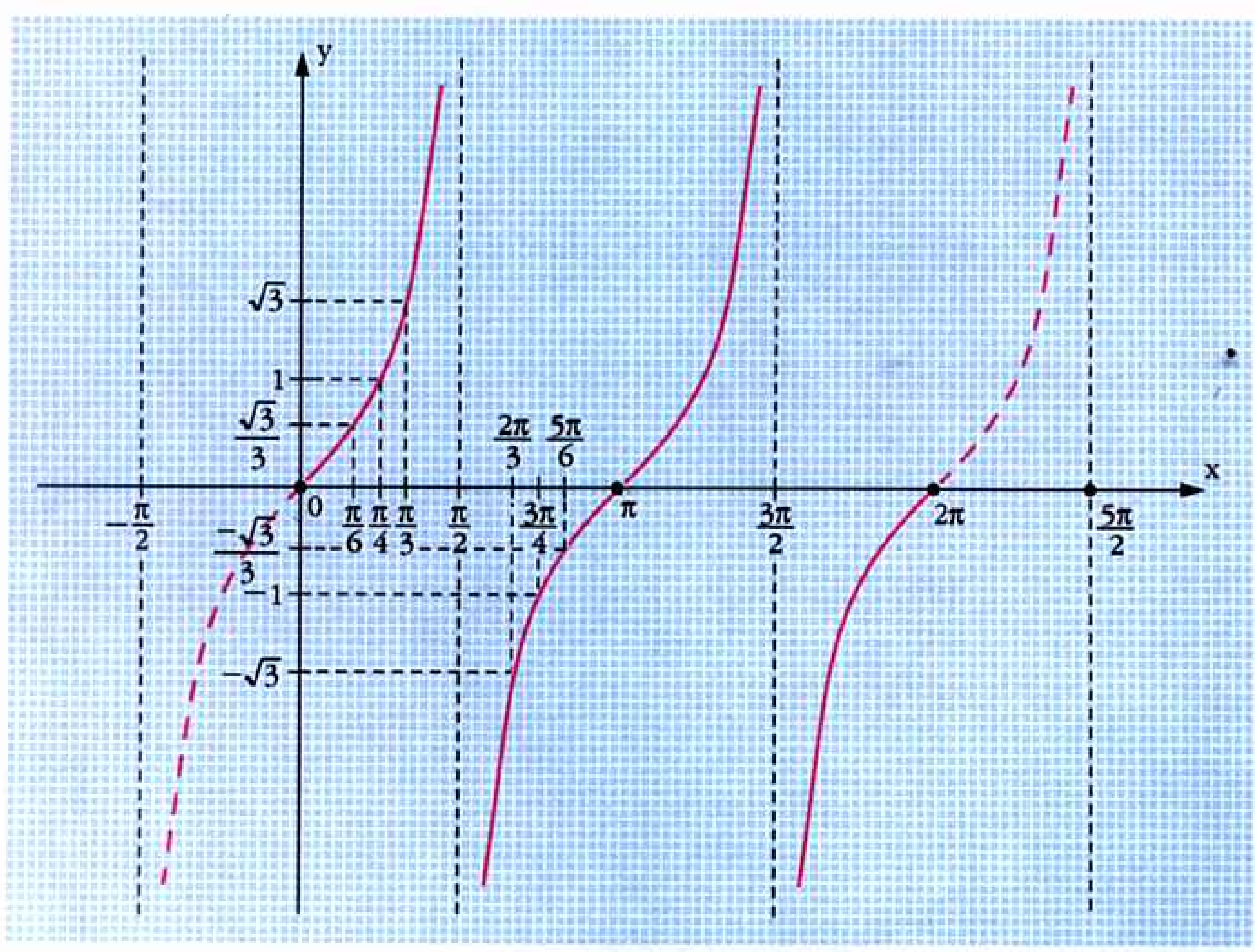
$\text{tg}\,\frac{3\pi}{2} = \nexists$

Observe que $\text{tg}\,\frac{\pi}{2}$ e $\text{tg}\,\frac{3\pi}{2}$ não são definidas e que a reta auxiliar é paralela ao eixo *t*.

Gráfico da função (y = tg x)

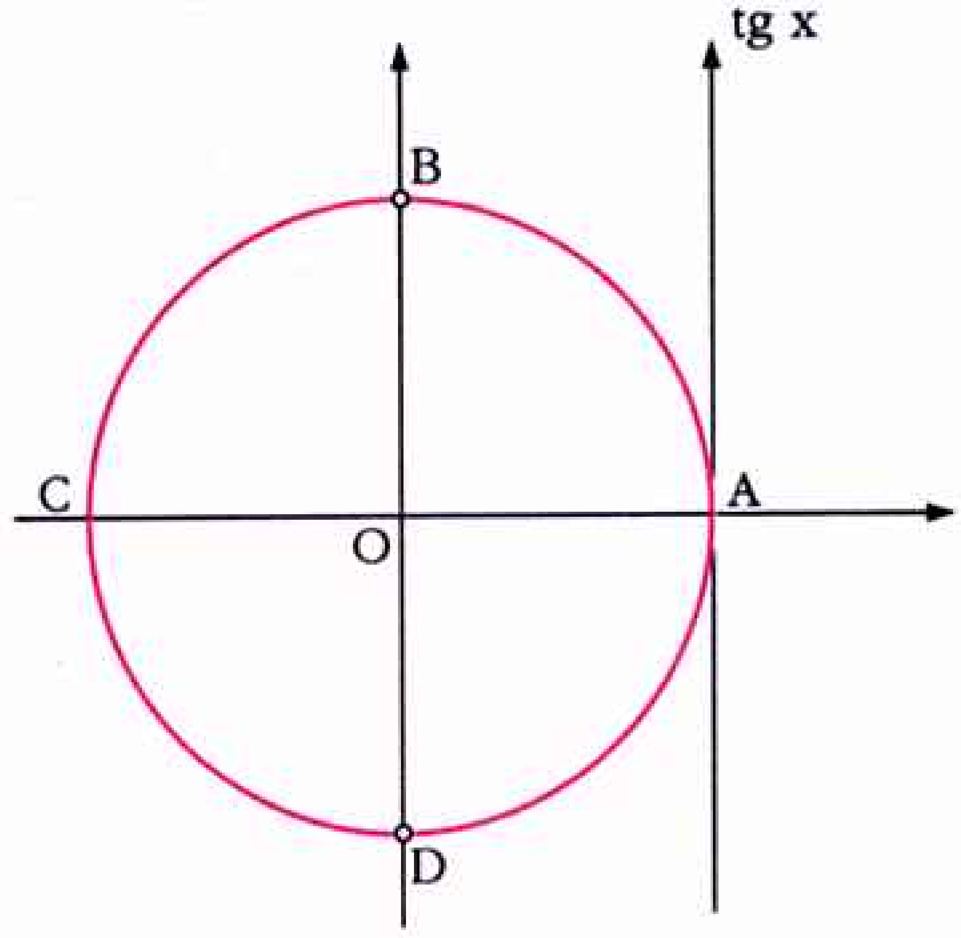
Para construir o gráfico da função tangente, vamos fazer uso da seguinte tabela:

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$
y = tg x	$\nexists$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\nexists$	0	$\nexists$



Conclusões

- O domínio da função tangente é o conjunto das medidas dos arcos, cujas extremidades não coincidem nem com o ponto B nem com o ponto D do ciclo trigono-métrico.



$$D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ onde } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

- O conjunto imagem da função é o conjunto dos números reais:

$$Im(f) = \mathbb{R}$$

- O período da função tangente é o número π:

$$P = \pi$$

Exemplo:
Para determinar tg 45°, tg 30° e tg 180°, fazemos:

$$tg\ 45^\circ = \frac{sen\ 45^\circ}{cos\ 45^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

$$tg\ 30^\circ = \frac{sen\ 30^\circ}{cos\ 30^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$tg\ 180^\circ = \frac{sen\ 180^\circ}{cos\ 180^\circ} = \frac{0}{-1} = 0$$

Exercícios

Propostos

503 Dê o valor de:

a) tg 0°

b) tg 60°

c) tg 2π

d) tg $\frac{3\pi}{4}$

504 Calcule a tangente dos arcos cujas medidas são:

a) $\frac{3\pi}{2}$

b) π

c) $\frac{5\pi}{4}$

d) $\frac{7\pi}{4}$

505 Verifique se são verdadeiras ou falsas as igualdades:

a) tg 60° = tg 210°

b) tg 45° = tg 270°

c) $\text{tg}\,\frac{\pi}{6} = \text{tg}\,\frac{7\pi}{6}$

d) $\text{tg}\,\frac{\pi}{3} = \text{tg}\,\frac{7\pi}{3}$

e) $\text{tg}\,\frac{3\pi}{4} = \text{tg}\,\frac{5\pi}{4}$

f) $\text{tg}\,\frac{\pi}{4} = \text{tg}\,\frac{5\pi}{4}$

Para as funções seguintes, daremos um tratamento de relação com seno e cosseno.

Função cotangente

y = cotg x Considerando um arco AP, cuja medida é o número real x, temos:

$$\text{cotg}\ x = \frac{\cos x}{\text{sen}\ x}, \text{ sendo sen } x \neq 0, \text{ isto é } x \neq k \cdot \pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

- Como $\text{cotg}\ x = \frac{\cos x}{\text{sen}\ x}$, temos $\text{cotg}\ x = \frac{1}{\text{tg}\ x}$, observadas as condições de existência.

Exemplo:

Para determinar cotg 180°, cotg 90° e cotg $\frac{\pi}{4}$, fazemos:

$$\text{cotg}\ 180° = \frac{\cos 180°}{\text{sen}\ 180°} = \frac{-1}{0} \text{ não é definida}$$

$$\text{cotg}\ 90° = \frac{\cos 90°}{\text{sen}\ 90°} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\text{cotg}\ \frac{\pi}{4} = \frac{\cos \frac{\pi}{4}}{\text{sen}\ \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

Exercícios

Propostos

506 Determine:

a) cotg 0°

b) cotg 30°

c) cotg 60°

d) cotg $\frac{\pi}{2}$

507 Escreva o valor de:

a) cotg $\frac{3\pi}{2}$

b) cotg 2π

c) cotg $\frac{5\pi}{4}$

d) cotg $\frac{7\pi}{4}$

Função secante

$y = \sec x$ Dado um arco AP, cuja medida é o número real x, a secante é o inverso do cosseno: $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, sendo $\cos x \neq 0$, isto é: $x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

- De $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ podemos considerar:
  $0 < \cos x \leqslant 1$ nos leva a concluir que $\sec x \geqslant 1$ ou
  $-1 \leqslant \cos x < 0$ nos leva a concluir que $\sec x \leqslant -1$

Exemplo:
Para determinar sec 90° e sec 60°, fazemos:

$\sec 90° = \frac{1}{0}$ a função não se define para $x = 90°$ ou $x = 270°$

$$\sec 60° = \frac{1}{\cos 60°} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Exercícios

Propostos

508 Determine a secante em cada caso:

a) sec 0°

b) sec 30°

c) sec 45°

d) sec 120°

e) sec 135°

f) sec 150°

509 Determine quanto vale:

a) sec π

b) sec $\frac{3\pi}{2}$

c) sec 2π

d) sec $\frac{13\pi}{6}$

e) sec $\frac{17\pi}{4}$

f) sec $\frac{5\pi}{3}$

510 Obtenha o valor de:

a) $\sec 60° - \sec 45°$

b) $3 \sec 30° - \sqrt{2} \sec 45°$

c) $(\sec 60°)^3 + 8(\sec 180°)$

511 Obtenha o valor de:

a) $2 \sec \pi - 3 \sec 6\pi$

b) $\frac{\sqrt{3} \cdot \sec 3\pi - \sec 0}{1 + \sqrt{3}}$

Função cossecante

y = cossec x Dado um arco AP, cuja medida é o número real x, a cossecante é o inverso do seno: $\text{cossec } x = \dfrac{1}{\text{sen } x}$, sendo $\text{sen } x \neq 0$, isto é: $x \neq k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

▶ Assim, com a sec x, temos que $\text{cossec } x \geq 1$ ou $\text{cossec } x \leq -1$.

Exemplo:

Para determinar cossec 180° e $\text{cossec } \dfrac{3\pi}{2}$, fazemos:

$$\text{cossec } 180^\circ = \frac{1}{\text{sen } 180^\circ}$$

Como $\text{sen } 180^\circ = 0$, temos que $\text{cossec } 180^\circ = \dfrac{1}{0}$.

Logo, a função não se define para $x = 180^\circ$ ou $x = 0^\circ$.

$$\text{cossec } \frac{3\pi}{2} = \frac{1}{\text{sen } \frac{3\pi}{2}} = \frac{1}{-1} = -1$$

Exercícios

Propostos

512 Determine:

a) $\text{cossec } 0^\circ$

b) $\text{cossec } 30^\circ$

c) $\text{cossec } 60^\circ$

d) $3 \text{ cossec } 60^\circ - \dfrac{\sqrt{3} \cdot \text{cossec } 30^\circ}{2}$

e) $\dfrac{\text{cossec } 390^\circ}{2} + \text{cossec } \dfrac{3\pi}{2}$

513 Obtenha o valor de:

a) $\text{cossec } \dfrac{\pi}{4}$

b) $\text{cossec } \dfrac{\pi}{2}$

c) $\text{cossec } 2\pi$

d) $\sqrt{2} \cdot \text{cossec } \dfrac{\pi}{4} - \text{cossec } \dfrac{3\pi}{2}$

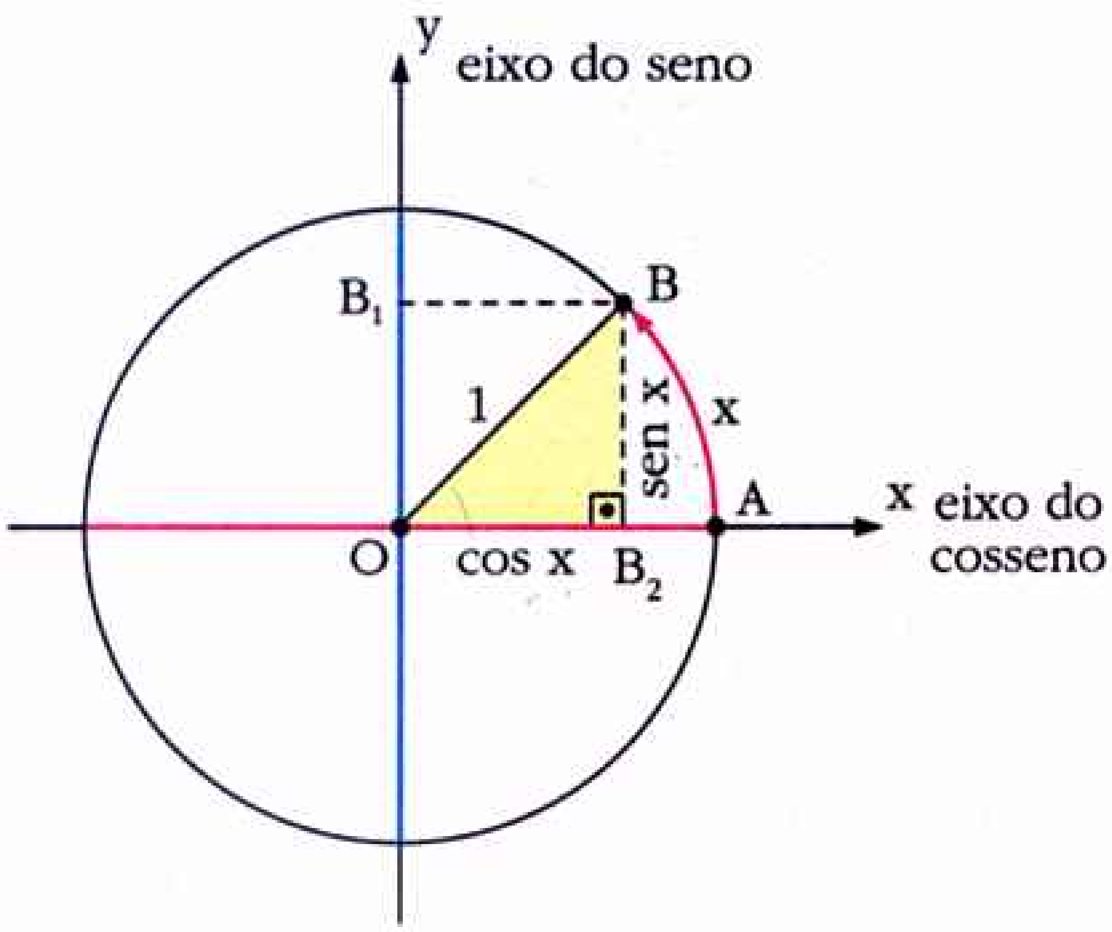
e) $\dfrac{-2 \text{ cossec } \frac{5\pi}{2} - \text{cossec } \frac{7\pi}{4}}{\text{cossec } \frac{25\pi}{6}}$

4. Relações trigonométricas

Relações trigonométricas fundamentais

1ª) $\boxed{\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1}$

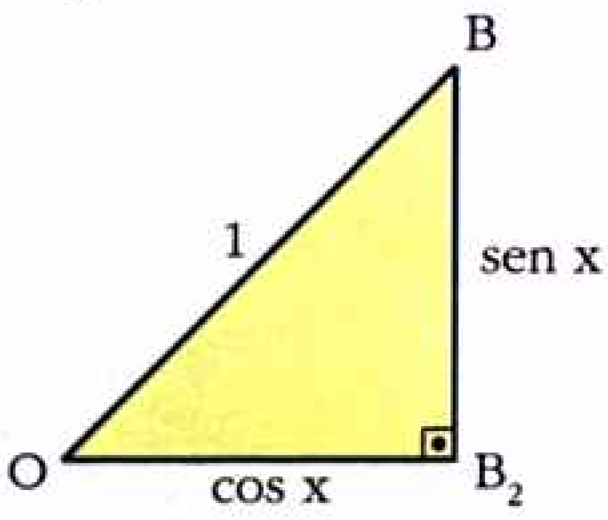
No ciclo trigonométrico:



O arco AB possui como medida o número *x*:

- $\text{sen } x = \overline{OB_1}$
- $\cos x = \overline{OB_2}$
- o raio é unitário (r = 1)

Representando no triângulo retângulo:



Pelo teorema de Pitágoras, vem:

$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

Outras relações fundamentais que já conhecemos, respeitadas as condições de existência.

2ª) $\boxed{\text{tg } x = \dfrac{\text{sen } x}{\cos x}}$

3ª) $\boxed{\text{cotg } x = \dfrac{\cos x}{\text{sen } x}}$ ou $\boxed{\text{cotg } x = \dfrac{1}{\text{tg } x}}$

4ª) $\boxed{\sec x = \dfrac{1}{\cos x}}$

5ª) $\boxed{\text{cossec } x = \dfrac{1}{\text{sen } x}}$

Relações trigonométricas derivadas

Considerando a primeira relação $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ e dividindo os dois membros por $\cos^2 x$, ($\cos^2 x \neq 0$), temos:

$$\frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\text{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x \quad \text{ou} \quad \boxed{\sec^2 x = 1 + \text{tg}^2 x}$$

Para obtermos a segunda relação derivada, dividimos ambos os membros da relação $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ por $\text{sen}^2 x$ ($\text{sen}^2 x \neq 0$):

$$\frac{\text{sen}^2 x}{\text{sen}^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\text{sen}^2 x} = \frac{1}{\text{sen}^2 x}$$

$$1 + \text{cotg}^2 x = \text{cossec}^2 x \quad \text{ou} \quad \boxed{\text{cossec}^2 x = 1 + \text{cotg}^2 x}$$

Exercícios

Resolvidos

1 Sabendo que $\text{sen}\, x = \frac{3}{5}$ e $x \in 2^{\underline{o}}$ quadrante, calcular:

a) $\cos x$ b) $\text{tg}\, x$ c) $\sec x$

a) Para o cálculo do $\cos x$, aplicamos a primeira relação fundamental:

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

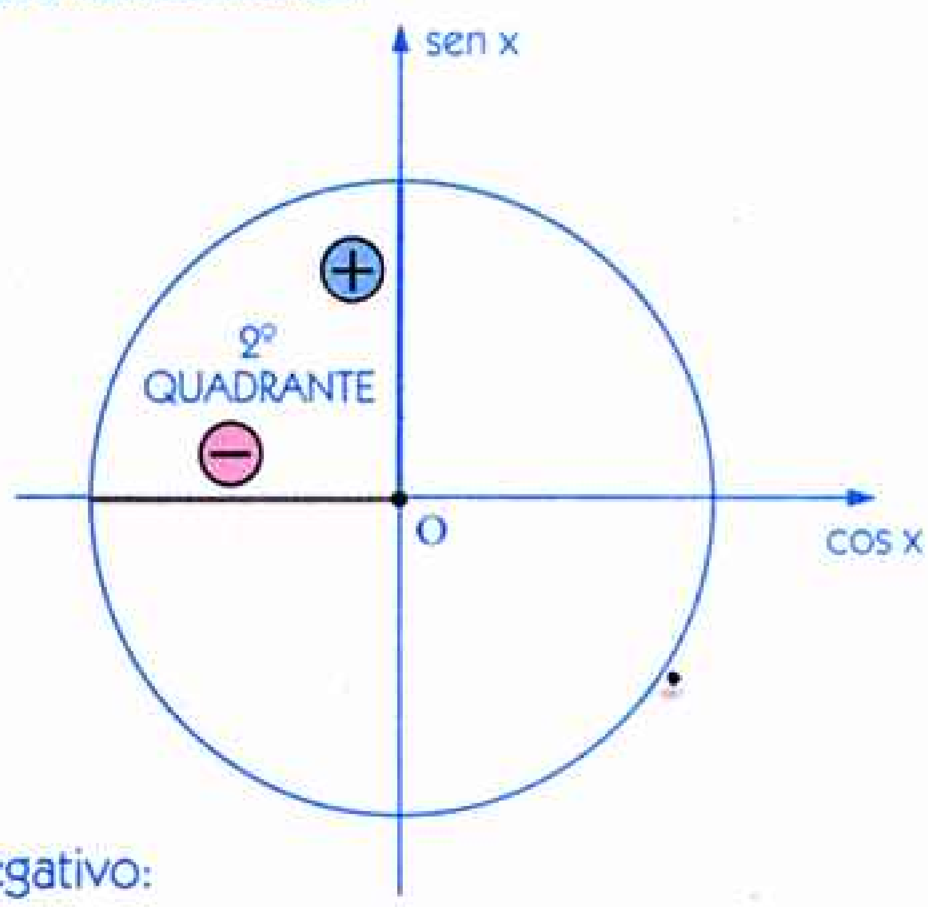
$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 x = 1$$

$$\frac{9}{25} + \cos^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = 1 - \frac{9}{25}$$

$$\cos^2 x = \frac{16}{25}$$

$$\cos x = \pm\sqrt{\frac{16}{25}}$$



Como o arco está no $2^{\underline{o}}$ quadrante, o cosseno é negativo:

$$\cos x = -\frac{4}{5}$$

b) $\text{tg}\, x \Rightarrow \text{tg}\, x = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x} \Rightarrow \text{tg}\, x = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} \Rightarrow \text{tg}\, x = -\frac{3}{4}$

c) $\sec x \Rightarrow \sec x = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \sec x = \frac{1}{-\frac{4}{5}} \Rightarrow \sec x = -\frac{5}{4}$

2 Simplifique a expressão: $y = \dfrac{\text{tg}\, x - \text{cotg}\, x}{\text{cossec}^2 x}$.

$$y = \dfrac{\dfrac{1}{\text{cotg}\, x} + \text{cotg}\, x}{1 + \text{cotg}^2 x} \Rightarrow y = \dfrac{\dfrac{1 + \text{cotg}^2 x}{\text{cotg}\, x}}{1 + \text{cotg}^2 x} \Rightarrow y = \dfrac{1}{\text{cotg}\, x} \Rightarrow y = \text{tg}\, x$$

Propostos

514 Sabendo que sen $x = \dfrac{3}{5}$ e que $x \in 1^{\underline{o}}$ quadrante, calcule:
a) cos x
b) tg x
c) cotg x
d) sec x
e) cossec x

515 Dado $\cos x = \dfrac{4}{5}$ e $x \in 4^{\underline{o}}$ quadrante, determine:
a) sen x
b) tg x
c) cotg x
d) sec x
e) cossec x

516 Calcule o valor de tg x e sec x, sendo sen $x = -\dfrac{1}{2}$ e $x \in 3^{\underline{o}}$ quadrante.

517 Simplifique as expressões:
a) $y = \text{tg}\, x \cdot \text{cotg}\, x$
b) $y = \sec x \cdot \text{cotg}\, x$
c) $y = \text{cossec}\, x \cdot \text{tg}\, x$

518 Sabendo que $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e $x \in 2^{\underline{o}}$ quadrante, calcule:
a) sec x
b) cotg x

519 Dado sec x = 4, calcule o valor de cos x.

520 Sabendo que cossec x = −2, calcule o valor de sen x.

521 Sendo sen $x = \sqrt{2 - m}$ e $\cos x = \sqrt{3 - m}$, determine o valor de *m*. (Sugestão: aplicar a primeira relação: $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.)

522 Dados sen $x = \dfrac{\sqrt{k + 1}}{k}$ e $\cos x = \dfrac{1}{k}$, determine o valor de *k*.

523 Simplifique as seguintes expressões:
a) $y = \dfrac{\text{tg}\, x \cdot \text{cotg}\, x}{\cos x}$
b) $y = (\text{sen}\, x + \cos x)^2 - 2\, \text{sen}\, x \cos x$
c) $y = \dfrac{\text{tg}\, x + \text{cotg}\, x}{\text{cossec}\, x}$

524 (Vassouras-RJ) Se $0 < x < 2\pi$ e $2\, \text{sen}\, x + \cos x = 1$, então tg x vale:
a) $-\dfrac{4}{3}$
b) $-\dfrac{3}{4}$
c) $\dfrac{3}{4}$
d) 1
e) $\dfrac{4}{3}$

525 (Vassouras-RJ) A $(\text{cotg}\, \theta + \text{tg}\, \theta)^2$ é igual a:
a) $\text{cossec}^2 \theta \cdot \sec^2 \theta$
b) $\text{cotg}^2 \theta + \text{tg}^2 \theta - 2$
c) $\sec^2 \theta - \text{cossec}^2 \theta$
d) $\text{cotg}^2 \theta - \text{tg}^2 \theta + 2$
e) $\text{cotg}^2 \theta + \text{tg}^2 \theta$

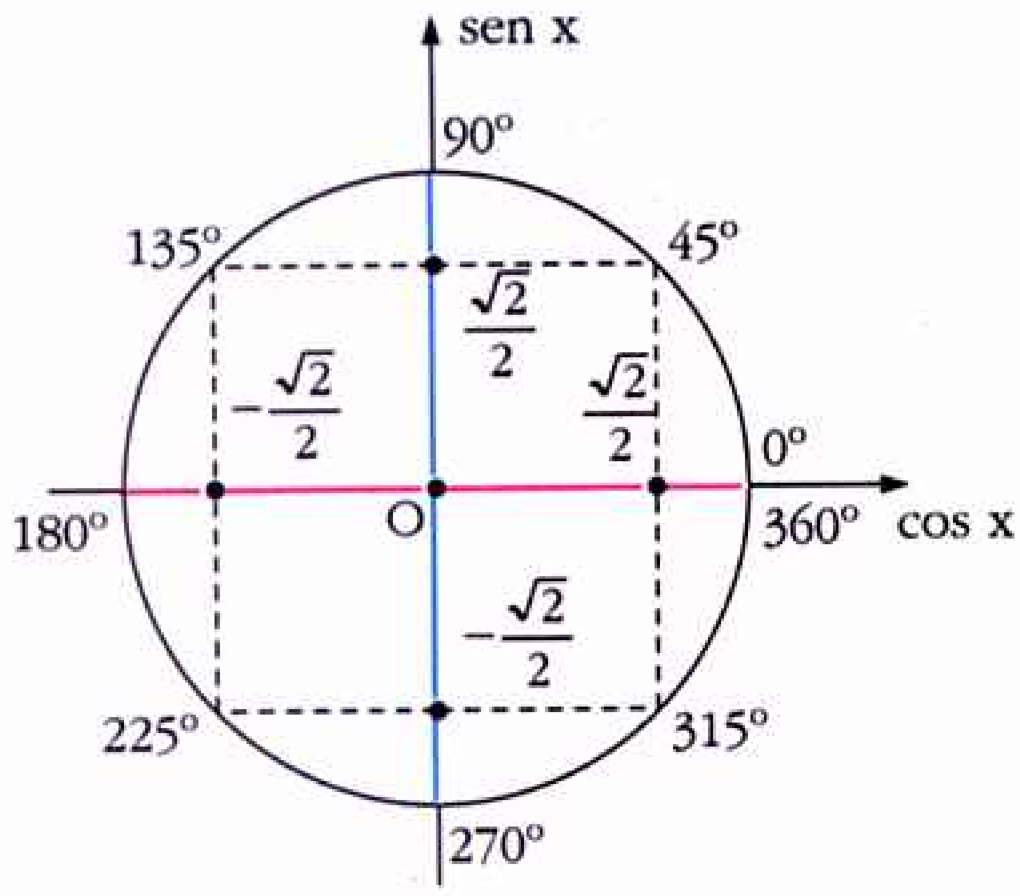
5. Redução ao $1^{\underline{o}}$ quadrante

Múltiplos de 30°, 45° e 60°

Seno e cosseno dos arcos múltiplos de 45°

Os arcos múltiplos de 45° (mas não de 90°) possuem o valor numérico do seno e cosseno iguais ao seno e cosseno de 45°, respectivamente, com o sinal correspondente a cada quadrante.

Dividindo o ciclo trigonométrico em oito "arcos iguais", obtemos os valores:



$$360 : 8 = 45°$$

x	45°	135°	225°	315°
sen x	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
cos x	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

Exercícios

Resolvido

Calcular o valor da expressão: $y = \text{sen}\,\frac{7\pi}{4} - 3\cos\frac{3\pi}{4} - 2\,\text{tg}\,\frac{5\pi}{4}$.

Sendo: $\begin{cases} \text{sen}\,\frac{7\pi}{4} = \text{sen}\,315° = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos\frac{3\pi}{4} = \cos 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{tg}\,\frac{5\pi}{4} = \text{tg}\,225° = \frac{\text{sen}\,225°}{\cos 225°} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1 \end{cases}$

Substituindo os valores na expressão, temos:

$$y = -\frac{\sqrt{2}}{2} - 3 \cdot -\frac{\sqrt{2}}{2} - 2 \cdot 1 \Rightarrow y = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} - 2 \Rightarrow y = \frac{2\sqrt{2}}{2} - 2 \Rightarrow y = \sqrt{2} - 2$$

Propostos

526 Determine o valor das seguintes expressões:

a) $y = \cos\frac{3\pi}{4} - 2 \cdot \cos\frac{\pi}{4}$

b) $y = 2 \cdot \text{tg}\,\frac{7\pi}{4} + \text{cotg}\,\frac{3\pi}{4}$

c) $y = 5 \cdot \cos\frac{7\pi}{4} + \text{sen}\,\frac{\pi}{4} - 6 \cdot \cos\frac{\pi}{4}$

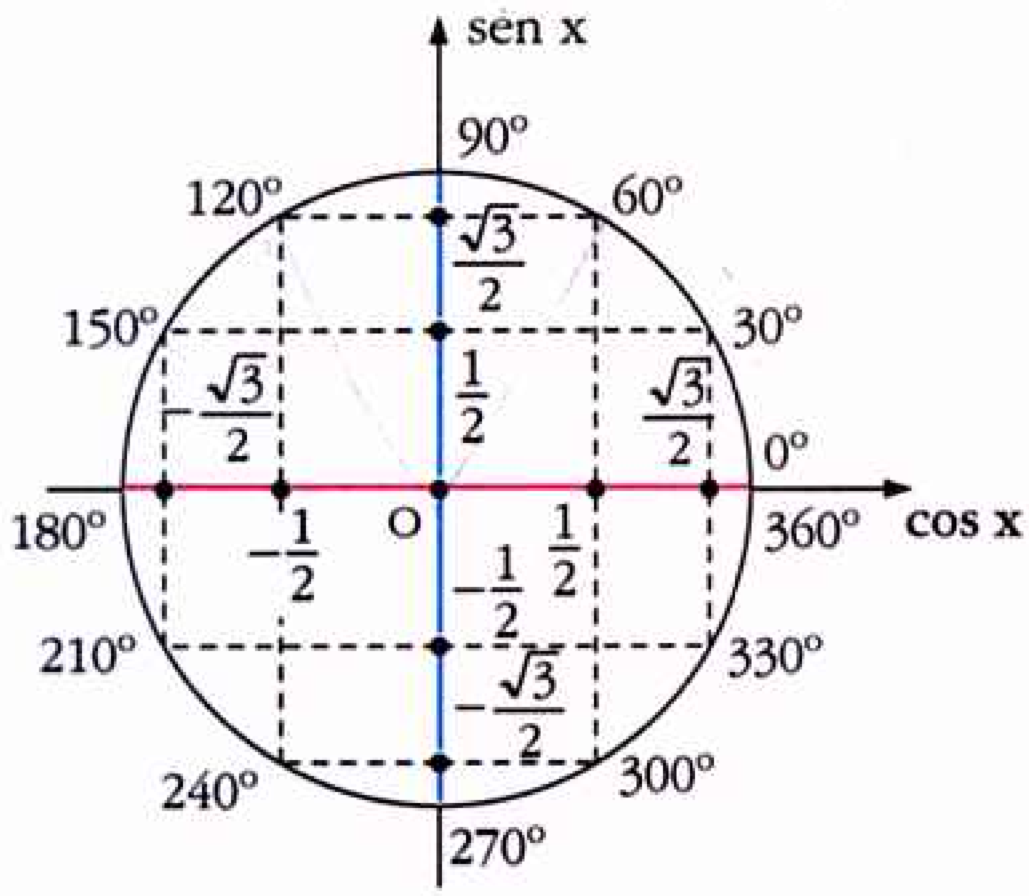
527 Calcule o valor das expressões:

a) $y = 8 \cdot \cos 405° - 6 \cdot \text{sen}\,765° + \text{cotg}\,\frac{7\pi}{4}$

b) $y = \cos(-45°) + \text{sen}(-135°) + \sec(-225°) - \text{cossec}(-315°)$

Seno e cosseno dos arcos múltiplos de 30º

Obtemos os arcos múltiplos de 30° e 60° dividindo a circunferência em 12 "arcos iguais" e, em seguida, encontramos o seno e cosseno desses arcos, dos quais destacamos aqueles que não têm extremidade em um dos eixos.



$$360° : 12 = 30°$$

x	30°	60°	120°	150°	210°	240°	300°	330°
sen x	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
cos x	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Exercícios

Resolvido

Calcular o valor da expressão: $y = \text{sen}\,\frac{\pi}{6} - \cos\frac{5\pi}{3} + \text{tg}\,\frac{2\pi}{3}$.

Sendo:
$$\begin{cases} \text{sen}\,\frac{\pi}{6} = \text{sen}\,30° = \frac{1}{2} \\ \cos\frac{5\pi}{3} = \cos 300° = \frac{1}{2} \\ \text{tg}\,\frac{2\pi}{3} = \text{tg}\,120° = \frac{\text{sen}\,120°}{\cos 120°} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{-1}{2}} = -\sqrt{3} \end{cases}$$

Substituindo os valores na expressão, temos:

$$y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \sqrt{3} \Rightarrow y = \sqrt{3}$$

Propostos

528 Determine o valor das seguintes expressões:

a) $y = \text{sen}\,\frac{4\pi}{3} + \cos\frac{5\pi}{6} + \text{tg}\,\frac{\pi}{6}$

b) $y = \cos\frac{7\pi}{6} + \text{sen}\,\frac{2\pi}{3} - \sec\frac{4\pi}{3}$

c) $y = \text{cossec}\,\frac{11\pi}{6} + \sec\frac{4\pi}{3}$

529 Determine o valor das seguintes expressões:

a) $y = \text{cotg}\,\frac{5\pi}{3} - \text{tg}\,\frac{\pi}{6}$

b) $y = 2\,\text{cossec}\,\frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}\cdot\sec\frac{11\pi}{6}$

c) $y = \dfrac{\left(\text{tg}\,\frac{4\pi}{3} + \text{cotg}\,\frac{7\pi}{6}\right)^2}{3}$

Redução ao 1º quadrante

Considerando um arco *x* (*x* não pertencente ao 1º quadrante), reduzir esse arco ao 1º quadrante é relacioná-lo com algum arco do 1º quadrante, através de uma fórmula, com o objetivo de conhecer sen x, cos x e tg x.

Ao reduzir um arco do 2º, 3º ou 4º quadrantes para o 1º estamos simplificando o estudo de Trigonometria, pois as funções trigonométricas terão o mesmo valor absoluto para esses arcos.

Arcos suplementares

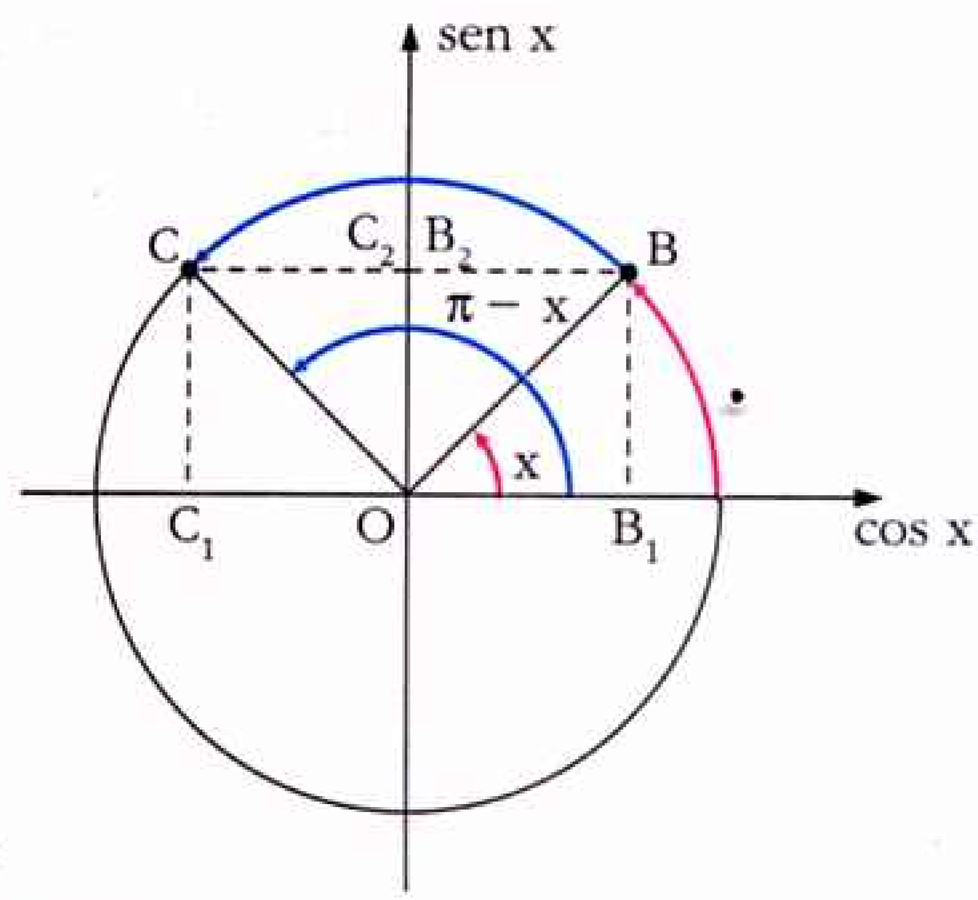
Dois arcos são suplementares quando a soma de suas medidas resulta 180°.

Exemplos:
a) 120° e 60° $\Rightarrow$ 120° + 60° = 180°
b) x e $\pi - x \Rightarrow x + \pi - x = \pi$

Redução do 2º para o 1º quadrante.
Sejam os arcos:

$$\begin{cases} x \text{ (do 1º quadrante)} \\ (\pi - x) \text{ (do 2º quadrante)} \end{cases}$$

No ciclo trigonométrico:



Sendo os pontos *B* e *C* simétricos com relação ao eixo dos senos, eles têm ordenadas iguais e abscissas opostas.

Conclusão a partir do ciclo trigonométrico:

$$\boxed{\begin{gathered}\text{sen}\,(\pi - x) = \text{sen}\,x \\ \text{ou} \\ \text{sen}\,(180° - x) = \text{sen}\,x\end{gathered}}$$

$$\boxed{\begin{gathered}\cos x\,(\pi - x) = -\cos x \\ \text{ou} \\ \cos(180° - x) = -\cos x\end{gathered}}$$

Exercícios

Resolvidos

1 Reduzir do 2º para o 1º quadrante ($x \in$ 1º quadrante):

a) $\text{tg}\,(\pi - x)$ b) $\text{cotg}\,(\pi - x)$ c) $\sec\,(\pi - x)$ d) $\text{cossec}\,(\pi - x)$

a) $\text{tg}\,(\pi - x) = \dfrac{\text{sen}\,(\pi - x)}{\cos\,(\pi - x)} = \dfrac{\text{sen}\,x}{-\cos x} = -\text{tg}\,x$

Portanto: $\text{tg}\,(\pi - x) = -\text{tg}\,x$ ou $\text{tg}\,(180° - x) = -\text{tg}\,x$

b) $\text{cotg}\,(\pi - x) = \dfrac{\cos\,(\pi - x)}{\text{sen}\,(\pi - x)} = -\dfrac{\cos x}{\text{sen}\,x} = -\text{cotg}\,x$

Portanto: $\text{cotg}\,(\pi - x) = -\text{cotg}\,x$ ou $\text{cotg}\,(180° - x) = -\text{cotg}\,x$

c) $\sec\,(\pi - x) = \dfrac{1}{\cos\,(\pi - x)} = \dfrac{1}{-\cos x} = -\sec x$

Portanto: $\sec\,(\pi - x) = -\sec x$ ou $\sec\,(180° - x) = -\sec x$

d) $\text{cossec}\,(\pi - x) = \dfrac{1}{\text{sen}\,(\pi - x)} = \dfrac{1}{\text{sen}\,x} = \text{cossec}\,x$

Portanto: $\text{cossec}\,(\pi - x) = \text{cossec}\,x$ ou $\text{cossec}\,(180° - x) = \text{cossec}\,x$

2 Calcular o valor de cada expressão, reduzindo ao 1º quadrante:

a) $\text{sen}\,150°$ b) $\text{tg}\,120°$

a) $\text{sen}\,150° = \text{sen}\,(180° - 150°) = \text{sen}\,30° = \dfrac{1}{2}$

b) $\text{tg}\,120° = -\text{tg}\,(180° - 120°) = -\text{tg}\,60° = -\sqrt{3}$

Propostos

530 Reduza ao 1º quadrante e simplifique o máximo possível as seguintes expressões:

a) $\text{sen}\,120°$
b) $\cos 150°$
c) $\text{sen}\,135°$
d) $\text{tg}\,150°$
e) $\sec 135°$

531 Reduza ao 1º quadrante e simplifique o máximo possível, as seguintes expressões:

a) $\text{cossec}\,120°$
b) $\text{cotg}\,150°$
c) $\sec 120°$
d) $\cos 170°$
e) $\text{tg}\,160°$

Arcos explementares

Dois arcos são explementares quando suas medidas diferem de 180°.

Exemplos:

a) $225° \text{ e } 45° \Rightarrow 225° - 45° = 180°$

b) $(\pi + x) \text{ e } x \Rightarrow \pi + x - x = \pi$

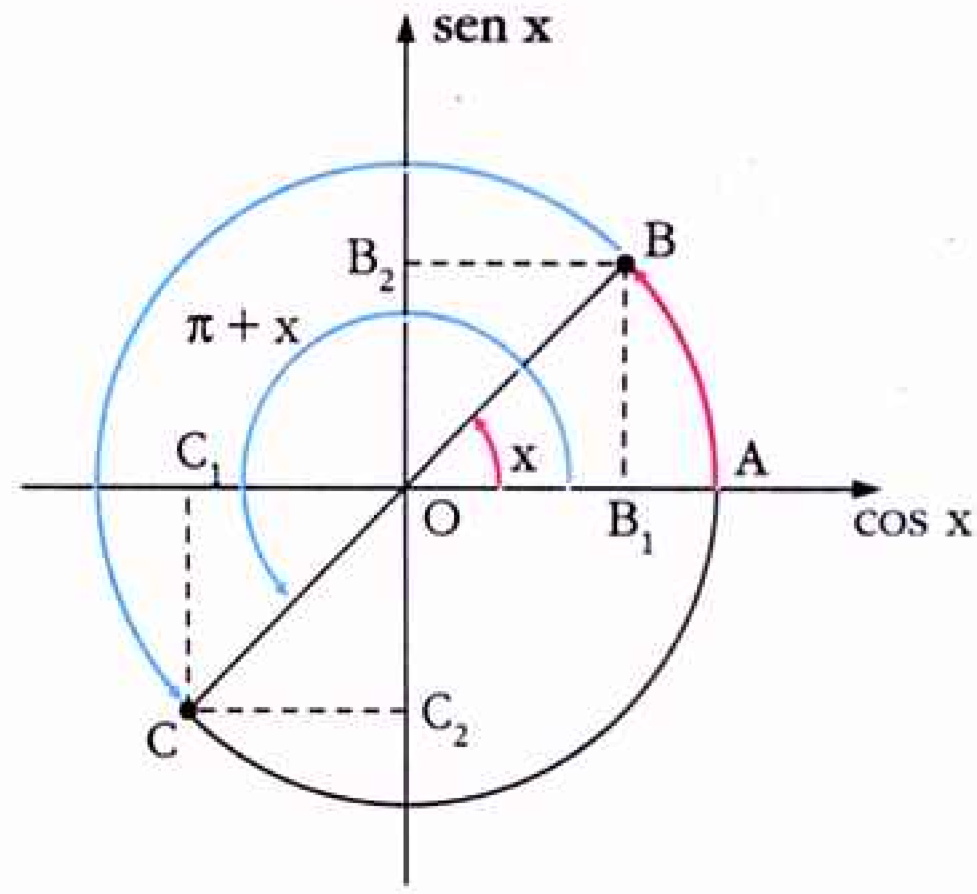
Redução do 3º para o 1º quadrante

Sejam os arcos:

$$\begin{cases} x \text{ (do 1º quadrante)} \\ (\pi + x) \text{ (do 3º quadrante)} \end{cases}$$

Sendo os pontos *B* e *C* simétricos em relação ao centro *O* da circunferência (diametralmente opostos), eles têm ordenadas opostas e abscissas opostas.

No ciclo trigonométrico:



Conclusão a partir do ciclo trigonométrico:

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{sen}(\pi + x) = -\text{sen } x \\ \text{ou} \\ \text{sen}(180^\circ + x) = -\text{sen } x \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \cos(\pi + x) = -\cos x \\ \text{ou} \\ \cos(180^\circ + x) = -\cos x \end{array}}$$

Exercícios

Resolvidos

1 Reduzir do 3º para o 1º quadrante ($x \in$ 1º quadrante):

a) $\text{tg}(\pi + x)$ b) $\text{cotg}(\pi + x)$ c) $\sec(\pi + x)$ d) $\text{cossec}(\pi + x)$

a) $\text{tg}(\pi + x) = \dfrac{\text{sen}(\pi + x)}{\cos(\pi + x)} = \dfrac{-\text{sen } x}{-\cos x} = \text{tg } x$

Portanto: $\text{tg}(\pi + x) = \text{tg } x$

b) $\text{cotg}(\pi + x) = \dfrac{\cos(\pi + x)}{\text{sen}(\pi + x)} = \dfrac{-\cos x}{-\text{sen } x} = \text{cotg } x$

Portanto: $\text{cotg}(\pi + x) = \text{cotg } x$

c) $\sec(\pi + x) = \dfrac{1}{\cos(\pi + x)} = \dfrac{1}{-\cos x} = -\sec x$

Portanto: $\sec(\pi + x) = -\sec x$

d) $\text{cossec}(\pi + x) = \dfrac{1}{\text{sen}(\pi + x)} = \dfrac{1}{-\text{sen } x} = -\text{cossec } x$

Portanto: $\sec(\pi + x) = -\text{cossec } x$

2 Calcular o valor de cada expressão, reduzindo ao 1º quadrante:

a) $\cos 240^\circ$ b) $\text{cotg } 225^\circ$

a) $\cos 240^\circ = \cos(180^\circ + 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\dfrac{1}{2}$

b) $\text{cotg } 225^\circ = \text{cotg}(180^\circ + 45^\circ) = \text{cotg } 45^\circ = 1$

Propostos

532 Reduza ao 1º quadrante e calcule o valor de:

a) sen 240°
b) cos 225°
c) tg 210°
d) sec 240°
e) cossec 225°

533 Simplifique ao máximo as expressões seguintes, reduzindo-as ao 1º quadrante:

a) cotg 210° + tg 240°
b) sen 200° + sen 20°
c) (cos 220°) + sen² 40°
d) cotg 215° − cotg 35°

Arcos replementares

Dois arcos são replementares quando a soma da suas medidas resulta 360°.

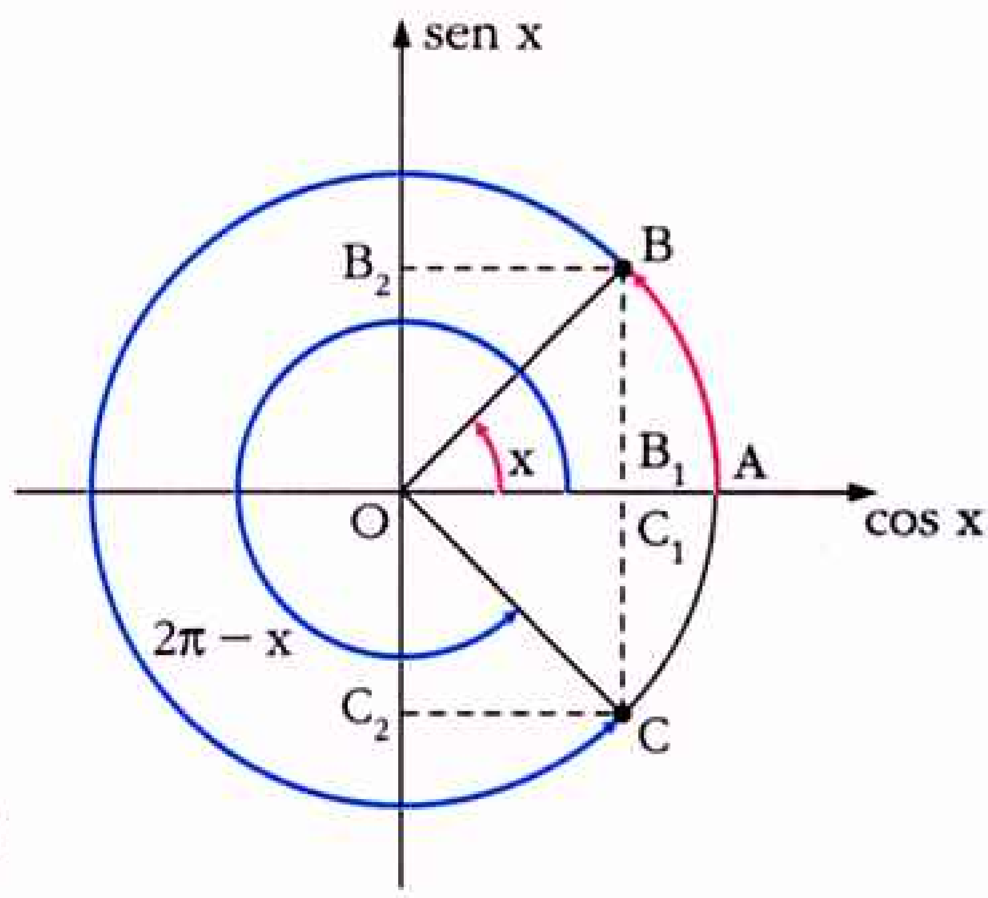
Exemplos:
a) 300° e 60° $\Rightarrow$ 300° + 60° = 360°
b) $(2\pi - x)$ e x $\Rightarrow 2\pi - x + x = 2\pi$

Redução do 4º para o 1º quadrante

Sejam os arcos:

$$\begin{cases} x \text{ (do 1º quadrante)} \\ (2\pi - x) \text{ (do 3º quadrante)} \end{cases}$$

No ciclo trigonométrico:



Sendo os pontos *B* e *C* simétricos com relação ao eixo dos cossenos, eles têm ordenadas opostas e abscissas iguais.

Conclusão a partir do ciclo trigonométrico:

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{sen } (2\pi - x) = -\text{sen } x \\ \text{ou} \\ \text{sen } (360° - x) = -\text{sen } x \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{c} \cos (2\pi - x) = \cos x \\ \text{ou} \\ \cos (360° - x) = \cos x \end{array}}$$

Exercícios

Resolvido

Reduzir do 4º para o 1º quadrante ($x \in$ 1º quadrante):

a) tg $(2\pi - x)$
b) cotg $(2\pi - x)$
c) sec $(2\pi - x)$
d) cossec $(2\pi - x)$

a) $\text{tg } (2\pi - x) = \dfrac{\text{sen } (2\pi - x)}{\cos (2\pi - x)} = -\dfrac{\text{sen } x}{\cos x} = -\text{tg } x$

Portanto: $\text{tg } (2\pi - x) = -\text{tg } x$

b) $\cotg(2\pi - x) = \dfrac{\cos(2\pi - x)}{\text{sen}(2\pi - x)} = -\cotg x$

Portanto: $\cotg(2\pi - x) = -\cotg x$

c) $\sec(2\pi - x) = \dfrac{1}{\cos(2\pi - x)} = \dfrac{1}{\cos x} = \sec x$

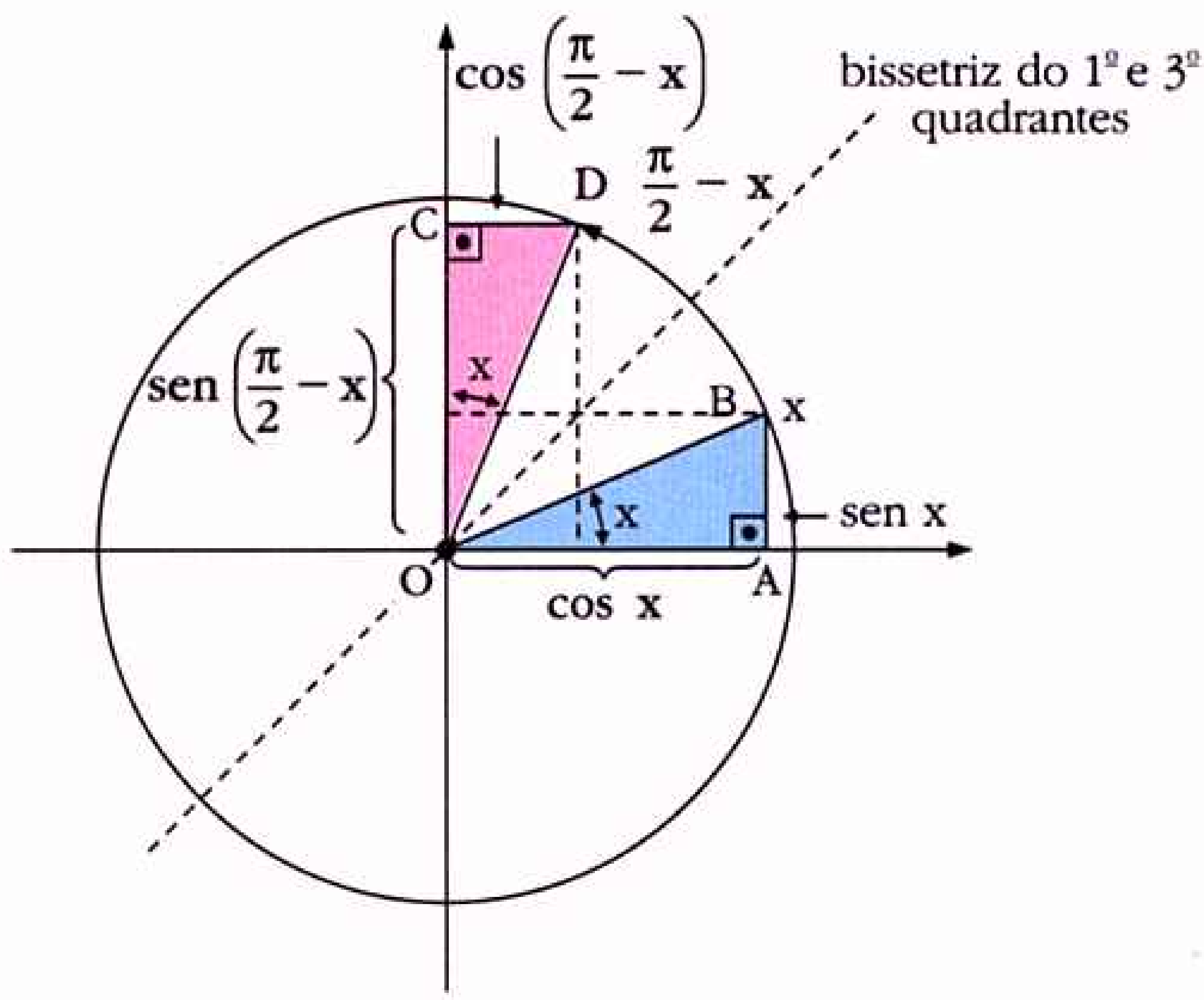
Portanto: $\sec(2\pi - x) = \sec x$

d) $\text{cossec}(2\pi - x) = \dfrac{1}{\text{sen}(2\pi - x)} = \dfrac{1}{\text{sen } x} = -\text{cossec } x$

Portanto: $\text{cossec}(2\pi - x) = -\text{cossec } x$

Arcos complementares

Dois arcos são complementares quando a soma de suas medidas for igual a 90°.



▶ **As extremidades dos arcos *x* e $\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ são simétricas em relação à bissetriz do 1º e 3º quadrantes e os triângulos OAB e OCD são congruentes: assim, concluímos que:**

$$\boxed{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x} \quad \text{e} \quad \boxed{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \text{sen } x}$$

como $\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \dfrac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \dfrac{\cos x}{\text{sen } x}$, então: $\boxed{\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cotg x}$

Exercícios

Resolvidos

1 Desenvolver $\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$.

$\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$

Considerando que $\frac{3\pi}{2} = \frac{2\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi + \frac{\pi}{2}$

fazemos: $\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \text{sen}\left(\pi + \underbrace{\frac{\pi}{2} - x}_{a}\right)$

Chamando $\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ de *a*, teremos $\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \text{sen}(\pi + a) = -\text{sen}\, a$ (explementares)

Retomando o valor de *a*, temos:

$-\text{sen}\, a = -\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos x$

Concluindo: $\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\cos x$

2 Reduzir ao 1º quadrante e calcular o valor de:
a) sen 315° b) tg 330°

a) $\text{sen}\ 315° = \text{sen}\,(360° - 45°) = -\text{sen}\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\text{tg}\ 330° = \text{tg}\,(360° - 30°) = -\text{tg}\ 30° = -\sqrt{3}$

Propostos

534 Desenvolva:

a) $2\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

b) $\sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

c) $\text{cossec}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

d) $\text{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

535 Simplifique:

a) $y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \text{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

b) $y = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

c) $y = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$

536 Reduza ao 1º quadrante e simplifique, se possível, as seguintes expressões:
a) cos 330°
b) cotg 315°
c) sen 300°
d) sec 330°
e) cossec 315°
f) sen 330°
g) tg 300° − tg 60°
h) sec 315° − 2 sec 45°
i) cossec 320° + cossec 40°
j) cos 340° − cos 20°

537 Simplifique:

$$y = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)}{\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$$