6. Operações com arcos e transformação em produto

Fórmulas de adição e subtração de arcos

As fórmulas que estudaremos a seguir, nos permitem calcular as funções trigonométricas do tipo soma (a + b) ou diferença (a − b) de arcos, representadas por números reais.

Seno da soma

$$\boxed{\text{sen}(a+b) = \text{sen}\,a \cdot \cos b + \text{sen}\,b \cdot \cos a}$$

Seno da diferença

Para obter sen (a − b) basta fazer sen [a + (−b)] e aplicar a fórmula do sen (a + b): sen [a + (−b)] = sen a · cos (−b) + sen (−b) · cos a.

$$\text{Sendo: } \begin{cases} \text{sen}(-b) = -\text{sen}\,b \\ \cos(-b) = \cos b \end{cases}$$

$$\text{logo: } \boxed{\text{sen}(a-b) = \text{sen}\,a \cdot \cos b - \text{sen}\,b \cdot \cos a}$$

Exercícios

Resolvido

Calcular sen 75° e sen 15°.

sen 75°

Escrevemos 75° como uma soma, usando duas medidas conhecidas:

$75° = 30° + 45°$

$\text{sen}\,75° = \text{sen}(30° + 45°)$

$\text{sen}\,75° = \text{sen}\,30° \cdot \cos 45° + \text{sen}\,45° \cdot \cos 30°$

$$\text{sen}\,75° = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{sen}\,75° = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

sen 15°

Escrevemos 15° como uma diferença, usando duas medidas conhecidas:

$15° = 45° - 30°$

$\text{sen } 15° = \text{sen } (45° - 30°)$

$\text{sen } 15° = \text{sen } 45° \cdot \cos 30° - \text{sen } 30° \cdot \cos 45°$

$\text{sen } 15° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\text{sen } 15° = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

Propostos

538 Usando as fórmulas de adição ou subtração de arcos, calcule:

a) sen 105°
b) sen 165°
c) sen 195°
d) sen 135°

539 Aplique as fórmulas de adição ou subtração de arcos e simplifique:

a) $\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

b) $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

c) $\text{sen } (\pi + x)$

d) $\text{sen } (2\pi - x)$

e) $\text{sen } (\pi - x)$

Cosseno da soma

$$\boxed{\cos (a + b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen } a \cdot \text{sen } b}$$

Cosseno da diferença

$$\boxed{\cos (a - b) = \cos a \cdot \cos b + \text{sen } a \cdot \text{sen } b}$$

Exercícios

Resolvido

Calcular cos 105° e cos 195°.

cos 105°

Escrevemos 105° como uma soma, usando duas medidas conhecidas:

$105° = 60° + 45°$

$\cos 105° = \cos (60° + 45°)$

$\cos 105° = \cos 60° \cdot \cos 45° - \text{sen } 60° \cdot \text{sen } 45°$

$\cos 105° = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos 105° = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

cos 195°

Escrevemos 195° como uma diferença, usando duas medidas conhecidas:

$195° = 240° - 45°$

$\cos 195° = \cos(240° - 45°)$

$\cos 195° = \cos 240° \cdot \cos 45° + \text{sen } 240° \cdot \text{sen } 45°$

$\cos 195° = (-\cos 60°) \cdot \cos 45° + (-\text{sen } 60°) - \text{sen } 45°$

$$\cos 195° = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos 195° = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

Propostos

540 Usando as fórmulas de adição ou subtração de arcos, calcule:

a) cos 75°

b) cos 165°

c) cos 15°

d) cos 225°

541 Aplique as fórmulas de adição ou subtração de arcos e simplifique:

a) $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

b) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

c) $\cos(\pi - x)$

d) $\cos(\pi + x)$

e) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$

Tangente da soma e tangente da diferença

$$\text{tg}(a + b) = \frac{\text{tg } a + \text{tg } b}{1 - \text{tg } a \cdot \text{tg } b}$$

$$\text{tg}(a - b) = \frac{\text{tg } a - \text{tg } b}{1 + \text{tg } a \cdot \text{tg } b}$$

Exercícios

Resolvidos

1 Calcular tg 15°.

Como 15° = 45° − 30°, podemos aplicar a fórmula da tangente da diferença.

$$\text{tg } 15° = \text{tg}(45° - 30°) \Rightarrow \text{tg } 15° = \frac{\text{tg } 45° - \text{tg } 30°}{1 + \text{tg } 45° \cdot \text{tg } 30°}$$

$$\text{tg } 15° = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} \Rightarrow \text{tg } 15° = \frac{\frac{3 - \sqrt{3}}{3}}{\frac{3 + \sqrt{3}}{3}}$$

$$\text{tg } 15° = \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}}$$

Racionalizando o denominador da fração, temos:

$$\text{tg } 15° = \frac{(3 - \sqrt{3})}{(3 + \sqrt{3})} \cdot \frac{(3 - \sqrt{3})}{(3 - \sqrt{3})} = \frac{9 - 3\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 3}{9 - 3} \Rightarrow \text{tg } 15° = \frac{12 - 6\sqrt{3}}{6}$$

$$\text{tg } 15° = 2 - \sqrt{3}$$

2 Simplificar a expressão: $y = \text{sen}(\pi + x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$, aplicando as fórmulas do seno e cosseno da soma.

$\text{sen}(\pi + x) = \text{sen}\,\pi \cdot \cos x + \text{sen}\,x \cdot \cos\pi$

$\text{sen}(\pi + x) = 0 \cdot \cos x + \text{sen}\,x \cdot (-1)$

$\text{sen}(\pi + x) = -\text{sen}\,x$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos\frac{\pi}{2} \cdot \cos x - \text{sen}\,\frac{\pi}{2} \cdot \text{sen}\,x$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 0 \cdot \cos x - 1 \cdot \text{sen}\,x$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\text{sen}\,x$

logo, $y = \text{sen}(\pi + x) + \cos\frac{\pi}{2} + x \Rightarrow y = -\text{sen}\,x - \text{sen}\,x$

$y = -2 \cdot \text{sen}\,x$

Propostos

542 Determine:

a) tg 75° b) tg 105°

543 Simplifique as expressões:

a) $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

b) $\cos(\pi + x)$

c) $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

d) $y = 1 - \cos^2\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$

e) $y = \text{sen}(\pi - x) - \text{sen}(\pi + x)$

f) $y = \cos(\pi + x) + \cos(\pi - x)$

544 (Cesgranrio-RJ) Sendo $A = \dfrac{7\cos(5\pi - x) - 3\cos(3\pi + x)}{8\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$, com $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$, então:

a) $A = -1$

b) $2A = 1$

c) $2A + 1 = 0$

d) $4A + 5 = 0$

e) $5A - 4 = 0$

545 Determine tg 195°.

546 Simplifique as expressões:

a) $y = \text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \cos(2\pi - x)$

b) $y = \dfrac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)}$

c) $y = \dfrac{\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{\cos(\pi + x)}$

547 (Fuvest-SP) Se α é um ângulo tal que $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ e $\text{sen}\,\alpha = a$, então $\text{tg}(\pi - \alpha)$ é igual a:

a) $\dfrac{-a}{\sqrt{1-a^2}}$

b) $\dfrac{a}{\sqrt{1-a^2}}$

c) $\dfrac{\sqrt{1-a^2}}{a}$

d) $\dfrac{-\sqrt{1-a^2}}{a}$

e) $\dfrac{1+a^2}{a}$

Fórmula de duplicação de arcos

As fórmulas de duplicação de arcos decorrem das fórmulas de adição e são de fundamental importância, pois a sua utilização permite simplificar os cálculos.

Seno do arco duplo

sen 2a

Podemos escrever sen 2a como sen (a + a) e aplicar a fórmula de adição: $\text{sen}\,(a + a) = \text{sen}\,a \cdot \cos a + \text{sen}\,a \cdot \cos a$.

$$\boxed{\text{sen}\,2a = 2\,\text{sen}\,a \cdot \cos a}$$

Cosseno do arco duplo

cos 2a

Podemos escrever cos 2a como cos (a + a) e aplicar a fórmula de adição: $\cos\,(a + a) = \cos a \cdot \cos a - \text{sen}\,a \cdot \text{sen}\,a$.

$$\boxed{\cos 2a = \cos^2 a - \text{sen}^2\,a}$$

Tangente do arco duplo

tg 2a

Escrevendo tg 2a como tg (a + a), considerando as condições de existência e aplicando a fórmula de adição, temos:

$$\text{tg}\,(a + a) = \frac{\text{tg}\,a + \text{tg}\,a}{1 - \text{tg}\,a \cdot \text{tg}\,a}$$

$$\boxed{\text{tg}\,2a = \frac{2\,\text{tg}\,a}{1 - \text{tg}\,a^2}}$$

Exercícios

Resolvidos

1 Sabendo que $\text{sen}\,x = \frac{3}{5}$ e $x \in 1^{\underline{o}}$ quadrante, calcular sen 2x.

Sendo $\text{sen}\,2x = 2\,\text{sen}\,x \cdot \cos x$, não temos o valor de cos x, que devemos calcular usando a primeira relação fundamental.

$$\text{sen}^2\,x + \cos^2 x = 1$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \frac{9}{25} + \cos^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = 1 - \frac{9}{25} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{16}{25}$$

Como $x \in 1^{\underline{o}}$ quadrante, cos x é positivo e $\cos x = \frac{4}{5}$

Logo, $\text{sen}\,2x = 2\,\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5}$

$$\text{sen}\,2x = \frac{24}{25}$$

2 Dados $\text{sen}\, x = +\frac{1}{3}$ e $x \in 2^{\text{o}}$ quadrante, calcular $\cos 2x$.

Sendo $\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$, vamos calcular inicialmente $\cos x$.
Pela relação $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, temos:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \frac{1}{9} + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \frac{1}{9} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{8}{9}$$

Como $\text{sen}^2 x = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

então, $\cos 2x = \frac{8}{9} - \frac{1}{9}$

$\cos 2x = \frac{7}{9}$

3 Simplificar a expressão: $y = \dfrac{\cos 2x - \cos^2 x}{\text{sen}\, x}$.

Sabemos que $\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$, substituindo na expressão, vem:

$$y = \frac{\cos^2 x - \text{sen}^2 x - \cos^2 x}{\text{sen}\, x} = \frac{-\text{sen}^2 x}{\text{sen}\, x} = -\text{sen}\, x$$

$y = -\text{sen}\, x$

4 Verificar a identidade trigonométrica: $\dfrac{\text{tg}\, x \cdot \text{cotg}\, x}{\sec^2 x - 1} = \text{cotg}^2 x$.

Para verificar uma identidade devemos desenvolver a expressão de um dos membros da igualdade para chegar na expressão do outro membro.
Então vamos partir da 1ª expressão:

$$\frac{\text{tg}\, x \cdot \text{cotg}\, x}{\sec^2 x - 1} = \frac{\frac{\text{sen}\, x}{\cos x} \cdot \frac{\cos x}{\text{sen}\, x}}{\frac{1}{\cos^2 x} - 1} = \frac{1}{\frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{1}{\frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\cos^2 x}{\text{sen}^2 x} = \text{cotg}^2 x$$

Propostos

548 Sabendo que $\cos x = \frac{1}{5}$ e $x \in 1^{\text{o}}$ quadrante, determine:
a) $\text{sen}\, 2x$ b) $\cos 2x$ c) $\text{tg}\, 2x$

549 Sabendo que $\text{sen}\, x = -\frac{4}{5}$ e $x \in 3^{\text{o}}$ quadrante, calcule:
a) $\text{sen}\, 2x$ b) $\cos 2x$ c) $\text{tg}\, 2x$

550 Simplifique as seguintes expressões:

a) $y = \dfrac{\text{sen}\, 2a}{\text{sen}\, a \cdot \cos a}$

b) $y = \cos 2a + \text{sen}^2 a$

c) $y = \dfrac{\sec x \cdot \text{sen}\, 2x}{2}$

551 Verifique as identidades:
a) $\sec x \cdot \text{cotg}^2 x \cdot \text{sen}\, x = \text{cotg}\, x$

b) $\dfrac{1 - \text{sen}^2 x}{\text{cotg}\, x \cdot \text{sen}\, x} = \cos x$

c) $(\sec x - \text{tg}\, x)(\sec x + \text{tg}\, x) = 1$

552 Simplifique as seguintes expressões:
a) $y = \dfrac{\cos 2x + 1}{\text{tg}\, x}$

b) $y = (\text{sen}\, x + \cos x)^2 - 1$

c) $y = (\cos x - \text{sen}\, x)^2 + 2\, \text{sen}\, x \cdot \cos x$

553 Verifique as identidades:
a) $\dfrac{\cos x}{1 + \text{sen}\, x} = \dfrac{1 - \text{sen}\, x}{\cos x}$

b) $\dfrac{\text{tg}\, x + \text{cotg}\, x}{\text{cossec}^2 x} = \text{tg}\, x$

Fórmulas de transformação em produto

A solução de alguns problemas na Trigonometria requer a transformação de uma soma ou diferença de função em produto. Para tanto, usaremos fórmulas de transformação em produto, que são demonstradas com o auxílio das fórmulas de adição e subtração.

Vejamos a demonstração da fórmula:

$$\text{sen } p + \text{sen } q = 2 \text{ sen } \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2}$$

Considerando que:

$$\begin{cases} \text{sen } (a+b) = \text{sen } a \cdot \cos b + \text{sen } b \cdot \cos a \quad \text{(I)} \\ \text{sen } (a-b) = \text{sen } a \cdot \cos b - \text{sen } b \cdot \cos a \quad \text{(II)} \end{cases}$$

Adicionando (I) e (II)

$$\text{sen } (a+b) + \text{sen } (a-b) = 2 \text{ sen } a \cdot \cos b \quad \text{(III)}$$

Chamando:

$$\begin{cases} a + b = p \\ \\ a - b = q \end{cases} \quad \text{temos que:} \quad \begin{cases} a = \dfrac{p+q}{2} \\ \\ b = \dfrac{p-q}{2} \end{cases}$$

Substituindo em (III), vem:

1ª) $\boxed{\text{sen } p + \text{sen } q = 2 \cdot \text{sen } \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2}}$

Analogamente chegamos a:

2ª) $\boxed{\text{sen } p - \text{sen } q = 2 \cdot \text{sen } \frac{p-q}{2} \cdot \cos \frac{p+q}{2}}$

3ª) $\boxed{\cos p + \cos q = 2 \cdot \cos \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2}}$

4ª) $\boxed{\cos p - \cos q = -2 \cdot \text{sen } \frac{p+q}{2} \cdot \text{sen } \frac{p-q}{2}}$

Exercícios

Resolvido

Transformar em produto:

a) $\text{sen } 60° + \text{sen } 30°$ b) $\cos 70° - \cos 10°$ c) $\text{sen } 3x - \text{sen } x$

a) $\text{sen } 60° + \text{sen } 30°$

$$\text{sen } 60° + \text{sen } 30° = 2 \cdot \text{sen } \frac{60° + 30°}{2} \cdot \cos \frac{60° - 30°}{2}$$

$$\text{sen } 60° + \text{sen } 30° = 2 \cdot \text{sen } 45° \cdot \cos 15°$$

$$\text{sen } 60° + \text{sen } 30° = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos 15° = \sqrt{2} \cdot \cos 15°$$

b) $\cos 70° - \cos 10°$

$$\cos 70° - \cos 10° = -2 \cdot \text{sen } \frac{70° + 10°}{2} \cdot \text{sen } \frac{70° - 10°}{2}$$

$$\cos 70° - \cos 10° = -2 \cdot \text{sen } 40° \cdot \text{sen } 30°$$

$$\cos 70° - \cos 10° = -2 \cdot \text{sen } 40° \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 70° - \cos 10° = -\text{sen } 40°$$

c) $\text{sen } 3x - \text{sen } x$

$$\text{sen } 3x - \text{sen } x = 2 \cdot \text{sen } \frac{3x - x}{2} \cdot \cos \frac{3x + x}{2} = 2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos 2x$$

Propostos

554 Transforme em produto:

a) $\text{sen } 90° + \text{sen } 30°$
b) $\text{sen } 70° + \text{sen } 10°$
c) $\text{sen } 80° - \text{sen } 40°$
d) $\cos 70° + \cos 10°$

555 Transforme em produto:

a) $\cos 35° - \cos 25°$
b) $\text{sen } 3x + \text{sen } x$
c) $\cos 3a - \cos a$
d) $\text{sen } 4t - \text{sen } 2t$

7. Equações trigonométricas

Equações trigonométricas são aquelas que envolvem as funções trigonométricas em seus membros.

Exemplos:

$$\text{sen } x = \frac{1}{2}, \text{ tg } x = \text{tg } \frac{\pi}{4} \text{ e } \cos 2x = -\cos x$$

Como as equações trigonométricas possuem uma gama muito grande de variantes, vamos fazer o estudo dos principais tipos.

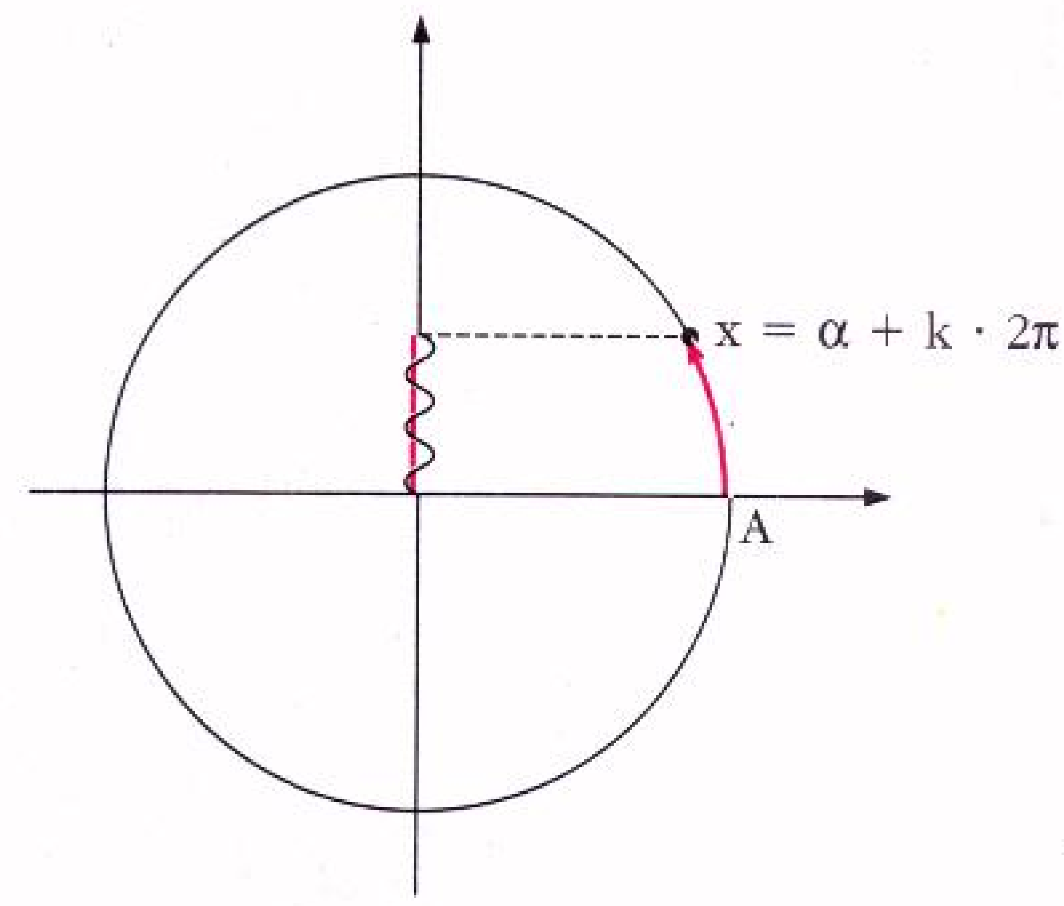
Salvo indicação em contrário, usaremos *x* como incógnita.

Equação do tipo: sen x = sen α

Para esse tipo de equação vamos fazer duas considerações:

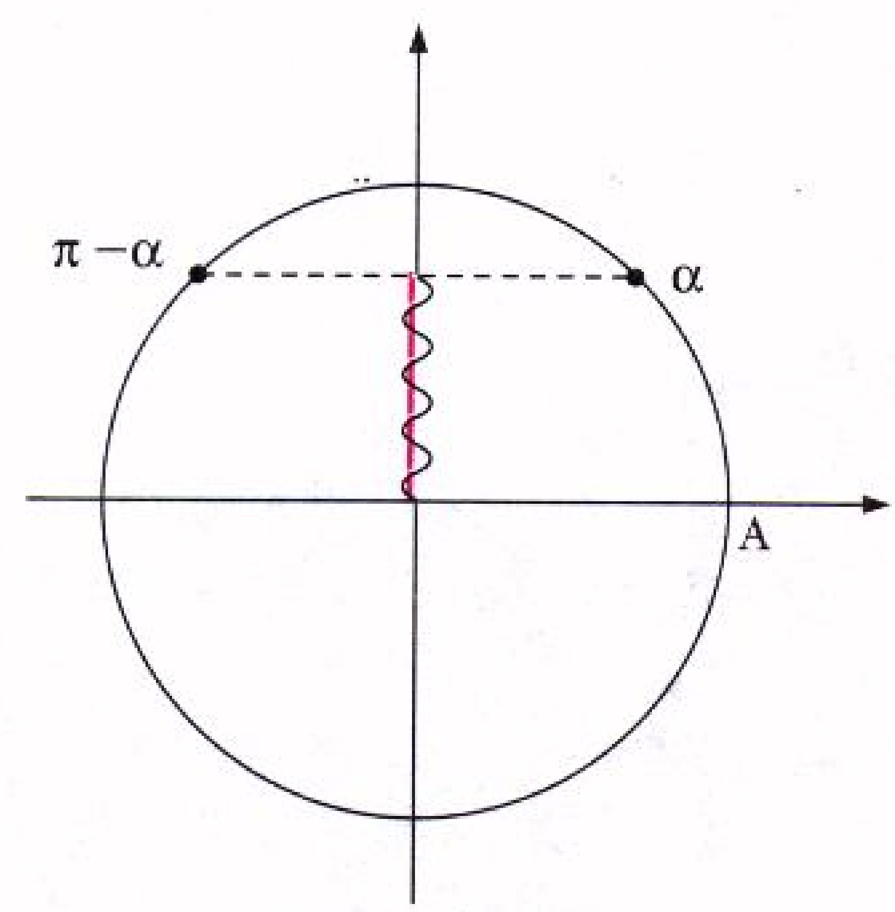
- Quando as extremidades dos arcos de medidas x e α são coincidentes no ciclo trigonométrico, ou seja: $x = \alpha + k \cdot 2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

  No ciclo trigonométrico:



- Quando as extremidades dos arcos de medidas x e α são simétricas em relação ao eixo das ordenadas, ou seja: $x = \pi - \alpha + k \cdot 2\pi$.

  No ciclo trigonométrico:



Esquematizando as soluções, temos:

$$\text{sen } x = \text{sen } \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \alpha + k \cdot 2\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \alpha + k \cdot 2\pi \end{cases}$$

Então, $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \alpha + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \pi - \alpha + k \cdot 2\pi, \text{ onde } k \in \mathbb{Z}\}$

Exercícios

Resolvido

Determinar o conjunto solução das equações:

a) $\text{sen } x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $2 \text{ sen } 2x - 1 = 0$:

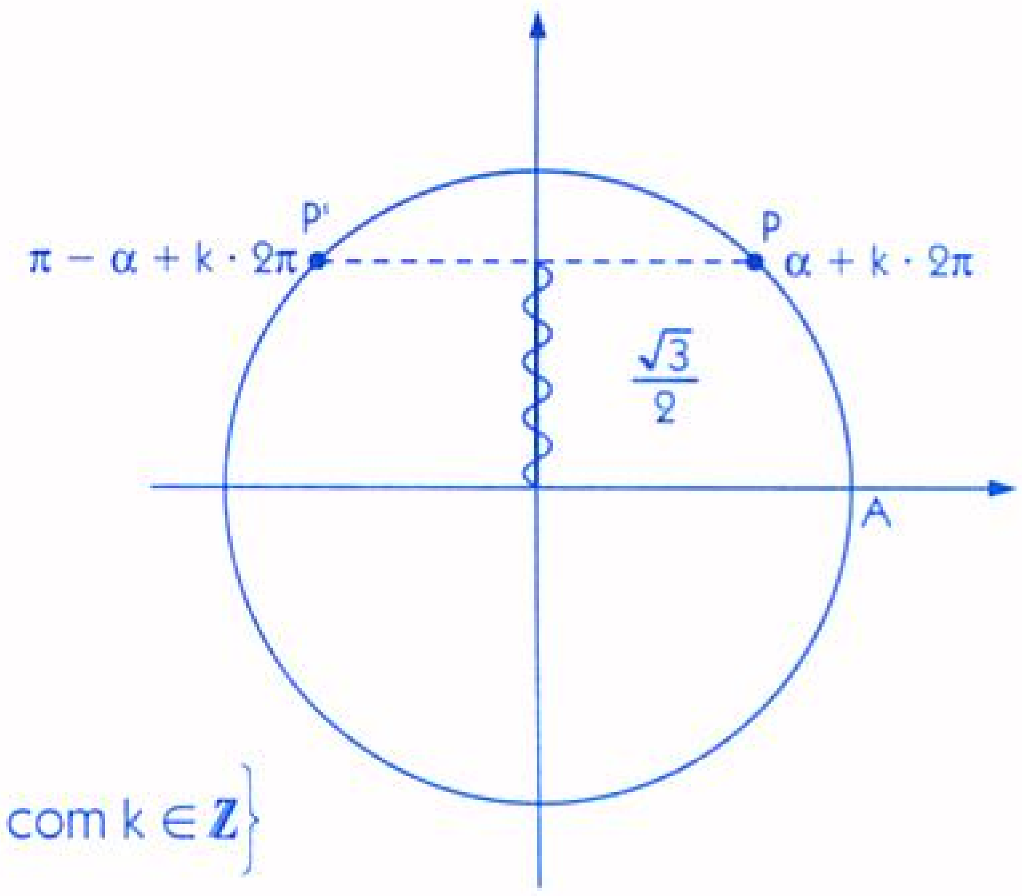
a) $\text{sen } x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

As extremidades dos arcos no ciclo trigonométrico, para o qual $\text{sen } x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, são os pontos simétricos P e P'.

Então, escrevemos:

$\text{sen } x = \text{sen } \frac{\pi}{3}$

onde as soluções são:



$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi = 2\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \end{cases}$$

$$V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = 2\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

b) $2 \text{ sen } 2x - 1 = 0 \Rightarrow \text{sen } 2x = \frac{1}{2}$

Então, escrevemos: $\text{sen } 2x = \text{sen } \frac{\pi}{6}$ onde as soluções são:

$$\begin{cases} 2x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ 2x = \pi - \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \text{ ou } 2x = 5\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \Rightarrow x = 5\frac{\pi}{12} + k\pi \end{cases}$$

$$V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{12} + k\pi \text{ ou } x = 5\frac{\pi}{12} + k\pi \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Propostos

556 Determine o conjunto verdade das equações:

a) $\text{sen } x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\text{sen } x = 1$

c) $\text{sen } x = 0$

557 Determine o conjunto verdade das equações:

a) $2 \text{ sen } x + 1 = 0$

b) $\text{sen } 2x - 1 = 0$

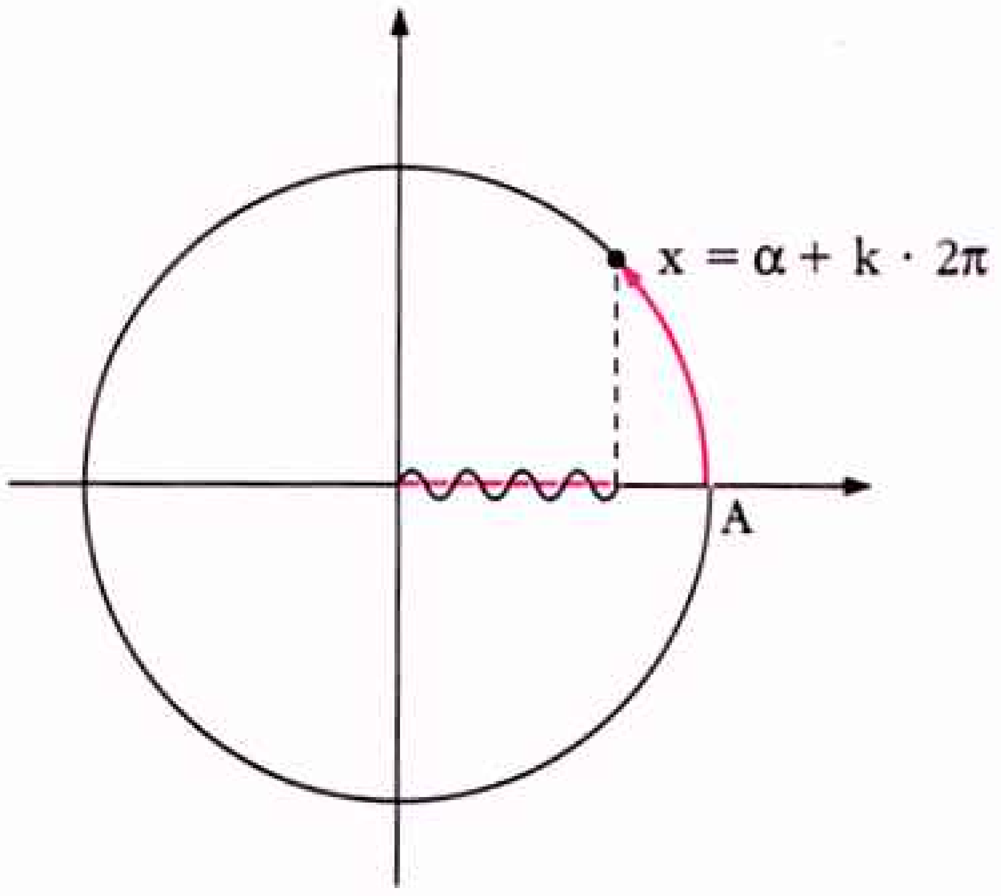
c) $2 \text{ sen } 3x - \sqrt{3} = 0$

d) $\text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$

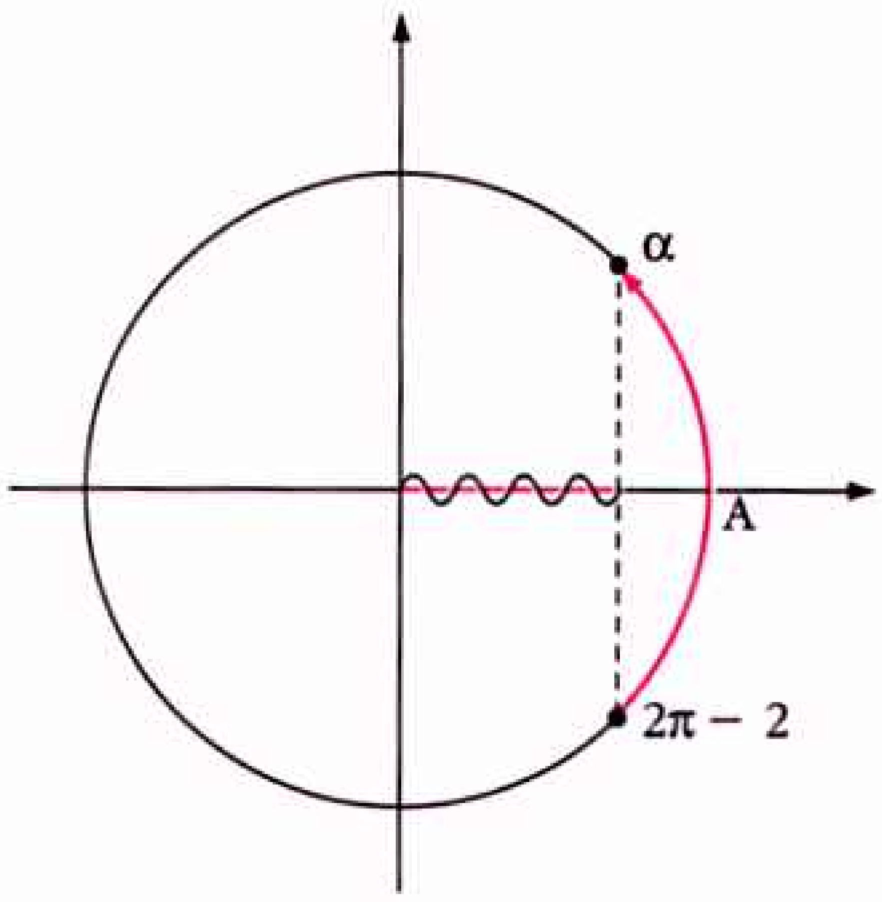
Equação do tipo: cos x = cos α

Considerações:

- Quando as extremidades dos arcos de medidas de x e α são coincidentes no ciclo trigonométrico, ou seja: $x = \alpha + k \cdot 2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.



- Quando as extremidades dos arcos de medidas de x e α são simétricas em relação ao eixo das abscissas, ou seja $x = -\alpha + k \cdot 2\pi$.



Esquematizando as soluções:

$$\cos x = \cos \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \alpha + k \cdot 2\pi \\ \text{ou} \\ x = -\alpha + k \cdot 2\pi \end{cases}$$

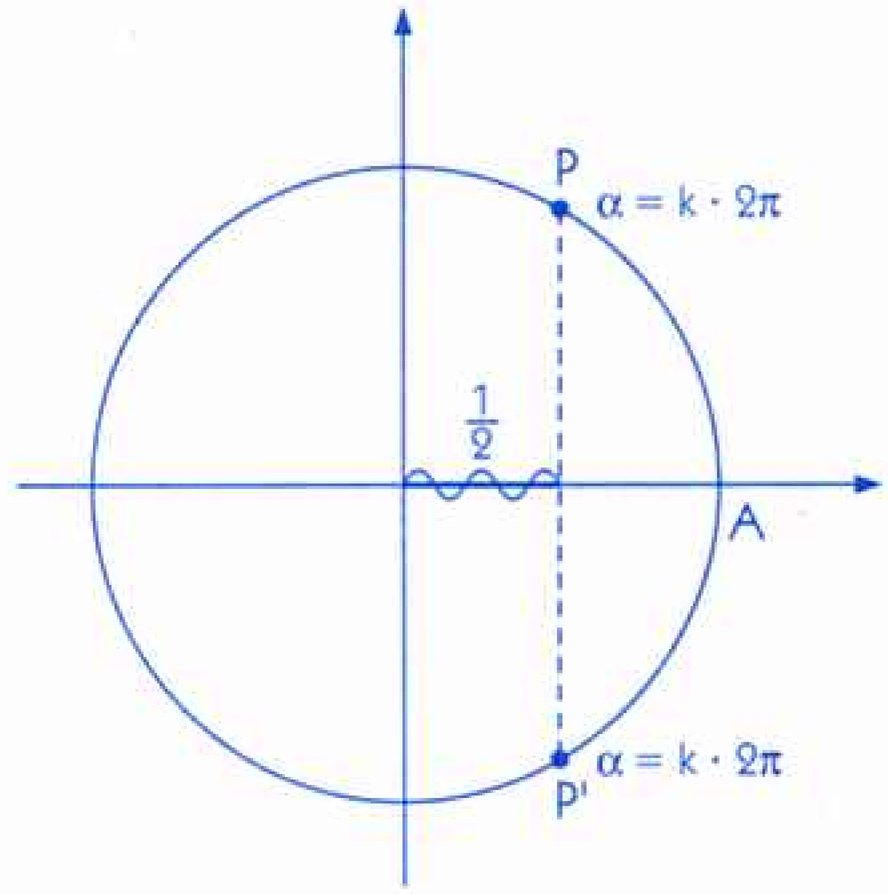
$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \alpha + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = -\alpha + k \cdot 2\pi, \text{ onde } k \in \mathbb{Z}\}$

Exercícios

Resolvido

Determinar o conjunto solução das equações $\cos = \frac{1}{2}$ e $\cos(2x - \pi) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$:

As extremidades dos arcos no ciclo trigonométrico, para o qual $\cos x = \frac{1}{2}$, são os pontos P e P' simétricos em relação ao eixo dos cossenos.



Então, escrevemos:

$\cos x = \cos \frac{\pi}{3}$, onde as soluções são:

$x = \pm\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$

$V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

$\cos(2x - \pi) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos(2x - \pi) = -\cos\frac{\pi}{6}$

$\cos(2x - \pi) = \cos 5\frac{\pi}{6}$

onde as soluções são:

$$\begin{cases} 2x - \pi = 5\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \Rightarrow 2x = \frac{11\pi}{6} + k \cdot 2\pi \Rightarrow x = \frac{11\pi}{12} + k\pi \\ \text{ou} \\ 2x - \pi = \frac{-5\pi}{6} + k \cdot 2\pi \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\pi \end{cases}$$

$V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{11\pi}{12} + k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{12} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

Propostos

558 Determine o conjunto verdade das equações:

a) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\cos x = 1$

c) $\cos x = -1$

d) $2\cos 2x - 1 = 0$

559 Determine o conjunto verdade das equações:

a) $\cos 4x = \cos x$

b) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

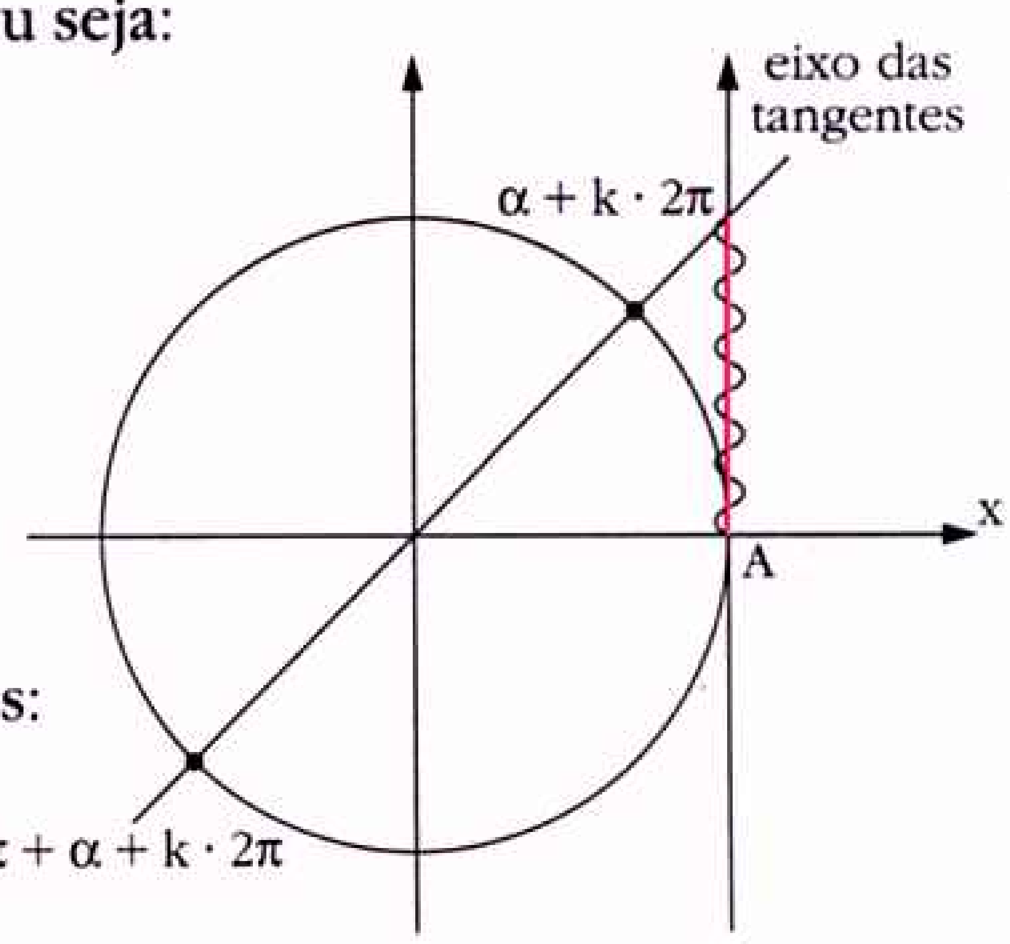
c) $\cos(2x - \pi) = -\frac{1}{2}$

d) $\cos 3x + 1 = 0$

Equação do tipo: tg x = tg α

Considerações:

- Note que no ciclo trigonométrico as extremidades dos arcos de medidas x e α possuem o mesmo valor para a tangente, ou seja:



$$\begin{cases} x = \alpha + k \cdot 2\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi + \alpha + k \cdot 2\pi \end{cases}$$

Combinando as expressões numa só, temos:

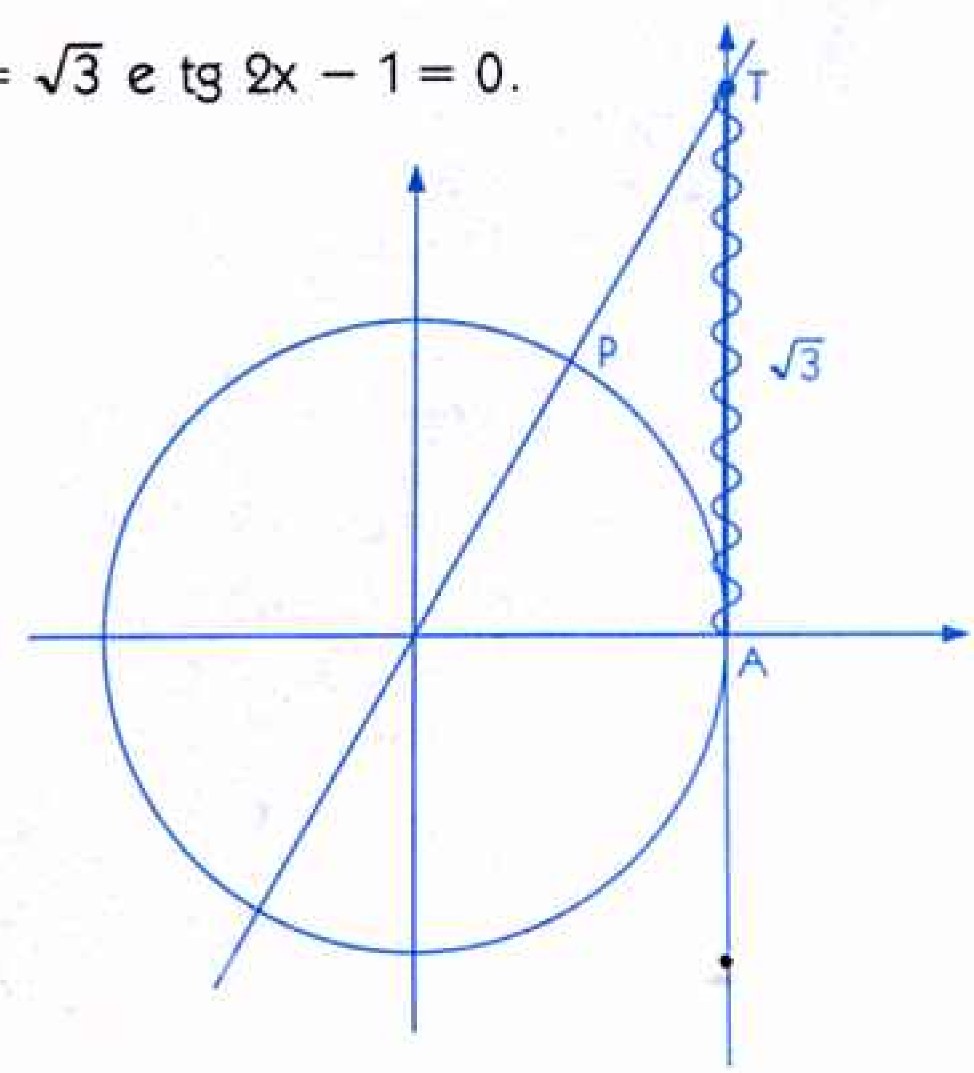
$x = \alpha + k\pi$, sendo $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \alpha + k\pi, \text{ onde } k \in \mathbb{Z}\}$

Exercícios

Resolvido

Determinar o conjunto verdade das equações $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ e $\operatorname{tg} 2x - 1 = 0$.



$\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$

As extremidades dos arcos no ciclo trigonométrico, para o qual $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$, são os pontos P e P' simétricos em relação à origem.

Então, escrevemos:

$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi$

$V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

$\operatorname{tg} 2x - 1 = 0$

$\operatorname{tg} 2x - 1 = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} 2x = 1 \Rightarrow \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$

$V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

Propostos

560 Determine o conjunto verdade das equações:

a) $\operatorname{tg} x = 1$

b) $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

c) $\operatorname{tg} x + 1 = 0$

d) $\operatorname{tg} 2x - \sqrt{3} = 0$

561 Determine o conjunto verdade das equações:

a) $3\operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0$

b) $\operatorname{tg} 4x = \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

c) $\operatorname{tg} 3x - 1 = 0$

d) $\operatorname{tg} (2x + \pi) - \sqrt{3} = 0$

Equações que recaem numa equação de 2º grau

São equações redutíveis à forma $ax^2 + bx + c = 0$.

Exercícios

Resolvido

Determinar o conjunto verdade das equações dadas:

a) $2\,\text{sen}^2 x + \text{sen}\, x - 1 = 0$

b) $\cos 2x + 5\,\text{sen}\, x - 3 = 0$

a) $2\,\text{sen}^2 x + \text{sen}\, x - 1 = 0$

Fazendo $\text{sen}\, x = y$, temos:

$2y^2 + y - 1 = 0$

$a = 2, b = 1, c = -1$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4} \begin{cases} y' = \dfrac{1}{2} \\ y'' = -1 \end{cases}$$

$y' = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{sen}\, x = \frac{1}{2}$,

onde $\text{sen}\, x = \text{sen}\, \frac{\pi}{6}$

$x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi$

ou

$y'' = -1$

onde $\text{sen}\, x = \text{sen}\, \frac{3\pi}{2}$

$x = \text{sen}\, \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi$

$$V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \text{ ou } \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi \text{ ou } \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

b) $\cos 2x + 5\,\text{sen}\, x - 3 = 0$

Vamos substituir $\cos 2x$ por $1 - 2\,\text{sen}^2 x$ e reduzir para a forma do 2º grau.

$1 - 2\,\text{sen}^2 x + 5\,\text{sen}\, x - 3 = 0$

$-2\,\text{sen}^2 x + 5\,\text{sen}\, x - 2 = 0 \quad (-1)$

$2\,\text{sen}^2 x - 5\,\text{sen}\, x + 2 = 0$

Fazendo $\text{sen}\, x = y$, temos:

$2y^2 - 5y + 2 = 0$

Sabemos que:

$\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$

$\cos 2x = 1 - \text{sen}^2 x - \text{sen}^2 x$

$\cos 2x = 1 - 2\,\text{sen}^2 x$

$$y = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4} \begin{cases} y' = \dfrac{1}{2} \\ y'' = 2 \text{ (não convém)} \end{cases}$$

Logo, $\text{sen}\, x = \frac{1}{2}$

$x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$

ou

$x = \pi - \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

$$V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Propostos

562 Determine o conjunto verdade das equações:

a) $sen^2 x - 3 sen x + 2 = 0$

b) $cos^2 x - cos x = 0$

c) $2 cos^2 x - 3 cos x + 1 = 0$

d) $2 sen^2 x + sen x - 1 = 0$ para $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

e) $sen x + cos 2x = 1$ para $0 \leqslant x \leqslant \pi$

563 Se x é um número real, tal que $sen^2 x - 3 sen x = -2$, para $0 \leqslant x \leqslant \pi$, então x é igual a:

a) $\frac{\pi}{2}$

b) $\frac{3\pi}{2}$

c) $\frac{3\pi}{4}$

d) π

564 Resolva a equação $3(1 - cos x) = sen^2 x$.

Equações do tipo a sen x + b cos x = c, com ab ≠ 0

As equações do tipo a sen x + b cos x = c são resolvidas com o auxílio da 1ª relação fundamental, ou seja:

$$\begin{cases} \alpha\ sen\ x + b\ cos\ x = c \\ sen^2 x + cos^2 x = 1 \end{cases}$$

Exercícios

Resolvido

Determinar o conjunto verdade da equação $sen x + cos x = 1$.

Com o auxílio da relação $sen^2 x + cos^2 x = 1$, formamos o sistema: $\begin{cases} sen x + cos x = 1 & \text{(I)} \\ sen^2 x + cos^2 x = 1 & \text{(II)} \end{cases}$

Isolando cos x em (I): $cos x = 1 - sen x$

Substituindo em (II): $sen^2 x + (1 - sen x)^2 = 1$

$sen^2 x + 1 - 2 sen x + sen^2 x = 1$

$sen^2 x - sen x = 0$

Fazendo $sen x = y$: $y^2 - y = 0 \Rightarrow y(y - 1) = 0$ $\begin{cases} y' = 0 \\ y'' = 1 \end{cases}$

Como $cos x = 1 - sen x$, temos $sen x = 0 \Rightarrow cos x = 1 - 0 \Rightarrow cos x = 1$

Então, $x = k \cdot 2\pi$

$sen x = 1 \Rightarrow cos x = 1 - 1 \Rightarrow cos x = 0$ então, $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$

Combinando as soluções principais, temos a solução final:

$V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

Proposto

565 Determine o conjunto solução das equações:

a) $sen x - cos x = 1$

b) $\sqrt{3} cos x = sen x$

c) $sen x - cos x = 0$

d) $\sqrt{3} sen x + cos x = 2$

e) $sen x + \sqrt{3} cos x = \sqrt{3}$

Equações cuja resolução se faz com o auxílio das transformações em produto

Para a resolução das equações desse tipo usaremos uma das fórmulas:

$$\text{sen } p + \text{sen } q = 2 \cdot \text{sen } \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cdot \cos \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\text{sen } p - \text{sen } q = 2 \cdot \text{sen } \frac{p-q}{2} \cdot \cos \frac{p+q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2 \cdot \text{sen } \frac{p+q}{2} \cdot \text{sen } \frac{p-q}{2}$$

Exercícios

Resolvido

Determinar o conjunto verdade da equação sen $2x$ + sen $x = 0$.

Inicialmente vamos transformar a expressão sen $2x$ + sen x em produto, usando a fórmula

$\text{sen } p + \text{sen } q = 2 \text{ sen } \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2}$.

$2 \text{ sen } \frac{2x+x}{2} \cdot \cos \frac{2x-x}{2} = 0 \Rightarrow 2 \text{ sen } \frac{3x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = 0$

Como o produto é igual a zero, obtemos:

$\text{sen } \frac{3x}{2} = 0 \Rightarrow \text{sen } \frac{3x}{2} = \text{sen } 0$

$\frac{3x}{2} = k\pi \Rightarrow x = k \cdot 2\frac{\pi}{3}$

$\cos \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = \pm\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$

$x = \pm\pi + k \cdot 4\pi$

$V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm\pi + k \cdot 4\pi \text{ ou } x = k \cdot 4\frac{\pi}{3}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

Propostos

566 Determine o conjunto verdade das equações:

a) sen $3x$ + sen $x = 0$

b) sen $2x$ − sen $x = 0$

c) $\cos 2x = -\cos x$

567 Determine o conjunto verdade das equações:

a) $\cos 4x = \cos 2x$

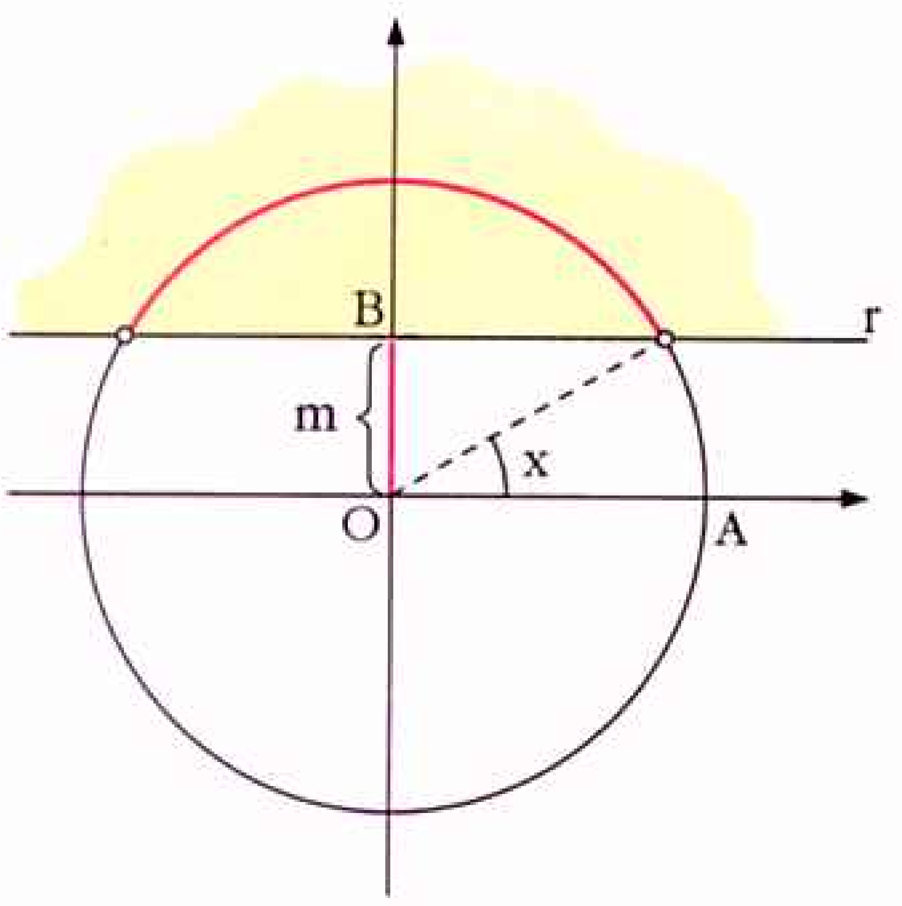
b) $\cos 3x + \cos x = \cos 2x$

c) sen $4x$ + sen $2x = 0$ para $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

8. Inequações trigonométricas

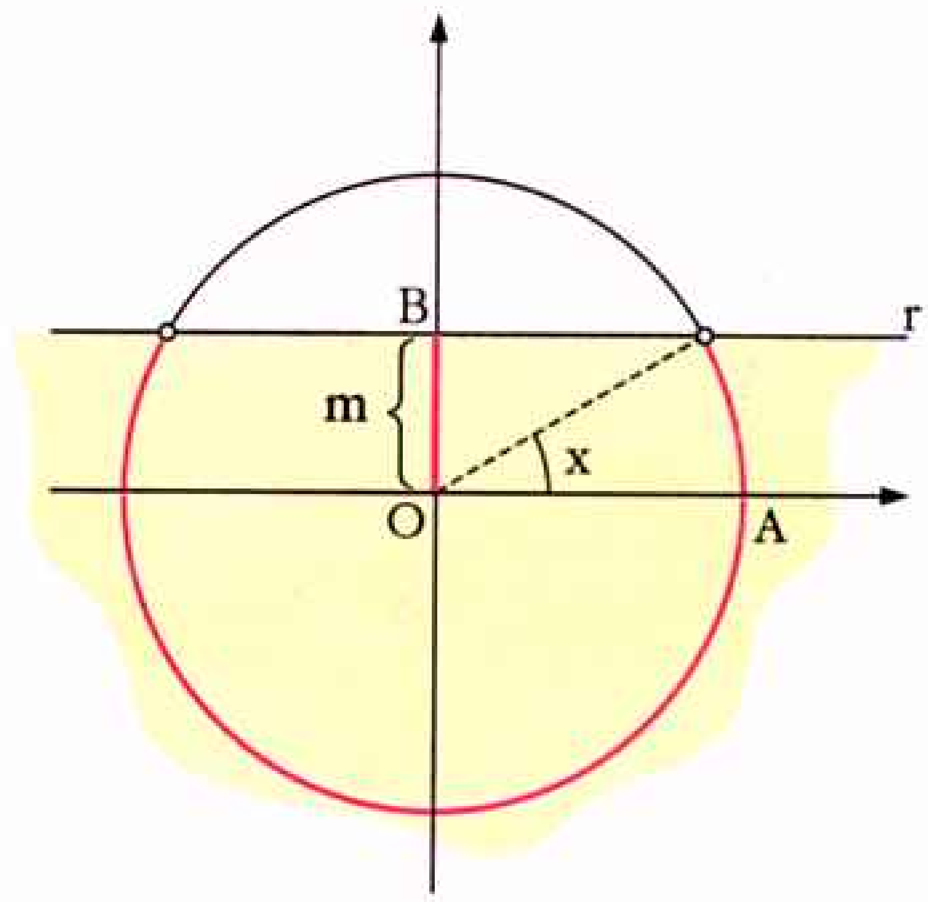
As inequações trigonométricas são desigualdades que envolvem funções trigonométricas da incógnita. A resolução é semelhante à usada nas equações trigonométricas, observando-se a circunferência e determinando o conjunto verdade. A seguir, estudaremos alguns tipos de inequações, tidas como fundamentais.

(I) sen x > m



O semiplano localizado acima da reta *r* forma, na intersecção com o ciclo, as imagens dos reais *x*, sendo sen x > m.

sen x < m



O semiplano localizado abaixo da reta *r* forma, na intersecção com o ciclo, as imagens dos reais *x*, sendo sen x < m.

Sendo *m* um número real dado e considerado $-1 \leq \text{sen } x \leq 1$, vamos estudar o conjunto verdade para:

- a primeira volta, $0 \leq x \leq 2\pi$
- a solução geral

Exercícios

Resolvido

Resolver as inequações trigonométricas:

a) $\text{sen } x > \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\text{sen } x < \frac{\sqrt{2}}{2}$

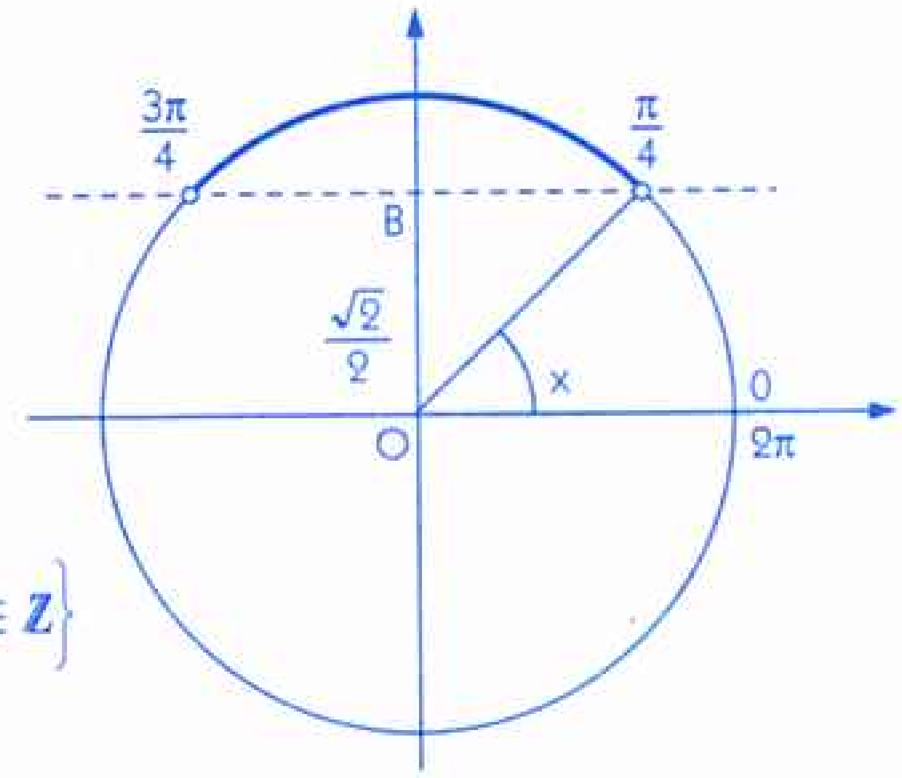
a) $\text{sen } x > \frac{\sqrt{2}}{2}$

Percorrendo o ciclo no sentido anti-horário, temos: primeira volta, $0 \leq x \leq 2\pi$

$V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}\right\}$

Solução geral

$V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid k \cdot 2\pi + \frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi, \text{ onde } k \in \mathbb{Z}\right\}$



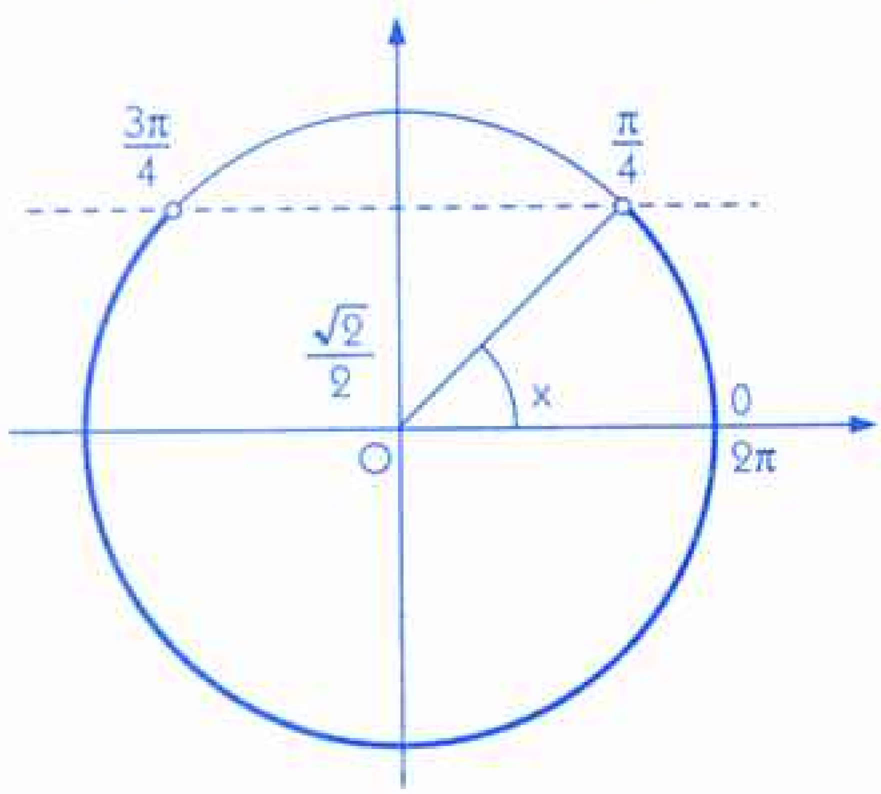
b) $\text{sen } x < \frac{\sqrt{2}}{2}$

Percorrendo o ciclo a partir do zero, no sentido anti-horário, encontramos dois intervalos para a primeira volta: $0 \leq x \leq 2\pi$.

$V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \text{ ou } \frac{3\pi}{4} < x \leq 2\pi\right\}$

Solução geral

$V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid k \cdot 2\pi \leq x < \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \text{ ou } k \cdot 2\pi + \frac{3\pi}{4} < x \leq 2\pi + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$



Propostos

568 Resolva as inequações trigonométricas, considerando $0 \leq x \leq 2\pi$.

a) $\text{sen } x \leq 1$

b) $\text{sen } x > -1$

c) $\text{sen } x > 0$

d) $\text{sen } x < 0$

569 Resolva as equações trigonométricas, determinando inicialmente a solução para $0 \leq x \leq 2\pi$.

a) $\text{sen } x > \frac{1}{2}$

b) $\text{sen } x < \frac{1}{2}$

c) $\text{sen } x > \frac{-\sqrt{3}}{2}$

d) $\text{sen } x \leq \frac{-\sqrt{3}}{2}$

e) $\text{sen } x < \frac{\sqrt{3}}{2}$

f) $\frac{1}{2} \leq \text{sen } x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

g) $\text{sen}^2 x - \text{sen } x \geq 0$

570 (Fuvest-SP) A solução da desigualdade $\text{sen}^2 x - \frac{1}{2} \geq 0$ no intervalo $[0, \pi]$ é:

a) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ ou $\frac{3\pi}{4} \leq x \leq \pi$

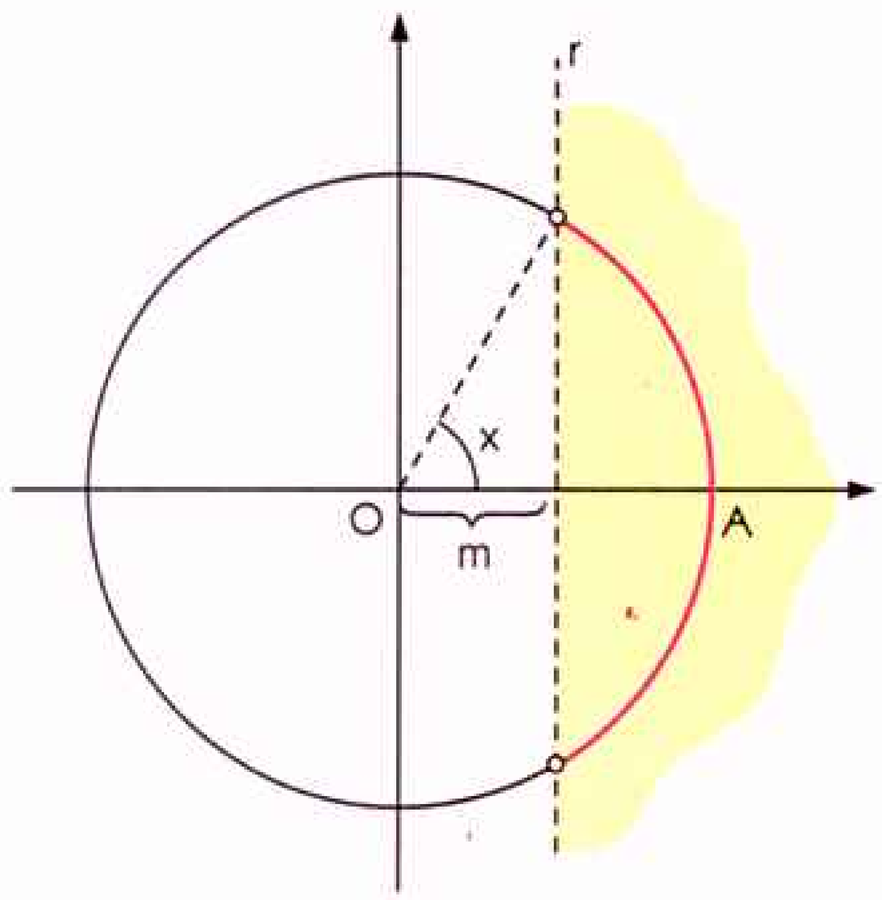
b) $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$

c) $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$

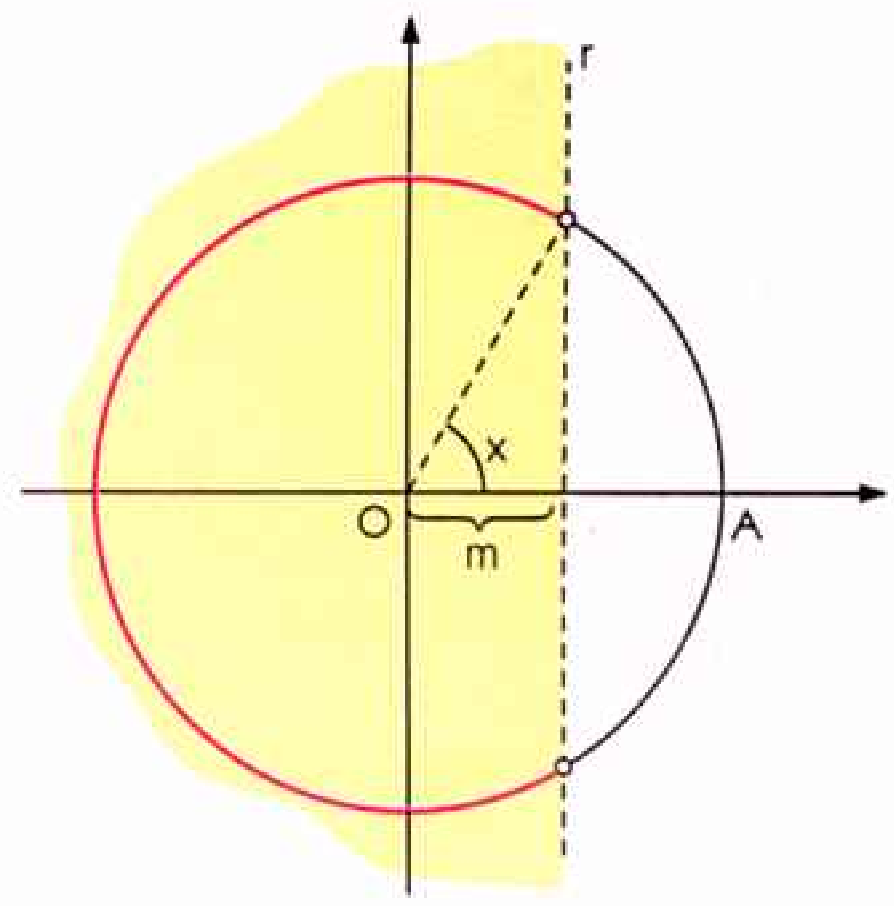
d) $0 < x < \frac{\pi}{6}$ ou $\frac{2\pi}{3}$

e) não sei

(II) **$\cos x > m$** — **$\cos x < m$**



O semiplano localizado à direita da reta r forma, na intersecção com o ciclo, as imagens dos reais x, sendo $\cos x > m$.



O semiplano localizado à esquerda da reta r forma, na intersecção com o ciclo, as imagens dos reais x, sendo $\cos x < m$.

Sendo m um número real dado e considerado $-1 \leq \cos x \leq 1$, vamos estudar o conjunto verdade para:

- a primeira volta, $0 \leq x \leq 2\pi$
- a solução geral

Exercícios

Resolvido

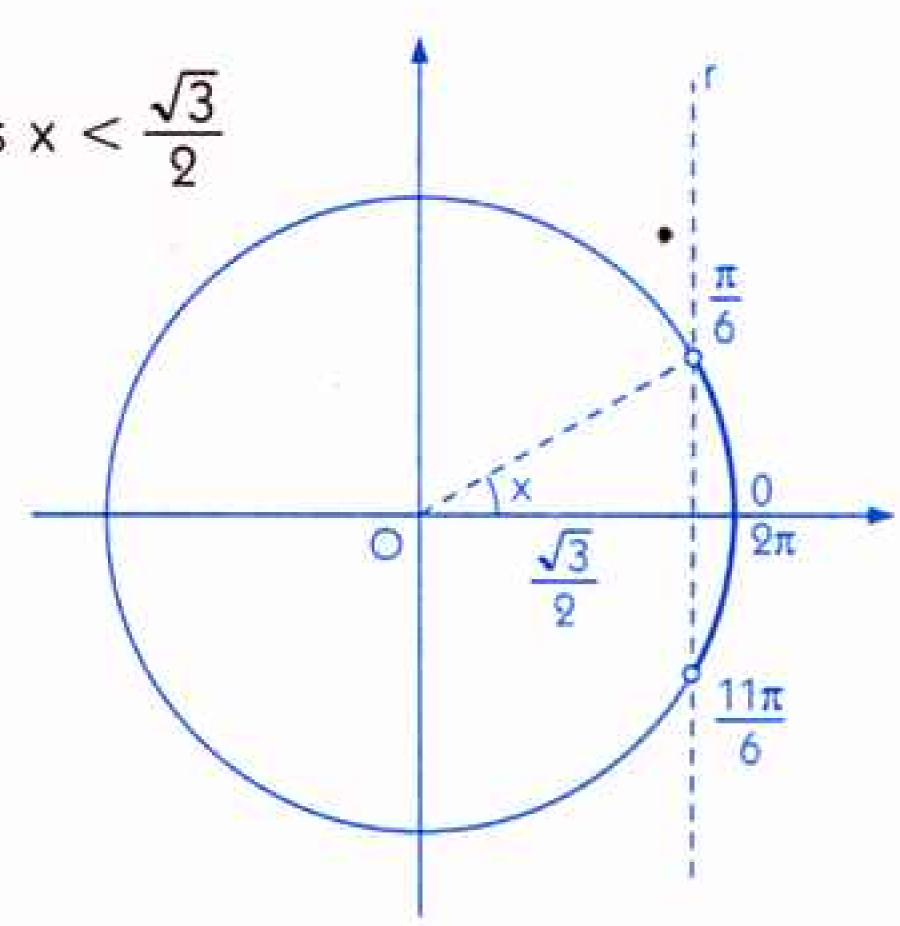
Resolver as inequações trigonométricas:

a) $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$

a) $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$

Percorrendo o ciclo trigonométrico a partir do zero, no sentido anti-horário, encontramos dois intervalos para a primeira volta: $0 \leq x \leq 2\pi$.

$$V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{11\pi}{6} < x \leq 2\pi\right\}$$



Solução geral

$$V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid k \cdot 2\pi \leq x < \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \text{ ou } \frac{11\pi}{6} + k \cdot 2\pi < x \leq 2\pi + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

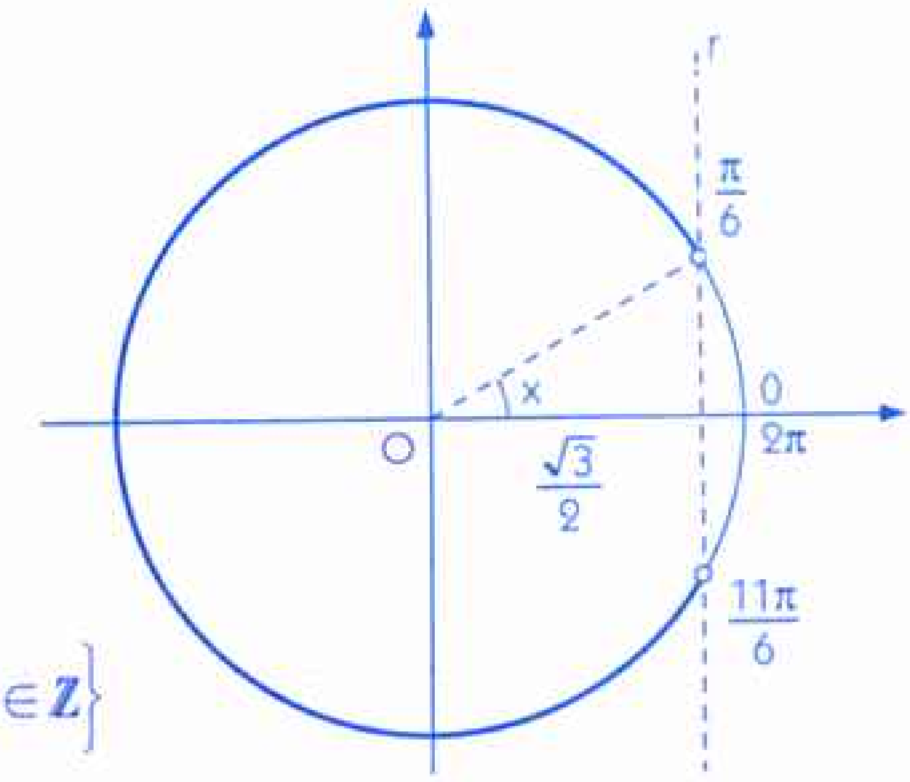
b) $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$

Percorrendo o ciclo no sentido anti-horário, temos: primeira volta $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

$V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{11\pi}{6}\right\}$

Solução geral

$V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid k \cdot 2\pi + \frac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{11\pi}{6} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$



Propostos

571 Resolva as inequações trigonométricas, considerando $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

a) $\cos x \geqslant 0$
c) $\cos x > -1$
b) $\cos x < 1$
d) $\cos x \geqslant \frac{1}{2}$

572 Resolva as inequações trigonométricas, determinando a solução para $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

a) $\cos x > 0$
c) $0 < \cos x < 1$
b) $\cos x < 0$
d) $\frac{-\sqrt{3}}{2} < \cos x < \frac{1}{2}$

573 Resolva as inequações trigonométricas:

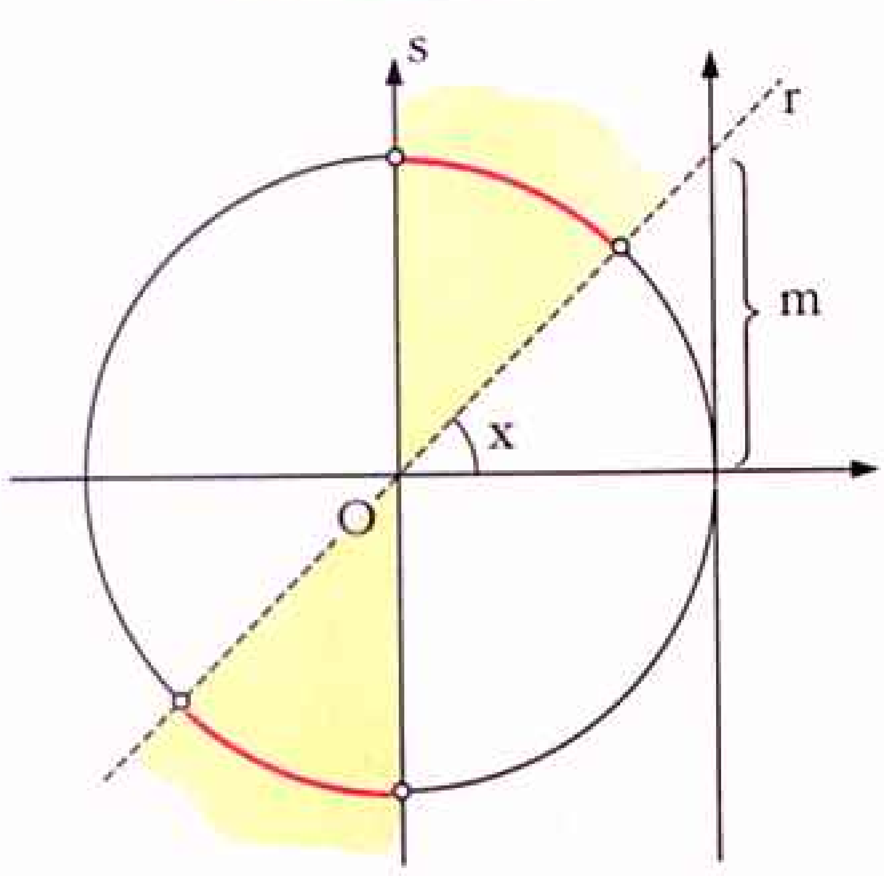
a) $\cos x > \frac{1}{2}$
b) $\cos x \leqslant \frac{1}{2}$
c) $\cos x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$
d) $\cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$
e) $\cos^2 x - \frac{3}{2}\cos x + \frac{1}{2} \leqslant 0$

574 (GV-SP) A solução da inequação $\sqrt{2}\cos^2 x > \cos x$ no intervalo $[0, \pi]$ é:

a) $0 \leqslant x < \frac{\pi}{4}$ ou $\frac{\pi}{2} < x \leqslant \pi$
b) $0 < x \leqslant \frac{\pi}{3}$ ou $\frac{2\pi}{3} \leqslant x < \pi$
c) $\frac{\pi}{4} < x < \frac{2\pi}{3}$
d) $0 < x < \frac{\pi}{6}$ ou $\frac{2\pi}{3} < x < \pi$
e) n. d. a.

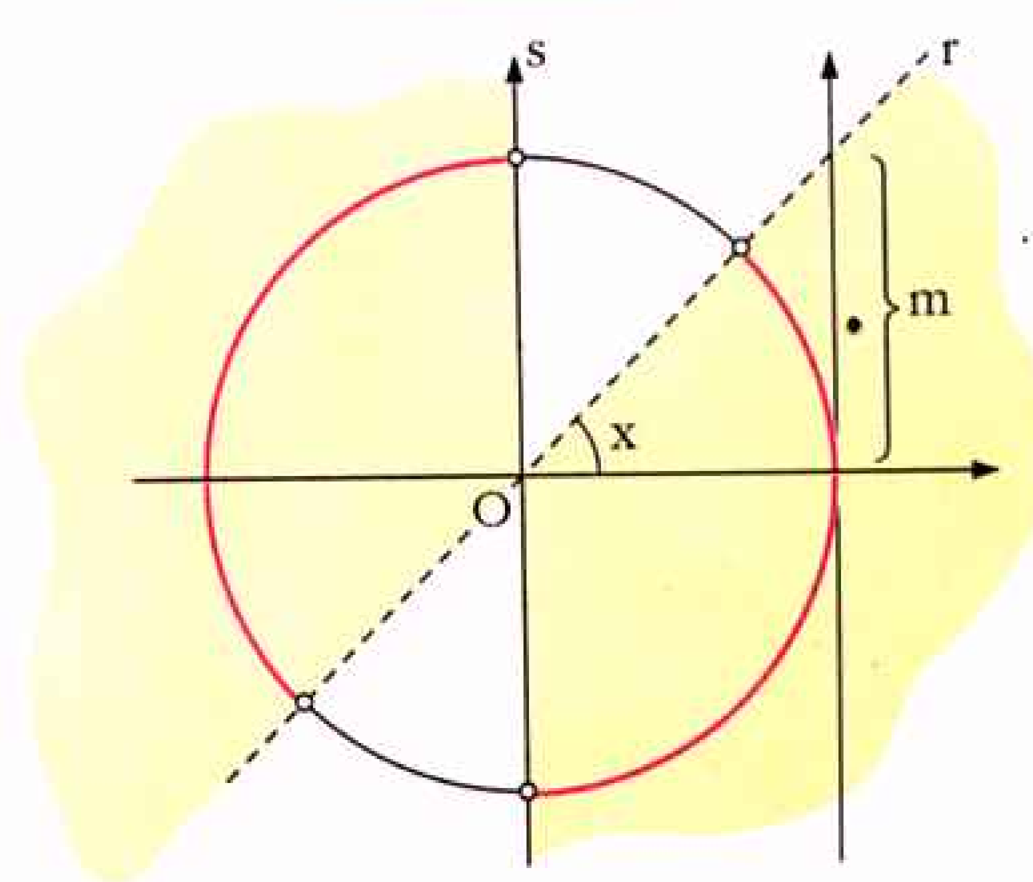
III

tg x > m



O ângulo rÔs no sentido anti-horário forma, na intersecção com o ciclo, as imagens dos reais x, sendo $\text{tg } x > m$.

tg x < m



O ângulo sÔr no sentido anti-horário forma, na intersecção com o ciclo, as imagens dos reais x, sendo $\text{tg } x < 0$.

Sendo m um número real dado, vamos estudar o conjunto verdade para:

- a primeira volta, $0 \leq x \leq 2\pi$
- a solução geral

Exercícios

Resolvido

Resolva as inequações trigonométricas:

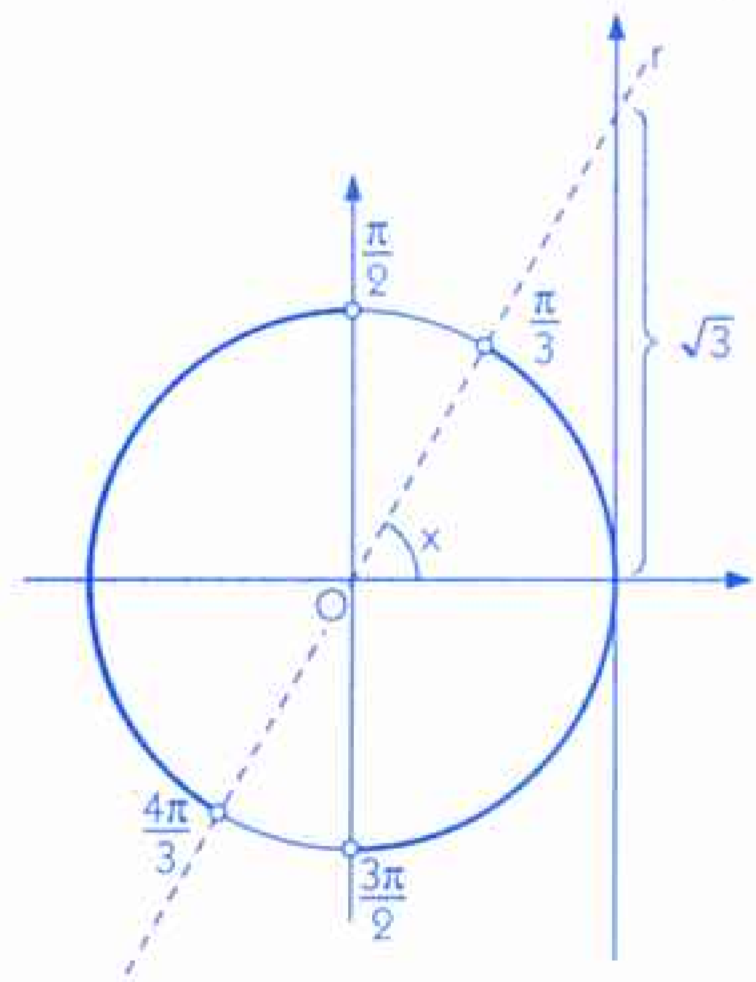
a) $tg\ x > \sqrt{3}$

b) $tg\ x < \sqrt{3}$

a) $tg\ x > \sqrt{3}$

primeira volta: $0 \leq x \leq 2\pi$

$$V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{4\pi}{3} < x < \frac{3\pi}{2}\right\}$$



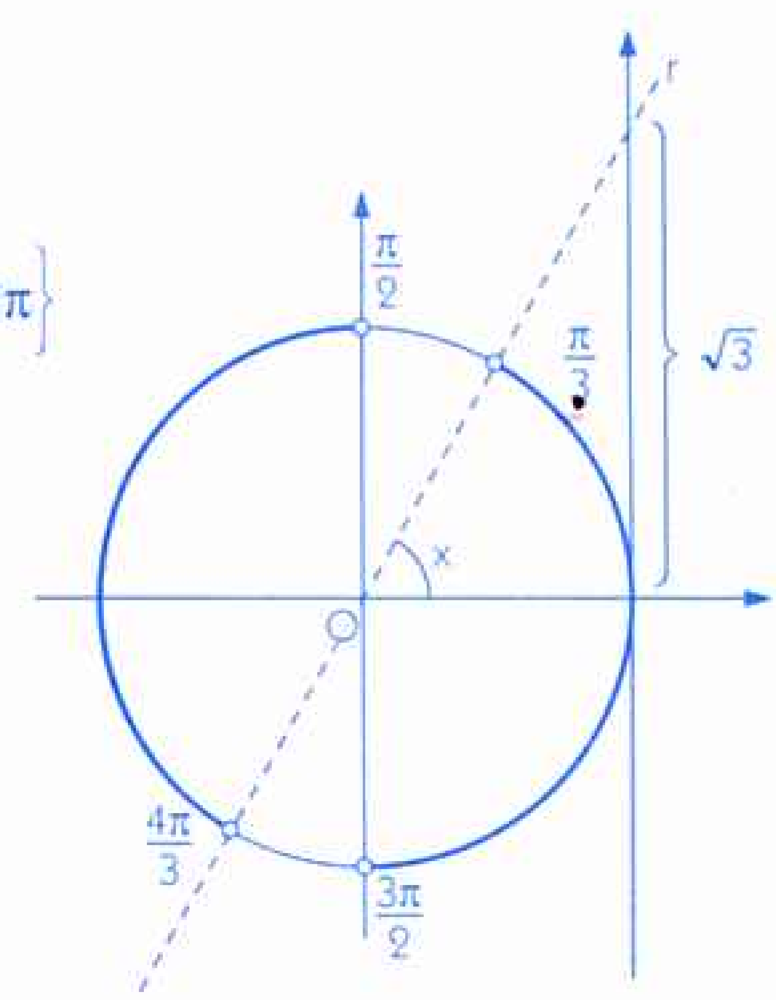
Solução geral

$$V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi < x < \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \text{ ou } \frac{4\pi}{3} + k \cdot 2\pi < x < \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

b) $tg\ x < \sqrt{3}$

primeira volta: $0 \leq x \leq 2\pi$

$$V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{\pi}{2} < x < \frac{4\pi}{3} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x \leq 2\pi\right\}$$



Solução geral

$$V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 + k \cdot 2\pi \leq x < \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \text{ ou } \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi < x < \frac{4\pi}{3} + k \cdot 2\pi \text{ ou } \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi < x < 2\pi + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Proposto

575 Resolva as inequações trigonométricas considerando $0 \leq x \leq 2\pi$.

a) $tg\,x > 1$

b) $tg\,x < 1$

c) $tg\,x > \frac{\sqrt{3}}{3}$

d) $-\sqrt{3} \leq tg\,x < \frac{\sqrt{3}}{3}$

e) $1 < tg\,x \leq \sqrt{3}$

9. Triângulos quaisquer

Para desenvolver o estudo sobre as relações trigonométricas num triângulo qualquer é importante rever como se classificam os triângulos quanto às medidas dos lados e dos ângulos.

Quanto aos lados, o triângulo pode ser:

eqüilátero (se os três lados tiverem medidas iguais)

isósceles (se dois lados tiverem medidas iguais)

escaleno (se os três lados tiverem medidas diferentes)

Quanto aos ângulos, o triângulo pode ser:

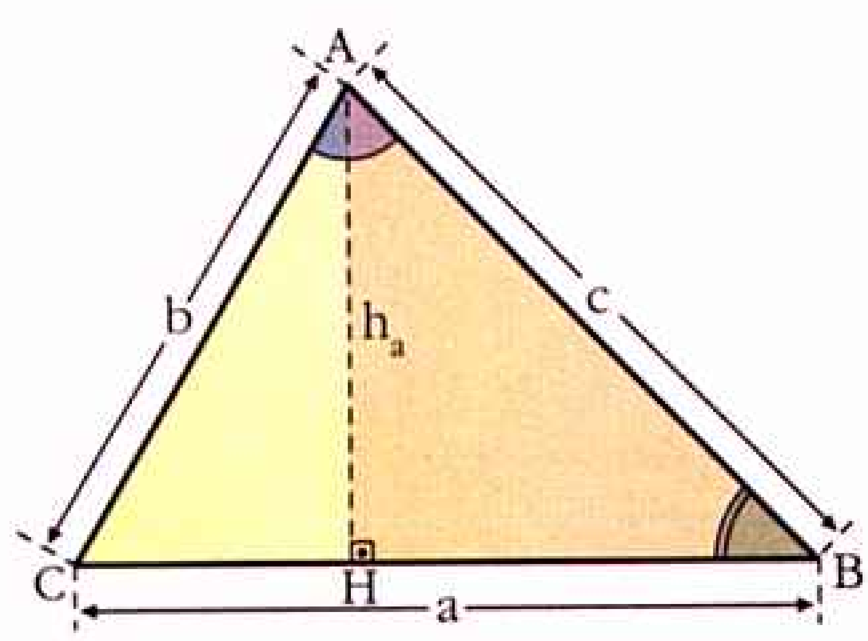
acutângulo (se tiver três ângulos agudos)

retângulo (se tiver um ângulo reto)

obtusângulo (se tiver um ângulo obtuso)

Teorema dos senos

Vamos considerar um triângulo, não retângulo, qualquer, ABC.



$$\frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}} \quad \text{(teorema dos senos)}$$

Exercícios

Resolvidos

1 Determinar a medida dos lados *a* e *b* do triângulo ABC.

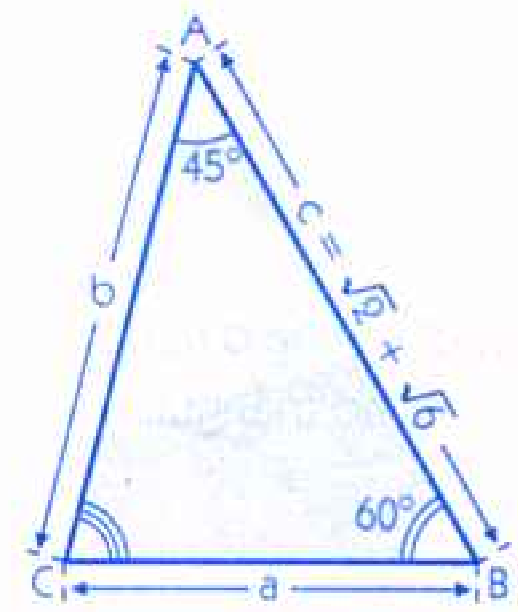
$$\frac{a}{\text{sen } 45^\circ} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}}$$

$$\frac{a}{\text{sen}45^\circ} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{\text{sen}75^\circ} \leftarrow 180^\circ - (60^\circ + 45^\circ) = 75^\circ$$

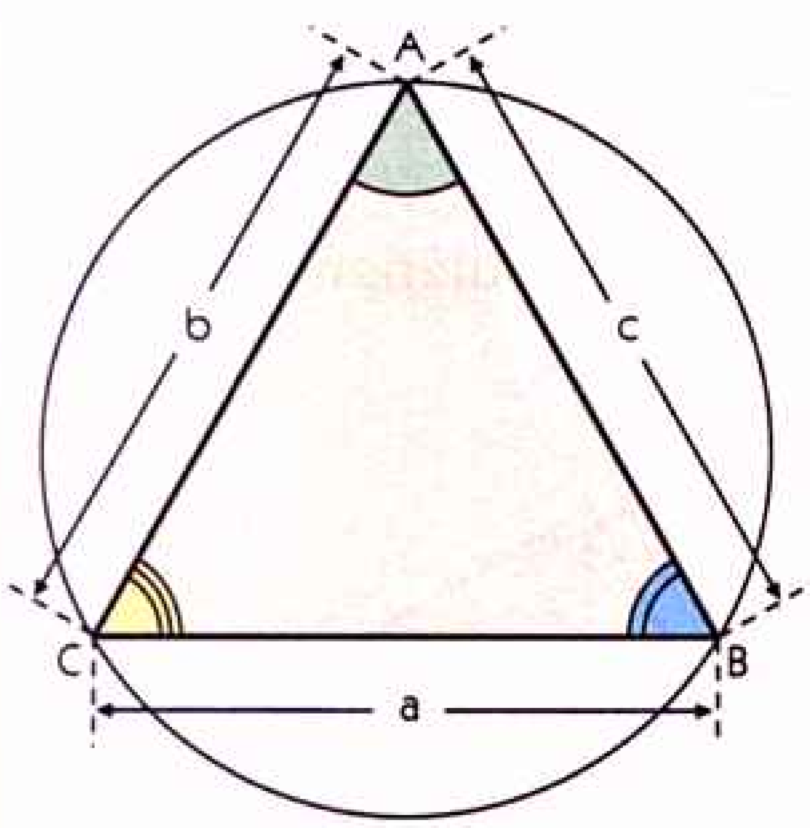
$$\frac{a}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}} \Rightarrow a = 2\sqrt{2}$$

$$\frac{b}{\text{sen}60^\circ} = \frac{c}{\text{sen}75^\circ}$$

$$\frac{b}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}} \Rightarrow b = 2\sqrt{3}$$

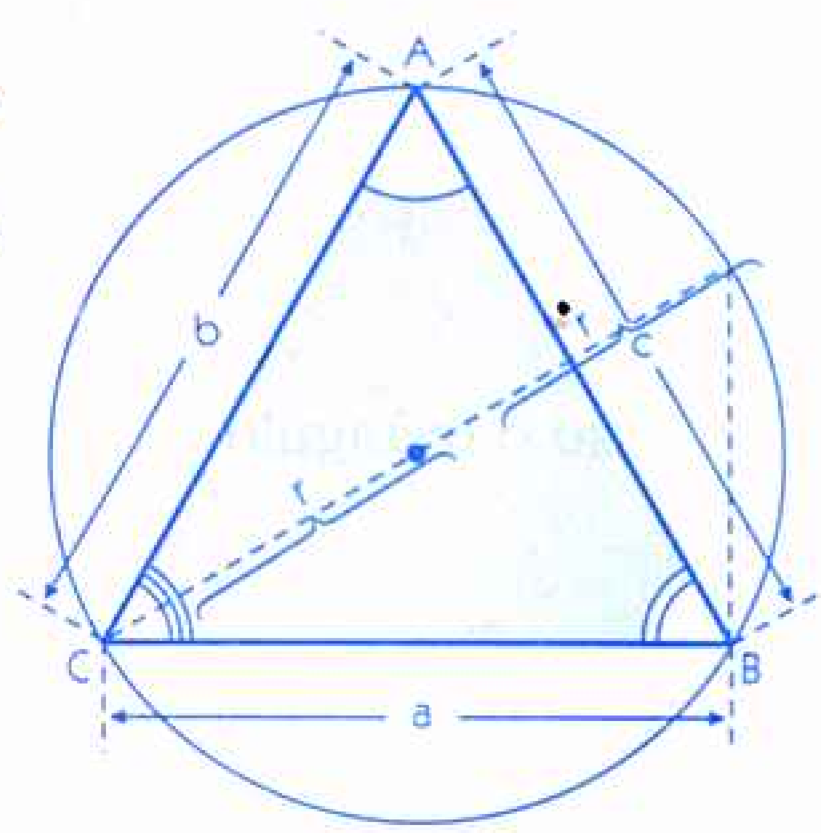


2 Considerar uma circunferência circunscrita a um triângulo qualquer ABC e determinar a medida do diâmetro dela em função das medidas do lado $\overleftrightarrow{BC}$ e do ângulo $\hat{A}$, desse triângulo.



Se considerarmos o triângulo BCD retângulo, (inscrito numa semicircunferência com hipotenusa $\overleftrightarrow{CD}$), teremos:
CD = 2r = medida do diâmetro e $\hat{A}$, $\hat{D}$ (ângulos inscritos) veja:

$$\left.\begin{array}{l} \text{med}(\hat{A}) = \dfrac{\text{med}(\overset{\frown}{CB})}{2} \\ \text{med}(\hat{D}) = \dfrac{\text{med}(\overset{\frown}{CB})}{2} \end{array}\right\} \text{med}(\hat{A}) = \text{med}(\hat{D})$$



Portanto, no triângulo BCD:

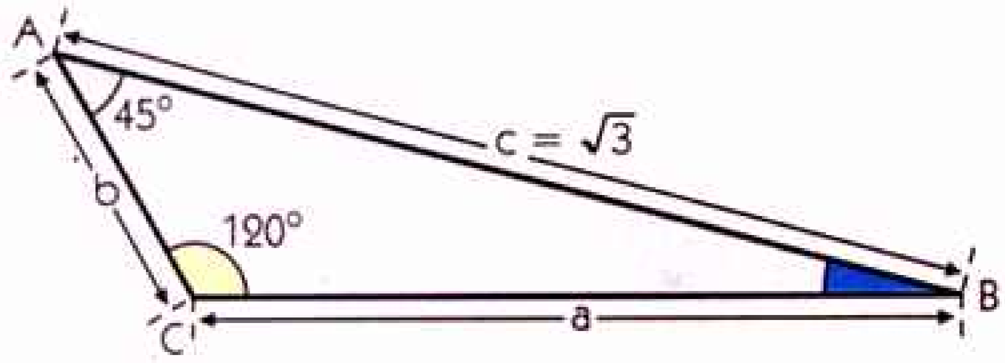
$$\text{sen } D = \frac{a}{2r} \Rightarrow 2r = \frac{a}{\text{sen } \hat{D}} = \frac{a}{\text{sen } \hat{A}}$$

Observe que de forma análoga poderemos demonstrar que o diâmetro também pode ser determinado em função dos outros lados e ângulos:

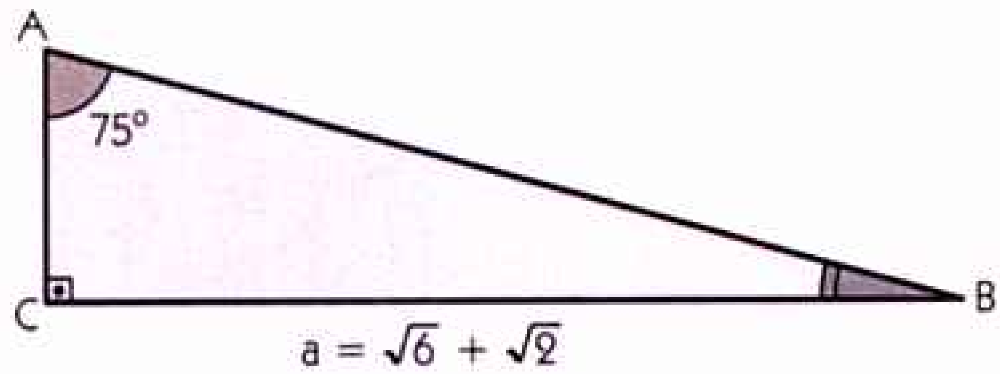
$$2r = \frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}}$$

Propostos

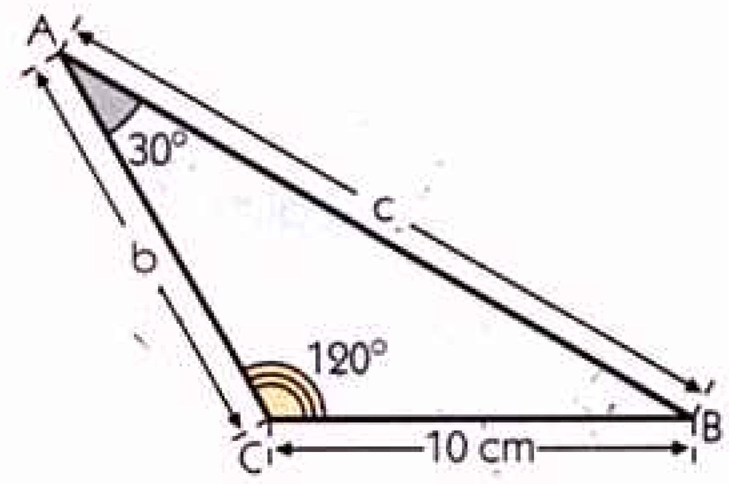
576 Determine os lados *a* e *b* do triângulo ABC.



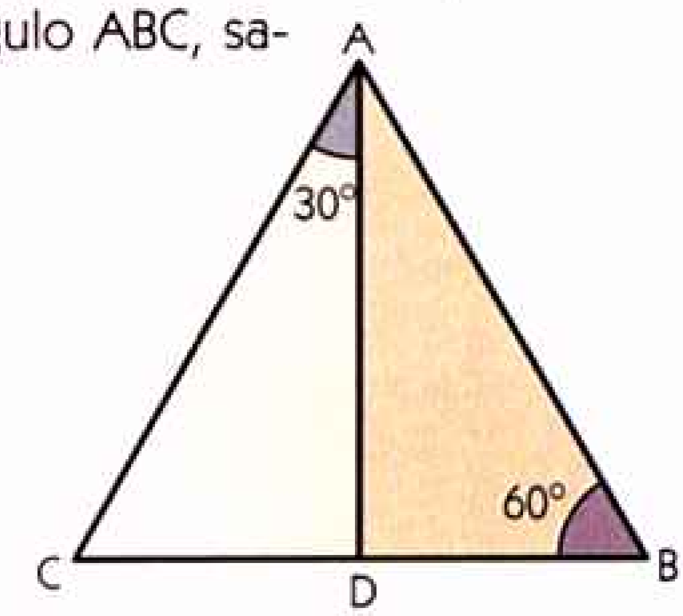
577 Determine o raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC.



578 Determine o perímetro do triângulo ABC.



579 Considere a figura e determine o perímetro do triângulo ABC, sabendo que:
$CD = 6$ m e
$AC = 12$ m.

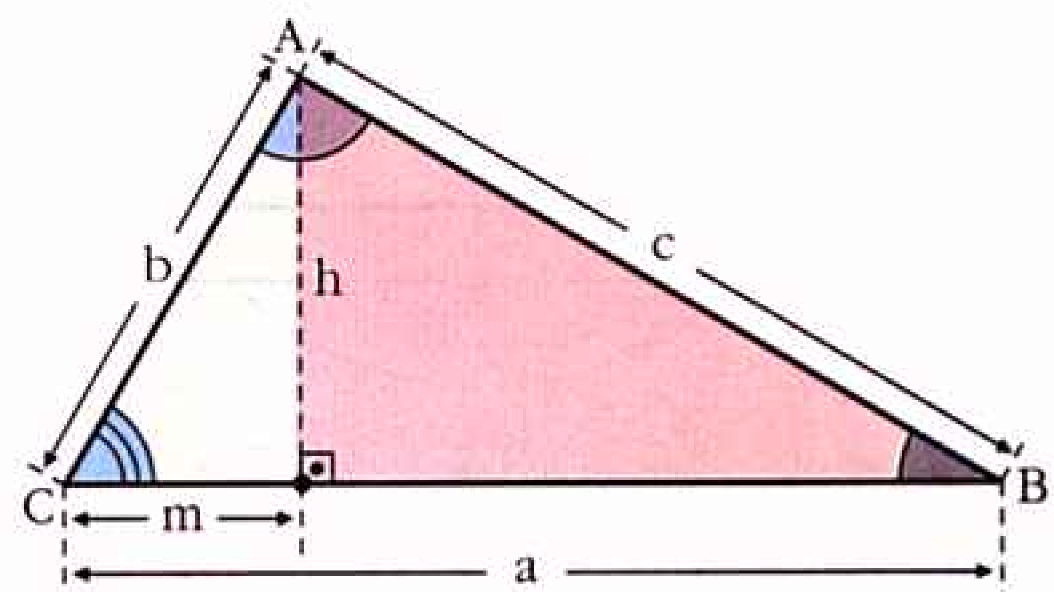


Teorema dos cossenos

Vamos considerar $\hat{C}$ como o maior ângulo do triângulo acutângulo ABC ($\hat{C} < 90°$).

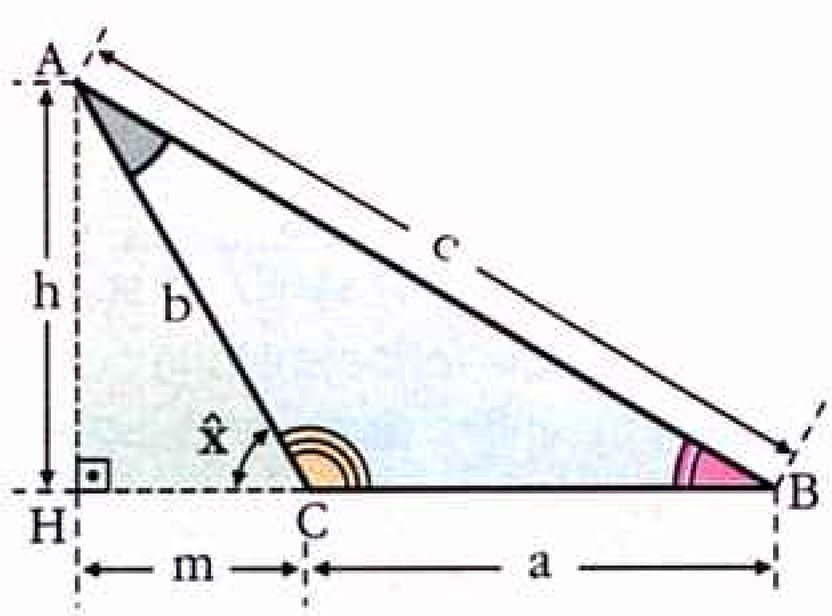
$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \hat{C}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A} \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \hat{B} \end{aligned}}$$



Caso o triângulo ABC seja obtusângulo ($\hat{C} > 90°$), temos:

$$\boxed{c^2 = b^2 + a^2 - 2ab \cdot \cos \hat{C}}$$

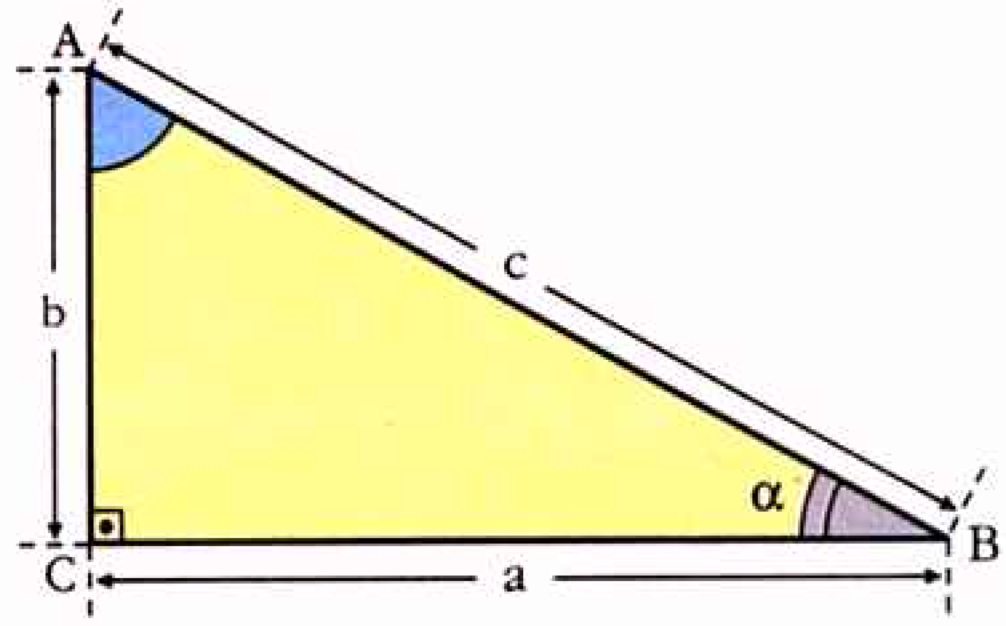


Podemos concluir que o teorema dos cossenos também se aplica ao triângulo obtusângulo.

Caso o triângulo ABC seja retângulo ($C = 90°$), temos:

$c^2 = b^2 + a^2 - 2ab \cdot \cos 90°$

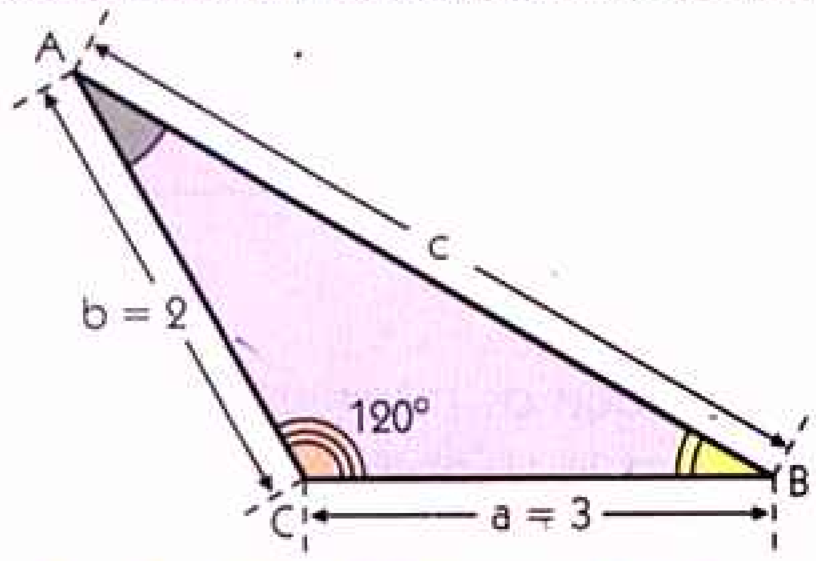
$c^2 = b^2 + a^2$



Exercícios

Resolvidos

1 Determinar a medida do lado *c* do triângulo ABC.



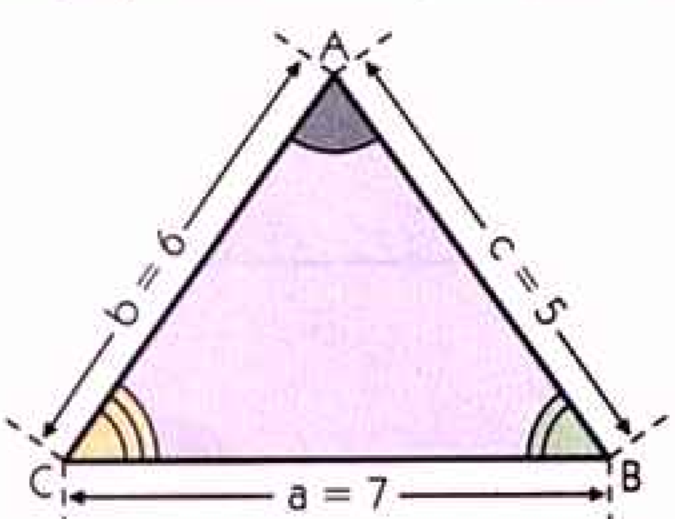
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos 120°$

$c^2 = 3^2 + 2^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$

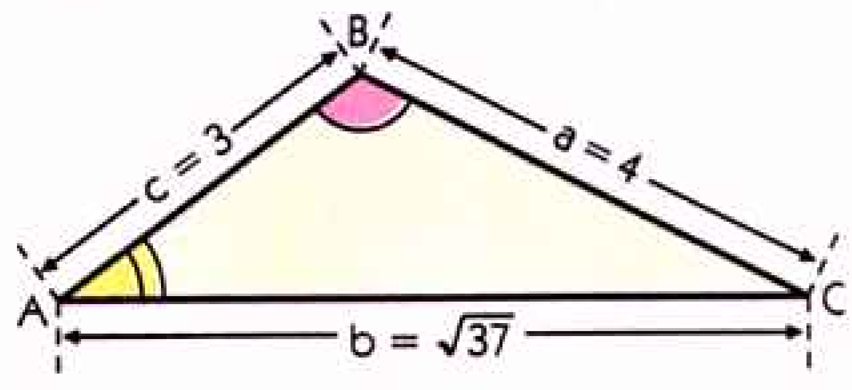
$c^2 = 13 + 6 \Rightarrow c = \sqrt{19}$

2 Classificar, quanto aos ângulos, cada um dos triângulos:

a)



b)



a) $\hat{A}$ é o maior ângulo interno, pois é oposto ao maior dos lados. Aplicando o teorema dos cossenos para $\hat{A}$, temos:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$

$7^2 = 6^2 + 5^2 - 2 \cdot 6 \cdot 5 \cos \hat{A} \Rightarrow \cos \hat{A} = \frac{6^2 + 5^2 - 7^2}{2 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{1}{5}$

$\cos \hat{A} > 0 \Rightarrow \hat{A}$ é um ângulo agudo e é o maior dos ângulos, logo o triângulo ABC é um triângulo acutângulo.

b) Agora, o maior ângulo interno é $\hat{B}$, pois $b = \sqrt{37}$ é a maior medida.

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B}$

$(\sqrt{37})^2 = 4^2 + 3^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos \hat{B} \Rightarrow \cos \hat{B} = \frac{4^2 + 3^2 - (\sqrt{37})^2}{2 \cdot 4 \cdot 3} = -\frac{1}{2}$

$\cos \hat{B} < 0 \Rightarrow \hat{B}$ é um ângulo obtuso, logo o triângulo ABC é um triângulo obtusângulo.
Generalizando, se $\hat{A}$ é o maior ângulo interno de um triângulo ABC:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A} \Leftrightarrow \cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

O sinal do $\cos \hat{A}$ é o sinal de $(b^2 + c^2 - a^2)$, então:

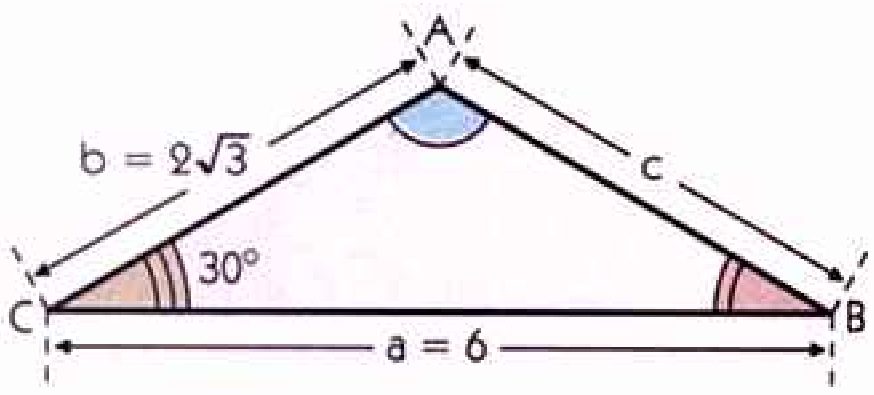
$\cos \hat{A} > 0 \Leftrightarrow b^2 + c^2 - a^2 > 0$ ou $a^2 < b^2 + c^2 \Leftrightarrow \Delta ABC$ é acutângulo

$\cos \hat{A} < 0 \Leftrightarrow b^2 + c^2 - a^2 < 0$ ou $a^2 > b^2 + c^2 \Leftrightarrow \Delta ABC$ é obtusângulo

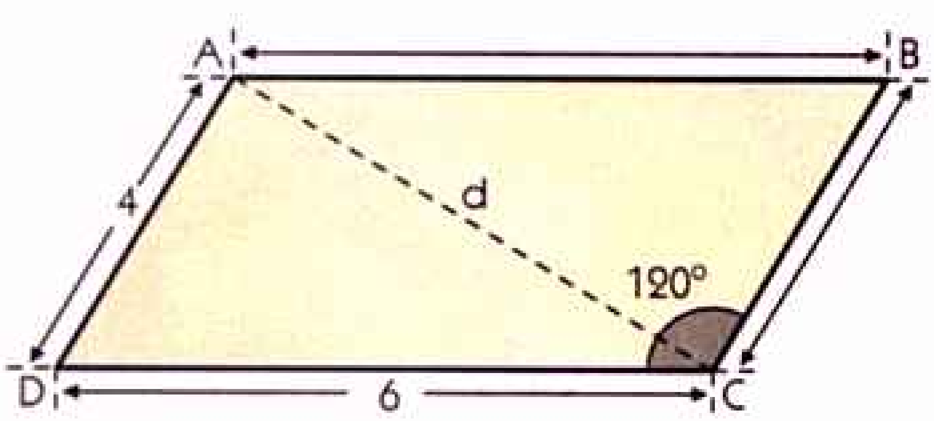
$\cos \hat{A} = 0 \Leftrightarrow b^2 + c^2 - a^2 = 0$ ou $a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow \Delta ABC$ é retângulo

Propostos

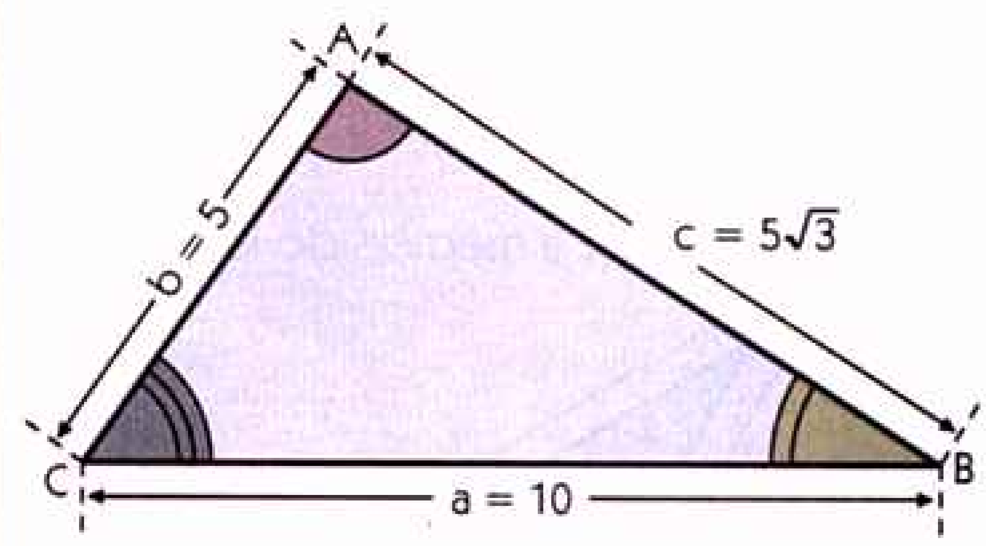
580 Considere o triângulo ABC e determine o lado *c*.



581 Determine a medida da diagonal menor do paralelogramo ABCD.



582 Determine o ângulo $\hat{C}$ do triângulo ABC.

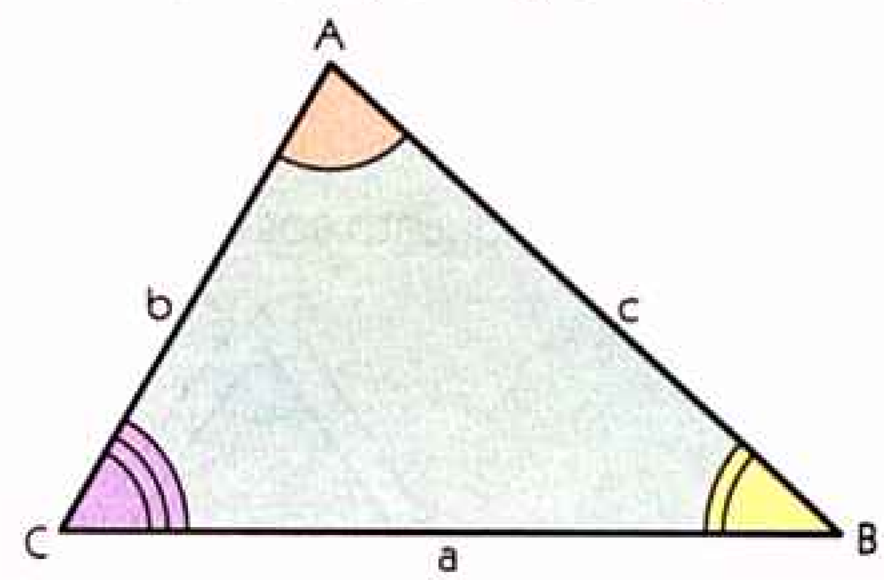


583 Identifique os triângulos como retângulo, acutângulo ou obtusângulo, em cada item.

a) lados $a = 5$; $b = 6$; $c = \sqrt{31}$

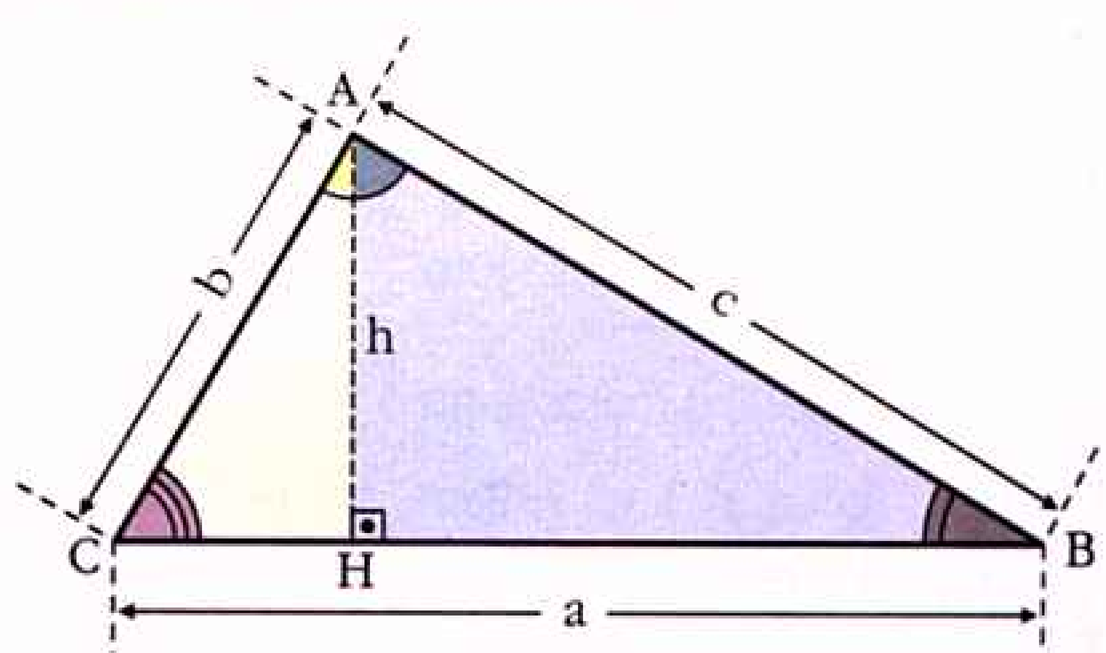
b) lados $a = 10$; $b = 5\sqrt{3}$, $c = 5$

c) lados $a = 5\sqrt{7}$; $b = 5$; $c = 10$



Teorema da área

A área de qualquer triângulo ABC pode ser assim determinada:



Sabemos que área $= \dfrac{1}{2} a \cdot h$ (I)

Considerando o triângulo AHC, temos:

$\text{sen}\, \hat{C} = \dfrac{h}{b} \Rightarrow h = b \cdot \text{sen}\, \hat{C}$ (II)

Das relações (I) e (II), temos o teorema da área:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \text{sen } \hat{C}$$

De forma análoga, podemos dizer de um triângulo de lados a, b e c que:

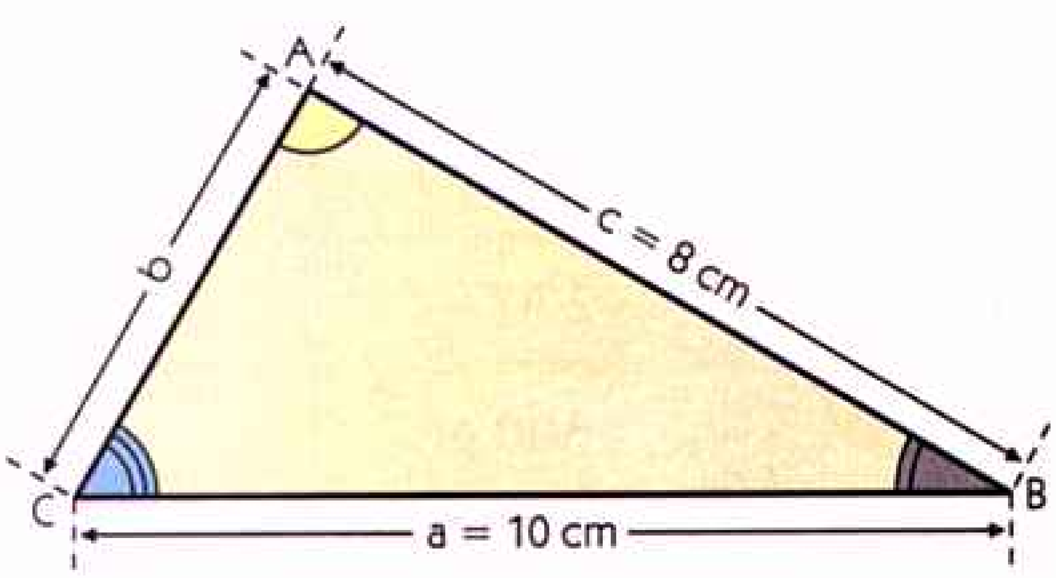
$$\text{Área} = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \text{sen } \hat{A}$$
$$\text{Área} = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \text{sen } \hat{B}$$

Embora a demonstração tenha sido feita num triângulo acutângulo, ela também pode ser verificada nos triângulos obtusângulo e retângulo.

Exercícios

Resolvido

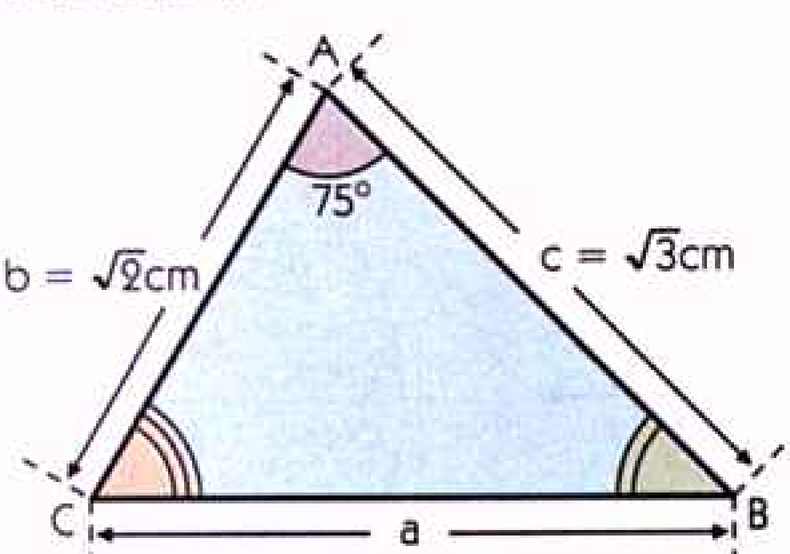
Determinar a área do triângulo ABC.



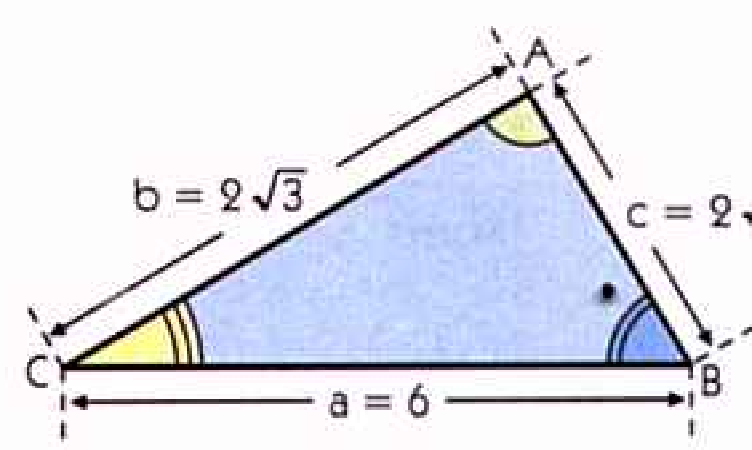
$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \text{sen } \hat{B}$$
$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 8 \cdot \text{sen } 30°$$
$$\text{Área} = 40 \cdot \frac{1}{2} = 20 \text{ cm}^2$$

Propostos

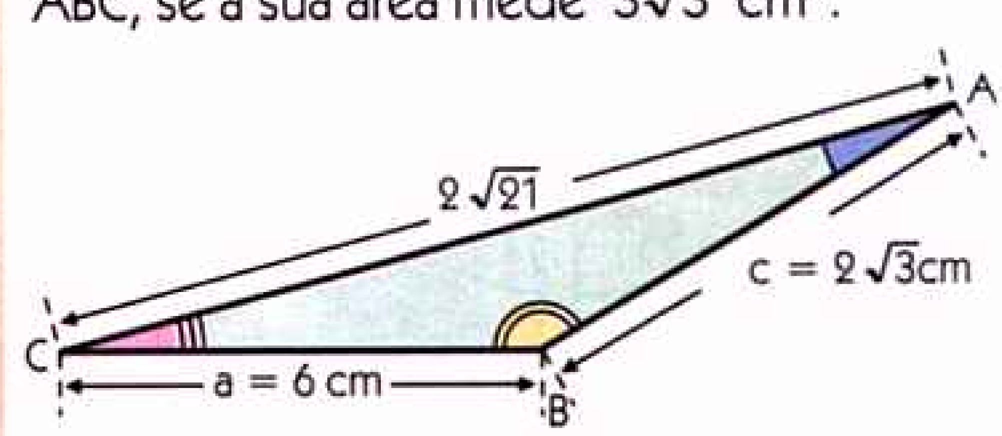
584 Determine a área do triângulo ABC e a medida do lado a.



585 Calcule a medida do ângulo $\hat{C}$ no triângulo ABC, cuja área vale $3\sqrt{3}$ cm². Compare os exercícios 123 e 124.



586 Calcule a medida do ângulo $\hat{B}$ no triângulo ABC, se a sua área mede $3\sqrt{3}$ cm².



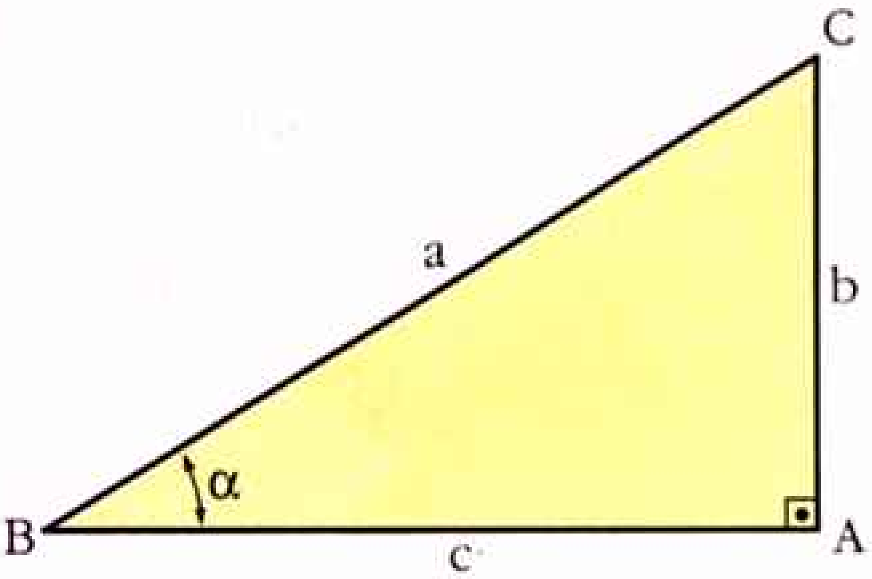
Ficha-resumo

Razões trigonométricas

$$\text{seno} = \frac{\text{medida do cateto oposto}}{\text{medida da hipotenusa}}$$

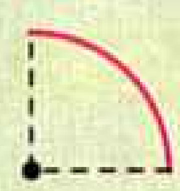
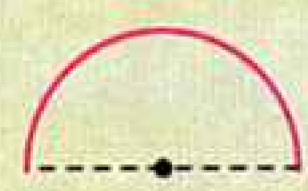
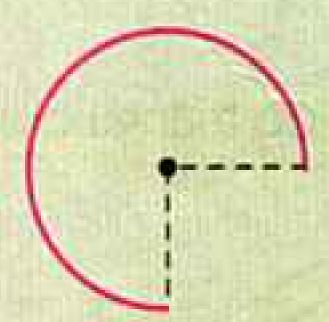
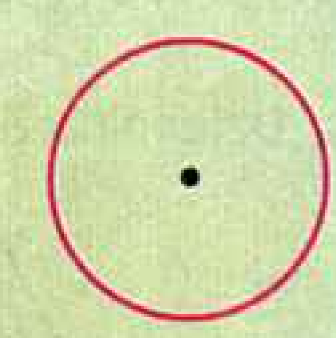
$$\text{cosseno} = \frac{\text{medida do cateto adjacente}}{\text{medida da hipotenusa}}$$

$$\text{tangente} = \frac{\text{medida do cateto oposto}}{\text{medida do cateto adjacente}}$$



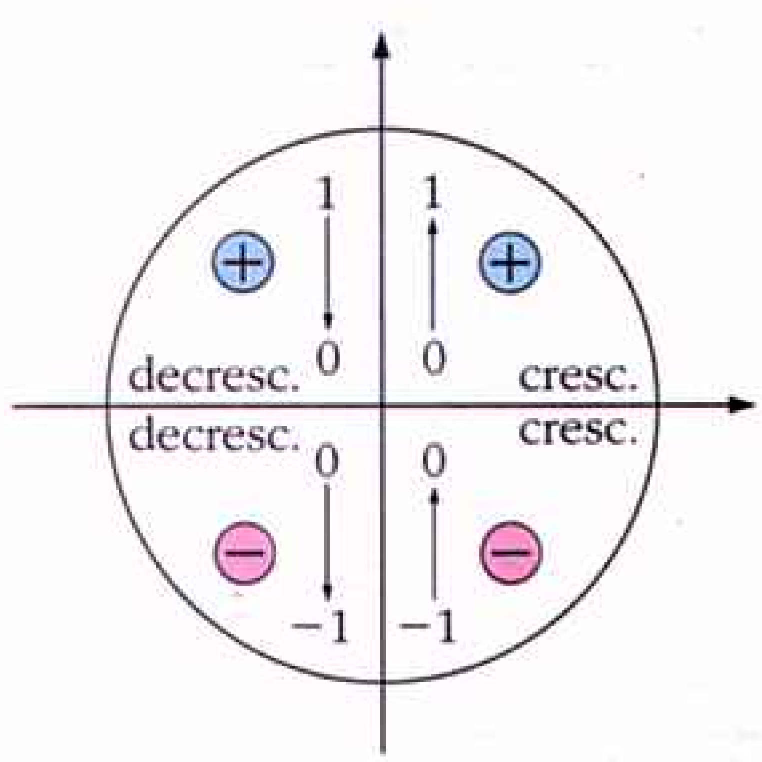
$\boxed{\operatorname{sen}\alpha = \frac{b}{a}}$ $\boxed{\cos\alpha = \frac{c}{a}}$ $\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}}$

Relações entre as unidades

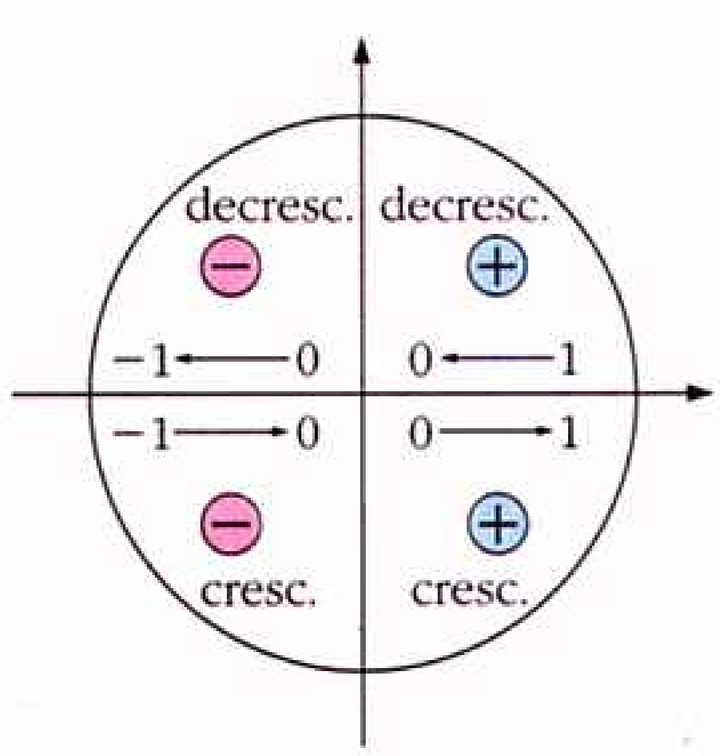
Arco				
grau	90°	180°	270°	360°
grado	100 gr	200 gr	300 gr	400 gr
radiano	$\frac{\pi}{2}$ rad	π rad	$\frac{3\pi}{2}$ rad	2π rad

Variação das funções

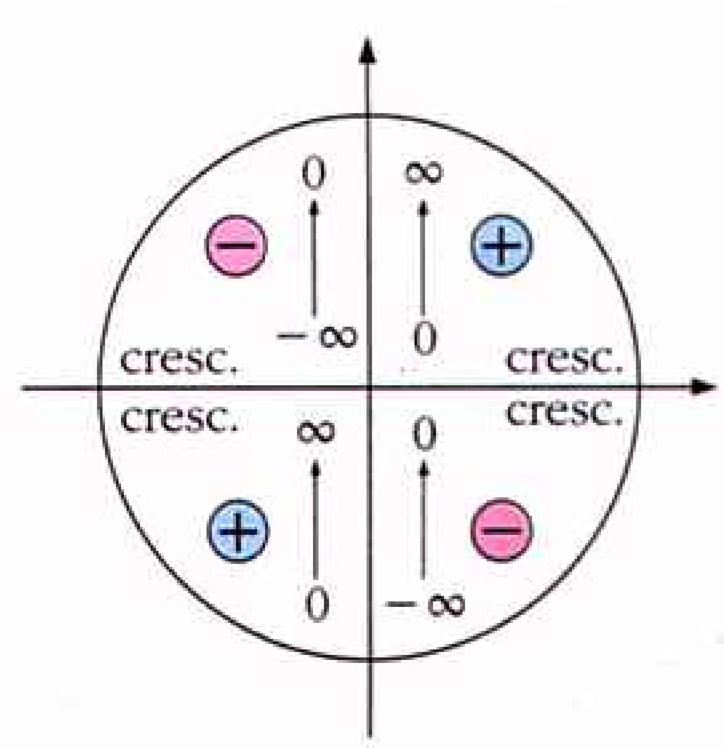
seno



cosseno



tangente



Relações fundamentais

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\text{tg}\, x = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x}$$

$$\text{cotg}\, x = \frac{\cos x}{\text{sen}\, x} = \frac{1}{\text{tg}\, x}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\text{cossec}\, x = \frac{1}{\text{sen}\, x}$$

Relações derivadas

$$\sec^2 x = 1 + \text{tg}^2 x$$

$$\text{cossec}^2 x = 1 + \text{cotg}^2 x$$

	0 (0°)	$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\pi}{3}$ (60°)	$\frac{\pi}{2}$ (90°)	π (180°)	$\frac{3\pi}{2}$ (270°)	2π (360°)
sen x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tg x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	não se define	0	não se define	0
cotg x	não se define	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	não se define	0	não se define
sec x	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	não se define	-1	não se define	1
cossec x	não se define	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1	não se define	-1	não se define

Adição e subtração de arcos

$$\text{sen}\,(a + b) = \text{sen}\, a \cdot \cos b + \text{sen}\, b \cdot \cos a$$

$$\text{sen}\,(a - b) = \text{sen}\, a \cdot \cos b - \text{sen}\, b \cdot \cos a$$

$$\cos (a + b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen}\, a \cdot \text{sen}\, b$$

$$\cos (a - b) = \cos a \cdot \cos b + \text{sen}\, a \cdot \text{sen}\, b$$

$$\text{tg}\,(a + b) = \frac{\text{tg}\, a + \text{tg}\, b}{1 - \text{tg}\, a \cdot \text{tg}\, b}$$

$$\text{tg}\,(a - b) = \frac{\text{tg}\, a - \text{tg}\, b}{1 + \text{tg}\, a \cdot \text{tg}\, b}$$

Conseqüências das fórmulas de adição

$$\text{sen}\, 2a = 2 \cdot \text{sen}\, a \cdot \cos a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \text{sen}^2\, a$$

$$\text{tg}\, 2a = \frac{2 \cdot \text{tg}\, a}{1 - \text{tg}^2\, a}$$

Fórmulas de transformação em produtos

$$\text{sen}\, p + \text{sen}\, q = 2 \cdot \text{sen}\, \frac{p + q}{2} \cdot \cos \frac{p - q}{2}$$

$$\text{sen}\, p - \text{sen}\, q = 2 \cdot \text{sen}\, \frac{p - q}{2} \cdot \cos \frac{p + q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cdot \cos \frac{p + q}{2} \cdot \cos \frac{p - q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2 \cdot \text{sen}\, \frac{p + q}{2} \cdot \text{sen}\, \frac{p - q}{2}$$

Teorema dos senos

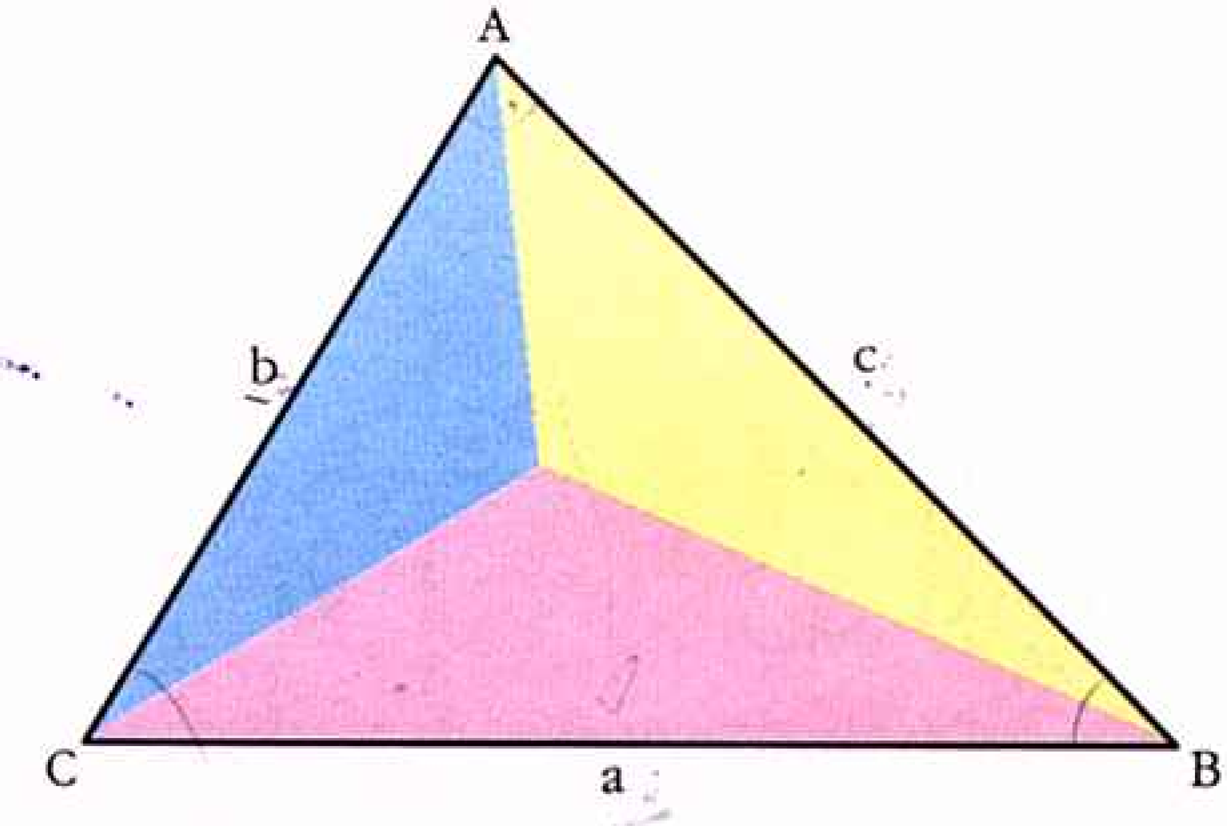
$$\frac{a}{\text{sen}\, \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\, \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\, \hat{C}}$$

Teorema dos cossenos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \hat{C}$$

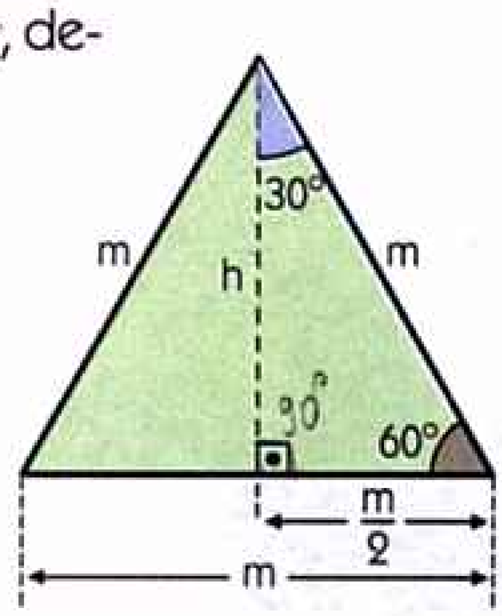


Exercícios

Complementares

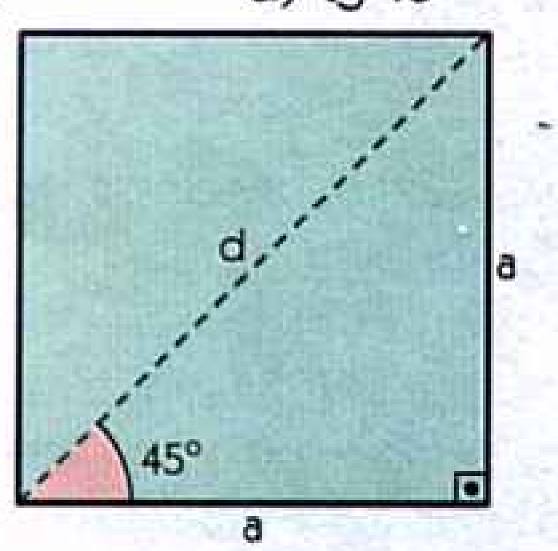
587 Considerando o triângulo eqüilátero de lado m, determine:

a) a altura h
b) sen 30°
c) cos 30°
d) tg 30°
e) sen 60°
f) cos 60°
g) tg 60°



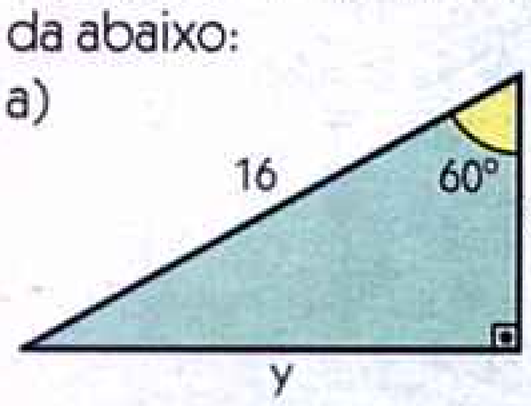
588 Dado o quadrado de lado a, calcule:

a) a diagonal d
b) sen 45°
c) cos 45°
d) tg 45°

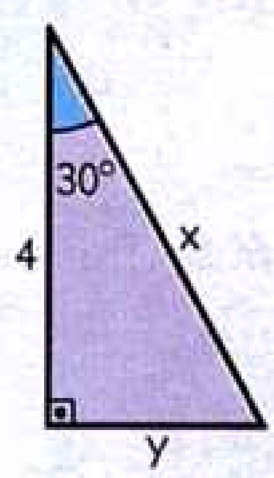


589 Determine x e y em cada figura representada abaixo:

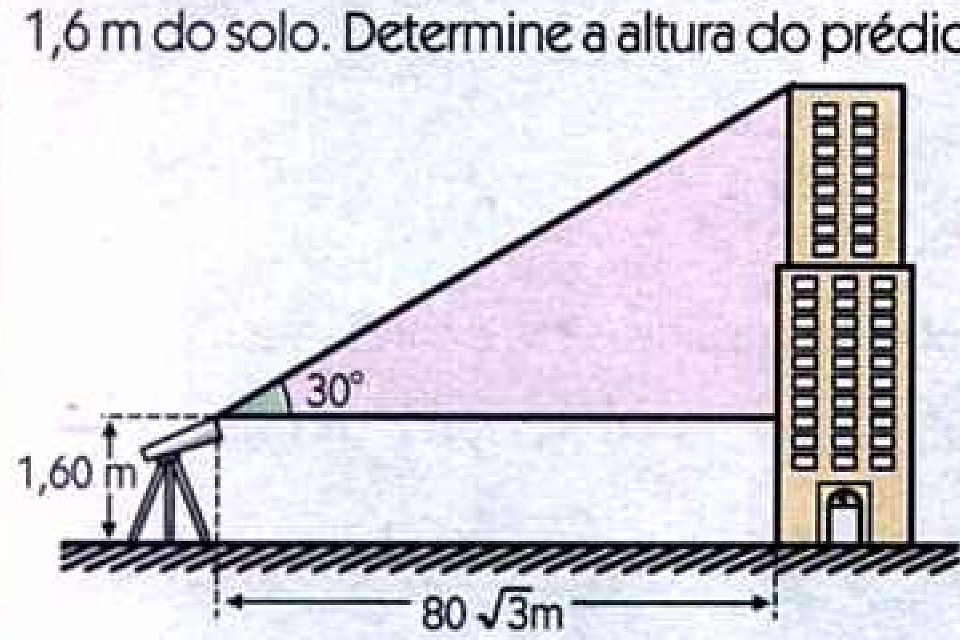
a)



b)



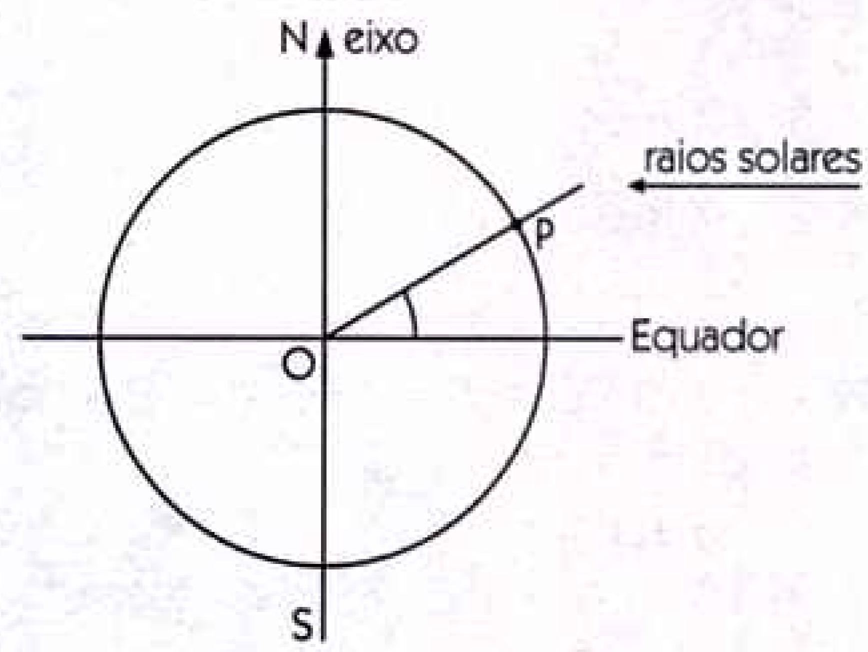
590 Uma pessoa está a $80\sqrt{3}$ m de um prédio e vê o topo do prédio sob um ângulo de 30°. O aparelho que mede o ângulo está a 1,6 m do solo. Determine a altura do prédio.



591 (Vunesp) Uma rampa lisa de 20 m de comprimento faz ângulo de 30° com o plano horizontal. Uma pessoa que sobe essa rampa inteira eleva-se verticalmente de:

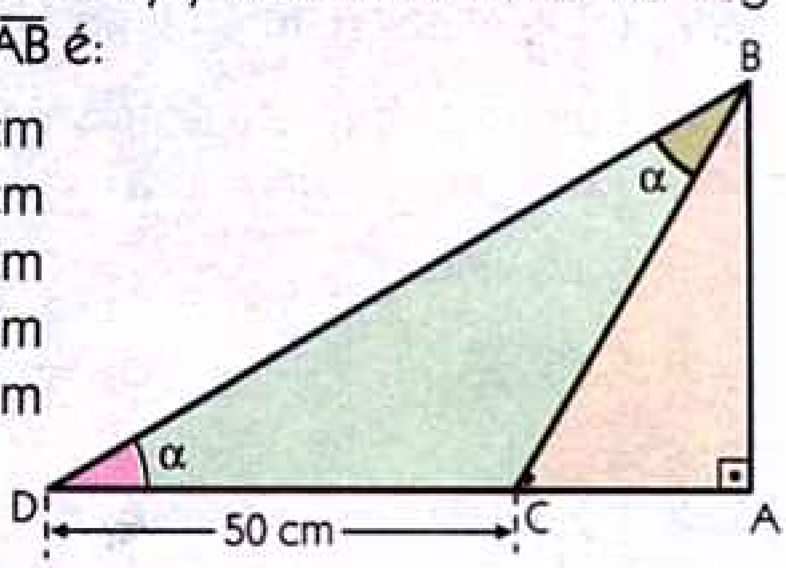
a) 17 m
b) 10 m
c) 15 m
d) 5 m
e) 8 m

592 (Fuvest-SP) A Latitude de um ponto P da superfície da Terra é o ângulo que a reta OP forma com o plano do Equador (O é o centro da Terra). No dia 21 de março os raios solares são paralelos ao plano do Equador. Calcule o comprimento da sombra projetada, no dia 21 de março ao meio-dia, por um prédio de 30 metros de altura, localizado a 30° de Latitude.



593 (Fatec-SP) Na figura abaixo o ângulo Â é reto. Se sen α = 0,6, então a medida do segmento $\overline{AB}$ é:

a) 30 cm
b) 25 cm
c) 48 cm
d) 40 cm
e) 45 cm



594 Localize os quadrantes em que situam-se as extremidades dos seguintes arcos:

a) 38°
b) 147°
c) 1 950°
d) −131°
e) $\frac{12}{5}$ rad
f) $-\frac{2\pi}{3}$ rad
g) $\frac{13\pi}{4}$ rad
h) $\frac{11\pi}{3}$ rad

595 (FECAP-SP) O valor de

$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ é:

a) $\sqrt{2}$

b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

d) $2\sqrt{2}$

e) n.d.a.

596 (Fuvest-SP) Quantos graus mede aproximadamente um ângulo de 0,105 radianos?

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

597 (USJT-SP) Sendo $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e *x* um arco do 2º quadrante, então

$\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ vale:

a) 0,25

b) 0,75

c) 0,5

d) 1

e) n.d.a.

598 Sendo $\cos x = -\frac{5}{13}$ e $x \in$ 2º quadrante, determine:

a) sen x

b) tg x

c) cotg x

d) sec x

e) cossec x

599 (FEP-PA) No círculo trigonométrico um ângulo é tal que seu seno vale $\frac{3}{5}$ e encontra-se no 2º quadrante. A tangente desse ângulo vale:

a) $-\frac{3}{4}$

b) $-\frac{4}{3}$

c) -1

d) $\frac{3}{4}$

e) $\frac{4}{3}$

600 (Fuvest-SP) Se $\operatorname{tg} x = \frac{3}{4}$ e $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, o valor de cos x − sen x é:

a) $\frac{7}{5}$

b) $-\frac{7}{5}$

c) $-\frac{2}{5}$

d) $\frac{1}{5}$

e) $-\frac{1}{5}$

601 (Fatec-SP) Se $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $x = \operatorname{tg} t$ e $y = \operatorname{cossec} t$, então:

a) $y = \sqrt{x + \frac{1}{x}}$

b) $y = x \cdot \sqrt{x^2 + 1}$

c) $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

d) $y = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x^2}$

e) $y = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$

602 (UFMS) Dado $\cos x = \frac{4}{5}$ e $0 < x < \frac{\pi}{2}$ calcular o valor de $y = 12\left(\frac{\sec x - \operatorname{cossec} x}{1 - \operatorname{cotg} x}\right)$.

603 (FGV-SP) Sabendo-se que sen x = 0,6, podemos afirmar que:

a) sen 2x = 1,2

b) |sen 2x| = 0,96

c) sen 2x = 0,48 ou sen 2x = −0,48

d) cos 2x = −0,28

e) cos 2x = 0,96 ou cos 2x = −0,96

604 (PUC-SP) O valor de $\sec(10\pi)$ é:

a) −2 b) −1 c) 0 d) 1 e) 2

605 Dados, $\operatorname{sen} x = \sqrt{m}$ e $\cos x = \sqrt{m + 1}$, calcule o valor de *m*.

606 (FCC-BA) As sentenças sen x = a e $\cos x = 2\sqrt{a} - 1$ são verdadeiras para todo *x* real se, e somente se:

a) a = 5 ou a = −1

b) a = −5 ou a = −1

c) $a \neq 5$ e $a \neq -1$

d) a = 1

e) a = −5

607 Simplifique as expressões:

a) $y = \frac{\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{cossec} x - 1}{\operatorname{tg} x}$

b) $y = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x}{\sec x}$

608 (PUC-SP) $\dfrac{1}{1+\text{sen}^2 x} + \dfrac{1}{1+\cos^2 x} + \dfrac{1}{1+\sec^2 x} + \dfrac{1}{1+\text{cossec}^2 x}$ é igual a:

a) 0 b) 1 c) 3 d) 4 e) 2

609 (Vunesp) A expressão $\dfrac{\cos^2\theta}{1-\text{sen}\,\theta}$, com $\text{sen}\,\theta \neq 1$, é igual a:

a) $\text{sen}\,\theta$
b) $\text{sen}\,\theta + 1$
c) $\text{tg}\,\theta \cdot \cos\theta$
d) 1
e) $\dfrac{\text{sen}\,\theta}{\sec\theta}$

610 (UCMG) A expressão $\dfrac{2\,\text{tg}\,x}{1+\text{tg}^2 x}$ é idêntica a:

a) tg 2x
b) cos 2x
c) 2 sen x
d) sen 2x
e) cos x · sen x

611 (Fuvest-SP) Quais são as raízes da equação do 2º grau $x^2\,\text{sen}\,\alpha - 2x\cos\alpha - \text{sen}\,\alpha = 0$, onde $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$?

a) $2\dfrac{\cos\alpha+1}{\text{sen}\,\alpha}$ e $2\dfrac{\cos\alpha-1}{\text{sen}\,\alpha}$

b) $\dfrac{\cos\alpha+1}{\text{sen}\,\alpha}$ e $\dfrac{\cos\alpha-1}{\text{sen}\,\alpha}$

c) $\cos\alpha + 1$ e $\cos\alpha - 1$

d) $\dfrac{\text{sen}\,\alpha+1}{\cos\alpha}$ e $\dfrac{\text{sen}\,\alpha-1}{\cos\alpha}$

e) $\dfrac{\text{sen}\,\alpha+1}{2}$ e $\dfrac{\text{sen}\,\alpha-1}{2}$

612 Calcule o valor da expressão $\dfrac{\sec x - \text{cossec}\,x}{1-\text{cotg}\,x}$, para $x = \dfrac{7\pi}{4}$.

613 (Santa Casa-SP) Seja a função *f*, definida por $f(x) = \text{sen}\,x + \cos x + \text{cotg}\,x + \text{cossec}\,x - \text{tg}\,x - \sec x$, $\forall x \neq \dfrac{k\pi}{2}$ e $k \in \mathbb{Z}$. O valor de $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ é:

a) $\dfrac{\sqrt{3}+3}{2}$
b) $\dfrac{\sqrt{3}-3}{2}$
c) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
d) $\sqrt{3}+1$
e) $\sqrt{3}-3$

614 (Fatec-SP) Seja $x \in \mathbb{R}$. Assinale a alternativa falsa.

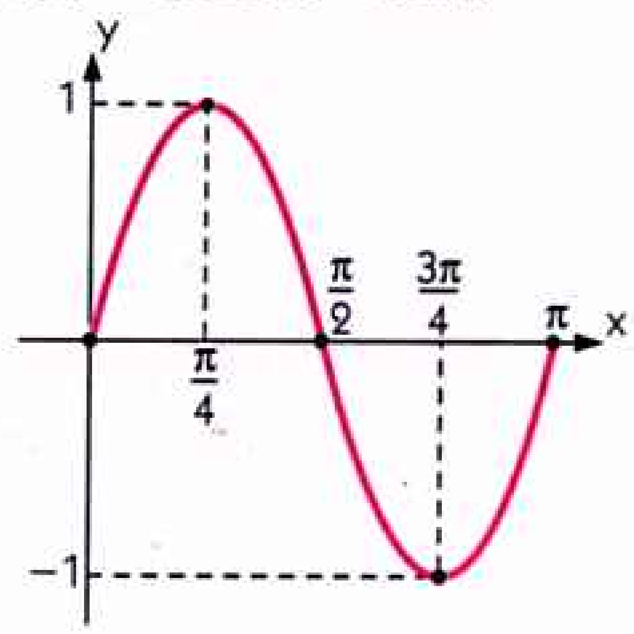
a) $\text{tg}(x-\pi) = \text{tg}\,x$, para $x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$
b) $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right) = -\text{sen}\,x$
c) $\text{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos x$
d) $\cos(\pi - x) = -\cos x$
e) $\text{sen}(x-\pi) = -\text{sen}\,x$

615 (PUC-RS) Se $x \in \left]\dfrac{3\pi}{2}; 2\pi\right[$ e $\text{sen}\,x = 3n - 1$, então *n* varia no intervalo:

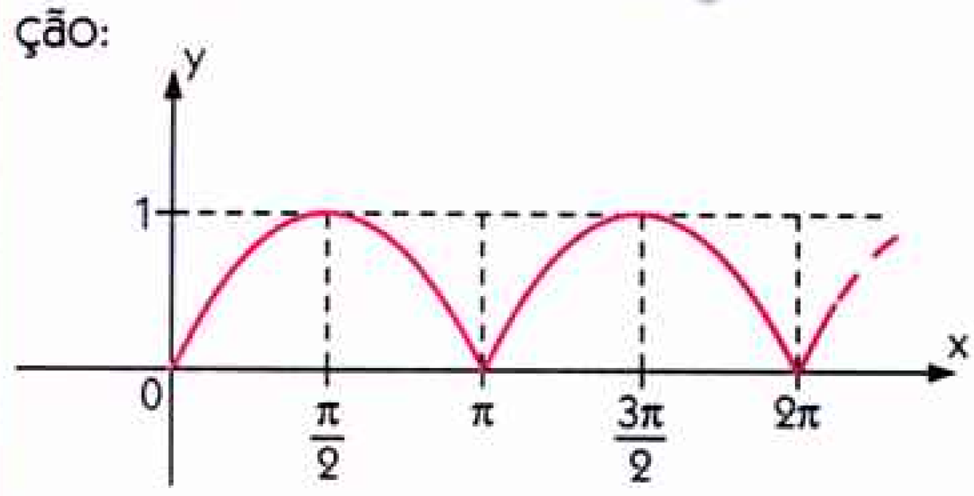
a) $\left]-\dfrac{1}{3}; 1\right[$
b) $]-1; 1[$
c) $]-1; 0[$
d) $]0; 1[$
e) $\left]0; \dfrac{1}{3}\right[$

616 (UFGO) O gráfico abaixo representa a função:

a) $f(x) = \text{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right)$
b) $f(x) = \text{sen}\,x$
c) $f(x) = \text{sen}\,x \cdot \cos x$
d) $f(x) = \cos 2x$
e) $f(x) = 2\,\text{sen}\,x \cdot \cos x$



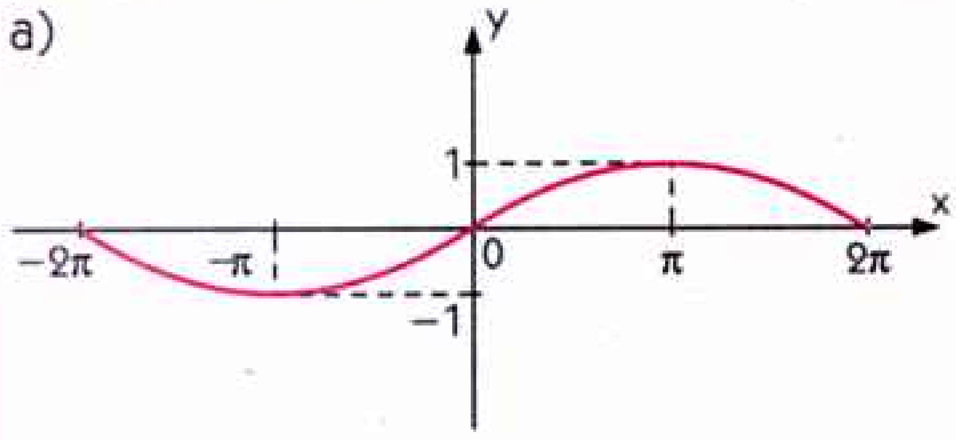
617 (FGV-SP) O gráfico abaixo representa a função:



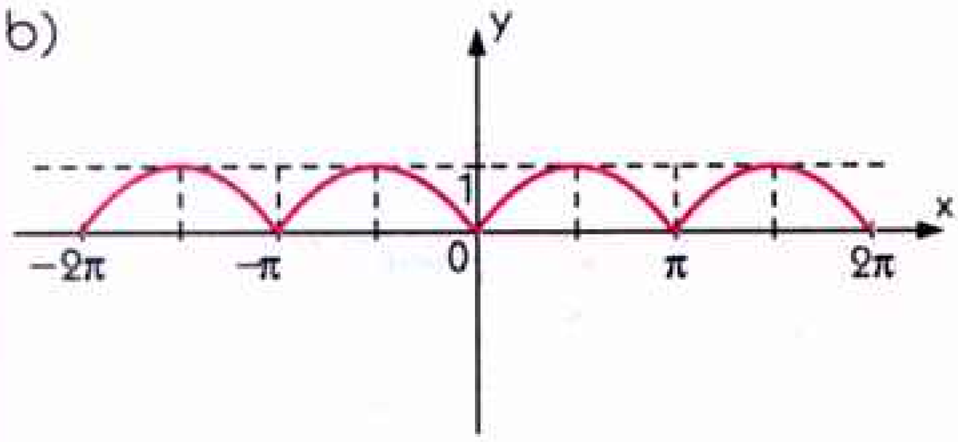
a) $y = |\text{tg}\,x|$
b) $y = |\text{sen}\,x|$
c) $y = |\text{sen}\,x| + |\cos x|$
d) $y = \text{sen}\,2x$
e) $y = 2\,\text{sen}\,x$

618 (FEI-SP) O gráfico da função $y = f(x) = \text{sen}\,|x|$ no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$ é:

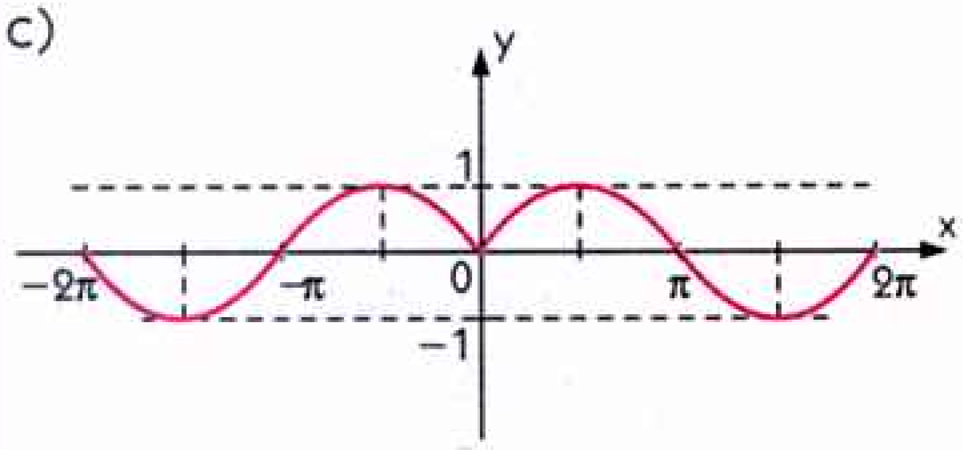
a)



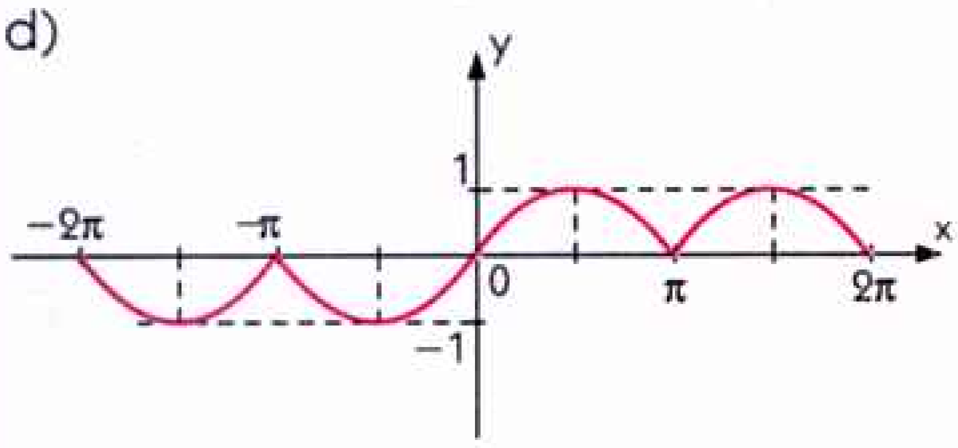
b)



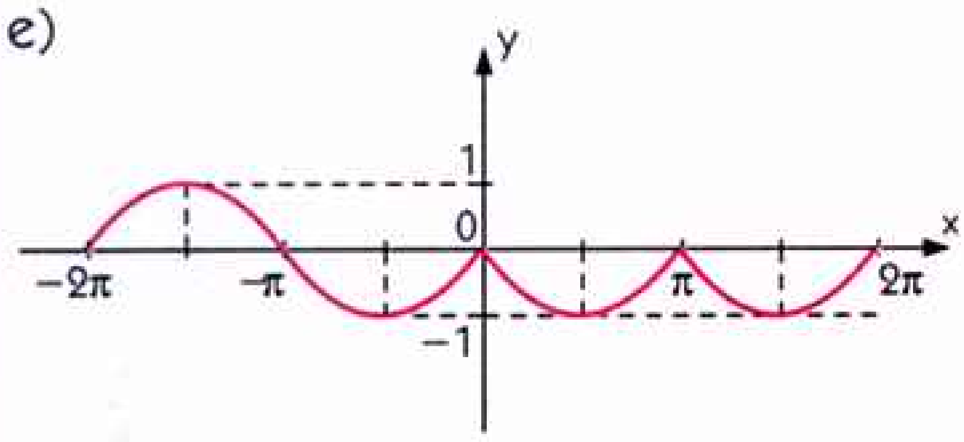
c)



d)

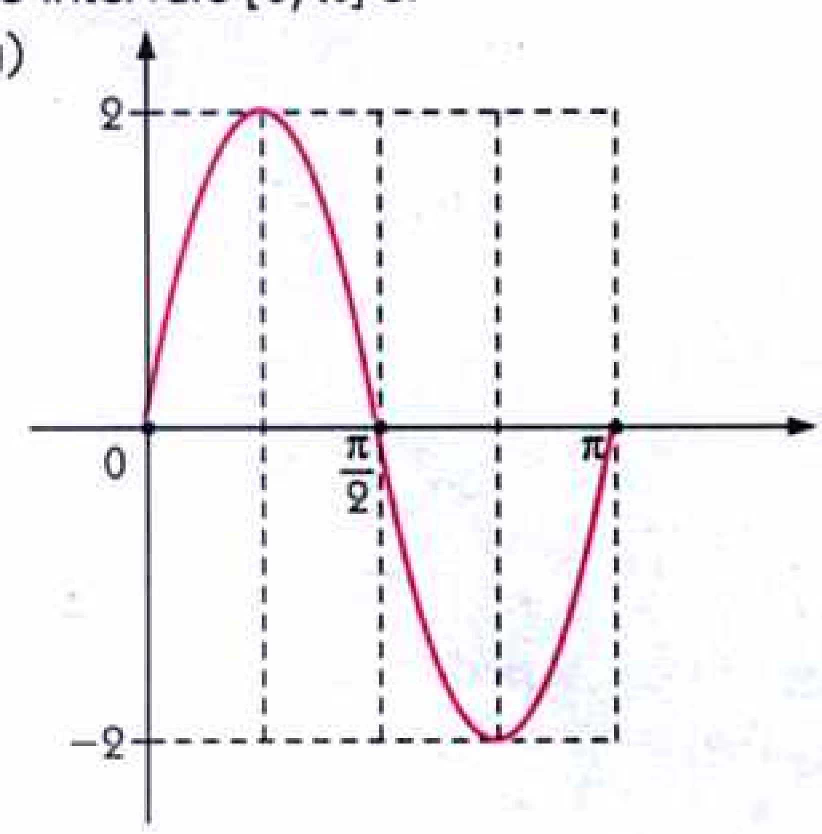


e)

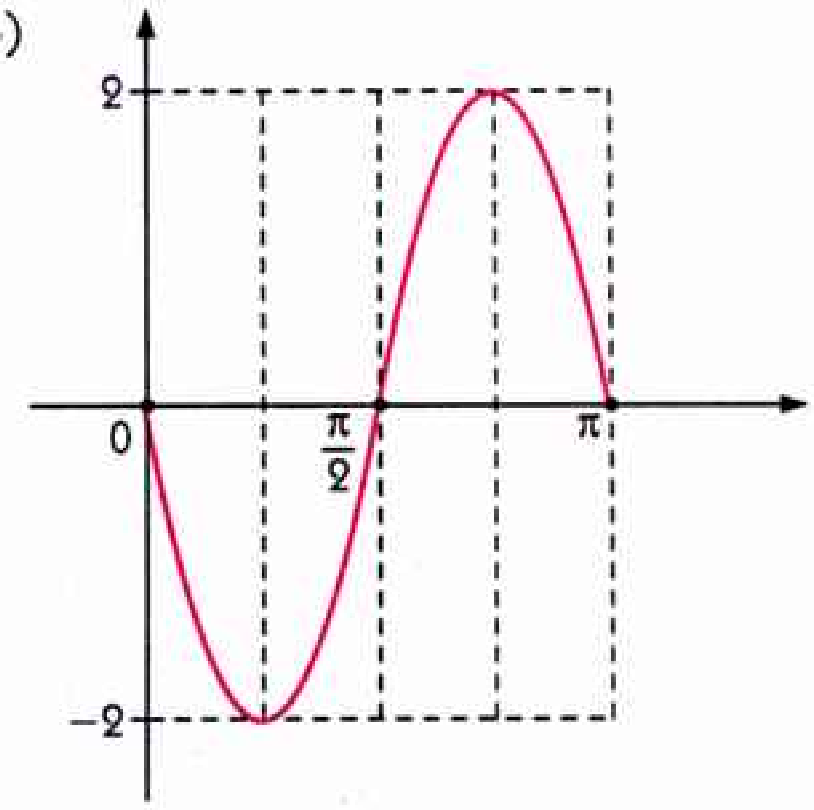


619 (FEI-SP) O gráfico da função $y = 2\cos 2x$ no intervalo $[0, \pi]$ é:

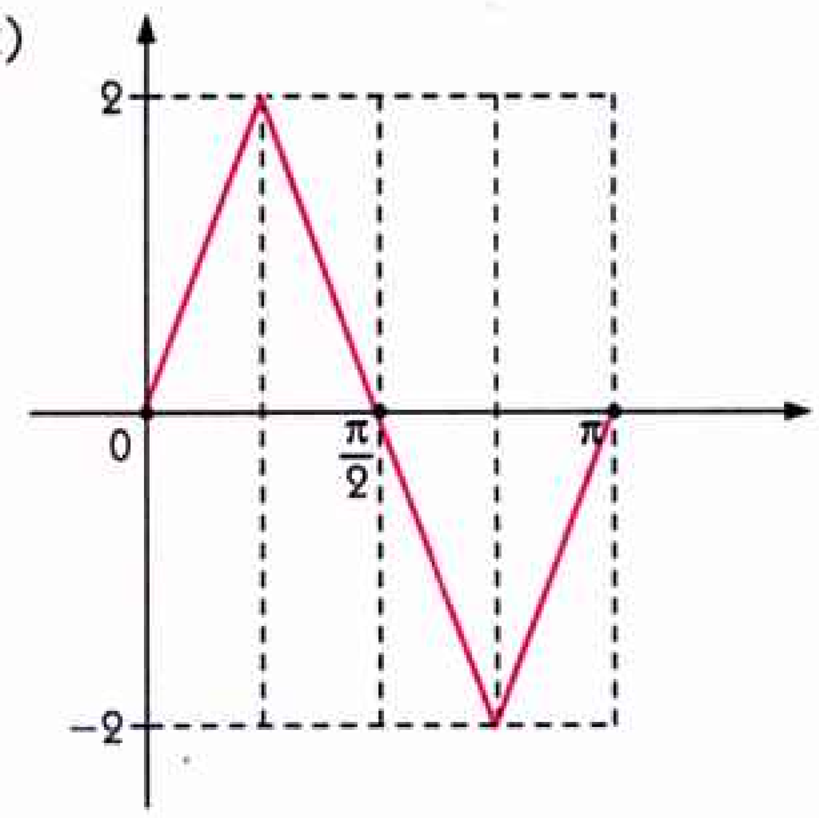
a)



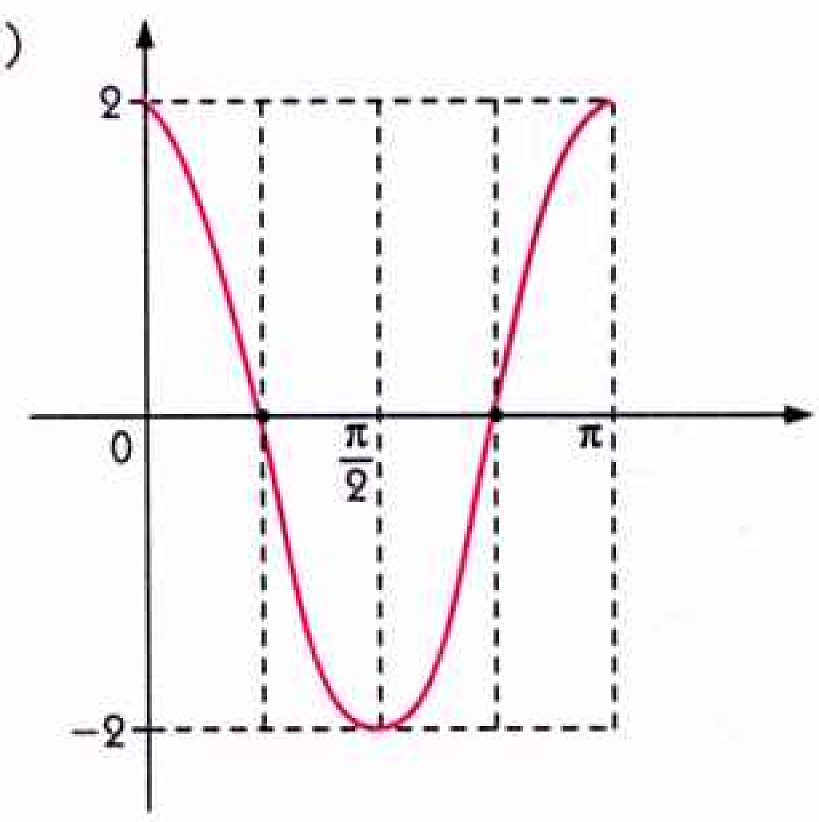
b)



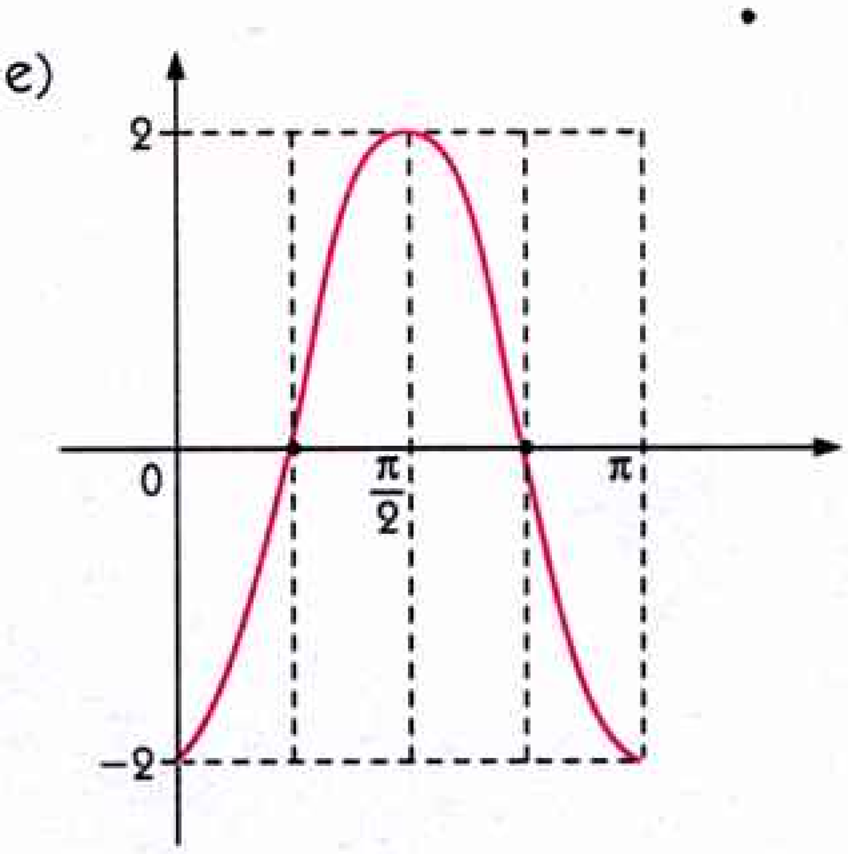
c)



d)

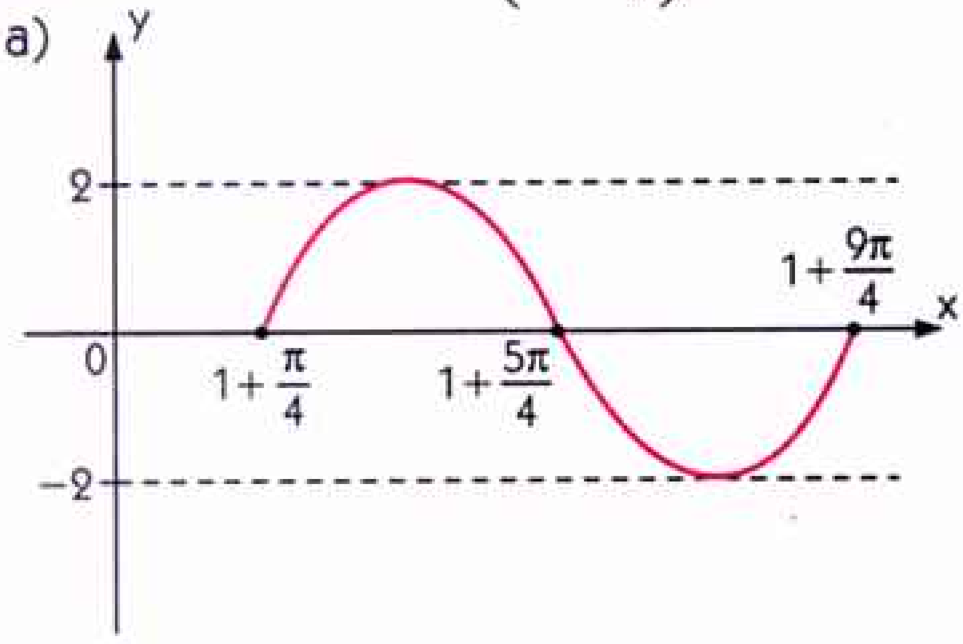


e)

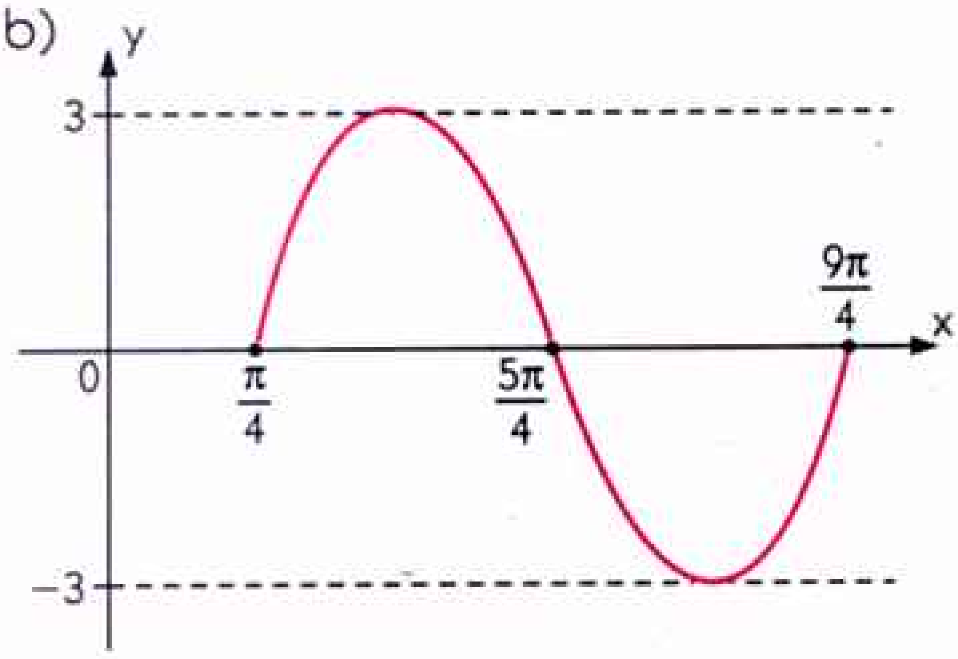


620 (Puccamp-SP) Dos gráficos abaixo, assinale aquele que melhor representa o gráfico da função $y = 1 + 2\,\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$:

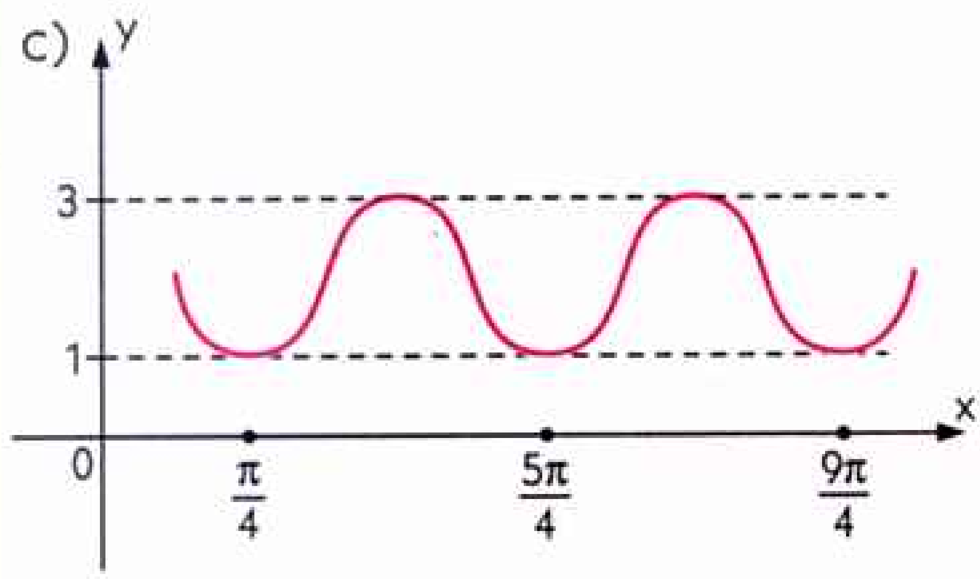
a)



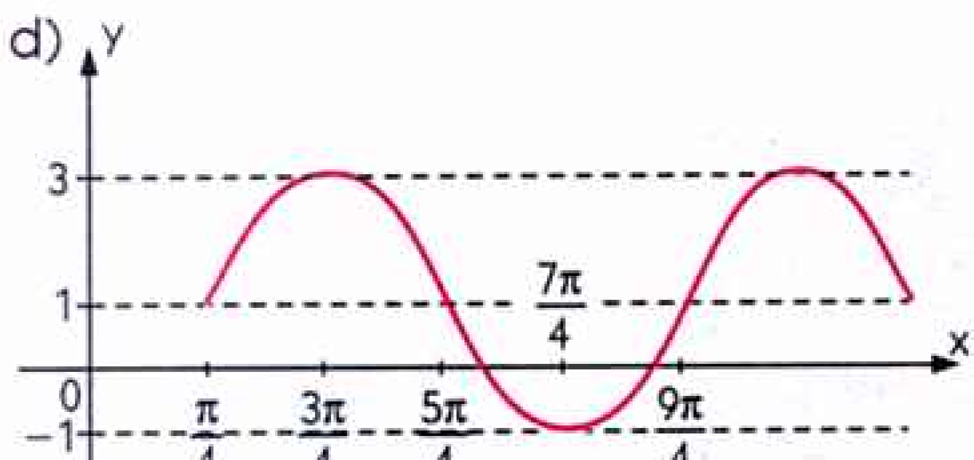
b)



c)



d)



e) n.d.a.

621 (FEI-SP) O domínio, a imagem e o período da função $f(x) = \text{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ são, respectivamente:

a) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -\frac{\pi}{4} - k\pi,\ k \in \mathbb{R}\right\}$, $\mathbb{R}$ e π

b) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{R}\right\}$, $\mathbb{R}$ e 2π

c) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4}\right\}$, $\mathbb{R}$ e π

d) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right\}$, $\mathbb{R}$ e 2π

e) n.d.a.

622 (Mack-SP) O domínio da função *f* definida por $f(x) = \frac{\text{sen}\,x}{\text{sen}\,x + \cos x}$ é:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

b) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$

d) $\mathbb{R}$

e) n.d.a.

623 (Cesesp-PE) Sendo dado que:

$M = \frac{\text{sen}\,2\,460° \cdot \cos 1\,110°}{\text{tg}\,2\,205°}$ tem-se que:

a) $M = -\frac{3\sqrt{2}}{4}$

b) $M = -\frac{3}{8}$

c) $M = -\frac{1}{8}$

d) $M = 0$

e) as quatro alternativas anteriores são falsas

624 (UFRN) Se $0 < x < \frac{\pi}{2}$, a expressão

$\frac{\text{cotg}\,x - \text{tg}\,x}{\sec x - \text{cossec}\,x}$ é equivalente a:

a) sen 2x

b) sec 2x

c) cos 2x

d) cos 4x

e) $\cos^2 x$

625 Calcule, aplicando a fórmula de adição de arcos:

a) sen 315°

b) cos 135°

c) tg 210°

626 Sendo $\text{sen}\,a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\text{sen}\,b = \frac{1}{2}$, com *a* e *b* no 1º quadrante, determine:

a) sen (a + b)

b) cos (a − b)

c) tg (a + b)

627 (Cesgranrio-RJ) Se $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = a$, então $\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$ é igual a:

a) *a*

b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $-a$

d) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

e) $\frac{\pi}{4}$

628 (FEI-SP) Simplificando a expressão:

$$\frac{\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{1 + \text{cotg}^2\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)}$$ obtemos:

a) $\frac{\cos^3 2x}{2}$

b) $\frac{\text{sen}\, x}{\text{cotg}\, x}$

c) $\frac{\cos x + \text{sen}\, x}{2}$

d) $\sec^2 2x$

e) $1 + \text{tg}^2 x$

629 (Vunesp)

a) Demostre a identidade:

$$\sqrt{2} \cdot \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \text{sen}\, x - \cos x$$

b) Determine os valores de $m \in \mathbb{R}$ para os quais a equação

$$\sqrt{2}(\text{sen}\, x - \cos x) = m^2 - 2$$

admite soluções

630 (UA-AM) O valor de sen 15° + cos 15° é:

a) cos 30°

b) $\frac{1}{2}$

c) $\sqrt{3}$

d) $\cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

631 (Unifenas-MG) O valor numérico da expressão $y = \frac{\cos(x - 60°) + \text{sen}(30° - x)}{\cos(x + 30°) + \cos(x - 30°)}$ é:

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) 1

632 (AMAN-RJ) Os valores de *x* que satisfazem a equação $3^{\cos 2x} = 1$ tomam a forma:

a) $k\pi + \frac{\pi}{2}$

b) $2k\pi + \frac{\pi}{2}$

c) $\frac{k}{2}\pi + \frac{\pi}{4}$

d) $\frac{k}{4}\pi$

e) n.d.a.

633 (Fuvest-SP) Prove que:

$$\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

634 Sabendo que $\text{sen}\, x = \frac{1}{2}$ e $x \in 2^{\underline{o}}$ quadrante, determine:

a) sen 2x

b) cos 2x

c) tg 2x

635 (UFCE) Se $\text{sen}\, x + \cos x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, então o valor de sen (2x) é:

a) $-\frac{2}{3}$

b) $-\frac{1}{3}$

c) $\frac{1}{3}$

d) $\frac{2}{3}$

636 (Fuvest-SP) O valor de $(\text{sen}\, 22° 30' + \cos 22° 30')^2$ é:

a) $\frac{3}{2}$

b) $\frac{2 + \sqrt{3}}{2}$

c) $\frac{2 + \sqrt{2}}{2}$

d) 1

e) 2

637 A tangente do ângulo 2x é dada em função da tangente de *x* pela seguinte fórmula:

$$\text{tg}\, 2x = \frac{2\, \text{tg}\, x}{1 - \text{tg}^2 x}.$$

Calcule um valor aproximado da tangente do ângulo 22° 30'.

a) 0,22

b) 0,41

c) 0,50

d) 0,72

e) 1,00

638 (Fuvest-SP) Sendo $\text{sen}\, \alpha = \frac{9}{10}$, com $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, tem-se:

a) $\text{sen}\, \alpha < \text{sen}\, \frac{\pi}{3} < \text{sen}\, 2\alpha$

b) $\text{sen}\, \frac{\pi}{3} < \text{sen}\, \alpha < \text{sen}\, 2\alpha$

c) $\text{sen}\, \alpha < \text{sen}\, 2\alpha < \text{sen}\, \frac{\pi}{3}$

d) $\text{sen}\, 2\alpha < \text{sen}\, \frac{\pi}{3} < \text{sen}\, \alpha$

e) $\text{sen}\, 2\alpha < \text{sen}\, \alpha < \text{sen}\, \frac{\pi}{3}$

639 (Mauá-SP) Dados: $\text{sen}\, \theta = \frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, calcule $A = 25\, \text{sen}\, 2\theta + \sqrt{10}\, \text{sen}\, \frac{\theta}{2}$

640 Transforme em produto:

a) sen 40° + sen 20°
b) cos 35° − cos 25°
c) sen 5x − sen x

641 Determine o conjunto verdade das seguintes equações, sabendo que $0 \leq x \leq 2\pi$.

a) $\text{sen}\, x = -1$
b) $2 \cdot \cos x - \sqrt{2} = 0$
c) $\text{tg}\, x = 0$
d) $\text{sen}^2 x - 7 \cdot \text{sen}\, x + 6 = 0$
e) $2 \cdot \cos^2 x - \cos x = 0$
f) $\text{tg}^2 x + \text{tg}\, x = 0$

642 (Fatec-SP) Se *S* é o conjunto solução, em $\mathbb{R}$, da equação $\dfrac{\text{cosec}\, x - \text{cotg}\, x}{\text{sen}\, x} = 0$, então *S* é igual a:

a) $\{1\}$
b) $\varnothing$
c) $\{x \mid x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
d) $\left\{x \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
e) $\{x \mid x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

643 (Fatec-SP) Se *t* é um número real tal que $2\cos^2 t - \text{sen}\, t - 1 = 0$, então *t* é da forma:

a) $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
b) $\frac{3\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
c) $\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
d) $\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$
e) $\frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

644 (Osec-SP) Resolvendo a equação: $2(1 - \cos x) = \text{sen}\, x \cdot \text{tg}\, x$, teremos, para $k \in \mathbb{Z}$:

a) $x = (2k + 1)\pi$
b) $x = 2k\pi$
c) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$
d) $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$

645 (Fuvest-SP) Qual das afirmações abaixo é verdadeira?

a) sen 210° < cos 210° < tg 210°
b) cos 210° < sen 210° < tg 210°
c) tg 210° < sen 210° < cos 210°
d) tg 210° < cos 210° < sen 210°
e) sen 210° < tg 210° < cos 210°

646 (Fatec-SP) Se $\text{sen}\, 2x - 3\text{sen}\, x + \text{tg}\, x = 0$ e $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, então:

a) $0,1 \leq \cos x < 0,2$
b) $0,2 \leq \cos x < 0,3$
c) $0,3 \leq \cos x < 0,4$
d) $0,4 \leq \cos x < 0,5$
e) $0,5 \leq \cos x < 0,6$

647 (FAAP-SP) Resolva a equação: $\text{sen}\, 2\theta = \sqrt{2} \cdot \cos \theta$, $0 < \theta \leq \pi$.

648 (Mack-SP) A equação $\text{sen}\, x = \text{sen}\,(x + \pi)$, com $0 \leq x \leq 2\pi$:

a) não tem solução
b) tem somente as soluções 0, π e 2π
c) tem somente as soluções 0 e π
d) tem somente a solução 0
e) tem infinitas soluções

649 (FEI-SP) Dada a equação $A\, \text{sen}\, x + B \cos x = 1$, resolva:

a) com $A = B = 1$, para $0 \leq x \leq 2\pi$
b) com $A = 1$ e $B = \sqrt{3}$, solução geral

650 (Unirio-RJ) O domínio máximo da função dada por $f(x) = \sec\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ é o conjunto:

a) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$, onde $k \in z$
b) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{5\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}\right\}$, onde $k \in z$
c) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{5\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}\right\}$, onde $k \in z$
d) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}\right\}$, onde $k \in z$
e) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}\right\}$, onde $k \in z$

651 (Fuvest-SP) Num triângulo retângulo ABC, seja D um ponto da hipotenusa $\overline{AC}$ tal que os ângulos $D\hat{A}B$ e $A\hat{B}D$ tenham a mesma medida. Então o valor de $\frac{AD}{DC}$ é:

a) $\sqrt{2}$
b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
c) 2
d) $\frac{1}{2}$
e) 1

652 (Santa Úrsula-RJ) Se $x = (\cos \theta - \text{sen}\, \theta)^2$, qualquer que seja o arco θ, temos necessariamente:

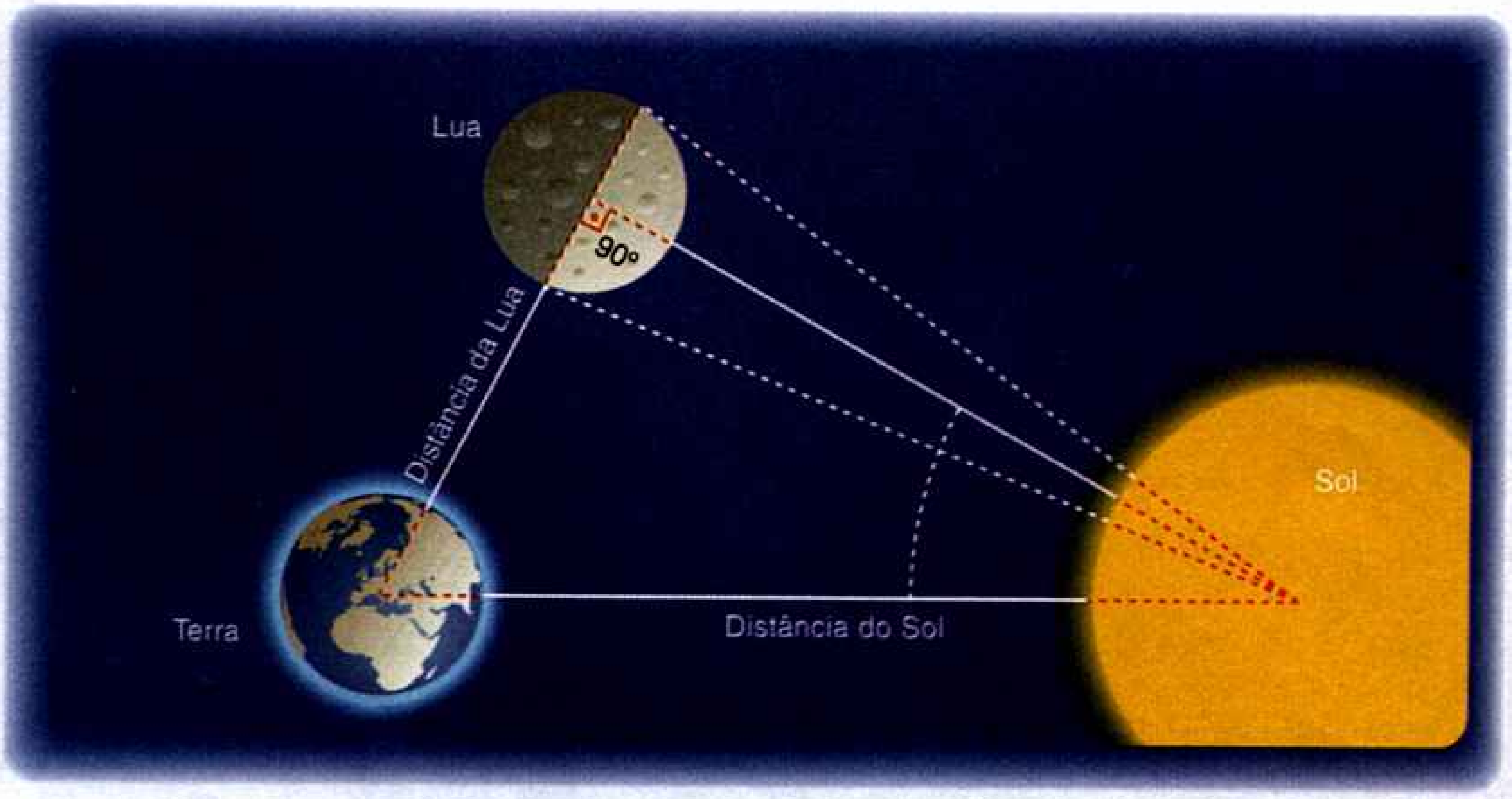
a) $x > 2$
b) $-1 \leq x \leq 1$
c) $x \leq \sqrt{2}$
d) $0 \leq x \leq 2$
e) $x > \sqrt{2}$

Saiba um pouco mais

O lugar da Terra

A Terra, planeta habitado pelo homem, conseguiu ocupar o lugar central do Universo, durante muitos séculos. Essa hipótese ultrapassada alimentou deuses e vários preconceitos que impediram a ciência, durante séculos, de caminhar. A maldição era a pena sofrida por quem tentasse retirar a Terra dessa posição. No século III a.C., essa tentativa, malsucedida, foi feita pelo matemático e astrônomo Aristarco de Samos. Somente 18 séculos depois, Nicolau Copérnico (1473-1543) conseguiu, postumamente, fazê-lo.

Um dos estudos feitos por Aristarco foi sobre a distância entre a Terra e o Sol. Considerando as condições da época, foi de grande engenhosidade o cálculo feito por ele. Em suas observações, percebeu que o centro da Lua, em quarto crescente, o centro do Sol e um observador na Terra representam três pontos que, se forem ligados, formam um triângulo retângulo SLT.



Seus cálculos levaram-no a concluir que a distância da Terra ao Sol TS é 18 a 20 vezes a distância da Terra à Lua TL.

Cálculo esse que, embora perfeito, necessita do conhecimento sobre senos.

$$\text{sen } x = \frac{TL}{TS}$$

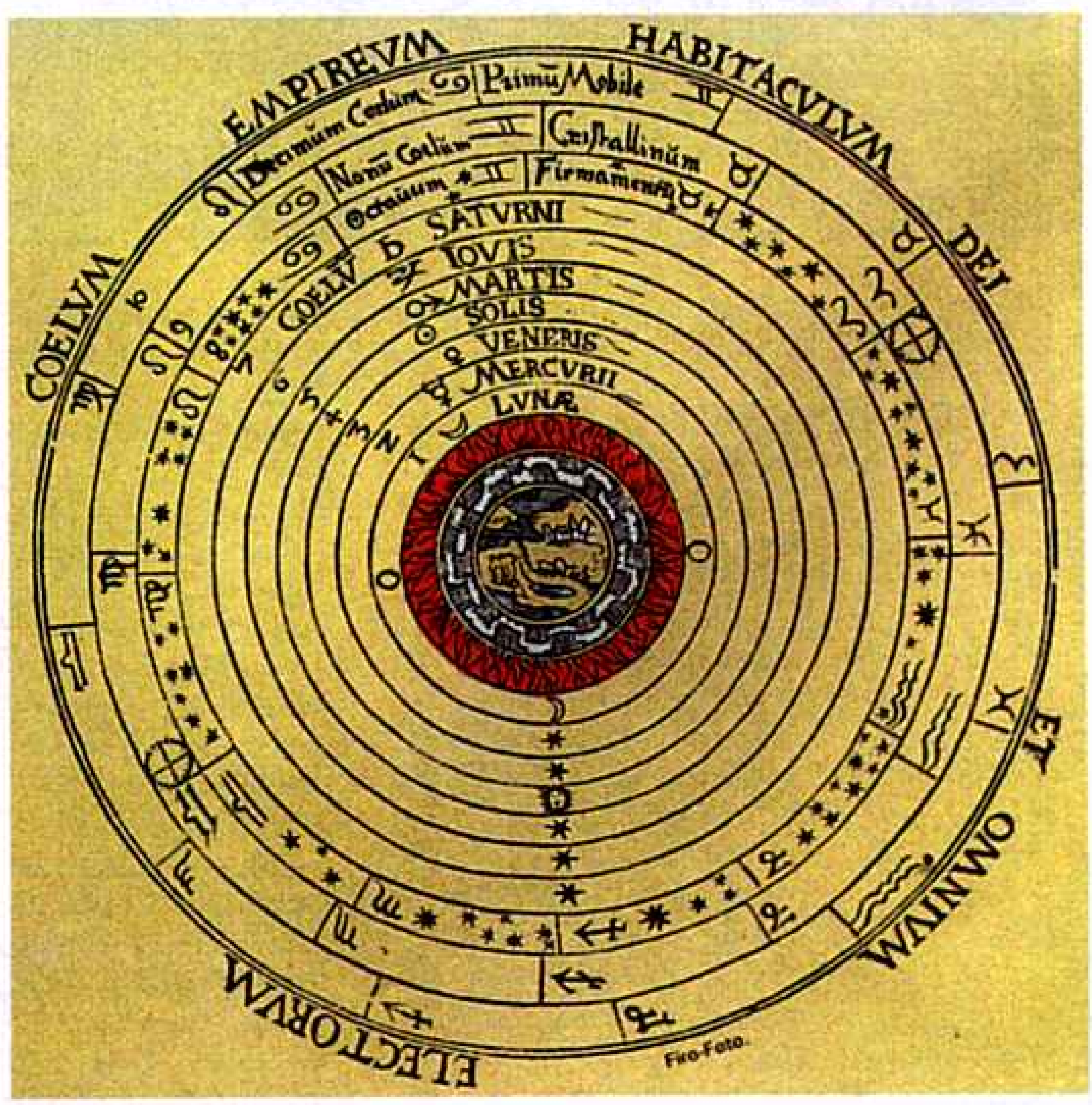
ou

$$\frac{1}{\text{sen } x} = \frac{TS}{TL}$$

Para que $\frac{1}{\text{sen } x}$ assuma um valor entre 18 e 20 Aristarco utilizou para o ângulo de medida x o complementar de $\hat{T}$, ou seja, 3°.

$$\frac{1}{\text{sen } 3^\circ} = 19{,}11$$

Embora a distância esteja correta, o ângulo $\hat{S}$ é diferente dos 3° adotados, o seu valor efetivo é de 10'. Para isso, deve ter contribuído a precariedade de instrumentos.



Acima, o universo segundo a concepção moderna, contrastando com um esquema de 1539 (abaixo), que mostra a visão aristotélica. Essa dividia o mundo em duas regiões distintas: a supralunar, onde giram os astros e é formada pela "quinta essência" ou éter, e a sublunar, situada no centro, e composta de quatro elementos — ar, água, terra e fogo.

Fonte: *História do Pensamento*, Nova Cultural, n. 8, p. 52.