Progressões

Mudanças

O tempo pôs a mão na tua cabeça
e ensinou três coisas. Primeiro:
você pode crer em mudanças
quando duvida de tudo, quando
procura a luz dentro das pilhas,
o caroço nas pedras, a causa
das coisas, seu sangue bruto.
Segundo: você não pode
mudar o mundo conforme o coração.
Tua pressa não apressa a História.
Melhor que teu heroísmo,
Tua disciplina na multidão.
Terceiro: é preciso trabalhar todo dia,
toda madrugada
para mudar um pedaço de horta,
uma paisagem, um homem.

Mas mudam, essa é a verdade.

Domingos Pellegrini Jr., poeta,
escritor e jornalista brasileiro

1. Seqüência ou sucessão

Noção de seqüência

Consideremos a temperatura do ar, durante um período do dia:

Medidas	Temperatura
1ª	11 °C
2ª	15 °C
3ª	18 °C
4ª	21 °C
5ª	17 °C
6ª	16 °C

Dizemos que os valores da temperatura formam, nessa ordem, a *seqüência* das medidas durante um certo período do dia. Os valores são denominados *termos da seqüência* e podem ser indicados da seguinte forma:

primeiro termo: $a_1 = 11$ °C
segundo termo: $a_2 = 15$ °C
terceiro termo: $a_3 = 18$ °C
. .
. .
. .
sexto termo: $a_6 = 16$ °C

Seqüência ou sucessão é o conjunto formado por elementos considerados numa certa ordem.

A representação formal de uma seqüência é: $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n)$, onde:

a_1: é o primeiro termo
a_2: é o segundo termo
.
.
.
a_n: é o enésimo termo, com $n \in \mathbb{N}^*$

Exemplos:
- $(1, 5, 9, 13)$
- $(-8, -6, -4, ...)$
- $(\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4)$

Termo geral de uma seqüência

O estudo das seqüências e de sua lei de formação é de especial interesse para a Matemática.

Exemplo:

A seqüência dos números naturais pares (0, 2, 4, ...) pode ser obtida através da expressão $a_n = 2n - 2$, onde $n \in \mathbb{N}^*$, ou seja:

para $n = 1$, temos $a_1 = 2\,(1) - 2 = 0$

para $n = 2$, temos $a_2 = 2\,(2) - 2 = 2$

para $n = 3$, temos $a_3 = 2\,(3) - 2 = 4$

para $n = 4$, temos $a_4 = 2\,(4) - 2 = 6$ etc.

Exercícios

Resolvidos

1 Determinar os três primeiros termos da seqüência cujo termo geral é $a_n = n^2 + 1$.

para $n = 1$, temos $a_1 = (1)^2 + 1 = 2$

para $n = 2$, temos $a_2 = (2)^2 + 1 = 5$

para $n = 3$, temos $a_3 = (3)^2 + 1 = 10$

(2, 5, 10, ...)

2 Obter o décimo segundo termo da seqüência em que $a_n = 2^{n-6}$.

Fazendo $n = 12$, temos:

$a_{12} = 2^{12-6} = 2^6$

$a_{12} = 64$

Propostos

653 Determine os quatro primeiros termos das seqüências dadas por:

a) $a_n = n + 1$

b) $a_n = 3n - 2$

c) $a_n = 2^n$

d) $a_n = 2^{n-3}$

e) $a_n = n^2 + 4$

f) $a_n = 2 \cdot 3^n$

654 Obter o décimo quarto termo da seqüência em que $a_n = 2^{10-n}$.

655 Determine o quarto termo da seqüência, em que $a_n = 2 \cdot 5^{n-1}$.

656 Complete a seqüência (12, 7, 2, −3, *, −13, *) de sete termos.

657 Determine a lei de formação da seqüência:

a) (4, 8, 12, 16, 20, ...)

b) (1, 5, 9, 13, 17, ...)

c) (5, 9, 13, 17, 21, ...)

2. Progressão aritmética

Observe a seqüência de números reais:

$$(2, 5, 8, 11, \ldots)$$

Cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior somado ao número 3, ou seja:

$$(2, \underbrace{\;\;5,}_{2+3}\; \underbrace{\;\;8,}_{5+3}\; \underbrace{\;\;11,}_{8+3} \ldots)$$

De um modo geral, chamamos de progressão aritmética (P.A.) toda seqüência de números reais, na qual cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior somado a uma constante, denominada razão *r*.

A representação é $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$, onde:

a_1: primeiro termo

n: número de termos

r: razão

Para determinar a razão de uma P.A., basta calcular a diferença entre um termo, a partir do segundo, e seu antecessor.

Exemplos:

a) $(1, 3, 5, 7, 9)$ P.A. finita, onde $a_1 = 1, r = 2$ e $n = 5$

$r = 3 - 1 = 5 - 3 = 7 - 5 = 9 - 7 = 2$

b) $(-3, -7, -11, \ldots)$ P.A. infinita, onde $a_1 = -3$ e $r = -4$

$r = -7 - (-3) = -11 - (-7) = -4$

c) $(9, 9, 9, 9, 9, 9, 9)$ P.A. finita, onde $a_1 = 9, r = 0$ e $n = 7$

$r = 9 - 9$

Classificação de uma P.A.

$r > 0$ Crescente

Uma P.A. é crescente quando a razão *r* for positiva.

Exemplo: $(2, 7, 12, \ldots)$ é uma P.A. crescente, pois $r > 0, r = 5$.

$r = 0$ Constante

Uma P.A. é constante quando a razão *r* for igual a zero.

Exemplo: $(3, 3, 3, 3, 3, \ldots)$ é uma P.A. constante, pois $r = 0$.

$r < 0$ Decrescente

Uma P.A. é decrescente quando a razão *r* for negativa.

> Exemplo: $(9, 4, -1, ...)$ é uma P.A. decrescente, pois $r < 0$, $r = -5$.

Exercícios

Propostos

658 Verifique quais seqüências abaixo formam uma P.A.; determine a razão (*r*) dessas seqüências e classifique-as em crescente, decrescente ou constante.

a) (5, 7, 9, ...) 5+2, 7+2, 9+2 1 r=2

b) (3, 11, 2, 1)

c) (12, 8, 4, ...)

d) (−2, 4, −8, ...)

e) (−35, −30, −25, ...)

12-8-4-40

5-2, 7-5 29-7

f) $\left(\frac{2}{3}, \frac{7}{6}, \frac{5}{3}, ...\right)$

g) $(\sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}, 4 + \sqrt{2}, ...)$

h) (7, 7, 7, ...)

659 Dada a P.A., determine o termo indicado:

a) (−4, 1, 6, ...)

b) (13, 10, 7, ...)

c) (0, 1, 2, ...) a_{35}

d) $\left(\frac{2}{3}, \frac{7}{6}, \frac{5}{3}, ...\right)$ a_4

Termo geral de uma P.A.

Descrevendo alguns termos de uma P.A., podemos obter a fórmula do termo geral:

1º termo	$a_1 = a_1 + 0r$
2º termo	$a_2 = a_1 + 1r$
3º termo	$a_3 = a_1 + 2r$
4º termo	$a_4 = a_1 + 3r$
⋮	⋮ ⋮
nº termo	$a_n = a_1 + (n - 1)r$

Observando que o coeficiente *r* em cada igualdade é uma unidade inferior ao índice do termo considerado, obtivemos a fórmula do termo geral:

$$\boxed{a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r}, \text{ onde: } \begin{cases} a_n\text{: termo geral} \\ a_1\text{: primeiro termo} \\ n\text{: número de termos} \\ r\text{: razão} \end{cases}$$

Exercícios

Resolvidos

1 Determinar o décimo segundo termo da P.A. (3, 5, 7, ...).

Leitura do problema: $\begin{cases} a_1 = 3;\ \text{décimo segundo termo: } n = 12 \\ a_{12} = ? \end{cases}$

Calculamos a razão: $r = 5 - 3 = 2$.

Substituímos esses valores na fórmula do termo geral $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$:

$a_{12} = 3 + (12 - 1) \cdot 2 \Rightarrow a_{12} = 3 + 11 \cdot 2 \Rightarrow a_{12} = 25$

2 Determinar o primeiro termo de uma P.A. em que o vigésimo termo é igual a 99 e a razão é igual a 5.

Leitura do problema: $\begin{cases} a_{20} = 99;\ \text{vigésimo termo: } n = 20;\ r = 5 \\ a_1 = ? \end{cases}$

Substituímos esses valores na fórmula do termo geral $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$:

$99 = a_1 + (20 - 1) \cdot 5$

$99 = a_1 + 19 \cdot 5$

$99 = a_1 + 95$

$99 - 95 = a_1 \Rightarrow a_1 = 4$

3 Calcular a razão de uma P.A., sabendo que o primeiro termo é o triplo da razão e que $a_{23} = 50$.

Leitura do problema: $\begin{cases} a_{23} = 50,\ n = 23 \text{ e } a_1 = 3r \\ r = ? \end{cases}$

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow 50 = 3r + (23 - 1) \cdot r$

$50 = 3r + 22r$

$r = \dfrac{50}{25} \Rightarrow r = 2$

4 Sabendo que $(x + 1)$, $(3x - 2)$ e $(2x + 4)$ formam, nessa ordem, uma P.A., calcular o valor de x e a razão dessa P.A.

Leitura do problema: $\begin{cases} \text{P.A. } (x + 1,\ 3x - 2,\ 2x + 4) \\ x = ?,\ r = ? \end{cases}$

Sabendo que numa P.A. a diferença entre um termo, a partir do segundo, e o seu antecessor é sempre constante, podemos montar a seguinte equação:

$(2x + 4) - (3x - 2) = (3x - 2) - (x + 1)$

$2x + 4 - 3x + 2 = 3x - 2 - x - 1$

$2x - 3x - 3x + x = -2 - 1 - 2 - 4$

$-3x = -9 \Rightarrow x = 3$

Para determinar a razão, basta substituir x por 3 na seqüência inicial e efetuar a diferença entre um termo e seu anterior.

$(x + 1)$, $(3x - 2)$ e $(2x + 4)$

$(3 + 1)$, $(3 \cdot 3 - 2)$ e $(2 \cdot 3 + 4)$

4, 7 e 10

Logo: $r = 7 - 4 \Rightarrow r = 3$

5 Determinar a P.A. em que:
$a_6 + a_{15} = -41$ e $a_3 + a_{17} = -38$

Leitura do problema: $\begin{cases} a_6 + a_{15} = -41 \text{ e } a_3 + a_{17} = -38 \\ \text{P.A.} = ? \end{cases}$

Para encontrar a P.A., basta encontrar a_1 e *r*. Então:

$$\begin{cases} a_6 + a_{15} = -41 \\ a_3 + a_{17} = -38 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 5r + a_1 + 14r = -41 \\ a_1 + 2r + a_1 + 16r = -38 \end{cases}$$

Em seguida, resolvemos o sistema: $\begin{cases} 2a_1 + 19r = -41 & \text{(I)} \\ 2a_1 + 18r = -38 & \text{(II)} \end{cases}$

Fazendo (I) − (II), temos $r = -3$.

Substituímos $r = -3$ em I:

$2a_1 + 19(-3) = -41 \Rightarrow 2a_1 - 57 = -41 \Rightarrow 2a_1 = 16 \Rightarrow a_1 = 8$

P.A. (8, 5, 2, ...)

Propostos

660 Determine o vigésimo termo da P.A. (1, 8, 15, ...).

661 Determine o décimo sétimo termo da P.A. (−6, −1, 4, ...).

662 Qual é o oitavo termo da P.A. $\left(1, \frac{3}{2}, 2, ...\right)$?

663 Descubra qual é o primeiro termo de uma P.A. cujo décimo termo é igual a 51 e cuja razão é igual a 5.

664 Determine a razão de uma P.A. que tem 192 como vigésimo termo e 2 como primeiro termo.

665 Qual é o primeiro termo de uma P.A. em que $a_{16} = 53$ e $r = 4$?

666 Qual é a razão de uma P.A. em que $a_{26} = 140$ e $a_1 = 18$?

667 Determine o número de termos da P.A. (−6, −9, −12, ..., −66).

668 Qual é o número de termos de uma P.A. em que a razão *r* é igual a 8, o primeiro termo, $a_1 = 3$, e o termo $a_n = 184$?

669 Quantos termos possui uma P.A. em que $r = -11$, $a_1 = 1$ e o termo $a_n = 186$?

670 Numa P.A., o primeiro termo é igual à razão e $a_{14} = 84$. Calcule a_1 e a razão.

671 Escreva a P.A. em que o primeiro termo é o dobro da razão e o trigésimo termo é igual a 93.

672 Escreva a P.A. em que a razão é a terça parte do primeiro termo, e o nono termo é igual a −11.

673 Determine o valor de *x*, de modo que os termos $(x + 3)$, $(4x - 2)$ e $(x - 1)$, nessa ordem, formem uma P.A.

674 Quantos são os múltiplos de 3 compreendidos entre 5 e 41?

675 Quantos múltiplos de 5 podemos escrever com três algarismos?

676 Determine a P.A. em que:
$a_{10} + a_{25} = 470$ e $a_5 + a_{16} = 330$

677 Determine o valor de *x*, de modo que x^2, $(x + 1)^2$ e $(x + 3)^2$, nessa ordem, formem uma P.A.

678 (FEI-SP) Determine:
a) Quantos são os inteiros positivos múltiplos de 7 e menores que 1 000?
b) Quantos são os inteiros positivos múltiplos de 7 e de 11 menores que 10 000?

679 Numa P.A., tem-se $a_{20} = \sqrt{3} - 1$ e $a_{30} = 19\sqrt{3} + 35$. Determine o vigésimo quarto termo.

Representação prática dos termos de uma P.A.

Para facilitar a resolução de alguns problemas em P.A., utilizaremos as seguintes notações:

a) três termos em P.A.: $(x - r, x, x + r)$

b) quatro termos em P.A.: $(x, x + r, x + 2r, x + 3r)$

c) cinco termos em P.A.: $(x - 2r, x - r, x, x + r, x + 2r)$

Exercícios

Resolvidos

1 Obter uma P.A. de três termos cuja soma seja igual a 12 e cujo produto seja igual a 60.

Representando os três termos em P.A., temos: $(x - r, x, x + r)$

Logo: $\begin{cases} x - r + x + x + r = 12 \text{ ou } 3x = 12 & \text{I} \\ (x - r) \cdot x \cdot (x + r) = 60 \text{ ou } x(x^2 - r^2) = 60 & \text{II} \end{cases}$

Isolando x em I : $3x = 12 \Rightarrow x = 4$

Substituindo $x = 4$ em II : $4(4^2 - r^2) = 60 \Rightarrow 4^2 - r^2 = 15 \Rightarrow -r^2 = -1 \Rightarrow r = \pm 1$

Assim obtivemos duas soluções:

$(3, 4, 5)$ para $x = 4$ e $r = +1$ e $(5, 4, 3)$ para $x = 4$ e $r = -1$

2 A soma dos cinco termos consecutivos de uma P.A. crescente é 15 e o produto dos extremos é igual a 5. Determinar esses termos.

Representando os cinco termos em P.A., temos: $(x - 2r, x - r, x, x + r, x + 2r)$

Logo: $\begin{cases} x - 2r + x - r + x + x + r + x + 2r = 15 \Rightarrow 5x = 15 & \text{I} \\ (x - 2r) \cdot (x + 2r) = 5 \Rightarrow x^2 - 4r^2 = 5 & \text{II} \end{cases}$

Isolando x em I , temos: $5x = 15 \Rightarrow x = 3$

Substituindo $x = 3$ em II , temos: $3^2 - 4r^2 = 5 \Rightarrow 9 - 4r^2 = 5 \Rightarrow r^2 = 1 \Rightarrow r = \pm 1$

Como a P.A. é crescente, vamos considerar $r = +1$. Assim a solução é:

P.A. $(1, 2, 3, 4, 5)$

Propostos

680 Escreva uma P.A. de três termos, de modo que sua soma seja igual a -3 e seu produto seja igual a 8.

681 Encontre três números em P.A., sabendo que a soma desses números é 6 e o produto é -10.

682 (FGV-SP) Em um triângulo, os três ângulos estão em progressão aritmética e o maior ângulo é o dobro do menor. Calcule o menor ângulo desse triângulo.

683 A soma de cinco termos consecutivos de uma P.A. crescente é igual a 10 e o produto dos extremos desses termos é -12. Determine esses termos.

684 Determine cinco números em P.A. crescente, sabendo que o produto entre o menor e o maior é 28 e a soma dos outros três é 24.

Interpolação aritmética

Considerando a seqüência $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n)$, os termos a_1 e a_n são chamados de *extremos* e os demais são chamados de *meios*.

Exemplo:
Na P.A. (2, 5, 8, 11, 14, 17), temos que:
- os extremos são os números 2 e 17.
- os meios são os números 5, 8, 11 e 14.

Interpolar ou inserir *k* meios aritméticos entre dois números dados (extremos) é obter uma P.A. na qual os números dados sejam o primeiro e o último termos. Para isso, devemos determinar a razão dessa P.A.

Exemplo:
Se vamos interpolar sete meios aritméticos entre os números 1 e 17, concluímos que a P.A. possui nove termos, pois:

$$\underbrace{7}_{\text{meios}} + \underbrace{2}_{\text{extremos}} = \underbrace{9}_{\text{termos}}$$

$a_1 = 1$, $a_9 = 17$ e $n = 9$

Empregando a fórmula do termo geral, calcularemos a razão:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow 17 = 1 + (9 - 1) \cdot r \Rightarrow 16 = 8r \Rightarrow r = 2$

Logo:

P.A. (1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17)

Exercícios

Resolvido

Quantos números devem ser interpolados entre 8 e −48 de modo que a razão seja igual a −4?

Leitura do problema: $\begin{cases} a_1 = 8,\ a_n = -48,\ r = -4 \\ n - 2 = ? \end{cases}$

Empregando a fórmula do termo geral, vamos calcular o número de termos:

$a_n = 8 + (n - 1) \cdot (-4)$

$-48 = 8 - 4n + 4$

$4n = 8 + 4 + 48$

$n = 15$

Tirando os extremos, devemos interpolar treze números.

Propostos

685 Interpole quatro meios aritméticos entre os números 11 e 26.

686 Interpole oito meios aritméticos entre os números −2 e 43.

687 Insira doze meios aritméticos entre 60 e −5.

688 Interpole doze meios aritméticos entre $-\frac{3}{4}$ e $\frac{11}{6}$.

689 Quantos números (meios aritméticos) devem ser interpolados entre 11 e 53 para que a razão da P.A.:

a) seja igual a 6?

b) seja igual a $\frac{1}{2}$?

Propriedade de uma P.A.

A soma de dois termos eqüidistantes dos extremos de uma P.A. finita é igual à soma dos extremos.

Na P.A. (**3**, 7, 11, 15, 19, 23, 27, **31**), por exemplo:

$$\left.\begin{matrix} 7 \text{ e } 27 \\ 11 \text{ e } 23 \\ 15 \text{ e } 19 \end{matrix}\right\} \text{ são os termos eqüidistantes dos extremos 3 e 31}$$

Veja que a soma de dois termos eqüidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos:

3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31

$15 + 19 = 34$

$11 + 23 = 34$

$7 + 27 = 34$

extremos: $3 + 31 = 34$

Considerando-se três termos consecutivos de uma P.A., o termo do meio é a média aritmética dos outros dois.

Na P.A. $(a_1, a_2, ..., a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, ...)$, por exemplo, temos:

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}$$

Exemplo:

Dada a P.A. (1, 5, 9, 13, 17, 21, 25), notamos que:

$$5 = \frac{1+9}{2};\ 17 = \frac{13+21}{2};\ 9 = \frac{5+13}{2};\ 21 = \frac{17+25}{2};\ 13 = \frac{9+17}{2}$$

Soma dos n termos de uma P.A.

Vejamos como é possível descobrir uma fórmula para a soma dos n termos de uma P.A. Para isso, vamos somar os termos da P.A. $(a_1, a_2, a_3 \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$:

ordem crescente: $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$

ordem decrescente: $S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1$

Somando membro a membro:

$$\begin{array}{rl} & S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \\ + & S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1 \\ \hline & 2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1) \end{array}$$

Como as n parcelas têm o mesmo valor, pois são termos eqüidistantes dos extremos, podemos escrever que:

$2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n$

Logo:

$$\boxed{S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}}, \text{ onde: } \begin{cases} a_1\text{: primeiro termo} \\ a_n\text{: enésimo termo} \\ n\text{: número de termos} \\ S_n\text{: soma dos } n \text{ termos} \end{cases}$$

Exercícios

Resolvidos

1 Calcular a soma dos dez primeiros termos da P.A. (4, 7, 10, ...).

$a_{10} = 4 + 9 \cdot 3 = 31$

Leitura do problema: $\begin{cases} a_1 = 4,\ r = 7 - 4 = 3,\ n = 10 \text{ (10 primeiros termos)} \\ a_{10} = ?,\ S_{10} = ? \end{cases}$

Inicialmente calculamos a_{10}:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$

$a_{10} = 4 + 9 \cdot 3$

$a_{10} = 31$

$4 + 7 + 10 + \ldots + 28 + 31$
$+ 7 + 4$
$35 + 35 +$
$\frac{35 \cdot 10}{2} = 175$

Empregamos a fórmula da soma $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$:

$S_{10} = \frac{(4 + 31) \cdot 10}{2}$

$S_{10} = 175$

2 Calcular a soma dos termos da P.A. $(-16, -14, -12, ..., 84)$.

Leitura do problema: $\begin{cases} a_1 = -16, r = -14 - (-16) = 2, a_n = 84 \\ n = ?, S_n = ? \end{cases}$

Inicialmente calculamos o número *n* de termos:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$

$84 = -16 + (n - 1) \cdot 2 \Rightarrow 84 = -16 + 2n - 2 \Rightarrow 2n = 84 + 16 + 2 \Rightarrow n = 51$

Empregamos a fórmula da soma $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$:

$$S_{51} = \frac{(-16 + 84) \cdot 51}{2} \Rightarrow S_{51} = 1734$$

3 Determinar o primeiro termo e o número de termos de uma P.A. de números positivos de razão igual a 2, com o último termo igual a 26 e a soma dos termos igual a 180.

Leitura do problema: $\begin{cases} r = 2, a_n = 26, S_n = 180 \\ n = ?, a_1 = ? \end{cases}$

Empregando a fórmula do termo geral, $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$, temos:

$26 = a_1 + (n - 1) \cdot 2 \Rightarrow 26 = a_1 + 2n - 2 \Rightarrow a_1 = 28 - 2n$

Substituindo a_1 na fórmula da soma $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$:

$$180 = \frac{(28 - 2n + 26) \cdot n}{2}$$

$180 \cdot 2 = (54 - 2n) \cdot n \Rightarrow 360 = 54n - 2n^2 \Rightarrow 2n^2 - 54n + 360 = 0\ (:2) \Rightarrow n^2 - 27n + 180 = 0$

Resolvendo a equação do 2º grau, obtemos o valor de *n*:

$$n = \frac{27 \pm \sqrt{729 - 720}}{2} = \begin{cases} n' = 15 \\ n'' = 12 \end{cases}$$

Em $a_1 = 28 - 2n$, substituímos *n* pelos valores obtidos:

Para $n = 15$, $a_1 = 28 - 2 \cdot 15 = -2$ (não convém, pois os termos devem ser positivos).

Para $n = 12$, $a_1 = 28 - 2 \cdot 12 = 4$.

Logo, $a_1 = 4$ e $n = 12$.

4 Determinar a soma dos *n* primeiros números naturais pares.

Leitura do problema: $\begin{cases} \text{P.A. } (0, 2, 4, 6, ...) \\ S_n = ? \end{cases}$

Na seqüência $(0, 2, 4, ..., a_n)$, temos:

$a_1 = 0$ e $r = 2$

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow a_n = 0 + (n - 1) \cdot 2 \Rightarrow a_n = 2n - 2$

Logo, a soma S_n é:

$$S_n = \frac{(0 + 2n - 2) \cdot n}{2} \Rightarrow S_n = \frac{2n^2 - 2n}{2} \Rightarrow S_n = n^2 - n \Rightarrow S_n = n(n - 1)$$

Propostos

690 Determine a soma dos dezoito primeiros termos da P.A. $(1, 4, 7, ...)$.

691 Determine a soma dos 25 primeiros termos da P.A. $(-7, -9, -11, ...)$.

692 Determine a soma dos trinta primeiros termos da P.A. $(-15, -11, -7, ...)$.

693 Qual é a soma dos cinqüenta primeiros numerais ímpares?

694 Qual é a soma dos múltiplos de 3 compreendidos entre 11 e 100?

695 Qual é a soma dos múltiplos de 7 compreendidos entre 20 e 1 000?

696 Determine a soma dos números pares positivos, menores que 101.

697 Escreva a P.A. em que o primeiro termo é igual à razão e o vigésimo termo é igual a -100. Determine, também, a soma de seus vinte primeiros termos.

698 (Mauá-SP) Os dois primeiros termos de uma seqüência são $\left(2, \frac{1}{2}, ...\right)$. Calcule a soma dos vinte primeiros termos, supondo que se trata de uma P.A.

699 (Fuvest-SP) Responda:

a) Qual é a soma dos dez primeiros números naturais ímpares?

b) Qual é a soma dos *n* primeiros números naturais ímpares?

700 Determine o primeiro termo e o número de termos de uma P.A. cuja razão é igual a 3, o último termo é 19 e a soma dos termos é igual a 69.

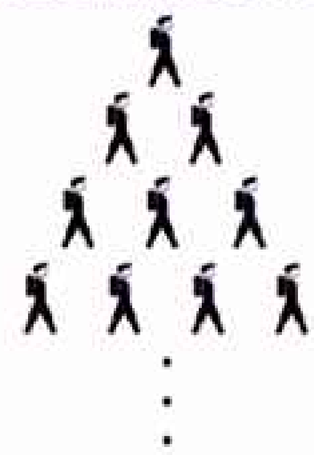
701 Numa P.A. de dez termos, o último termo é igual a 22 e a razão é igual a 2. Determine o primeiro termo e a soma.

702 Determine o primeiro termo e o número de termos de uma P.A. em que: $a_n = 18$, $r = 2$ e $S_n = 88$.

703 Determine a soma de todos os múltiplos de 3 compreendidos entre 1 e 100.

704 Qual é a soma dos múltiplos de 7 compreendidos entre 5 e 130?

705 Um professor de educação física organizou seus 210 alunos para formar um triângulo. Colocou um aluno na primeira linha, dois na segunda, três na terceira, e assim por diante. Determine o número de linhas.



706 (Gama Filho-RJ) A soma dos seis termos de uma progressão aritmética de razão *r* é igual a 150. Se o último termo dessa progressão é 45, *r* vale:

a) 9 b) 8 c) 7 d) 6 e) 5

3. Progressão geométrica

Progressão geométrica (P.G.) é toda seqüência de números não-nulos em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao produto de seu termo precedente por uma constante, denominada *razão* q *da progressão geométrica*.

Exemplos:

a) $(2, 4, 8)$ P.G. finita; razão $q = 2$

b) $(5, 15, 45, ...)$ P.G. infinita; razão $q = 3$

c) $(-1, -4, -16, ...)$ P.G. infinita; razão $q = 4$

d) $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{15}, \frac{4}{75}, ...\right)$ P.G. infinita; razão $q = \frac{2}{5}$

e) $(-7, 14, -28, 56)$ P.G. finita; razão $q = -2$

Para achar a razão de uma P.G. dada através de uma seqüência de números não-nulos, basta dividir qualquer termo, a partir do segundo, por seu antecessor.

Numa seqüência de termos (a_1, a_2, a_3, a_4) em P.G., a razão *q* pode ser escrita como:

$$\frac{a_4}{a_3} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_2}{a_1} = q$$

Exemplo:

Na P.G. (7, 21, 63, 189), temos: $q = \frac{189}{63} = \frac{63}{21} = \frac{21}{7} = 3$ ou $q = 3$

Classificação de uma P.G.

Vejamos como proceder para classificar a progressão geométrica a seguir: $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots)$, sendo $n \geqslant 1$.

Retiramos dois termos quaisquer dessa P.G., por exemplo a_n e a_{n+1}, e fazemos a classificação:

1º caso $q > 1$

a) $a_1 > 0 \Rightarrow a_{n+1} > a_n \longrightarrow$ P.G. crescente

Exemplo: (1, 2, 4, 8,...), onde q = 2

b) $a_1 < 0 \Rightarrow a_{n+1} < a_n \longrightarrow$ P.G. decrescente

Exemplo: (−10, −20, −40, ...), onde q = 2

2º caso $q = 1$

$a_{n+1} = a_n \longrightarrow$ P.G. estacionária

Exemplo: (7, 7, 7, ...), onde q = 1

3º caso $0 < q < 1$

a) $a_1 > 0 \Rightarrow a_{n+1} < a_n \longrightarrow$ P.G. decrescente

Exemplo: (4, 2, 1, ...), onde $q = \frac{1}{2}$

b) $a_1 < 0 \Rightarrow a_{n+1} > a_n \longrightarrow$ P.G. crescente

Exemplo: $\left(-6, -2, -\frac{2}{3}, ...\right)$, onde $q = \frac{1}{3}$

4º caso $q < 0$

a_n e a_{n+1} têm sinais contrários $\longrightarrow$ P.G. alternante

Exemplo: $(-3, 6, -12, ...)$, onde $q = -2$

Exercícios

Resolvidos

1 Obter a razão de cada P.G.:

a) (5, 15, 45, ...) b) (−12, −3, −0,75) c) $(2\sqrt{2}, 4\sqrt{6}, 24\sqrt{2})$

Para achar a razão, basta dividir um termo, a partir do segundo, por seu antecessor. Assim:

a) $q = \frac{15}{5} = 3$

b) $q = \frac{-3}{-12} = \frac{1}{4}$

c) $q = \frac{4\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = 2\sqrt{3}$

2 Dados o termo a_1 e a razão q, determinar os cinco primeiros termos de cada P.G:

a) $a_1 = 4$; $q = 3$

b) $a_1 = 20$; $q = -2$

c) $a_1 = -10$; $q = \frac{1}{5}$

d) $a_1 = \sqrt{3}$; $q = -\sqrt{2}$

Para determinar cada termo da P.G., basta multiplicar o termo anterior pela razão q. Portanto:

a) (4, 12, 36, 108, 324)

b) (20, −40, 80, −160, 320)

c) $\left(-10, -2, -\frac{2}{5}, -\frac{2}{25}, -\frac{2}{125}\right)$

d) $(\sqrt{3}, -\sqrt{6}, 2\sqrt{3}, -2\sqrt{6}, 4\sqrt{3})$

3 Classificar, justificando, as seguintes progressões geométricas:

a) (7, 21, 63, ...)

b) (−9, −90, −900, ...)

c) (5, 5, 5, ...)

d) $\left(-30, 3, -\frac{3}{10}, ...\right)$

a) Crescente, pois cada termo a partir do segundo é maior que o anterior.
b) Decrescente, pois cada termo a partir do segundo é menor que o anterior.
c) Estacionária, pois cada termo a partir do segundo é igual ao anterior.
d) Alternante, pois os termos têm sinais contrários.

Propostos

707 Determine a razão de cada P.G.:

a) (1, 3, 9, ...)

b) (16, 8, 4, ...)

c) (9, 9, 9, ...)

d) (−6, −24, −96, ...)

e) $\left(\frac{1}{4}, 1, 4, ...\right)$

f) $\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, ...\right)$

g) $(xy, x^2y, x^3y, ...)$, onde $x \neq 0$ e $y \neq 0$

h) $(ab, a^3b^2, a^5b^3, ...)$, onde $a \neq 0$ e $b \neq 0$

i) $(2\sqrt{5}, -10, +10\sqrt{5}, ...)$

j) $(-1, -\sqrt{7}, -7, ...)$

708 Dados o termo a_1 e a razão *q*, determine os cinco primeiros termos de cada P.G:

a) $a_1 = -7$; $q = 2$

b) $a_1 = \frac{2}{5}$; $q = \frac{1}{10}$

c) $a_1 = ab$; $q = a^2b^3$, $a \neq 0$ e $q \neq 0$

d) $a_1 = -80$; $q = -\frac{1}{4}$

e) $a_1 = \sqrt{3}$; $q = \frac{1}{\sqrt{3}}$

f) $a_1 = 0{,}5$; $q = -0{,}2$

709 Classifique as seguintes progressões geométricas:

a) $\left(12, 3, \frac{3}{4}, ...\right)$

b) (1, 9, 81, ...)

c) $\left(-15, -5, -\frac{5}{3}, ...\right)$

d) (−1, 1, −1, ...)

e) $(3^3, 3^2, 3, ...)$

f) $(1, \sqrt{3}, 3, ...)$

g) (0,8; 8; 80; ...)

h) (−0,6; −0,6; −0,6; ...)

i) $(1{,}2;\ 1{,}2^2;\ 1{,}2^3;\ ...)$

j) $(5, \sqrt{5}, 1, ...)$

710 (FESP/UPE) A razão da P.G. (a, a + 3, 5a − 3, 8a) é:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

711 (PUC-SP) A seqüência (1, a, b) é uma progressão aritmética e a seqüência (1, b, a) é uma progressão geométrica não constante. O valor de *a* é:

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{4}$ c) 1 d) 2 e) 4

Termo geral de uma P.G.

Vimos que, na P.G. $(a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n)$, cada termo, a partir do segundo, é igual ao produto do termo anterior pela razão *q*, ou seja:

1º termo	$a_1 = a_1 \cdot q^0$
2º termo	$a_2 = a_1 \cdot q^1$
3º termo	$a_3 = a_1 \cdot q^2$
4º termo	$a_4 = a_1 \cdot q^3$
⋮	⋮ ⋮
nº termo	$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Observando que, em cada igualdade, o expoente da razão é uma unidade inferior ao índice do termo considerado, obtivemos a fórmula do termo geral:

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}, \text{ onde: } \begin{cases} a_n\text{: termo geral} \\ a_1\text{: primeiro termo} \\ q\text{: razão} \\ n\text{: número de termos} \end{cases}$$

Exercícios

Resolvidos

1 Determinar o nono termo da P.G. (81, 27, 9, ...).

Leitura do problema: $\begin{cases} a_1 = 81;\ \text{nono termo: } n = 9 \\ a_9 = ? \end{cases}$

Calculamos a razão: $q = \dfrac{9}{27} = \dfrac{1}{3}$

Substituímos esses valores na fórmula do termo geral $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$:

$a_9 = 81 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^{9-1} \Rightarrow a_9 = 3^4 \cdot \dfrac{1^8}{3^8} \Rightarrow a_9 = \dfrac{1}{3^4} \Rightarrow a_9 = \dfrac{1}{81}$

2 Determinar o primeiro termo de uma P.G., em que $a_6 = 96$ e $q = 2$.

Leitura do problema: $\begin{cases} a_6 = 96;\ n = 6 \text{ e } q = 2 \\ a_1 = ? \end{cases}$

Substituímos esses valores na fórmula de termo geral $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$:

$96 = a_1 \cdot 2^{6-1} \Rightarrow 96 = a_1 \cdot 2^5 \Rightarrow 96 = a_1 \cdot 32 \Rightarrow a_1 = 3$

3 Qual é a razão de uma P.G., em que $a_1 = 5$ e $a_4 = 135$?

Leitura do problema: $\begin{cases} a_1 = 5;\ a_4 = 135;\ n = 4 \\ q = ? \end{cases}$

Substituímos esses valores na fórmula do termo geral $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$:

$135 = 5 \cdot q^{4-1} \Rightarrow 135 = 5 \cdot q^3 \Rightarrow q^3 = 27 \Rightarrow q = 3$

4 Determinar o número de termos da P.G. (−1, −2, −4, ..., −512).

Leitura do problema: $\begin{cases} a_1 = -1;\ a_n = -512 \\ n = ? \end{cases}$

Calculamos a razão: $q = \dfrac{-2}{-1} = 2$

Sendo o último termo o próprio a_n, vamos aplicar a fórmula do termo geral $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$:

$-512 = -1 \cdot 2^{n-1} \Rightarrow 512 = 2^{n-1} \Rightarrow 2^9 = 2^{n-1} \Rightarrow 9 = n - 1 \Rightarrow n = 10$

Portanto, a P.G. possui dez termos.

Propostos

712 Determine o décimo termo da P.G. (1, 2, 4, ...).

713 Determine o oitavo termo da P.G. (1, 3, 9, ...).

714 Determine o nono termo da P.G. $\left(\frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, ...\right)$.

715 Determine o primeiro termo da P.G. em que $a_7 = 32$ e $q = 2$.

716 Determine o primeiro termo de uma P.G., em que $a_8 = 1$ e $q = \frac{1}{2}$

717 Qual a razão de uma P.G. em que $a_1 = -3$ e $a_9 = -768$?

718 (UGF-RJ) Calcule a razão de uma P.G. na qual o primeiro termo é $\frac{1}{2}$ e o quarto termo é $\frac{4}{27}$.

719 Qual é o número de termos de uma P.G. cujo primeiro termo é igual a $\frac{1}{2}$, a razão é igual a 2 e o último termo é igual a 128?

720 Quantos termos tem uma P.G. cujo primeiro termo é $\frac{1}{9}$, a razão é 3 e o último termo é igual a 27?

721 Qual é a ordem do termo igual a 192 na P.G. (3, 6, 12, ...)?

722 Qual é a ordem do termo igual a 125 na P.G. $\left(\frac{1}{25}, \frac{1}{5}, 1, ...\right)$?

723 Sendo 1, *x*, 9 três termos consecutivos de uma P.G., determine o valor de *x*.

724 Determine o valor de *x* de modo que a seqüência 6, *x* , 24 forme, nessa ordem, uma P.G. crescente.

725 Para que valor de *x* a seqüência 4x, 2x + 3, x + 5 é uma P.G.?

726 Para que o valor de *n* a seqüência n − 1, 2n + 1, 4n é uma P.G.?

727 Quantos termos tem uma P.G. de razão 2, cujo primeiro termo é 6 e o último é 3 072?

728 (ITA-SP) Dada uma P.G. finita $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{10})$ de modo que $a_1 = 2$ e $a_2 = 6$, pergunta-se se é correta a igualdade: $(a_{10})^{\frac{1}{8}} = 3 \cdot (2)^{\frac{1}{8}}$.
Justifique a resposta.

729 Determine o oitavo termo da P.G. $(1, \sqrt{2}, 2, ...)$ e dê a fórmula de seu termo geral em função do número de termos *n*.

730 Em uma P.G. de cinco termos, a soma dos dois primeiros é 15 e a soma dos dois últimos é 120. Qual é o terceiro termo da P.G.?

731 Numa P.G. de cinco termos, a soma dos dois primeiros é 32 e a soma dos dois últimos é 120. Qual é o terceiro termo da P.G.?

732 Determine quatro números em P.G., sendo a soma dos extremos 140 e a soma dos meios 60.

Representação prática de três termos em P.G.

Sendo *q* (q ≠ 0) a razão de uma P.G. e *x* um número real, podemos formar uma P.G. de três termos:

$$\boxed{\frac{x}{q}, x, x \cdot q}$$

Exercícios

Resolvido

Achar três números em P.G. crescente, sendo 31 a sua soma e 125 o seu produto.

Leitura do problema: $\begin{cases} \text{P.G. crescente, } S_3 = 31,\ P_3 = 125 \\ \text{P.G.} = ? \end{cases}$

Representando três termos em P.G.: $\frac{x}{q}, x, x \cdot q$

$$\begin{cases} \frac{x}{q} + x + xq = 31 & \text{(I) (soma)} \\ \frac{x}{q} \cdot x \cdot xq = 125 & \text{(II) (produto)} \end{cases}$$

$x^3 = 125 \Rightarrow x = 5$

Substituindo $x = 5$ em (I):

$\frac{x}{q} + x + xq = 31$

$\frac{5}{q} + 5 + 5 \cdot q = 31$

$\frac{5 + 5q + 5q^2}{q} = \frac{31q}{q}$

$5q^2 - 26q + 5 = 0$

$q = \frac{26 \pm \sqrt{576}}{10}$ → $q' = \frac{26 + 24}{10} = 5$; $q'' = \frac{26 - 24}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

Devemos considerar somente a solução $q = 5$, pois a P.G. é crescente.

Substituindo $x = 5$ e $q = 5$ nas expressões $\frac{x}{q}, x, x \cdot q$, temos:

$\frac{5}{5}, 5, 5 \cdot 5$

(1, 5, 25)

Propostos

733 A soma de três números inteiros em P.G. é 35 e a diferença entre o primeiro e o terceiro é 15. Determine esses números.

734 Encontre três números em P.G., sendo 26 a sua soma e 216 o seu produto.

735 Escreva a P.G. crescente na qual $a_1 + a_2 = 9$ e $a_1 + a_3 = 15$.

Propriedades de uma P.G.

Na P.G. (−5, 10, −20, 40, −80, ...), temos:

$|10| = \sqrt{(-5) \cdot (-20)}$

$|-20| = \sqrt{10 \cdot 40}$

$|40| = \sqrt{(-20) \cdot (-80)}$

Na P.G. ($a_1, a_2, ..., a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, ...$), temos:

$$|a_k| = \sqrt{a_{k-1} \cdot a_{k+1}}$$

Considerando três termos consecutivos de uma P.G., o segundo, em módulo, é média geométrica dos outros dois.

Na P.G. (**2**, 4, 8, 16, 32, 64, 128, **256**):

$$\left.\begin{array}{l} 4 \text{ e } 128 \\ 8 \text{ e } 64 \\ 16 \text{ e } 32 \end{array}\right\} \text{são os termos eqüidistantes dos extremos 2 e 256}$$

Veja que o produto de dois termos eqüidistantes dos extremos é igual ao produto dos extremos:

2 , 4 , 8 , 16 , 32 , 64 , 128 , 256

$16 \cdot 32 = 512$

$8 \cdot 64 = 512$

$4 \cdot 128 = 512$

extremos: $2 \cdot 256 = 512$

Considerando uma P.G. finita, o produto de dois termos eqüidistantes dos extremos é igual ao produto dos extremos.

Soma dos n termos de uma P.G.

Vejamos como é possível descobrir uma fórmula para a soma dos *n* termos de uma P.G. Para isso, vamos somar os termos da P.G. $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$, com razão $q \neq 1$.

A soma, denominada S_n, será:

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ (I)

A seguir, multiplicamos ambos os membros pela razão *q*:

$q \cdot S_n = a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + a_3 \cdot q + ... + a_{n-1} \cdot q + a_n \cdot q$

Como $a_1 \cdot q = a_2$

$a_2 \cdot q = a_3$

$a_3 \cdot q = a_4$

Então: $q \cdot S_n = a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_n + a_n \cdot q$ (II)

Fazendo a diferença (II) − (I) , temos:

(I) $q \cdot S_n = a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_n + a_n \cdot q$

(II) $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$

$q \cdot S_n - S_n = a_n \cdot q - a_1$

$S_n (q - 1) = a_n \cdot q - a_1$

$$S_n = \frac{a_n \cdot q - a_1}{q - 1}$$

Como $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, ao fazer a substituição, encontraremos outra versão para a mesma fórmula:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot q^{n-1} \cdot q - a_1}{q - 1}$$

$$S_n = \frac{a_1 \cdot q^n - a_1}{q - 1}$$

Portanto:

$$\boxed{S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \text{ ou } S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}}\text{, onde: } \begin{cases} S_n\text{: soma dos } n \text{ termos} \\ a_1\text{: primeiro termo} \\ n\text{: número de termos} \\ q\text{: razão da P.G.} \end{cases}$$

Exercícios

Resolvidos

1 Calcular a soma dos nove primeiros termos da P.G. (3, 6, 12, ...).

Leitura do problema: $\begin{cases} a_1 = 3, n = 9 \\ S_9 = ? \end{cases}$

Calculamos a razão: $q = \frac{6}{3} = 2$.

Utilizamos a fórmula da soma $S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$:

$S_9 = 3 \cdot \frac{1 - 2^9}{1 - 2} \Rightarrow S_9 = 3 \cdot \frac{1 - 512}{-1} \Rightarrow S_9 = 3 \cdot 511 \Rightarrow S_9 = 1\,533$

2 Calcular a soma dos cinco primeiros termos de uma P.G., sabendo que o quinto termo é 162 e que a razão é igual a 3.

Leitura do problema: $\begin{cases} a_5 = 162, n = 5, q = 3 \\ S_5 = ? \end{cases}$

Substituímos os dados na fórmula do termo geral $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ e obtemos o valor de a_1:

$162 = a_1 \cdot 3^4 \Rightarrow 162 = a_1 \cdot 81 \Rightarrow a_1 = \frac{162}{81} \Rightarrow a_1 = 2$

Agora, calculamos a soma S_5 substituindo os dados do problema na fórmula

$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$:

$S_5 = 2 \cdot \frac{3^5 - 1}{3 - 1} \Rightarrow S_5 = 2 \cdot \frac{242}{2} \Rightarrow S_5 = 242$

3 Determinar o número de termos de uma P.G. finita em que $a_1 = 3$, $q = 2$ e $S_n = 3\,069$.

Leitura do problema: $\begin{cases} a_1 = 3, q = 2, S_n = 3\,069 \\ n = ? \end{cases}$

Aplicamos a fórmula $S_n = a_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$:

$$3\,069 = 3 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} \Rightarrow \frac{3\,069}{3} = \frac{2^n - 1}{1} \Rightarrow 1\,023 = 2^n - 1 \Rightarrow 1\,024 = 2^n \Rightarrow 2^{10} = 2^n \Rightarrow n = 10$$

Propostos

736 Calcule a soma dos sete primeiros termos da P.G. (1, 3, 9, ...).

737 Calcule a soma dos oito primeiros termos da P.G. (2, 4, 8, ...).

738 Calcule a soma dos dez primeiros termos da P.G. (−3, −6, −12, ...).

739 Calcule a soma dos seis primeiros termos da P.G. $\left(\dfrac{1}{81}, \dfrac{1}{27}, \dfrac{1}{9}, ...\right)$.

740 Calcule a soma dos onze primeiros termos da P.G. $\left(\dfrac{1}{32}, \dfrac{1}{16}, \dfrac{1}{8}, ...\right)$.

741 Determine a soma dos seis primeiros termos de uma P.G. em que o sexto termo é 160 e a razão é igual a 2.

742 Determine a soma dos cinco primeiros termos de uma P.G. em que o quinto termo é −81 e a razão é igual a 3.

743 Determine a soma dos sete primeiros termos de uma P.G. em que o sétimo termo é igual a 320 e a razão é igual a 2.

744 Determine a soma dos dez primeiros termos de uma P.G. em que o décimo termo é igual a 1 e a razão é igual a −1.

745 Calcule a soma:
$1 + 2^2 + 2^4 + 2^6 + 2^8 + 2^{10}$.

746 Determine o número de termos de uma P.G. na qual $a_1 = 4$, $q = 2$ e $S_n = 2\,044$.

Soma dos termos de uma P.G. infinita

Consideremos a dízima periódica 0,444..., cuja fração geratriz é igual a $\dfrac{4}{9}$ ou seja, $4 : 9 = 0{,}444...$ Assim, podemos escrever:

$$0{,}444... = \frac{4}{9}$$

$$0{,}4 + 0{,}04 + 0{,}004 + ... = \frac{4}{9}$$

Note que essa adição possui infinitas parcelas, que formam uma P.G. infinita de razão $q = 0{,}1$ $(-1 < q < 1)$.

Quando $-1 < q < 1$ e quando *n* tende a infinito $(n \to \infty)$, a expressão q^n tende a zero $(q^n \to 0)$. Nessas condições, a fórmula $S_n = a_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$ fica $S = a_1 \cdot \dfrac{-1}{q - 1}$. Então:

$$\boxed{S = \frac{a_1}{1 - q}, \text{ sendo } -1 < q < 1}$$

Exercícios

Resolvidos

1 Calcular a soma dos termos da P.G. $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \ldots\right)$.

Leitura do problema: $\begin{cases} a_1 = \frac{1}{3}, q = \frac{1}{6} : \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \\ S = ? \end{cases}$

Empregando a fórmula $S = \frac{a_1}{1 - q}$, temos:

$$S = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} \Rightarrow S = \frac{2}{3}$$

2 Calcular o valor de x na equação:

$$\frac{x}{4} + \frac{x}{8} + \frac{x}{16} + \ldots = 16$$

Leitura do problema: $\begin{cases} \text{P.G.} \left(\frac{x}{4}, \frac{x}{8}, \frac{x}{16}, \ldots\right), a_1 = \frac{x}{4}, q = \frac{1}{2} \\ x = ? \end{cases}$

O 1º membro $\frac{x}{4} + \frac{x}{8} + \frac{x}{16} + \ldots$ representa a soma de uma P.G. infinita, onde $a_1 = \frac{x}{4}$ e $q = \frac{1}{2}$.

Empregando a fórmula $S = \frac{a_1}{1 - q}$, temos:

$$S = \frac{\frac{x}{4}}{1 - \frac{1}{2}} = 16$$

$$S = \frac{\frac{x}{4}}{\frac{1}{2}} = 16 \Rightarrow \frac{x}{2} = 16 \Rightarrow x = 32$$

Propostos

747 Determine a soma de cada P.G. infinita:

a) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \ldots\right)$

b) $\left(3, 1, \frac{1}{3}, \ldots\right)$

c) $\left(1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \ldots\right)$

d) $(100, 50, 25, \ldots)$

e) $\left(a^2, \frac{a^2}{2}, \frac{a^2}{4}, \ldots\right)$

748 Escreva a fração geratriz das seguintes dízimas:

a) 0,555...

b) 0,121212...

c) 3,44...

d) −2,66...

749 (Mack-SP) A soma dos termos da progressão $(3^{-1}, 3^{-2}, 3^{-3}, \ldots)$ é:

a) $\frac{1}{2}$

b) 2

c) $\frac{1}{4}$

d) 4

e) 3

750 (FEI-SP) A solução da equação

$x + \frac{x}{3} + \frac{x}{9} + \frac{x}{27} + ... = 60$ é:

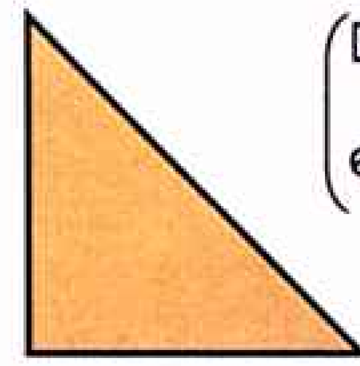
a) indeterminada, pois há infinitos termos
b) 40
c) 1
d) −40
e) −1

751 Resolva em $\mathbb{R}$ as equações:

a) $(x + 1)^2 + \frac{(x + 1)^2}{2} + \frac{(x + 1)^2}{4} + ... = 8$

b) $(x - 1)^2 + \frac{(x - 1)^2}{3} + \frac{(x - 1)^2}{9} + ... = \frac{3}{2}$

752 O lado de um triângulo eqüilátero mede *a*. Unindo os pontos médios de seus lados, obtemos um novo triângulo eqüilátero. Unindo os pontos médios do novo triângulo, obtemos outro, e assim por diante. Determine a soma de todas as áreas dos triângulos assim obtidos.



$\left(\text{Dado: área do triângulo eqüilátero} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right)$

753 (UFSCar-SP) Ao dividirmos um segmento de comprimento *m* em três partes iguais, retiramos a parte central; se para cada um dos segmentos obtidos repetirmos o processo, retirando suas partes centrais, podemos afirmar que a soma dos comprimentos dos segmentos retirados é:

a) 0 b) m c) $\frac{m}{3}$ d) $\frac{m}{2}$ e) $\frac{m}{8}$

754 (FEI-SP) O primeiro termo e a razão de uma P.G. infinita têm o mesmo valor $\frac{1}{\sqrt{2}}$. A soma de seus termos é:

a) $1 + \sqrt{2}$
b) 1
c) $\frac{1}{2}$
d) $\frac{1}{2 + \sqrt{2}}$
e) 0

Produto dos termos de uma P.G. limitada

Vejamos como é possível descobrir uma fórmula para o produto dos *n* termos de uma P.G. limitada. Para isso, vamos multiplicar os termos da P.G. $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$:

(I) $P_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot ... \cdot a_{n-2} \cdot a_{n-1} \cdot a_n$

(II) $P_n = a_n \cdot a_{n-1} \cdot a_{n-2} \cdot ... \cdot a_3 \cdot a_2 \cdot a_1$

Multiplicamos as duas igualdades, membro a membro, e agrupamos os termos correspondentes:

(I) $P_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot ... \cdot a_{n-2} \cdot a_{n-1} \cdot a_n$

(II) $P_n = a_n \cdot a_{n-1} \cdot a_{n-2} \cdot ... \cdot a_3 \cdot a_2 \cdot a_1$

$$P_n^{\ 2} = (a_1 \cdot a_n) \cdot (a_2 \cdot a_{n-1}) \cdot (a_3 \cdot a_{n-2}) \cdot ... \cdot (a_3 \cdot a_{n-2}) \cdot (a_2 \cdot a_{n-1}) \cdot (a_1 \cdot a_n)$$

Como temos *n* fatores e cada fator é igual ao produto dos extremos $a_1 \cdot a_n$, podemos escrever a fórmula: $P_n^{\ 2} = (a_1 \cdot a_n)^n$

Logo:

$$\boxed{|P_n| = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}}$$

Exercícios

Resolvidos

1 Calcular o produto dos oito primeiros termos da P.G. $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \ldots\right)$.

Leitura do problema: $\begin{cases} \text{P.G. } \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \ldots\right) \\ P_8 = ? \end{cases}$

Cálculo de a_8, sendo $a_1 = \frac{1}{8}$, $q = \frac{1}{4} : \frac{1}{8} = 2$ e $n = 8$

$a_8 = \frac{1}{8} \cdot 2^7 = \frac{128}{8} \Rightarrow a_8 = 16$

Logo, o produto P_8 é:

$|P_8| = \sqrt{\left(\frac{1}{8} \cdot 16\right)^8} \Rightarrow |P_8| = \sqrt{2^8} \Rightarrow |P_8| = 2^4$, então $P_8 = 16$

2 Calcular o produto dos dez primeiros termos da P.G. $(1, -2, 4, \ldots)$.

Leitura do problema: $\begin{cases} \text{P.G. } (1, -2, 4, \ldots) \\ P_{10} = ? \end{cases}$

Cálculo de a_{10}, sendo $a_1 = 1$, $q = (-2) : 1$ e $n = 10$

$a_{10} = 1 \cdot (-2)^9 \Rightarrow a_{10} = -2^9$

Logo, o produto P_{10} é:

$|P_{10}| = \sqrt{\left[1 \cdot (-2)^9\right]^{10}} \Rightarrow |P_{10}| = \sqrt{(-2)^{90}} = \sqrt{2^{90}} \Rightarrow |P_{10}| = 2^{45}$

Como no produto P_{10} há cinco fatores negativos, temos:

$P_{10} = -2^{45}$

3 Determinar o produto dos quinze primeiros termos da P.G. $(3^{-1}, 3^{-2}, 3^{-3}, \ldots)$.

Leitura do problema: $\begin{cases} \text{P.G. } (3^{-1}, 3^{-2}, 3^{-3}, \ldots) \\ P_{15} = ? \end{cases}$

Cálculo de a_{15}, sendo $a_1 = 3^{-1}$, $q = 3^{-2} : 3^{-1} = 3^{-1}$ e $n = 15$

$a_{15} = 3^{-1} \cdot (3^{-1})^{14} \Rightarrow a_{15} = 3^{-1} \cdot 3^{-14} = 3^{-15}$

$|P_{15}| = \sqrt{\left[(3^{-1}) \cdot (3^{-15})\right]^{15}} \Rightarrow |P_{15}| = \sqrt{\left(3^{-16}\right)^{15}} = \sqrt{3^{-240}} \Rightarrow P_{15} = 3^{-120}$

Propostos

755 Calcule o produto dos seis primeiros termos em cada P.G.:

a) $(2, 4, 8, \ldots)$

b) $(-2, -4, -8, \ldots)$

c) $(-1, 3, -9, \ldots)$

d) $\left(\frac{1}{125}, \frac{1}{25}, \ldots\right)$

e) $(2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, \ldots)$

756 Calcule o produto dos dezesseis primeiros termos da P.G. $(5^{-4}, 5^{-3}, 5^{-2}, \ldots)$.

757 Dê o produto dos 141 primeiros termos da P.G. $(2^{-56}, 2^{-55}, \ldots)$

758 (Fatec-SP) O produto dos dez primeiros termos da P.G. $(\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4, \ldots)$ é:

a) $2^{\frac{29}{2}}$

b) $2^{\frac{55}{2}}$

c) 2^{55}

d) $2^{10} \cdot 5^5$

e) $\frac{2^5 + 2^{10} \cdot \sqrt{2}}{5}$

Ficha-resumo

Progressão aritmética

P.A. $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$

- Razão: determinamos a diferença entre um termo e seu antecessor:
$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = ... = a_n - a_{n-1} = r$

- Termo geral: $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$

- Soma dos termos: $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$

- Três termos em P.A.: $(x - r, x, x + r)$

Progressão geométrica

P.G. $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$, $a_i \neq 0$ e $1 \leqslant i \leqslant n$

- Razão: efetuamos a divisão entre um termo e seu antecessor:
$\dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{a_3}{a_2} = \dfrac{a_4}{a_3} = ... \dfrac{a_n}{a_{n-1}} = q$

- Termo geral: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

- Soma dos termos: $S_n = a_1 \cdot \left(\dfrac{1 - q^n}{1 - q}\right), q \neq 1$

- Soma dos termos de uma P.G. infinita: $S = \dfrac{a_1}{1 - q}, -1 < q < 1$

- Três termos em P.G.: $\left(\dfrac{x}{q}, x, x \cdot q\right)$

- Produto dos termos de uma P.G. limitada: $|P_n| = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$

Exercícios

Complementares

759 Determine o décimo segundo termo da P.A. $(-8, -3, 2, ...)$.

760 Determine o vigésimo termo da P.A. $\left(\frac{1}{4}, \frac{7}{12}, ...\right)$.

761 Determine o primeiro termo e a razão de uma P.A. em que o primeiro termo é igual à razão e $a_{11} = -55$.

762 Calcule a razão de uma P.A. de 23 termos cujo primeiro termo é 8 e o último é 74.

763 (PUC-SP) Sendo 47 o décimo sétimo termo de uma P.A. e 2,75 a razão, calcule o primeiro termo.

764 Calcule a soma dos 27 primeiros números ímpares positivos.

765 Quantos termos tem uma P.A. cujo primeiro termo (a_1) é $20x - 19y$, o último termo (a_n) é y e a razão (r) é $y - x$?

a) 11 b) 10 c) 9 d) 8 e) 21

766 (Cesgranrio-RJ) Em uma P.A. de 41 termos e de razão 9, a soma do termo do meio com o seu antecessor é igual ao último termo. Então, o termo do meio é:

a) 369 b) 189 c) 201 d) 171 e) 180

767 (Cesgranrio-RJ) O primeiro termo *a* de uma P.A. de razão 13 satisfaz $0 \leq a \leq 10$. Se um dos termos da progressão é 35, o valor de *a* é:

a) 7 b) 8 c) 9 d) 10 e) 3

768 (UFGO) Um painel contém lâmpadas vermelhas e azuis. Em um instante inicial, acendem-se, simultaneamente, uma lâmpada vermelha e 38 azuis e, a partir daí, de 5 em 5 segundos acendem-se vermelhas segundo uma P.G. de razão 2 e apagam-se azuis segundo uma P.A. Após 20 segundos o processo é paralisado e o painel apresenta entre as lâmpadas acesas somente duas azuis.

Então:

1) a razão *r* da P.A.
2) o número a_n de lâmpadas vermelhas acesas
3) o intervalo *I* de tempo em que o número de lâmpadas azuis acesas foi 5 vezes inferior ao de vermelhas acesas são:

a) $r = -9$; $a_n = 16$; $I = [10, 15]$
b) $r = -12$; $a_n = 8$; $I = [15, 20]$
c) $r = 9$; $a_n = 16$; $I = [10, 15]$
d) $r = -9$; $a_n = 16$; $I = [10, 15]$
e) $r = -12$; $a_n = 8$; $I = [15, 20]$

769 (Fatec-SP) Em uma P.A., a soma do terceiro com o sétimo termo vale 30, e a soma dos doze primeiros termos vale 216. A razão dessa P.A. é:

a) 0,5 b) 1 c) 1,5 d) 2 e) 2,5

770 (Fuvest-SP)

a) Prove que numa P.A. $(a_1, a_2, a_3, ...)$, $a_1 + a_9 = a_2 + a_8$.
b) Sabendo que a soma dos nove primeiros termos de uma P.A. é 17 874, calcule seu quinto termo.

771 (PUC-SP) Qualquer que seja *x*, os números $(x - 1)^2$; $x^2 + 1$; $(x + 1)^2$, nessa ordem, formam:

a) uma P.A. de razão 2
b) uma P.A. de razão 2x
c) uma P.G. de razão 2
d) uma P.G. de razão 2x
e) uma seqüência que não é P.A. e nem P.G.

772 (FGV-SP) A soma dos cinqüenta primeiros termos de uma P.A. na qual $a_6 + a_{45} = 160$ é:

a) 3 480
b) 4 000
c) 4 200
d) 4 320
e) 4 500

773 (EEM-SP) Os dois primeiros termos de uma seqüência são $\left(2, \frac{1}{2}, ...\right)$ Calcule a soma dos vinte primeiros termos, supondo que se trata de uma P.A.

774 Determine a soma dos cem primeiros números naturais ímpares.

775 Qual é a soma dos cem primeiros números naturais pares?

776 Determine o décimo termo da P.G. $\left(\frac{1}{64}, -\frac{1}{32}, ...\right)$.

777 Determine o nono termo da P.G. $\left(-\frac{1}{9}, -\frac{1}{3}, ...\right)$.

778 Sabendo que $(3 - x, 5 - x, 11 - x, ...)$ são os três primeiros termos de uma P.G., determine o valor de x e o valor do quarto termo.

779 Calcule a soma dos oito primeiros termos da P.G. $(-5, 10, -20, ...)$.

780 Determine a soma dos termos da P.G. $(1, 3, 9, ..., 729)$.

781 Calcule a soma da P.G. infinita $\left(-1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{16}, ...\right)$.

782 Sendo $2 + \frac{4}{m} + \left(\frac{8}{m}\right)^2 + ... = \frac{14}{5}$, calcule o valor de m.

783 Considere $(8, a_2, a_3, 27)$ uma progressão de razão q. Se $\left(q, 7 - m, \frac{17}{2}\right)$ é uma P.A., então m é igual a:

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5

784 (UFRS) Sabendo que (a_n) é uma P.A. de razão 3; (b_n) é uma P.G. de razão $\frac{1}{2}$; $a_6 = b_1$; e $a_3 = b_2$, então $a_1 + b_1$ é:

a) −31 b) −11 c) 18 d) 21 e) 24

785 (FEI-SP) Em uma P.G. de termos positivos, a diferença entre o quarto termo e o primeiro termo é 21, e a diferença entre o terceiro termo e o primeiro termo é 9. Podemos afirmar que a soma dos oito primeiros termos dessa progressão é igual a:

a) 550
b) 1 024
c) 856
d) 765
e) 800

786 (Mack-SP) A seqüência $(x, xy, 2x)$, $x \neq 0$, é uma P.G. Então, necessariamente:

a) x é um número racional
b) x é um número irracional
c) y é um número racional
d) y é um número irracional
e) $\frac{y}{x}$ é um número irracional

787 (UFCE) Sejam x e y números positivos. Se os números 3, x e y formam, nessa ordem, uma P.G. e se os números x, y e 9 formam, nessa ordem, uma P.A., então $x + y$ é igual a:

a) $\frac{43}{4}$ b) $\frac{45}{4}$ c) $\frac{47}{4}$ d) $\frac{49}{4}$

788 Resolva a equação

$x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} + ... = 48.$

789 (FGV-SP) Em um triângulo, a medida da base, a medida da altura e a medida da área formam, nessa ordem, uma P.G. de razão 8. Então, a medida da base vale:

a) 1 b) 2 c) 4 d) 8 e) 16

790 (PUC-SP) O terceiro e o sétimo termo de uma progressão geométrica valem, respectivamente, 10 e 18. O quinto termo dessa progressão é:

a) 14
b) $\sqrt{30}$
c) $2\sqrt{7}$
d) $6\sqrt{5}$
e) 30

791 (FGV-SP) Um terreno é vendido através de um plano de pagamentos mensais onde o primeiro pagamento de R$ 500,00 é feito um mês após a compra; o segundo, de R$ 550,00, é feito dois meses após a compra; o terceiro, de R$ 600,00, é feito três meses após a compra e assim por diante (isto é, cada pagamento mensal é igual ao anterior acrescido de R$ 50,00).

a) Qual o total pago por um cliente que compra o imóvel em 20 pagamentos?
b) Se o cliente tivesse pago um total de R$ 86 250,00, qual teria sido o número de pagamentos?

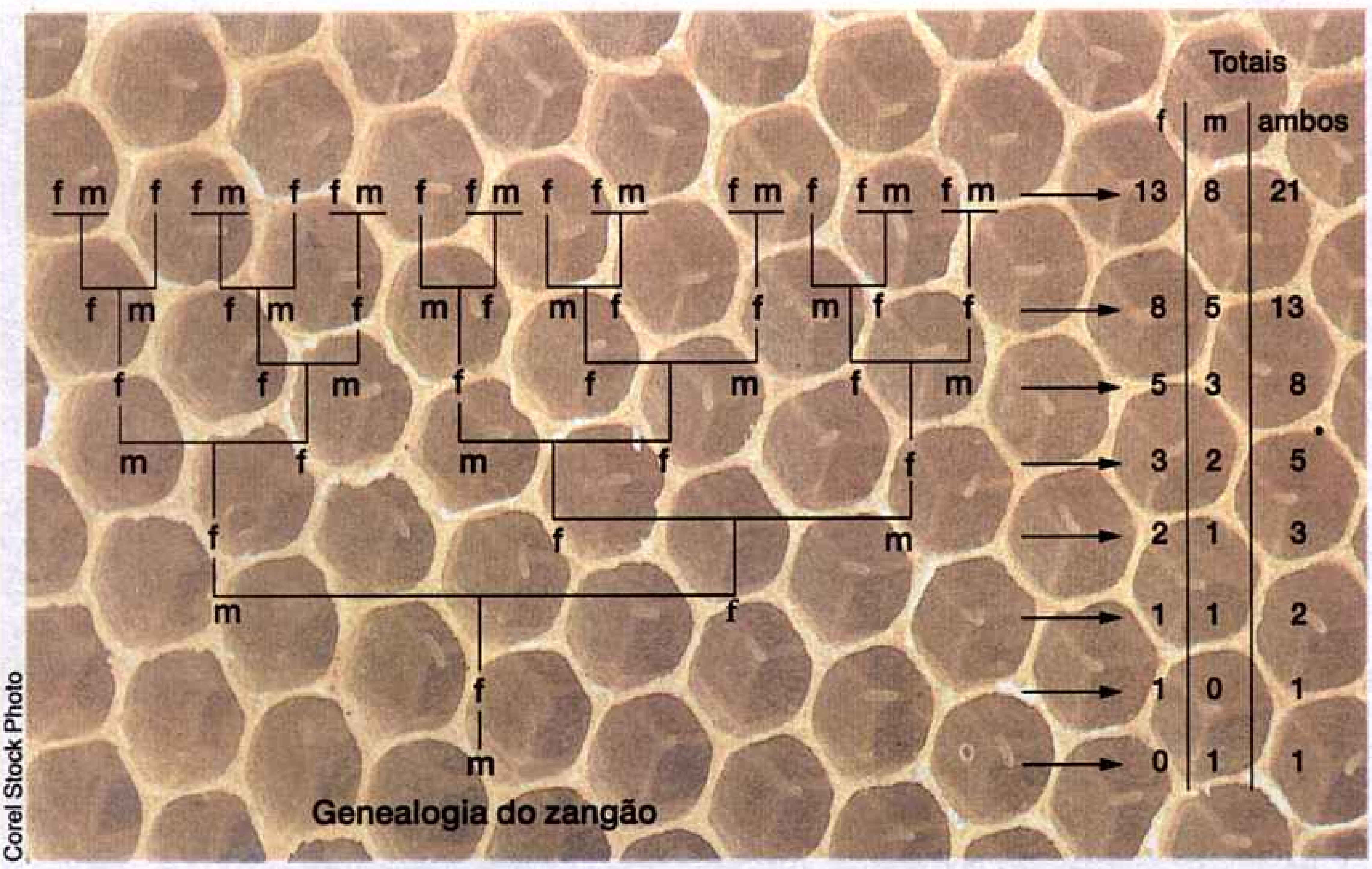
Saiba um pouco mais

A colmeia

Entre os padrões e desenhos encontrados na natureza, um dos mais atraentes é o favo de mel. Os alvéolos de cera destinados a ser receptáculos de mel têm perfil hexagonal, formando um padrão contínuo que preenche o espaço sem deixar interstícios. A única maneira alternativa simples de se conseguir esse efeito são os alvéolos de perfil retangular, de preferência quadrado.

Por que as abelhas escolhem o padrão hexagonal? A resposta matemática é que a determinação do formato leva em conta economia e eficiência.

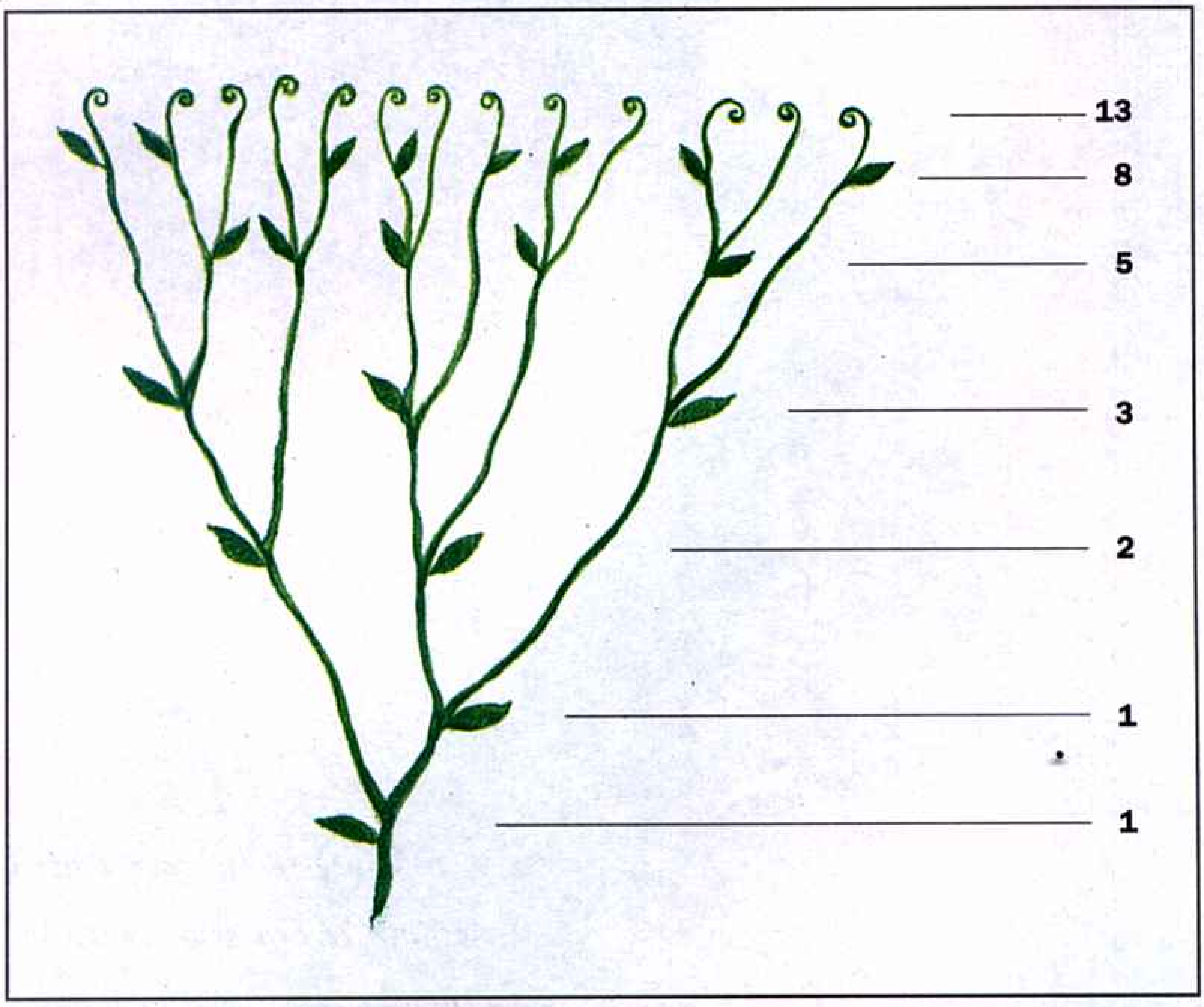
A colmeia é um padrão no espaço. O plano genealógico da abelha é um padrão no tempo. O matemático que interferiu no primeiro pôs a mão também no segundo. O zangão, macho da abelha, nasce de um ovo que não foi fecundado. O ovo fecundado somente gera fêmeas — rainhas ou operárias. Se utilizarmos esse fato da vida para compor um plano genealógico que mostre a linha do zangão por várias gerações, chegaremos a um diagrama como o ilustrado a seguir.



Apurando os totais de todos os machos, todas as fêmeas e todas as abelhas de ambos os sexos que constituem cada geração, verificamos que temos a série de Fibonacci sobreposta e repetida três vezes — uma para os machos, uma para as fêmeas e uma para os dois sexos combinados. Esse bonito resultado está representado no lado direito da figura.

Não são somente o zoólogo, através de seus coelhos, e o entomólogo, através de suas abelhas, que estabelecem contato com os números áureos. O botânico também os encontra em diferentes áreas de seus estudos — na disposição das folhas, na estrutura da pétala, nos flósculos da família das compostas e na disposição das axilas nos ramos da planta. É bem raro encontrar espécimes perfeitos, que correspondam com precisão ao padrão matemático. A margarida do campo pode ter 33 ou às vezes 56 pétalas, que por pouco não empatam com os números de Fibonacci, 34 e 55, mas seria incomum a margarida que tivesse um número de pétalas entre, digamos, 40 e 50.

(Adaptado de: HUNTLEY, H. E. *A Divina Proporção*. pp. 156-9.)



Encontramos uma relação diferente com os números de Fibonacci no número de axilas do talo de uma planta à medida que ela se desenvolve. A figura representa um caso idealmente simples, em que os talos e as flores da espirradeira (*Nerium oleander*) estão dispostos esquematicamente. Vê-se um novo galho que brota da axila e outros galhos que dele crescem. Desde que os galhos velhos e os novos sejam somados, encontra-se um número de Fibonacci em *cada plano horizontal*.