Matrizes

É possível reconhecer a utilidade
de uma idéia sem, contudo,
compreender
como usá-la adequadamente.

Johann Wolfgang Goethe (1749-1832),
poeta, romancista e teatrólogo alemão

1. Matrizes

Definição

Matriz é uma tabela de números formada por *m* linhas e *n* colunas. Dizemos que essa matriz tem ordem $m \times n$ (lê-se: *m* por *n*), sendo $m \geq 1$ e $n \geq 1$.

Representação

Geralmente dispomos os elementos de uma matriz entre parênteses ou entre colchetes.

Exemplos:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -6 \\ 4 & 5 & 8 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$ Lê-se: matriz *A* de ordem dois por três, ou seja, duas linhas e três colunas.

b) $B = \begin{bmatrix} 8 & -6 \\ 4 & 1 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$ Lê-se: matriz *B* de ordem três por dois, ou seja, três linhas e duas colunas.

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & \sqrt{3} & \frac{3}{4} \\ -5 & 2 & 6 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$ Lê-se: matriz *C* de ordem três por três, ou seja, três linhas e três colunas.

Modelo de uma matriz geral

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

Essa matriz representa uma matriz qualquer de ordem $m \times n$.

Um modo simplificado de fazer a representação é:

$$\boxed{A = [a_{ij}]\ m \times n, \text{ sendo } m, n \in \mathbb{N}^*},$$

onde:

- a_{ij}: elemento da matriz, sendo os índices *i* e *j* indicadores da posição do elemento na matriz
- o índice *i* indica a linha, $1 \leq i \leq m$
- o índice *j* indica a coluna, $1 \leq j \leq n$

Exemplos:

a) O elemento a_{13} (lê-se: *a* um três) ocupa a primeira linha e a terceira coluna.

b) O elemento a_{23} (lê-se: *a* dois três) ocupa a segunda linha e a terceira coluna.

Exercícios

Resolvido

Construir a matriz $A = [a_{ij}]_{2 \times 3}$, tal que $a_{ij} = (i + j)^2$.

Observamos que a matriz *A* é do tipo $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$

Sendo a lei de formação $a_{ij} = (i + j)^2$, temos:

$a_{11} = (1 + 1)^2 = 4$ $\quad$ $a_{21} = (2 + 1)^2 = 9$

$a_{12} = (1 + 2)^2 = 9$ $\quad$ $a_{22} = (2 + 2)^2 = 16$

$a_{13} = (1 + 3)^2 = 16$ $\quad$ $a_{23} = (2 + 3)^2 = 25$

Logo: $A = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 16 \\ 9 & 16 & 25 \end{bmatrix}$

Propostos

792 Construa a matriz $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$, tal que $a_{ij} = 2i+j$.

793 Construa a matriz $B = [b_{ij}]_{2 \times 2}$, tal que $b_{ij} = (i - j)^2$.

794 Construa a matriz $C = [c_{ij}]_{2 \times 3}$, com $c_{ij} = i + j - 2$.

2. Tipos de matrizes

Matriz linha

É a matriz que possui uma única linha, ou seja, tem ordem $1 \times n$.

Exemplo:

$C = [1 \quad 2 \quad 3]_{1 \times 3}$

Lê-se: matriz linha de ordem um por três.

Matriz coluna

É a matriz que possui uma única coluna, ou seja, tem ordem m × 1.

Exemplo:

$$D = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

Lê-se: matriz coluna de ordem três por um.

Matriz nula

É a matriz que possui todos os elementos iguais a zero.

Exemplo:

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Lê-se: matriz nula de ordem três por dois.

Matriz quadrada

É a matriz que possui o número de linhas igual ao número de colunas. Nesse caso, dizemos que a matriz é quadrada de ordem *n*.

Exemplos:

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$ Lê-se: matriz quadrada de ordem dois.

b) $B = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$ Lê-se: matriz quadrada de ordem três.

Consideremos a matriz $A = [a_{ij}]$ quadrada de ordem *n*:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

diagonal secundária

diagonal principal

Nessa matriz, a *diagonal principal* é o conjunto dos elementos a_{ij} em que i = j, ou seja: $\{a_{11}, a_{22}, a_{33}, ..., a_{nn}\}$

A *diagonal secundária* é o conjunto dos elementos a_{ij} em que i + j = n + 1.

Exemplo:

$$\text{Seja a matriz: } \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \\ 9 & -7 & 2 \end{bmatrix}$$

diagonal secundária

diagonal principal

O elemento $a_{22} = 4$ é um elemento da diagonal principal. Logo, $i = j = 2$.

O elemento $a_{31} = 9$ é um elemento da diagonal secundária. Logo:

$i + j = n + 1$

$3 + 1 = 3 + 1$

Matriz identidade (I_n)

Chama-se matriz identidade a uma matriz quadrada em que cada elemento da diagonal principal tem o valor 1 e os demais têm o valor zero.

Notação: I_n (*n* representa a ordem da matriz identidade).

Exemplos:

a) $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ Matriz identidade de segunda ordem.

b) $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Matriz identidade de terceira ordem.

Uma matriz identidade pode ser definida do seguinte modo:

$$I_n = [a_{ij}]_{n \times n}, \text{ onde } \begin{cases} a_{ij} = 1, \text{ se } i = j \\ a_{ij} = 0, \text{ se } i \neq j \end{cases}$$

Exercícios

Propostos

795 Escreva:

a) uma matriz linha, cujos elementos formam uma P.A. de 4 elementos.

b) uma matriz coluna, cujos elementos formam uma P.G. de 3 elementos.

c) uma matriz quadrada, cuja diagonal principal tenha elementos que formam uma P.A. de 3 termos e cuja diagonal secundária tenha elementos que formem uma P.G.

3. Matriz transposta

Dada uma matriz A de ordem $m \times n$, chama-se matriz transposta de A, indicada por A^t, a matriz cuja ordem é $n \times m$, sendo as suas linhas ordenadamente iguais às colunas da matriz A.

Exemplos:

a) Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}$, então $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$

Note que:

A primeira linha da matriz A é igual à primeira coluna da matriz A^t.
A segunda linha da matriz A é igual à segunda coluna da matriz A^t.

b) Se $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ -4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, então $B^t = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 5 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$

Note que:

A primeira linha da matriz B é igual à primeira coluna da matriz B^t.
A segunda linha da matriz B é igual à segunda coluna da matriz B^t.

Exercícios

Resolvido

Construir a matriz $M = [m_{ij}]_{3 \times 3}$, tal que: $m_{ij} = \begin{cases} i + j, \text{ se } i = j \\ i - j, \text{ se } i \neq j \end{cases}$ e determinar M^t.

Inicialmente, observamos que a matriz M é do tipo:

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}, \text{ sendo a lei de formação: } m_{ij} = \begin{cases} i + j, \text{ se } i = j \\ i - j, \text{ se } i \neq j \end{cases}$$

Então, temos:

$m_{11} = 1 + 1 = 2$ $\quad m_{12} = 1 - 2 = -1$ $\quad m_{13} = 1 - 3 = -2$
$m_{21} = 2 - 1 = 1$ $\quad m_{22} = 2 + 2 = 4$ $\quad m_{23} = 2 - 3 = -1$
$m_{31} = 3 - 1 = 2$ $\quad m_{32} = 3 - 2 = 1$ $\quad m_{33} = 3 + 3 = 6$

Logo:

$$M = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix} \qquad M^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \\ -2 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

Propostos

796 Escreva a matriz M^t e $(-M^t)^t$, sendo $M = [m_{ij}]_{3 \times 2}$ definida por:

$$m_{ij} = \begin{cases} i + j, \text{ se } i = j \\ i - j, \text{ se } i \neq j \end{cases}$$

797 Dadas as matrizes $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$, sendo $a_{ij} = i^j$ e $B = [b_{ij}]_{2 \times 2}$, sendo $b_{ij} = j^i$, determine:

a) $a_{11} + b_{11}$

b) $a_{12} - b_{21}$

c) $a_{21} \cdot b_{21}$

d) $a_{22}(b_{11} + b_{22})$

798 Escreva a matriz $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$, tal que:

$$a_{ij} = \begin{cases} \text{sen } i \cdot \frac{\pi}{2}, \text{ se } i = j \\ \cos j \cdot \pi, \text{ se } i \neq j \end{cases}$$

799 (UN-MA) Num campeonato de basquete verificou-se o seguinte: Anselmo fez 40 lançamentos e 18 cestas, cometendo 10 faltas. Alexandre fez 32 lançamentos e 22 cestas, cometendo 9 faltas. Andréa e Aluísio fizeram, cada um, 20 lançamentos e 10 cestas, cometendo 4 faltas. A matriz transposta da matriz atletas × resultados é:

a) $\begin{bmatrix} 40 & 18 & 10 \\ 32 & 22 & 9 \\ 20 & 10 & 4 \\ 20 & 10 & 4 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 40 & 10 & 18 \\ 32 & 9 & 22 \\ 20 & 4 & 10 \\ 20 & 4 & 10 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 40 & 32 & 20 & 20 \\ 18 & 22 & 10 & 10 \\ 10 & 9 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 40 & 18 & 10 \\ 32 & 22 & 9 \\ 20 & 10 & 4 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 10 & 18 & 40 \\ 9 & 22 & 32 \\ 4 & 10 & 20 \end{bmatrix}$

4. Igualdade de matrizes

Duas matrizes, *A* e *B*, de mesma ordem serão iguais (A = B) se, e somente se, os seus elementos de mesma posição forem iguais, ou seja:

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{ij}]_{p \times q}$

Sendo A = B, temos:

$m = p$ e $n = q$

$$a_{ij} = b_{ij} \begin{cases} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{cases}$$

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}6 & 5 & 1 \\ -2 & 8 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \text{ e } B = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 5 & 3^0 \\ -\frac{4}{2} & 2^3 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

Notamos que as matrizes *A* e *B* são da mesma ordem, 2 × 3, e todos os elementos de mesma posição são iguais. Logo, A = B.

Exercícios

Resolvido

Determinar os números reais *x* e *y* de modo que as matrizes *A* e *B* sejam iguais, dadas:

$$A = \begin{bmatrix} 5x - 2y & 6 \\ 1 & x + y \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Inicialmente, observamos que os elementos de valor conhecido e de mesma posição são iguais.

Sendo A = B, podemos formar o sistema de equações:

$$\begin{cases} 5x - 2y = 4 & \text{(I)} \\ x + y = 5 & \text{(II)} \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, vamos isolar *x* na equação II:

$x + y = 5$ (II)

$x = 5 - y$ e substituí-lo na equação I:

$5x - 2y = 4$ (I)

$5(5 - y) - 2y = 4 \Rightarrow 25 - 5y - 2y = 4 \Rightarrow y = 3$

Como $x = 5 - y$, temos:

$x = 5 - 3 \Rightarrow x = 2$

Propostos

800 Determine os números reais *x* e *y* em cada caso:

a) $\begin{bmatrix} x + 1 & 3 \\ 1 & x - y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 8 & 3x - 2y \\ x + 3y & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} \log_x 16 & 10 \\ -9 & 2^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ -9 & 64 \end{bmatrix}$

801 Dadas as matrizes *M* e *N* e sabendo que $M = N^t$, determine o valor de *x* e de *y*:

$$M = \begin{bmatrix} x^2 & y \\ x & 2y \end{bmatrix} \text{ e } N = \begin{bmatrix} x & x^2 \\ 2y & y \end{bmatrix}$$

5. Operações com matrizes

Adição de matrizes

A soma de duas matrizes *A* e *B* de mesma ordem é a matriz, também de mesma ordem, obtida com a adição dos elementos de mesma posição das matrizes *A* e *B*.

Exemplo:
Dadas as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}, \text{ a soma será:}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 + 5 & 2 + 7 \\ 3 + 8 & -4 + 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 11 & 0 \end{bmatrix}$$

Sendo as matrizes $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m \times n}$, a soma de *A* e *B* é a matriz

$$\boxed{A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}}$$

Propriedades da adição

Considerando matrizes de mesma ordem, são válidas as propriedades a seguir:

Comutativa $A + B = B + A$

Exemplo:

Dadas as matrizes, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 8 & -4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$,

é valido que:

$$\begin{array}{ccccccc} A & + & B & = & B & + & A \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 8 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 8 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 15 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 15 & 4 \end{bmatrix}$$

Associativa $A + (B + C) = (A + B) + C$

Exemplo:

Dadas as matrizes, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 8 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$,

é válido que:

$$\begin{array}{ccccccccc} A & + & (B & + & C) & = & (A & + & B) & + & C \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 8 & -4 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \right) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 8 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 8 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 12 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 15 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 20 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 20 & 7 \end{bmatrix}$$

Elemento simétrico $A + (-A) = 0$

- A matriz oposta da matriz A de ordem $m \times n$ é a matriz $-A$ de ordem $m \times n$, cujos elementos de mesma posição são simétricos.

Exemplo:

Dada a matriz, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 8 & -4 \end{bmatrix}$, é válido que:

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 8 & -4 \end{bmatrix}} + \underset{(-A)}{\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -8 & 4 \end{bmatrix}} = \underset{0}{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

Lembre-se: a matriz $(-A)$ é a matriz oposta da matriz A.

Elemento neutro $A + 0 = A$

Exemplo:

Dada a matriz, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 8 & -4 \end{bmatrix}$, é válido que:

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 8 & -4 \end{bmatrix}} + \underset{0}{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} = \underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 8 & -4 \end{bmatrix}}$$

Subtração de matrizes

A diferença entre duas matrizes A e B, de mesma ordem, é a matriz obtida pela adição da matriz A com a oposta da matriz B, ou seja:

$$\boxed{A - B = A + (-B)}$$

Exemplo:

Dadas as matrizes, $A = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, a diferença será:

$$A - B = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Multiplicação de um número real por uma matriz

O produto de um número real k por uma matriz A é obtido pela multiplicação de cada elemento da matriz A por esse número real k.

Exemplo:

Para efetuar a multiplicação do número 5 pela matriz

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 4 \\ 2 & 5 & -1 & 0 \\ -3 & 4 & 5 & -4 \end{bmatrix}$, fazemos:

$$5 \cdot A = 5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 4 \\ 2 & 5 & -1 & 0 \\ -3 & 4 & 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 15 & 35 & 20 \\ 10 & 25 & -5 & 0 \\ -15 & 20 & 25 & -20 \end{bmatrix}$$

Exercícios

Resolvidos

1 Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & -5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, calcular:

a) $A + B$ b) $A - C$ c) $A + 2B - C$

a) $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$

b) $A - C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$

c) $A + 2B - C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & -5 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 8 \\ 4 & 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} -11 & 6 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$

2 Determinar o valor de x e y na igualdade:

$\begin{bmatrix} x & 3 \\ 4 & y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 8 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 12 & -6 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} x-1 & 8 \\ 12 & 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 12 & -6 \end{bmatrix}$ Logo: $x - 1 = 4 \Rightarrow x = 5$ e $2y = -6 \Rightarrow y = -3$

Propostos

802 Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, determine:

a) $A + B$ b) $B - C$ c) $2A + B$ d) $A - 3B + C$ e) $-4A + 3B + 2C$

803 Efetue as operações:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 5 \end{bmatrix} =$

b) $2\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix} =$

c) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} =$

d) $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} =$

804 Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$, determine a matriz X em cada caso:

a) $A + X = B$ b) $X + B = A$ c) $X - B = 2A$ d) $2A + X = 3B$

805 Calcule o valor de x e y nas seguintes igualdades:

a) $\begin{bmatrix} -3 & x \\ 4 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y & -5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -4 & 3 \\ x & 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} y & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$

c) $2\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & y \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} x & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ -11 & 4 \end{bmatrix}$

806 Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -8 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, resolva os sistemas:

a) $\begin{cases} X + Y = 3A + B \\ X - Y = A - 5B \end{cases}$ b) $\begin{cases} X + Y = 2A + 3B \\ X - Y = 4A - B \end{cases}$

807 Sendo as matrizes: $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 4 & 2 & -6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$, determine as matrizes X, Y e Z de modo que:

a) $X = (A - 2B)$ b) $Y = 3A + 2C^t$ c) $Z = 3\left(A + \frac{1}{2}B - C^t\right)$

808 (FURRN) Se $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, então a matriz $2A - \frac{1}{2} \cdot B$ é:

a) $\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ \frac{7}{2} & 2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{9}{2} & 2 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ \frac{7}{2} & 0 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

Multiplicação de matrizes

A multiplicação entre matrizes exige uma técnica mais elaborada que as operações já vistas.

Exemplo:

Dadas as matrizes:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$ e $B = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$, o produto A · B será a matriz

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

Fazemos: $A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

$C_{11} = [1 \cdot (-3)] + (2 \cdot 4) = -3 + 8 = 5$

$C_{12} = (1 \cdot 5) + (2 \cdot 2) = 5 + 4 = 9$

$C_{21} = [3 \cdot (-3)] + (4 \cdot 4) = -9 + 16 = 7$

$C_{22} = (3 \cdot 5) + (4 \cdot 2) = 15 + 8 = 23$

Observe, por exemplo, que para obter o elemento C_{12} da matriz A · B multiplicamos o primeiro elemento da linha 1 de *A* pelo primeiro elemento da coluna 2 de *B*, o segundo elemento da linha 1 de *A* pelo segundo elemento da coluna 2 e somamos esses produtos.

Logo, $A \cdot B = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 7 & 23 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$

Esse produto foi possível porque o número de colunas da matriz *A* é igual ao número de linhas da matriz *B*.

Considerando as matrizes $A = [a_{ik}]_{m \times p}$ e $B = [b_{kj}]_{p \times n}$, o produto A · B é a matriz $C = [c_{ij}]_{m \times n}$, sendo cada elemento e_{ij} obtido através da soma dos produtos dos elementos da i-ésima linha de *A* pelos elementos correspondentes da j-ésima coluna de *B*.

A multiplicação de duas matrizes, *A* e *B*, só é possível quando o número de colunas da matriz *A* for igual ao número de linhas da matriz *B*, tendo a matriz C = A · B o mesmo número de linhas de *A* e o mesmo número de colunas de *B*:

$$A_{m \times p} \cdot B_{p \times n} = C_{m \times n}$$

Propriedades da multiplicação

A multiplicação de matrizes admite as seguintes propriedades:

Associativa $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

Distributiva $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ e $C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B$

- A propriedade comutativa não é válida na multiplicação de matrizes, pois geralmente $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Exemplo:

Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, temos:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 + 3 \cdot 3 & 1 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 \\ 2 \cdot 0 - 4 \cdot 3 & 2 \cdot (-2) - 4 \cdot 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ -12 & -8 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 1 - 2 \cdot 2 & 0 \cdot 3 - 2 \cdot (-4) \\ 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 3 \cdot 3 + 1 \cdot (-4) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & 8 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$$

Observe que $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Exercícios

Resolvidos

1 É possível efetuar a multiplicação de uma matriz $A = [a_{ij}]_{2 \times 4}$ por uma matriz $B = [b_{ij}]_{3 \times 4}$?

Temos $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \end{bmatrix}$

Supondo que *C* é uma matriz, tal que $A \cdot B = C$, então para obter c_{11} somaríamos os produtos de cada elemento da primeira linha de *A* pelo correspondente elemento da primeira coluna de *B*, isto é, primeiro com primeiro, segundo com segundo etc. Mas não é possível multiplicar o quarto elemento da primeira linha de *A* pois não há o quarto elemento da primeira coluna de *B*. Logo, não é possível efetuar $A \cdot B$.

2 Efetuar a multiplicação: $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$.

Vemos que a multiplicação é possível, pois o número de colunas da primeira matriz é igual ao número de linhas da segunda matriz.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$$

$2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 11$

$-1 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 5$

$2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 1 \cdot (-6) = 17$

$-1 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 2 \cdot (-6) = 4$

Então, o produto é a matriz $\begin{bmatrix} 11 & 17 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$

Propostos

809 Efetue as multiplicações:

a) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 7 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -2 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 8 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

810 Calcule $A \cdot B$ e $B \cdot A$ dadas as matrizes: $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -1 \\ 0 & 9 & -3 \end{bmatrix}$.

811 Dadas as matrizes $M = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, $N = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$ e $P = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$, calcule $(M + N) \cdot P$.

812 Resolva a equação matricial: $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$.

813 (Fuvest-SP) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & b \\ b & 1 \end{bmatrix}$, determine *a* e *b*, de modo que $A \cdot B = I$, sendo *I* a matriz identidade.

814 (Cesgranrio-RJ) Se $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, então $MN - NM$ é:

a) $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

815 (UCS-BA) A equação matricial $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ é verdadeira se x, y e z são tais que $x + y + z$ é igual a:

a) -3 b) -1 c) 0 d) 1 e) 3

816 (Fuvest-SP) É dada a matriz $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Calcule P^2 e P^3.

b) Qual a expressão de P^n?

► $P^2 = P \cdot P$

$P^3 = P \cdot P \cdot P$

$P^n = \underbrace{P \cdot P \cdot P \cdot \ldots P}_{n \text{ fatores}}$

6. Matriz inversa

Consideremos A uma matriz quadrada de ordem n. Dizemos que A^{-1} é a matriz inversa de A se, e somente se, $A \cdot A^{-1} = I_n$ e $A^{-1} \cdot A = I_n$, ou seja:

$\boxed{A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n}$, onde:

- A é a matriz dada.
- A^{-1} é a matriz inversa da matriz A.
- I_n é a matriz identidade de mesma ordem da matriz A.

Exemplos:

A matriz $B = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ é inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{3}{2} & -4 \end{bmatrix}$, pois:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{3}{2} & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cdot 8 - 1 \cdot 3 & \frac{1}{2} \cdot (-2) - 1 \cdot (-1) \\ \frac{3}{2} \cdot 8 - 4 \cdot 3 & \frac{3}{2} \cdot (-2) - 4 \cdot (-1) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{3}{2} & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{3}{2} & 8 \cdot (-1) - 2 \cdot (-4) \\ 3 \cdot \frac{1}{2} - 1 \cdot \frac{3}{2} & 3 \cdot (-1) - 1 \cdot (-4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercícios

Resolvidos

1 Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, determinar a inversa, A^{-1}.

Fazendo a matriz $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, temos $A \cdot A^{-1} = I_2$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2a + c & 2b + d \\ 3a + 2c & 3b + 2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fazendo a igualdade, temos: $\begin{cases} 2a + c = 1 \\ 3a + 2c = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2b + d = 0 \\ 3b + 2d = 1 \end{cases}$

Resolvendo os sistemas, encontramos: $a = 2$; $b = -1$; $c = -3$ e $d = 2$.

Assim, a matriz inversa da matriz A é $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$.

2 Determinar a matriz inversa da matriz $M = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

Fazemos: $M^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

Como $M \cdot M^{-1} = I_2$, temos:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -a + 2c & -b + 2d \\ -a + 3c & -b + 3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -a + 2c = 1 \\ -a + 3c = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -b + 2d = 0 \\ -b + 3d = 1 \end{cases}$$

Resolvendo os sistemas, encontramos:
$a = -3$; $b = 2$; $c = -1$ e $d = 1$.

Assim: $M^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Propostos

817 Determine a matriz inversa das seguintes matrizes:

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

d) $D = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

818 (FAAP-SP) Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, escreva a matriz *B*, tal que $A \cdot B = I$, sendo $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B \cdot A = I$.

819 (F.M.Santos-SP) A matriz inversa de $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ é:

a) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

820 (FEI-SP) Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, determine $X = (A \cdot B^{-1})^t$.

821 (FAAP-SP) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, calcule $A \cdot B + A^{-1}$.

822 (Fatec-SP) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, conclui-se que:

a) AB é nula
b) BA é não-nula
c) A^2 é nula
d) B^2 é nula
e) $A + B$ é nula

823 (Vunesp) Considere as matrizes reais 2×2 do tipo: $A(x) = \begin{bmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ \operatorname{sen} x & \cos x \end{bmatrix}$.

a) Calcule o produto $A(x) \cdot A(x)$.
b) Determine todos os valores de $x \in [0,2\pi]$ para os quais $A(x) \cdot A(x) = A(x)$.

824 (PUC-RS) Se

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 1 \\ -2 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -5 & 9 \end{bmatrix},$$

então $a + b$ é igual a:

a) 3
b) 5
c) 7
d) 9
e) 10

825 (Unirio-RJ) Considere as matrizes

$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

A adição da transposta de *A* com o produto de *B* por *C* é:

a) impossível de se efetuar, pois não existe o produto de *B* por *C*
b) impossível de se efetuar, pois as matrizes são todas de tipos diferentes
c) impossível de se efetuar, pois não existe a soma da transposta de *A* com produto de *B* por *C*
d) possível de se efetuar e seu resultado é do tipo 2×3
e) possível de se efetuar e seu resultado é do tipo 3×2

Ficha-resumo

Definição de matriz m × n

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

onde

m: número de linhas, $m \in \mathbb{N}^*$

n: número de colunas, $n \in \mathbb{N}^*$

Classificação

$m = 1$: matriz linha
$n = 1$: matriz coluna
$m = n$: matriz quadrada
$m \neq n$: matriz retangular

$I_n = [a_{ij}]_{n \times n}$: matriz identidade, onde: $\begin{cases} a_{ij} = 1 \text{ se } i = j \\ a_{ij} = 0 \text{ se } i \neq j \end{cases}$

A matriz transposta de $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ é A^t.

$A^t = [b_{ji}]_{n \times m}$, sendo $a_{ij} = b_{ji}$ para $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$

Igualdade de matrizes

Sendo as matrizes

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{ij}]_{p \times q}$, teremos $A = B$ quando $m = p$, $n = q$ e $a_{ij} = b_{ij}$: $\begin{cases} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{cases}$

Operações

Adição

Sendo $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m \times n}$, temos: $\boxed{A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}}$

Propriedade comutativa: $A + B = B + A$
Propriedade associativa: $A + (B + C) = (A + B) + C$
Elemento simétrico: $A + (-A) = 0$
Elemento neutro: $A + 0 = A$

Subtração

$\boxed{A + B = A + (-B)}$ *A* e *B* são matrizes de mesma ordem.

Multiplicação de um número real por matriz

Para calcular o produto de um número real *k* por uma matriz *A*, multiplicamos cada elemento da matriz *A* por esse número real *k*.

Multiplicação de matriz por matriz

Sendo $A = (a_{ik})_{m \times p}$, $B = (b_{kj})_{p \times n}$ e $C = (c_{ij})_{m \times n}$, temos:

$$\boxed{C = A \cdot B \Leftrightarrow c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{ip} \cdot b_{pj}}$$

Matriz inversa

$\boxed{A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n}$, onde *A* é a matriz dada, de ordem *n*; A^{-1} é a matriz inversa da matriz *A*; e I_n é a matriz identidade de mesma ordem da matriz *A*.

Exercícios

Complementares

826 Construa a matriz $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$, tal que:

$$\begin{cases} a_{ij} = 1, \text{ se } i = j \\ a_{ij} = 0, \text{ se } i \neq j \end{cases}$$

827 Construa a matriz $B = [b_{ij}]_{3 \times 3}$, tal que $b_{ij} = (i + j)^2$.

828 (Mack-SP) Sejam as matrizes

$$\begin{cases} A = (a_{ij})_{4 \times 3}, & a_{ij} = i^j \\ \quad e & \\ B = (b_{ij})_{3 \times 4}, & b_{ij} = j^i \end{cases}$$

Se $C = A \cdot B$, então c_{22} vale:

a) 3
b) 14
c) 39
d) 84
e) 258

829 (Fuvest-SP) Sejam as matrizes:

$A = [a_{ij}]_{4 \times 7}$, onde $a_{ij} = i - j$

$B = [b_{ij}]_{7 \times 9}$, onde $b_{ij} = i$

$C = [c_{ij}]$, tal que $C = A \cdot B$

O elemento c_{63} da matriz *C* é:

a) −112
b) 112
c) −18
d) −9
e) não existe

830 Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$,

$B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 0 & 8 & 2 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$

Determine:

a) $A + C$
b) $A - B^t$
c) $(A - C)^t + B$
d) $(B^t + C) - A$

831 Calcule o valor de *x* e *y* na igualdade:

$$\begin{bmatrix} x & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ y & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$$

832 Efetue as seguintes multiplicações:

a) $\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} =$

b) $\begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \end{bmatrix} =$

c) $\begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix} =$

833 Considerando as matrizes $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, calcule $(A - 2B) \cdot A$.

834 Se $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$, determine $A \cdot B^t$.

835 Se a matriz M é igual a $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, calcule $(M^T)^2$.

836 Dadas as matrizes $M = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ e $N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, determine o elemento c_{12} da matriz $C = M \cdot N^t$.

837 Determine a matriz inversa das seguintes matrizes:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

838 Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, calcule A^2.

► $A^2 = A \times A$

839 Considerando as matrizes $E = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ e $F = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, determine $(E \cdot F^{-1})^t$.

840 Dadas as matrizes

$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, calcule $A \cdot B - B^{-1}$.

841 (Fatec-SP) Uma indústria automobilística produz carros X e Y nas versões *standard*, luxo e superluxo; peças A, B e C são utilizadas na montagem desses carros. Para um certo plano de montagem é dada a seguinte informação:

	Carro X	Carro Y
Peça A	4	3
Peça B	3	5
Peça C	6	2

	Standard	Luxo	Superluxo
Carro X	2	4	3
Carro Y	3	2	5

Em termos matriciais, temos:

matriz peça-carro $= \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 5 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$ e matriz carro-versão $= \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$. A matriz peça-versão é:

a) $\begin{bmatrix} 17 & 22 & 27 \\ 21 & 28 & 34 \\ 18 & 28 & 22 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 17 & 22 & 27 \\ 21 & 22 & 34 \\ 18 & 28 & 28 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 17 & 22 & 27 \\ 21 & 34 & 22 \\ 18 & 28 & 28 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 17 & 22 & 27 \\ 21 & 28 & 28 \\ 18 & 34 & 22 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 17 & 22 & 27 \\ 21 & 22 & 28 \\ 18 & 34 & 28 \end{bmatrix}$

842 (UFPR) Resolvendo a equação:

$$\begin{bmatrix} x & -4 \\ x^2 & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 2 \\ y & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 2x - 4 \\ x^3 + y^2 & 8 \end{bmatrix}$$

encontramos para valores de x e y, respectivamente:

a) 3; 2
b) $\pm\sqrt{\frac{2}{2}}$; -5
c) $-\frac{7}{3}$; $\frac{4}{5}$
d) 6; $\pm\sqrt{3}$
e) $\pm\sqrt{5}$; -2

843 Determine $(A - A^{-1})^2$, sabendo que $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$.

844 Com relação à matriz $M = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$, mostre que $(M^t)^2 + 3M^t - 7 \cdot I_2 = 0$.

No começo, era o número

Da noção dos números até os diversos sistemas de numeração escrita, transcorre uma evolução multimilenar e complexa

Admite-se que certas espécies animais são capazes de perceber diferenças quantitativas concretas: a falta de um pintinho na ninhada, a maior ou menor abundância de alimento... As crianças, da mesma forma, bem antes de saberem falar, manifestam uma espécie de percepção quantitativa, evidentemente associada a objetos familiares. Com o desenvolvimento da linguagem e com o uso da palavra, tal percepção quantitativa aumentou tanto e chegou a tal nível de sofisticação que permitiu a determinadas culturas dar nome a imensidades de coisas, como as estrelas do céu, as areias do mar; permitiu-lhes até mesmo tentar conter o infinito nas redes do número.

O que significa contar

Dentre todos os poderes conferidos pela palavra, um dos mais antigos é talvez o de dar nome aos números. Acaso a "numeração" não consiste em um ordenamento, uma organização do real e das representações que dele fazemos?

Em certos idiomas europeus, por exemplo, observa-se uma grande semelhança ou mesmo a quase identificação de pares de verbos dos quais um designa enumeração e outro, relato: *compter/raconter* (francês); *contare/raccontare* (italiano); *contar/contar* (espanhol e português); *comptar/contar* (catalão); *zählen/erzählen* (alemão). E no idioma inglês, a palavra *tale* é hoje empregada com o significado de "conto" ou "relato", mas a palavra *teller* designa tanto um contador de histórias como um caixa de banco. Não surpreende, assim, que a mesma semelhança seja encontrada nos idiomas indo-europeus mais antigos.

O termo sânscrito que designa número, *sankhya*, expressa etimologicamente um modo de dizer as coisas. O termo grego *logos*, que designa tanto "conta" como "palavra" e "relato", recebeu essas diversas acepções do antigo significado do verbo *lego*: reunir, escolher, colher — e daí, contar, enumerar, numerar e, conseqüentemente, relatar, dizer. Também a palavra grega *arithmos* designa o número, no sentido aritmético, e igualmente a ordem, o arranjo ou disposição. Tal ambivalência veio a persistir no termo latino *numerus* e seus derivados: o adjetivo *numerosus* quer dizer "numeroso" e também "harmonioso".

Qualquer que seja a capacidade de determinado idioma para designar os números, é evidente que os termos que designam os números vêm de uma época antiqüíssima da história desse idioma. E são termos, aliás, que mostram surpreendente estabilidade ao longo do tempo. São ecos do esforço imemorial do homem para expressar a diversidade do real, e permitem-nos às vezes vislumbrar o processo pelo qual diversas ordens de quantidade receberam seus nomes.

Ordenar, reunir, numerar

Qualquer sistema de números, por mais elementar que seja, supõe a adoção de alguns símbolos (palavras, pictogramas, sinais gráficos) estruturados em dois princípios: um é o princípio de ordenamento ou disposição, que permite distinguir o primeiro símbolo (um) do segundo (dois) e eventualmente do terceiro (três), e assim por diante; e o outro é o princípio de grupamento, que interrompe a produção de símbolos individuais diferentes, estabelecendo um símbolo de ordem superior, cuja combinação com os precedentes permite reiniciar o sistema. Assim, "um, dois, três ... dez, dez-um, dez-dois ... dez-dez ou cem, cento e um, cento e dois..." é um sistema baseado em 10, ou seja, um sistema decimal.

Outras bases, porém, já foram ou ainda são utilizadas, como a base 2 (sistema binário), a base 5 (sistema quinário), a base 20 (sistema vigesimal), a base 60 (sistema sexagesimal). Parece provável que a escolha das bases 5, 10 ou 20 estivesse inicialmente ligada a particularidades do corpo humano, e ainda se percebem vestígios dessa ligação em determinadas numerações orais: na língua *api*, falada nas Novas Hébridas, a palavra *luna* designa a mão e o número 5; o nome do número 2 é *lua*, e o do número 10 é *lualuna*, o que significa literalmente duas mãos.

É espantosa a diversidade das regras segundo as quais se formam os nomes dos números e que manifestam a diversidade cultural e lingüística.

É preciso admitir nosso pouco conhecimento da maneira prática pela qual se faziam cálculos nos tempos antigos. Certamente, os números tinham de ser representados, e já possuíam, no idioma, uma designação precisa. Paralelamente à numeração verbal, havia o que chamaremos de numeração figurada — quer uma numeração gestual que se valia dos dedos (numeração digital), quer uma representação que precisasse de alguma base material: um ábaco, uma tabela de contar, um tabuleiro de areia ou uma corda com nós. Tal representação numérica, em certos casos, é o antecedente de algumas formas de numeração escrita.

Museu do Louvre, Paris. c Photo RMN - Hervé Lewandowski

Baixo-relevo pintado de Nefertiabet, que mostra uma mesa de oferendas (Egito, 2700 a.C.). Podem-se identificar vários algarismos da numeração hieroglífica egípcia (embaixo, à direita, o hieróglifo 1 000 aparece quatro vezes).

(Adaptado de: LÉVY, Tony. In: *O Correio da Unesco*. Rio de Janeiro, Fundação Getúlio Vargas, n. 1, ano 22, pp. 9-11.)