Determinantes

Erros são, no final das contas,
fundamentos da verdade.
Se um homem não sabe o que uma coisa é,
já é um avanço do conhecimento saber o que
ela não é.

Carl Jung (1875-1961), psicólogo e psiquiatra suíço,
fundador da psicologia analítica

1. Estudo dos determinantes

Determinante de uma matriz quadrada é um número real que associamos a essa matriz segundo algumas regras.

Notação: sendo a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$, o seu determinante é indicado como $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$

Determinante de uma matriz quadrada de 1ª ordem.

O determinante da matriz $A = [a_{11}]_{1 \times 1}$ é igual ao número que a constitui:

$$\boxed{\det A = a_{11}}$$

Observe que o determinante de uma matriz quadrada de 1ª ordem é o número real de igual valor ao do elemento a_{11}.

Exemplo:

O determinante da matriz $A = [3]_{1 \times 1}$ é $\det A = 3$.

Determinante de uma matriz quadrada de 2ª ordem.

O determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2 \times 2}$, é o número real obtido através do produto dos elementos da diagonal principal *menos* o produto dos elementos da diagonal secundária:

$$\boxed{\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}}$$

Exemplo:

Determinante da matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$ é:

$\det B = 9 \cdot 1 - 2 \cdot 4 \Rightarrow \det B = 9 - 8 \Rightarrow \det B = 1$

Exercícios

Resolvido

Calcular o determinante da matriz $M = \begin{bmatrix} \sqrt{2}+1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & \sqrt{2}-1 \end{bmatrix}$.

$\det M = (\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1) - \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = (2 - 1) - 3$, logo, $\det M = -2$

Proposto

845 Calcule o determinante das seguintes matrizes:

a) $A = [5]$

b) $B = [\pi]$

c) $C = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$

d) $D = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \sqrt{8} \\ 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$

e) $E = \begin{bmatrix} \cos x & \operatorname{sen} 2x \\ 1 & 2 \operatorname{sen} x \end{bmatrix}$

2. Cofator de um elemento a_{ij}

Cofator de um elemento a_{ij} de uma matriz quadrada é o resultado do produto de $(-1)^{i+j}$ pelo determinante D_{ij}, obtido pela eliminação da linha e da coluna do elemento a_{ij}:

$$\text{cof}(a_{ij}) = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$$

Exemplo:

Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$, vamos calcular:

a) cofator do elemento a_{11}:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{cof}(a_{11}) = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (15 + 4) = 19$$

b) cofator do elemento a_{21}:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{cof}(a_{21}) = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -1 \cdot (10 - 12) = 2$$

c) cofator do elemento a_{32}:

$$\text{cof}(a_{32}) = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1 + 3) = -2$$

Exercícios

Proposto

846 Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$, determine:

a) $\text{cof}(a_{12})$
b) $\text{cof}(a_{31})$
c) $\text{cof}(a_{22})$
d) $\text{cof}(a_{13})$
e) $\text{cof}(a_{23})$
f) $\text{cof}(a_{33})$

3. Teorema de Laplace

O determinante de uma matriz quadrada de ordem n ($n \geq 2$) é obtido pela soma dos produtos dos elementos de qualquer linha ou coluna pelos respectivos cofatores.

Exemplo:

Para calcular o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 7 \end{bmatrix}$, vamos considerar a 1ª coluna, pois a presença do elemento zero facilita os cálculos:

$$\det A = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} +$$

$$+ 4 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$\det A = 1 \cdot 1 \cdot 22 + 0 + 4 \cdot 1 \cdot (-16)$

$\det A = 22 - 64$

$\det A = -42$

Vamos desenvolver o cálculo do mesmo determinante, utilizando agora a 3ª coluna:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\det A = 3 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} +$$

$$+ 7 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$\det A = 3 \cdot 1 \cdot (-16) + 2 \cdot (-1) \cdot 11 + 7 \cdot 1 \cdot 4$

$\det A = -42$

Em geral, o determinante de uma matriz quadrada de 3ª ordem

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$ é obtido pela aplicação do teorema de Laplace.

Podemos escolher os elementos da 1ª linha, por exemplo, e teremos:

$$\det A = a_{11} \cdot (a_{22} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32}) - a_{12} \cdot (a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{31}) + a_{13} \cdot (a_{21} \cdot a_{32} - a_{22} \cdot a_{31})$$

Logo, o determinante da matriz *A* é o número real:

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}$$

$$\boxed{\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11}}$$

Exercícios

Proposto

847 Calcule o determinante das seguintes matrizes:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 3 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ c) $C = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 6 & 2 \end{bmatrix}$

4. Regra de Sarrus

O determinante de uma matriz quadrada de 3ª ordem pode também ser obtido através de uma regra prática denominada *regra de Sarrus*.

Consideremos a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

1º passo Escrevemos a matriz e repetimos a 1ª e a 2ª colunas à direita da 3ª:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

2º passo Efetuamos a adição algébrica dos produtos dos elementos indicados pelas setas conforme o esquema:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

trocar os sinais dos produtos

conservar os sinais dos produtos

$$\boxed{\begin{aligned} \det A = {} & a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - \\ & - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} \end{aligned}}$$

Exemplo:

Vamos calcular o seguinte determinante: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

Aplicando a regra de Sarrus, temos:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 4 & 1 & 0 \end{array}$$

trocar os sinais — conservar os sinais

Logo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (1 \cdot 5 \cdot 4) + (2 \cdot 2 \cdot 1) + (-3 \cdot 4 \cdot 0) - (-3 \cdot 5 \cdot 1) - \\ - (1 \cdot 2 \cdot 0) - (2 \cdot 4 \cdot 4) = 7$$

Vejamos a seguir outra versão da regra de Sarrus:

1ª etapa

Conservar os sinais dos produtos.

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23} \\ & & & a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \\ & & & a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} \end{array}$$

2ª etapa

Trocar os sinais dos produtos.

$$\begin{array}{cccc} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{33} \cdot a_{12} \cdot a_{21} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} & & & \\ a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} & & & \end{array}$$

Exemplo:

Vamos calcular a determinante $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ usando essa versão da regra de Sarrus.

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 2 & -3 & \\ & 4 & 5 & 2 & \\ -(4 \cdot 2 \cdot 4) & 1 & 0 & 4 & +(1 \cdot 2 \cdot 2) \\ -(-3 \cdot 5 \cdot 1) & & & & +(1 \cdot 5 \cdot 4) \\ -(1 \cdot 2 \cdot 0) & & & & +(-3 \cdot 4 \cdot 0) \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (1 \cdot 2 \cdot 2) + (1 \cdot 5 \cdot 4) + (-3 \cdot 4 \cdot 0) - (4 \cdot 2 \cdot 4) - -(-3 \cdot 5 \cdot 1) - (1 \cdot 2 \cdot 0) = 4 + 20 + 0 - 32 + 15 + 0 = 7$$

Exercícios

Resolvidos

1 Calcular os determinantes:

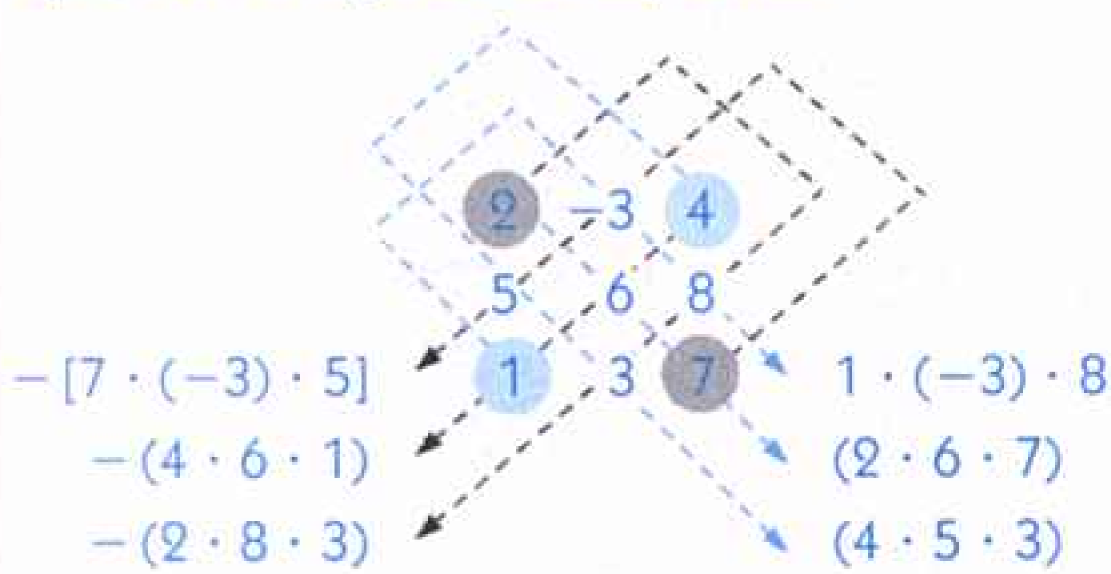
a) $\begin{vmatrix} 8 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 7 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 8 \end{vmatrix} = 8$

b) $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 1 \cdot (-4) = 6 + 4 = 10$

c) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 7 \end{vmatrix}$

Aplicando a regra de Sarrus, temos:

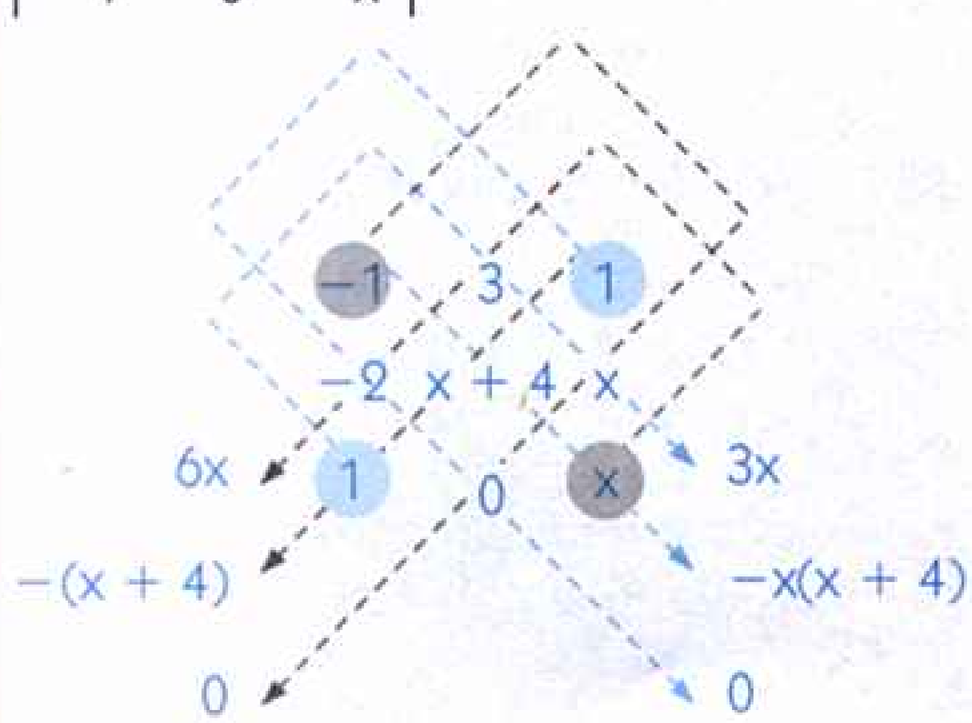


$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3) \cdot 8 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + + 4 \cdot 5 \cdot 3 - 7 \cdot (-3) \cdot 5 - - 4 \cdot 6 \cdot 1 - 2 \cdot 8 \cdot 3 =$$

$$= -24 + 84 + 60 + 105 - - 24 - 48 =$$
$$= 153$$

2 Determinar o conjunto verdade da equação:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -2 & x + 4 & x \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$$



$-x(x + 4) + 3x + 6x - (x + 4) = 0$

$-x^2 - 4x + 3x + 6x - x - 4 = 0$

$(-1) \div x^2 + 4x - 4 = 0$

$x^2 - 4x + 4 = 0$

$x = \dfrac{4 \pm 0}{2}$ → $x' = 2$, $x'' = 2$

$V = \{2\}$

Propostos

848 Calcule os determinantes:

a) $|\,2\,|$

b) $|\,-3\,|$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 1 & \log_b^a \\ \log_a^b & 1 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$

h) $\begin{vmatrix} \text{sen } x & -\cos x \\ \cos x & \text{sen } x \end{vmatrix}$

849 Calcule os determinantes, aplicando a regra de Sarrus:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ -3 & -6 & 0 \end{vmatrix}$

850 Determine o conjunto solução das seguintes equações:

a) $\begin{vmatrix} 3 & x \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$

b) $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ x & 9 \end{vmatrix} = 0$

c) $\begin{vmatrix} 2x & -4 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 38$

d) $\begin{vmatrix} x+1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7$

851 Determine o conjunto solução das equações, aplicando a regra de Sarrus:

a) $\begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ -2 & -4 & 2 \\ 4 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 0$

b) $\begin{vmatrix} -3 & 4 & x \\ 5 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$

c) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & x \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -7$

d) $\begin{vmatrix} 2x & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 26$

852 (FAAP-SP) Calcule o determinante da matriz 2×2, cujos elementos são:

$$\begin{cases} a_{ij} = i + 2j, \text{ se } i \geq j \\ a_{ij} = i^2 - j, \text{ se } i < j \end{cases}$$

853 (UFPR) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e sendo $N = 50 + \det(A \cdot B)$, encontre o valor de *N*.

854 (UFCE) Calcule o determinante da matriz P^2, sendo *P* a matriz:

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & -1 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

855 Resolva a equação:

$$\begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 1-x \end{vmatrix} = 0$$

856 (UFCE) Se o determinante da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3k \\ 3k & 1 & 1 \\ 9k^2 & 3k & 1 \end{bmatrix}$ é igual a 280, determine o valor de $3k^2 - 2k$.

857 (FGV-SP) A solução da equação

$\begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$ (*x* real) é:

a) não tem solução real

b) $x = \sqrt[2]{3}$

c) $x = \pm 1$

d) $x = 1$

e) $x = -1$

5. Determinante de uma matriz quadrada de ordem *n* maior que 3

Para calcular o determinante de uma matriz quadrada de ordem n > 3, aplicaremos também o teorema de Laplace.

Exemplo:

No cálculo do determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & -4 & 2 \end{bmatrix}$, vamos escolher a coluna ou linha com maior número de zeros.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$\uparrow$

Escolhendo a 1ª coluna, temos:

$$\text{cof}\,(a_{11}) = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \\ 5 & -4 & 2 \end{vmatrix} = -25$$

$$\text{cof}\,(a_{21}) = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 5 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 11$$

$$\text{cof}\,(a_{31}) = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \\ 5 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 34$$

$$\text{cof}\,(a_{41}) = (-1)^{4+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 13$$

Fazendo a soma dos produtos dos elementos da 1ª coluna pelos respectivos cofatores, obtemos o determinante da matriz *A*:

$\det A = 1 \cdot \text{cof}\,(a_{11}) + 0 \cdot \text{cof}\,(a_{21}) + (-2) \cdot \text{cof}\,(a_{31}) + 0 \cdot \text{cof}\,(a_{41})$

$\det A = 1 \cdot (-25) + 0 \cdot 11 + (-2) \cdot 34 + 0 \cdot (13) = -93$

$\det A = -93$

Exercícios

Resolvido

Determine o conjunto solução da equação: $\begin{vmatrix} 1 & x & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ -2 & 3 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 0.$

Vamos escolher a coluna ou linha com maior número de zeros.

$$\begin{vmatrix} 1 & x & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ -2 & 3 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

A terceira linha possui maior número de zeros, então:

$$\text{cof}\,(a_{33}) = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -7 - 4x + 2$$

Logo:

$x(-4x - 5) = 0$

$V = \left\{0, -\frac{5}{4}\right\}$

Propostos

858 Calcule os seguintes determinantes, aplicando o teorema de Laplace:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

859 Determine o conjunto solução das equações:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & x & -1 \\ x & 1 & 2 & -4 \\ 2 & 4 & 6 & -2 \end{vmatrix} = 6$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -x \\ 3 & 1 & x & -2 \\ 4 & 0 & 1 & x \end{vmatrix} = -39$

860 (FEI–SP) Se $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ x & x^2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$, então:

a) $x = 1$

b) $x = 0$

c) $x = -2$

d) $x = -3$

e) não existe *x* que satisfaça

Determinantes

Ficha-resumo

Determinante

- Determinante de uma matriz quadrada $n \times n$: é um número real associado à matriz segundo determinadas regras.

- Determinante de uma matriz quadrada de 1ª ordem: $A = [a_{11}]_{1 \times 1} \Rightarrow \boxed{\det A = a_{11}}$

- Determinante de uma matriz quadrada de 2ª ordem:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}}$$

Cofator

Cofator de um elemento a_{ij} de uma matriz quadrada: $\text{cof}\,(a_{ij}) = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$

Teorema de Laplace

O determinante de uma matriz quadrada de ordem *n* ($n \geq 2$) é obtido pela soma dos produtos dos elementos de qualquer linha ou coluna pelos respectivos cofatores.

Regra de Sarrus

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \longleftrightarrow \begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

trocar os sinais — conservar os sinais

$$\boxed{\begin{aligned} \det A = {} & a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - \\ & - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} \end{aligned}}$$

Exercícios Complementares

861 Calcule os determinantes:

a) $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} \frac{3}{4} & -5 \\ \frac{1}{5} & 8 \end{vmatrix}$

862 Calcule os determinantes, aplicando a regra de Sarrus:

a) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} -3 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ -7 & -4 & 0 \end{vmatrix}$

863 Determine o conjunto solução das equações:

a) $\begin{vmatrix} x+3 & 2x-1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$

b) $\begin{vmatrix} 2 & x & x \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 12$

864 Determine os valores de x para que o determinante da matriz:

$\begin{vmatrix} 3 & 3 & x \\ 4 & 4 & 4 \\ 5 & x & 5 \end{vmatrix}$ seja nulo.

865 Calcule os determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ -4 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \\ 5 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

866 Calcule o determinante da matriz P^2, sendo P a matriz:

$$\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}$$

867 (Fuvest-SP) Calcule os determinantes:

$A = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ $\quad B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

868 Resolva a equação:

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 1 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & x & 0 & 1 \\ 1 & 0 & x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & x^2 \\ x & 0 \end{vmatrix}$$

869 (UFRS) Se $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 9 & 12 \\ x & y & z \end{vmatrix} = -12$, então

$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ vale:

a) -4 b) $-\frac{4}{3}$ c) $\frac{4}{3}$ d) 4 e) 12

870 (FGV-SP) Considere as matrizes

$A = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 7 \end{vmatrix}$ e $B = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$.

O determinante da matriz $A \cdot B$ vale:

a) 100
b) 110
c) 120
d) 130
e) 140

871 (Mack-SP) O valor do determinante

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ é:

(Sugestão: aplique a regra de Chió.)

a) -4
b) -2
c) 0
d) 1
e) 1 131

872 (Mauá-SP) Resolva a equação:

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 1 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & x & 0 & 1 \\ 1 & 0 & x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

873 (FCC-SP) Se $\begin{vmatrix} 1 & 2,4 & 9 \\ \frac{1}{2} & 0 & k \\ -2 & \frac{2}{5} & -1 \end{vmatrix} = 10$, então *k* é:

a) um número inteiro
b) menor que -4
c) igual a $-\frac{35}{26}$
d) igual a $-\frac{53}{22}$
e) igual a $-\frac{83}{26}$

874 Resolva a equação:

$$\begin{vmatrix} 3-x & -1 & -1 \\ 2 & x-4 & -2 \\ 3 & -3 & x-5 \end{vmatrix} = 0$$

875 (FGV-SP) O valor do determinante (onde log representa o logaritmo na base 10)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \log 2 & \log 20 & \log 200 & \log 2\,000 \\ (\log 2)^2 & (\log 20)^2 & (\log 200)^2 & (\log 2\,000)^2 \\ (\log 2)^3 & (\log 20)^3 & (\log 200)^3 & (\log 2\,000)^3 \end{vmatrix}$$

é igual a:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 12 e) 20

876 (Fuvest-SP) Calcule o determinante

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

877 (FGV-SP) Seja a raiz da equação

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 & 2 \\ 2 & 0 & x & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 16.$$ Então o valor de x^2 é:

a) 16
b) 4
c) 0
d) 1
e) 64

878 (ITA-SP) Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, onde:

$a = 2^{(1 + \log_2 5)}$; $b = 2^{(\log_2 8)}$; $c = \log_{\sqrt{3}} 81$ e $d = \log_{\sqrt{3}} 27$

Uma matriz real quadrada *B*, de ordem 2, tal que AB é a matriz identidade de ordem 2 é:

a) $\begin{bmatrix} \log_{\sqrt{3}} 27 & 2 \\ 2 & \log_{\sqrt{3}} 81 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 2 \\ \sqrt{3} & -5 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 2 \\ 2 & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \log_2 5 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} \log_2 5 & 3 \log_{\sqrt{3}} 81 \\ 5 & -2_2^{(\log 81)} \end{bmatrix}$

879 (Fuvest-SP) Se as matrizes $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ são tais que AB = BA, pode-se afirmar que:

a) *A* é irreversível
b) det A = 0
c) b = 0
d) c = 0
e) a = d = 1

880 (Unirio-RJ) O valor de

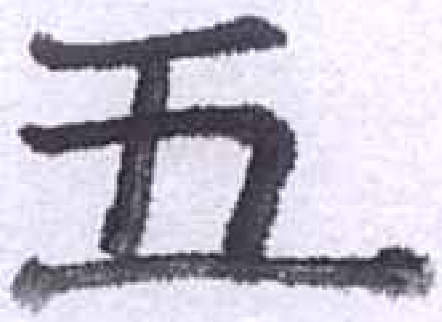
$$\begin{bmatrix} 5^0 & \sqrt{9} & 1^7 \\ \log_2 4 & |-6| & \csc 30^\circ \\ x & y & z \end{bmatrix}$$ é igual a:

a) 0
b) $4(y + 3z)$
c) $4(3x + y + 3z)$
d) $4x + 2y + 3z$
e) $12(x + z)$

Saiba um pouco mais

As varetas mágicas

A partir de varetas de bambu, os chineses criaram um original sistema de numeração escrita



A origem do sistema chinês de numeração se perde na noite dos tempos. Como acontece freqüentemente, o mito e a lenda prevalecem na ausência de informações precisas. Assim, o antiqüíssimo *Shi Ben* (Livro dos Antepassados) conta como o lendário Imperador Amarelo, tido como o primeiro imperador da história da China, ordenou a seus súditos Xi He e Chang Yi que observassem respectivamente o Sol e a Lua, e a um terceiro, Li Shou, que inventasse a aritmética. A própria popularidade desse conto fez com que o povo acreditasse, por longo tempo, que Li Shou havia realmente inventado o conceito de número.

No entanto, a idéia de que a noção de número tenha podido germinar no cérebro de um único homem, mesmo em se tratando de um gênio, está em flagrante contradição com a realidade histórica. A noção de número é fruto de uma longa evolução que remonta à aurora da humanidade e que se impôs progressivamente como uma necessidade resultante da própria atividade humana.

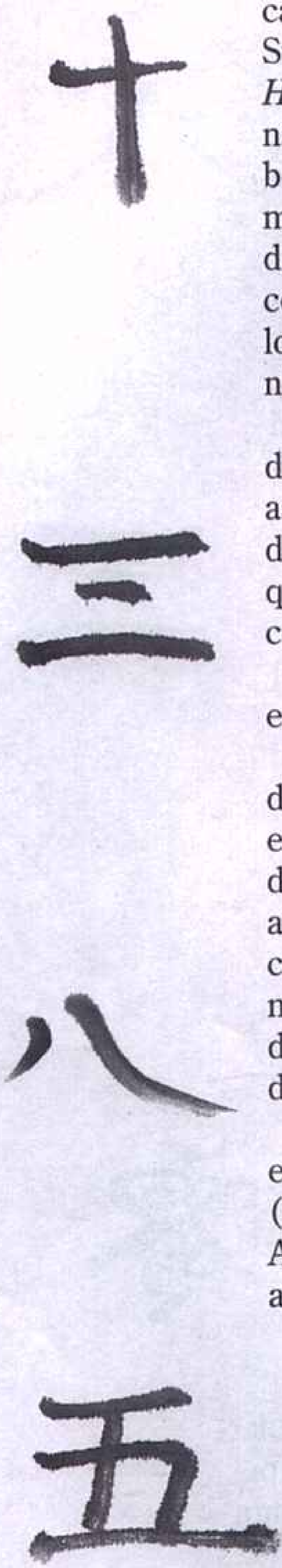
Os mitos e as lendas podem nos oferecer alguns indícios sobre a origem dos números na China, mas as escavações arqueológicas trazem informações mais concretas e sobretudo mais fidedignas.

Nas províncias de Honan e Shanxi, entre os vestígios da cultura Yangshao (de 7 mil anos atrás), os arqueólogos descobriram peças de cerâmica gravadas com sinais verticais e marcas em ziguezague que bem poderiam ser a primeira forma, ainda que balbuciante, da numeração chinesa.

Após milênios de civilização primitiva, aparece na China com a dinastia Shang (aproximadamente entre os séculos XVI e XI a.C.) a primeira sociedade estruturada em classes. Graças aos trabalhos arqueológicos, sabemos hoje que a cultura dos Shang era escravagista e havia alcançado um grau considerável de desenvolvimento, visto terem sido encontrados utensílios domésticos, armas e vasos sacrificiais feitos em bronze. Por volta do século XIV a.C., a dinastia Shang mudou sua capital para as cercanias da atual Xiaotun, próximo a Anyang (província de Honan), fato esse que parece haver coincidido com um novo auge cultural e econômico, além da invenção de uma forma de calendário.

As varetas de calcular

Na China antiga os cálculos eram efetuados sem manipulação direta dos numerais: para tanto, eram usados os *chou*, pequenas varas de bambu. Os matemáticos chineses colocavam tais varetas em diferentes posições para representar os números e efetuar as operações. Essa manipulação era chamada de *chou suan*, o que significa literalmente "calcular com a ajuda dos *chou*".



Em 1971, foram encontradas trinta dessas varetas da época do imperador dos Han ocidentais, Xuan Di (73 a 49 a.C.). Sua forma e comprimento correspondem à descrição que a *História da dinastia Han* faz delas, com a diferença de que não são de bambu, e sim de osso talhado. Em 1975 foi descoberto um feixe de varetas, de bambu nesse caso, e um pouco mais longas do que as de Shanxi. Elas remontam ao reinado do imperador Wen Di (179 a 157 a.C.). Por último, foram encontradas em 1978 cerâmicas decoradas com sinais e símbolos que designam as varetas e que remontam ao período conhecido como dos Reinos Combatentes (473 a 221 a.C.).

Não existe atualmente qualquer indício que nos permita determinar com exatidão quando os chineses começam a usar as varetas de cálculo, mas parece que eles já haviam dominado essa técnica na época dos Reinos Combatentes. De qualquer maneira, em textos oriundos daquele período já aparecem os ideogramas *chou* e *suan*.

Para representar os números, as varetas eram colocadas em posição horizontal ou vertical.

A combinação dessas formas corresponde a um sistema decimal comparável ao que se usa atualmente no Ocidente. A escrita vertical serve para marcar as unidades, a horizontal as dezenas, a vertical as centenas, a horizontal os milhares, e assim por diante, havendo entre os sinais um espaço em branco que desempenha o papel do zero. Para representar um número bastava escrever essas formas verticais e horizontais da esquerda para a direita, alternando as unidades com as dezenas, centenas, milhares etc.

O sistema decimal propriamente dito apareceu na China entre o período conhecido como "da Primavera e do Outono" (770 a 476 a.C.) e o dos Reinos Combatentes (473 a 221 a.C.). A partir de então, passou a ser possível efetuar as operações aritméticas com a mesma facilidade e comodidade de hoje.

(Extraído de DU SHI-RAN. Trad. Sergio Nesi da Fonseca. In: *O Correio da Unesco*. Rio de Janeiro, Fundação Getúlio Vargas, 1994, n. 1, ano 22, pp. 20-21.)