Sistemas lineares

Deus de fato joga dados.
E o problema é que muitas vezes ele os lança
em lugares que não enxergamos.

Stephen W. Hawking,
astrofísico e matemático inglês

1. Equação linear

Para melhor desenvolver o estudo sobre sistemas lineares é necessário rever alguns conceitos sobre equação linear.

Consideramos como equação linear toda equação do tipo:

$$\boxed{a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \dots + a_n x_n = c}$$, onde:

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$: coeficientes reais, não todos nulos

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$: são as incógnitas

c: termo independente

Quando o termo independente é nulo, ou seja, quando $c = 0$, a equação linear é homogênea.

Exemplos:

a) $2x + y + z = 4$

b) $x + y = 5$

c) $4x + 5y + z = 0$ (homogênea)

2. Sistema linear

Chama-se sistema linear a n incógnitas um conjunto de duas ou mais equações lineares com n incógnitas.

Exemplos:

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases}$ Sistema linear de duas equações e duas incógnitas, onde x e y são as incógnitas e 7 e 1 são os termos independentes.

b) $\begin{cases} 3x + y - 4z = -7 \\ x - 2y + 3z = 3 \\ 2x - y + 4z = 12 \end{cases}$ Sistema linear de três equações e três incógnitas, onde x, y e z são as incógnitas e -7, 3 e 12 são os termos independentes.

Genericamente, um sistema linear de m equações com n incógnitas, também indicado por sistema linear $m \times n$ (lê-se: "m por n"), é representado por um conjunto de equações lineares do tipo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = c_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = c_3 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = c_m \end{cases}$$

Solução de um sistema linear

Uma solução de um sistema linear é um conjunto de valores que satisfaz ao mesmo tempo todas as equações do sistema linear.

Exemplo:

Para o sistema $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases}$, os valores que satisfazem as duas equações são $x = 2$ e $y = 1$.

Logo, a solução do sistema é o par ordenado (2, 1).

Sistema linear homogêneo

Consideramos como sistema linear homogêneo aquele que possui todos os coeficientes independentes nulos.

Exemplo:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 3x + 4y - z = 0 \\ 2x + 3y - 3z = 0 \end{cases}$$

Todo sistema linear homogêneo admite a solução nula (0, 0, ... , 0), chamada de *solução trivial*.

Um sistema linear homogêneo pode ter outras soluções além da trivial.

Exercícios

Resolvido

Dado o sistema $\begin{cases} 5x + y = 0 \\ -x + y = 12 \end{cases}$, verificar se é solução cada um dos pares:

a) (3, −15) b) (−2, 10)

a) $\begin{cases} 5 \cdot (3) + (-15) = 0 \\ -3 + (-15) \neq 12 \text{ (Não é solução.)} \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5 \cdot (-2) + 10 = 0 \\ -(-2) + 10 = 12 \text{ (É solução.)} \end{cases}$

Propostos

881 Considere o sistema $\begin{cases} 3x + 2y = -4 \\ -\dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{5} = 0 \end{cases}$

e verifique se é solução cada um dos pares:

a) (0, 0) b) (2, −5) c) (1, 0)

882 Verifique qual dos pares ordenados é solução para este sistema: $\begin{cases} \dfrac{x}{3} - \dfrac{2y}{5} = -\dfrac{1}{15} \\ 100x - 37y = 63 \end{cases}$

a) (−1, 1)

b) (−1, −1)

c) (1, −1)

d) $\left(-\dfrac{1}{5}, 0\right)$

e) (1, 1)

883 Verifique se cada um dos pares ordenados é solução para este sistema:

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - 2y - 2z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}.$$

a) (0, 0, 0) b) (0, 1, −1) c) (1, 1, 1)

3. Regra de Cramer

Você já conhece algumas formas de obter o conjunto verdade de um sistema. Agora, aprenderá dois métodos bastante práticos: *a regra de Cramer* e o *escalonamento*, que facilitam a resolução de sistemas.

Inicialmente, vamos considerar o sistema $\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$.

$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ é a matriz incompleta do sistema.

c_1 e c_2 são os termos independentes do sistema.

$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ é o determinante da matriz incompleta do sistema.

$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$ é o determinante da matriz obtida através da troca dos coeficientes de *x* pelos termos independentes, na matriz incompleta.

$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$ é o determinante da matriz obtida através da troca dos coeficientes de *y* pelos termos independentes, na matriz incompleta.

Analogamente, podemos escrever a matriz incompleta de qualquer sistema linear n × n, assim como o seu determinante *D* e também os determinantes D_i obtidos através da troca dos coeficientes de uma i-ésima incógnita pelos termos independentes no determinante da matriz incompleta.

A regra de Cramer pode ser aplicada para resolver um sistema n × n, onde $D \neq 0$. A solução é dada pelas razões:

$$\left(x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D},\ x_3 = \frac{D_3}{D},\ \ldots,\ x_n = \frac{D_n}{D}\right)$$

Exemplos:

a) Para resolver o sistema $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases}$, fazemos:

Cálculo do determinante *D*:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5$$

Cálculo do determinante D_x:

$$D_x = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -10$$

Cálculo do determinante D_y:

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

Logo:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-10}{-5} = 2 \qquad y = \frac{D_x}{D} = \frac{-5}{-5} = 1$$

Conjunto verdade: V = {(2, 1)}

b) Para resolver o sistema $\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x + y - 3z = -5 \\ 4x - y - z = -1 \end{cases}$, fazemos:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & -2 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & -1 & 4 & -1 \end{array}$$

$$-4 \quad -3 \quad -4 \qquad\qquad -1 \quad 24 \quad -2$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -4 - 3 - 4 - 1 + 24 - 2 = 10$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -5 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 10 - 6 + 5 = 10$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & -3 \\ 4 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 20 - 3 + 5 - 2 = 20$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -5 - 4 - 1 + 40 = 30$$

Logo:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{10}{10} = 1 \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{20}{10} = 2 \quad z = \frac{D_z}{D} = \frac{30}{10} = 3$$

Conjunto verdade: V = {(1, 2, 3)}

Exercícios

Propostos

884 Resolva os sistemas de duas equações aplicando a regra de Cramer:

a) $\begin{cases} 2x - 3y = -5 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$

885 Resolva os sistemas de três equações aplicando a regra de Cramer:

a) $\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x + y - z = 0 \\ -x + 3y - 2z = -3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + 2y + 3z = 0 \\ x + y + z = 1 \\ -2x - 3y + 3z = -5 \end{cases}$

886 Resolva os sistemas de três equações aplicando a regra de Cramer:

a) $\begin{cases} 3x - 4y + 3z = -1 \\ 2x - y - z = -5 \\ x - 3y - z = -6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ x + y - z = 0 \\ 3x - 2y + 3z = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - 3y + z = -1 \\ -x + y - 2z = -3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x - y = 5 - 2z \\ 2x + 3y - 4z = 2 \\ y - z = x \end{cases}$

4. Classificação de um sistema linear

Quanto ao número de soluções, um sistema pode ser ***possível e determinado***, ***possível e indeterminado*** ou ***impossível***.

O sistema possível e determinado (SPD) tem uma única solução.

Quando um sistema linear n × n é possível e determinado, o determinante *D* da matriz incompleta é diferente de zero. Reciprocamente, quando o determinante *D* da matriz incompleta é diferente de zero, o sistema é possível e determinado.

O sistema possível e indeterminado (SPI) tem infinitas soluções.

Quando um sistema linear n × n é indeterminado, o determinante *D* da matriz incompleta é igual a zero e também $D_1 = D_2 = D_3 = ... = D_n = 0$.

O sistema impossível (SI) não tem nenhuma solução.

Quando um sistema linear n × n é impossível, o determinante *D* da matriz incompleta é igual a zero e D_i é não-nulo para, pelo menos, um $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

Exemplos:

a) O sistema $\begin{cases} 3x - 4y = -5 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$ é sistema possível e determinado, pois:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 11$$

b) O sistema $\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases}$ não é sistema possível e determinado, pois:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Distinguiremos os casos SPI e SI, analisando se há ou não incompatibilidade das equações do sistema.

Exercícios

Resolvido

Discutir o sistema abaixo, em função de *a*:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + ay = 3 \end{cases}$$

Para que o sistema seja SPD é necessário $D \neq 0$.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & a \end{vmatrix} = a - 2$$

O sistema será SPD para $a - 2 \neq 0$ ou $a \neq 2$.

Se $a = 2$, então o sistema fica $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 3 \end{cases}$

A segunda equação é equivalente a $2(x + y) = 3$ ou a $x + y = \frac{3}{2}$.

Como não existem dois números cuja soma seja simultaneamente 1 e $\frac{3}{2}$, as equações são incompatíveis. Logo, o sistema é impossível.

Propostos

887 Classifique os sistemas a duas equações:

a) $\begin{cases} 4x - y = 1 \\ 2x + 3y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 6x - 2y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -2x + 8y = 3 \\ x - 4y = 2 \end{cases}$

888 Verifique se o sistema é possível e determinado:

a) $\begin{cases} 2x + y + 4z = 0 \\ 5x + 2y - z = 1 \\ -x + 3y + z = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x - 3y + 4z = 2 \\ 3x - y + 3z = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -2x + y - 3z = 0 \\ x - y - 5z = 2 \\ 3x - 2y - 2z = -3 \end{cases}$

889 Determine o valor de *a*, para que o sistema $\begin{cases} ax - 2y = 1 \\ 4x + 3y = 2 \end{cases}$ seja possível e determinado.

890 Calcule o valor de *a* e *b* para que o sistema $\begin{cases} 4x - ay = 16 \\ 4x + y = b \end{cases}$ seja indeterminado.

891 Determine o valor de *k* de modo que o sistema $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x + 6y = k \end{cases}$ seja impossível.

892 Discutir o sistema abaixo, em função de *k*.

$$\begin{cases} 6x + ky = 6 \\ 4x + 4y = 8 \end{cases}$$

5. Escalonamento de sistemas

Já vimos que, para resolver um sistema de duas equações e duas incógnitas, a regra de Cramer é muito prática. Mas quando o sistema é formado por três ou mais equações, é conveniente procurar um processo menos trabalhoso. Por esse motivo, vamos descrever o *sistema em forma de escada*, ou seja, por *escalonamento*.

Um sistema está escalonado quando de equação para equação, no sentido de cima para baixo, houver aumento dos coeficientes nulos situados antes dos coeficientes não-nulos.

Exemplos:

$$S_1 \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 0x + y + z = 2 \\ 0x + 0y + z = 1 \end{cases} \qquad S_2 \begin{cases} x + y + z - t = 6 \\ 0x - y - 4z + 3t = -13 \\ 0x + 0y + 12z - 6t = 30 \end{cases}$$

Para escalonar um sistema, podemos utilizar as seguintes etapas:

1) Colocar como 1ª equação aquela que tenha 1 como coeficiente da 1ª incógnita. Caso não haja nenhuma equação assim, dividir membro a membro aquela que está como 1ª equação pelo coeficiente da 1ª incógnita.
2) Nas demais equações, obter zero como coeficiente da 1ª incógnita (caso já não seja), somando cada uma delas com o produto da 1ª equação pelo oposto do coeficiente dessa incógnita.
3) Repetir os itens 1 e 2, substituindo neles 1ª por 2ª, depois 2ª por 3ª etc.

Exercícios

Resolvidos

1 Classificar os sistemas e encontrar a solução usando o processo de escalonamento:

a) $\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x + y + z = 1 \\ x - y - z = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y - 2z = -5 \\ 2x - 3y + z = 9 \\ 3x - y + 3z = 8 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x - y + 3z = 6 \\ -x + 2y - 2z = -2 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x + y + z = 1 \\ x - y - z = 2 \end{cases}$

Inicialmente vamos escalonar o sistema:

$\boxed{1^a \text{ etapa:}}$ invertemos a ordem da 1ª e da 2ª equações para obter 1 como coeficiente da 1ª incógnita.

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x + y + z = 1 \\ x - y - z = 2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + z = 3 \\ x - y - z = 2 \end{cases}$$

$\boxed{2^a \text{ etapa:}}$ para obter zero como coeficiente da 1ª incógnita na 2ª equação, multiplicamos a 1ª equação por (-2) e adicionamos o resultado à 2ª equação.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + z = 3 \\ x - y - z = 2 \end{cases} \xrightarrow{(-2)\cdot(1^a) + (2^a)} \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -y - z = 1 \\ x - y - z = 2 \end{cases}$$

Para obter zero como coeficiente da (1^a) incógnita da 3ª equação, multiplicamos a 1ª equação por (-1) e adicionamos o resultado à 3ª equação.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -y - z = 1 \\ x - y - z = 2 \end{cases} \xrightarrow{(-1)\cdot(1^a) + (3^a)} \begin{cases} x + \quad y + \quad z = 1 \\ -y - \quad z = 1 \\ -2y - 2z = 1 \end{cases}$$

$\boxed{3^a \text{ etapa:}}$ para obter zero como coeficiente da 2ª incógnita da 3ª equação, dividimos a 2ª equação por (-1); depois, multiplicamos o resultado por $(+2)$ e adicionamos o novo resultado à 3ª equação.

$$\begin{cases} x + \quad y + \quad z = 1 \\ -y - \quad z = 1 \\ -2y - 2z = 1 \end{cases} \xrightarrow{(+2)\cdot[(2^a):(-1)] + (3^a)} \begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + z = -1 \\ 0 = -1 \end{cases}$$

Com o sistema escalonado, poderíamos obter o valor das incógnitas. Porém, observamos que a 3ª equação, $0 = -1$, demonstra uma impossibilidade. Logo, o sistema é considerado impossível (SI).

b) $\begin{cases} x + 2y - 2z = -5 \\ 2x - 3y + z = 9 \\ 3x - y + 3z = 8 \end{cases}$

Inicialmente vamos escalonar o sistema:

$\boxed{1^a \text{ etapa:}}$ multiplicamos a 1ª equação por (-2) e adicionamos o resultado à 2ª. Multiplicamos a 1ª equação por (-3) e adicionamos o resultado à 3ª.

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = -5 \\ 2x - 3y + z = 9 \\ 3x - y + 3z = 8 \end{cases} \begin{matrix} \xrightarrow{(-2)\cdot(1^a) + (2^a)} \\ \xrightarrow{(-3)\cdot(1^a) + (3^a)} \end{matrix} \begin{cases} x + 2y - 2z = -5 \\ -7y + 5z = 19 \\ -7y + 9z = 23 \end{cases}$$

$\boxed{2^a \text{ etapa:}}$ adicionamos a 2ª equação multiplicada por (-1) à 3ª equação.

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = -5 \\ -7y + 5z = 19 \\ -7y + 9z = 23 \end{cases} \xrightarrow{-1\cdot(2^a) + (3^a)} \begin{cases} x + 2y - 2z = -5 \\ -7y + 5z = 19 \\ 4z = 4 \end{cases}$$

Com o sistema escalonado, podemos determinar as incógnitas da seguinte forma:

- Obtendo *z* na 3ª equação:

$4z = 4 \Rightarrow z = 1$

- Substituindo $z = 1$ na 2ª equação, obtemos *y*:

$-7y + 5z = 19$

$-7y + 5 \cdot 1 = 19 \Rightarrow -7y = 14 \Rightarrow y = -2$

- Substituindo $z = 1$ e $y = -2$ na 1ª equação, obtemos *x*:

$x + 2y - 2z = -5$

$x + 2 \cdot (-2) - 2 \cdot 1 = -5 \Rightarrow x - 6 = -5 \Rightarrow x = 1$

$V = \{(1, -2, 1)\}$

Observe que esse sistema apresenta uma única solução. Portanto, é um sistema possível e determinado SPD.

c) $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x - y + 3z = 6 \\ -x + 2y - 2z = -2 \end{cases}$

Inicialmente vamos escalonar o sistema:

1ª etapa: multiplicamos a 1ª equação por -2 e adicionamos o resultado à 2ª; adicionamos a 1ª equação à 3ª.

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x - y + 3z = 6 \\ -x + 2y - 2z = -2 \end{cases} \begin{array}{c} \\ \xrightarrow{(-2)\cdot(1^a) + (2^a)} \\ \xrightarrow{(1^a) + (2^a)} \end{array} \begin{cases} x + y + z = 4 \\ -3y + z = -2 \\ 3y - z = 2 \end{cases}$$

2ª etapa: adicionamos a 2ª equação à 3ª.

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ -3y + z = -2 \\ 3y - z = 2 \end{cases} \xrightarrow{(2^a) + (3^a)} \begin{cases} x + y + z = 4 \\ -3y + z = -2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Com o sistema escalonado, podemos determinar as incógnitas.

Como na 3ª equação encontramos uma identidade ($0 = 0$), temos duas equações e três incógnitas. Logo, o sistema admite infinitas soluções.

Quando isso ocorre, calculamos o *grau de indeterminação* do sistema, que é dado pela diferença entre o número de incógnitas e o número de equações. Nesse caso, o grau de indeterminação é igual a 1. Portanto, atribuímos um valor arbitrário *k* ($k \in \mathbb{R}$) a uma das variáveis.

Considerando um valor arbitrário *k* ($k \in \mathbb{R}$) para a variável *z*, obtemos da 2ª equação o seguinte:

$-3y + z = -2 \Rightarrow -3y + k = -2 \Rightarrow y = \dfrac{k + 2}{3}$

Substituindo $y = \dfrac{k + 2}{3}$ e $z = k$ na 1ª equação, obtemos:

$x + \dfrac{k + 2}{3} + k = 4 \Rightarrow 3x + k + 2 + 3k = 12 \Rightarrow x = \dfrac{-4k + 10}{3}$

$V = \left\{\left(\dfrac{-4k + 10}{3}, \dfrac{k + 2}{3}, k\right), k \in \mathbb{R}\right\}$

Observe que à variável *z* foi atribuído um valor arbitrário *k* ($k \in \mathbb{R}$) que assume infinitos valores. Portanto, o sistema assume infinitas soluções, ou seja, o sistema é possível e indeterminado (SPI).

Propostos

893 Classifique os sistemas e encontre a solução usando o processo de escalonamento:

a) $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y - 3z = 3 \\ x - 3y + 3z = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x + y - z = 4 \\ x - y + z = 0 \\ x - y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + 2y + 3z = 5 \\ x + y + 2z = 3 \\ 3x + 4y + 2z = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + 6y + z = 11 \\ x + 3y - z = 9 \\ 4x + 9y - 7z = 38 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + y + 3z = -5 \\ 3x - 2y + 4z = 0 \\ 2x - 3y + z = 5 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x - 3y + 5z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 3x + 2y - 12z = 0 \end{cases}$

894 (UFES) O sistema linear $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 9 \\ x - y + 2z = 2 \\ x + 4y + 2z = 7 \end{cases}$

a) admite solução única
b) admite infinitas soluções
c) admite apenas duas soluções
d) não admite solução
e) n.d.a.

895 (Fuvest-SP) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ 4y + 5z = 23 \\ 6z = 18 \end{cases}$

Então, *x* é igual a:
a) 27 b) 3 c) 0 d) −2 e) 1

896 (Fuvest-SP) Para quais valores de *a* o sistema linear $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y + 4z = a \\ -y - 2z = a^2 \end{cases}$ admite solução?

897 (Fuvest-SP) Resolva o sistema linear

$x + 2y + z = 2$
$x - y + mz = n$ nos seguintes casos:
$x + 3y + 2z = 1$

a) $m = 0$ e $n = 0$
b) $m = -2$ e $n = 0$
c) $m = -2$ e $n = 5$

898 (Vunesp-SP) Misturam-se dois tipos de leite, um com 3% de gordura e outro com 4% de gordura para obter, ao todo, 80 litros de leite com 3,25% de gordura. Quantos litros de leite de cada tipo foram misturados?

899 (ITA-SP) O sistema de equações

$\begin{cases} x + 3y - z = 6 \\ 7x + 3y + 2z = 2 \\ 5x - 3y + 4z = 10 \end{cases}$

a) tem somente uma solução
b) tem infinitas soluções com $9(x + y) = 14$ e $9(2y - z) = 40$
c) tem infinitas soluções com $9(x + y) = 34$ e $9(2y - z) = 20$
d) tem infinitas soluções com *x* dado em função de *y* e *z*
e) não possui solução

900 (ITA-SP) Considere a equação

$$x\begin{bmatrix} 4 \\ -16 \\ 4 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

onde *x*, *y* e *z* são números reais. É verdade que:
a) a equação admite somente uma solução
b) em qualquer solução, $x^2 = z^2$
c) em qualquer solução, $16x^2 = 9z^2$
d) em qualquer solução, $25y^2 = 16z^2$
e) em qualquer solução, $9y^2 = 16z^2$

901 (UFRN) A solução do sistema

$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 4x + 2y - z = 5 \\ x + 3y + 2z = 13 \end{cases}$ é:

a) (−2, 7, 1)
b) (4, −3, 5)
c) (0, 1, 5)
d) (2, 3, 1)
e) (1, 2, 3)

902 O valor de *a* para o qual o sistema de equações $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ ax + 3y = 2 \end{cases}$ não possui solução é:

a) −6
b) −5
c) 0
d) 5
e) 6

Ficha-resumo

Sistemas lineares

Chama-se sistema linear a *n* incógnitas um conjunto de duas ou mais equações lineares com *n* incógnitas.

Solução de um sistema linear

Uma solução de um sistema linear é um conjunto de valores que satisfazem ao mesmo tempo todas as equações do sistema linear.

Sistema linear homogêneo

É todo sistema linear em que os coeficientes independentes são todos nulos. Ele sempre admite pelo menos a solução trivial (0, 0, ..., 0).

Regra de Cramer

É aplicável na resolução de um sistema $n \times n$, onde $D \neq 0$. A solução é dada por:

$$\boxed{x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D},\ x_3 = \frac{D_3}{D},\ ...,\ x_n}$$

Classificação de um sistema linear

Quanto ao número de soluções, o sistema pode ser:

- Sistema possível e determinado SPD uma única solução: $D \neq 0$
- Sistema possível e indeterminado SPI infinitas soluções: $D = 0$ e $D_i = 0,\ \forall_i \in \{1, 2, ..., n\}$
- Sistema impossível SI nenhuma solução: $D = 0$ e $D_i \neq 0$, para algum $i \in \{1, 2, ..., n\}$

Escalonamento de sistemas

Um sistema está escalonado quando de equação para equação, de cima para baixo, houver aumento dos coeficientes nulos situados antes dos não-nulos.

Exercícios

Complementares

903 Discuta os sistemas de duas equações:

a) $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 2x - 4y = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -4x + 2y = 0 \\ 10x - 5y = 7 \end{cases}$

904 Discuta os sistemas a três equações:

a) $\begin{cases} x + 4y - z = 0 \\ 2x - y + 2z = 3 \\ -3x + 2y + z = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x - y + 2z = -1 \\ -x + 3y - z = 3 \\ 3x + 2y + z = 2 \end{cases}$

905 Determine o valor de *a* para que o sistema $\begin{cases} 3x + y = 1 \\ -6x + ay = 2 \end{cases}$ tenha solução.

906 Determine o valor de *k* para que o sistema $\begin{cases} kx + 4y = 2 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$ seja indeterminado.

907 Calcule o valor de *m* para que o sistema $\begin{cases} mx + y = 0 \\ 3x + y = 0 \end{cases}$ seja possível e determinado.

908 Determine o valor de *k* para que o sistema $\begin{cases} 3x + ky + z = 1 \\ 2x - 3y - 2z = 2 \\ x + 4y + z = 3 \end{cases}$ seja possível.

909 (Fuvest-SP) O sistema linear

$\begin{cases} x \cdot \log 2 + y \cdot \log 3 = a \\ x \cdot \log 4 + y \cdot \log 9 = a \end{cases}$

a) tem solução única se a = 0
b) tem infinitas soluções se a = 2
c) não tem solução se a = 3
d) tem infinitas soluções se a = 4
e) tem solução única se a = 9

910 (UCP-PR) Resolvendo o sistema

$\begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ 3x - y - 2z = 1 \\ x + 3y + z = -3 \end{cases}$,

o valor da soma x + y + z é:

a) 5 b) 15 c) 6 d) 12 e) 0

911 (Fuvest-SP) O sistema linear $\begin{cases} x + y = 0 \\ x + z = 0 \\ x + mz = 0 \end{cases}$ é indeterminado para:

a) todo *m* real
b) nenhum *m* real
c) m = 1
d) m = −1
e) m = 0

912 (FAAP-SP) O sistema $\begin{cases} 2x + 3y - z = 3 \\ x + y + 2z = 3 \\ x - y + 4z = 1 \end{cases}$ tem como única solução a terna de números reais $(x_0, y_0, 1)$. Nessas condições, tem-se que:

a) $x_0 = 1$
b) $y_0 = 1$
c) $x_0 = -1$
d) $y_0 = -2$
e) $x_0 = 2$

913 (FGV-SP) Se a terna ordenada (a, b, c) de números reais é solução do sistema

$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y + z = 2 \\ 2x + y - 3z = 1 \end{cases}$, então a soma a + b + c é igual a:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

914 (ITA-SP) Analisando o sistema

$\begin{cases} 3x - 2y + z = 7 \\ x + y - z = 0 \\ 2x + y - 2z = -1 \end{cases}$

concluímos que este é:

a) possível e determinado com xyz = 7
b) possível e determinado com xyz = −8
c) possível e determinado com xyz = 6
d) possível e indeterminado
e) impossível

915 (UGF-RJ) O sistema $\begin{cases} 3x + 2y + z = m \\ 4x + 5y + z = 1 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$

Será possível para:

a) m = −1
b) m = 1
c) $m \neq 3$
d) $m \neq 0$
e) qualquer que seja *m*

916 (Santa Úrsula-RJ) Considere o sistema *S* seguinte:

$S = \begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ 4x + 6y + 2z = 5 \\ 6x + 9y + 3z = 2 \end{cases}$

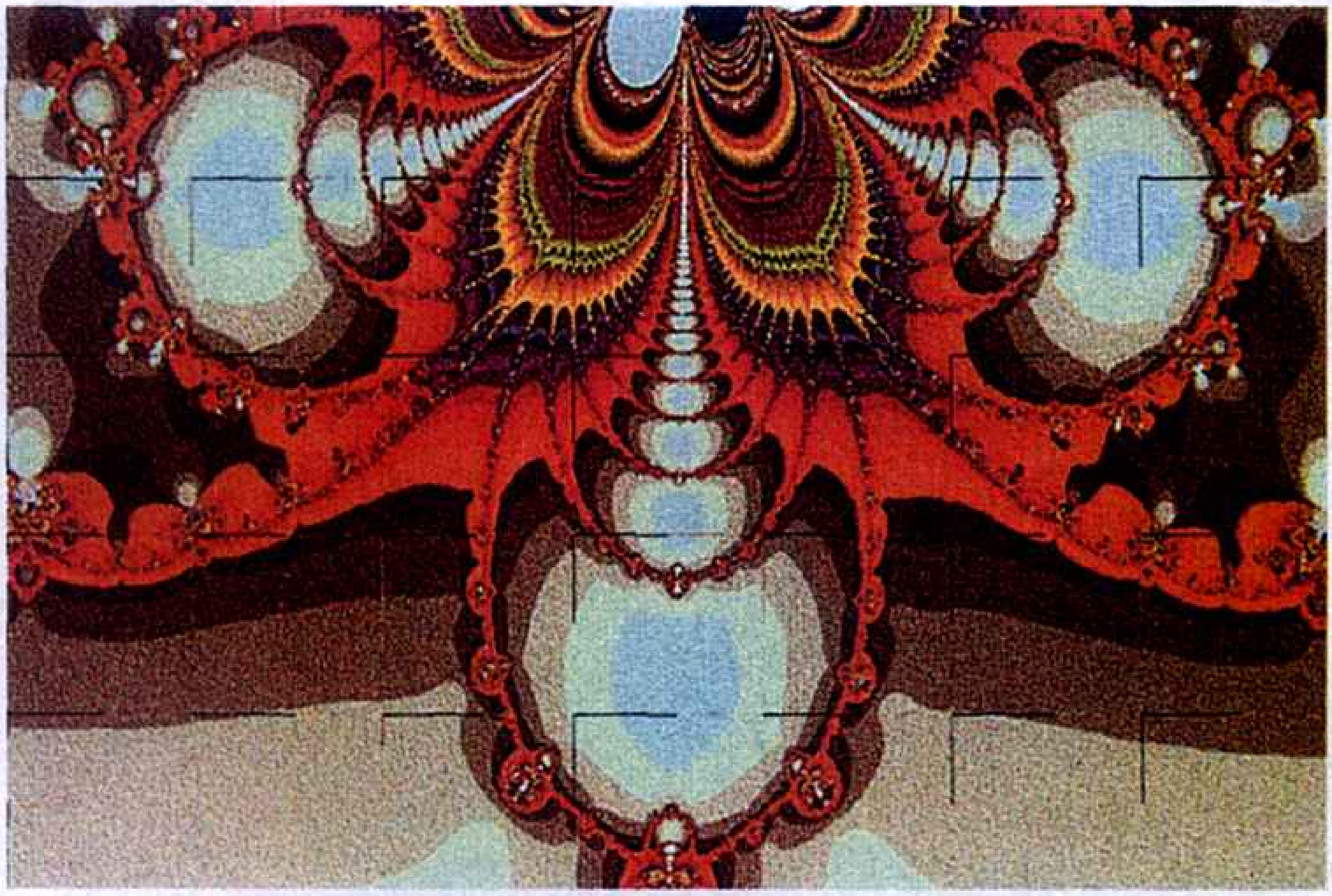
Quanto às suas soluções, podemos afirmar que:

a) *S* possui solução única
b) *S* possui uma infinidade de soluções
c) *S* não possui solução
d) *S* possui exatamente duas soluções
e) *S* possui exatamente três soluções

Saiba um pouco mais

Equações e muita imaginação podem criar coloridas galáxias

Planetas com florestas estranhas, mares cor de laranja e montanhas com milhares de picos pontiagudos — são alguns dos mundos imaginados pelo artista gráfico Greg Sams, que trabalha em Londres, na Inglaterra. Na verdade, ele faz uma espécie de colagem com o auxílio do computador, como se recortasse pedaços redondos de fractais para criar um planeta ou uma estrela de contorno regular.

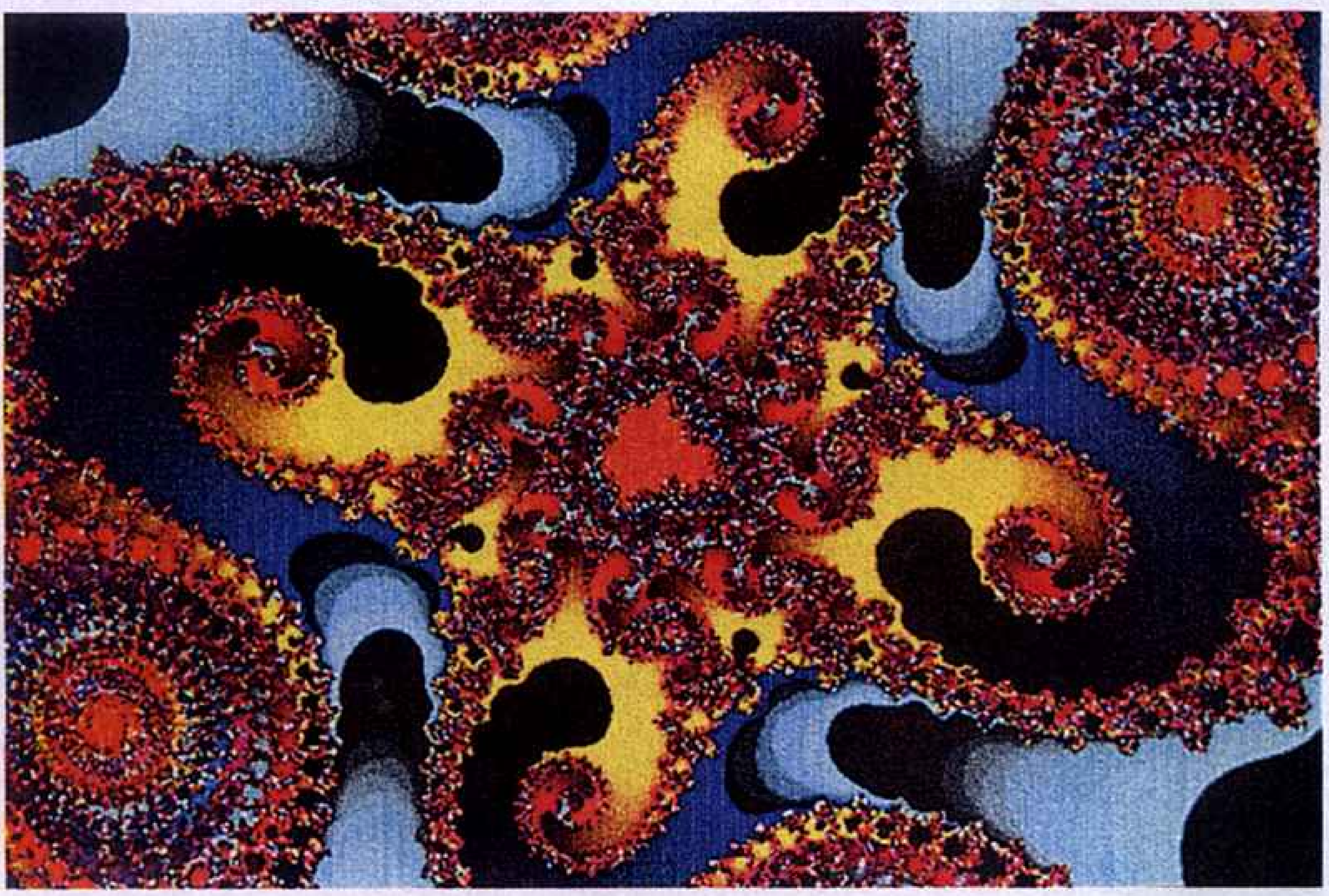


Corel Stock Photo

Os fractais são criados a partir de uma equação e com a ajuda de milhões de cálculos, realizados pelo computador

"O que mais me fascina é procurar novos padrões de um mesmo fractal para construir as minhas imagens", diz o artista. Isso porque quanto mais você se aproxima de um fractal, mais detalhes você consegue enxergar nele. Parece não ter fim — é uma visão do infinito. Desse modo, Sams vai ampliando determinada área dezenas ou centenas de vezes — e sempre observa desenhos diferentes.

Diferentes porém parecidos. Pois não basta ter dimensão fracionária para ser um fractal. É preciso que o objeto seja auto-semelhante: suas partes devem se parecer muito entre si e representar o todo. Ou seja, um fractal pode ser comparado a uma couve-flor — se alguém cortar um pedaço dela, verá que ele tem a cara da verdura inteira. A terceira e última característica de um fractal é ser fruto de um processo iterativo. No jargão dos matemáticos, isso significa repetir uma fórmula inúmeras vezes. É dessa repetição que surge a imagem.



Corel Stock Photo

Arte e ciência se vêem representados nos fractais

(Extraído de *Superinteressante*. São Paulo, n. 10, ano 8.)