# Análise combinatória Binômio de Newton

*A verdadeira eloqüência zomba da eloqüência,*
*a verdadeira moral zomba da moral;*
*quer dizer que a moral do*
*juízo zomba da moral do espírito,*
*que não tem regras.*
*Pois é ao juízo que pertence o sentimento,*
*como as ciências pertencem ao espírito.*
*A finura é a parte do juízo,*
*a Geometria, a do espírito.*
*Zombar da filosofia, é, em verdade, filosofar.*

Blaise Pascal (1623-1662),
matemático francês

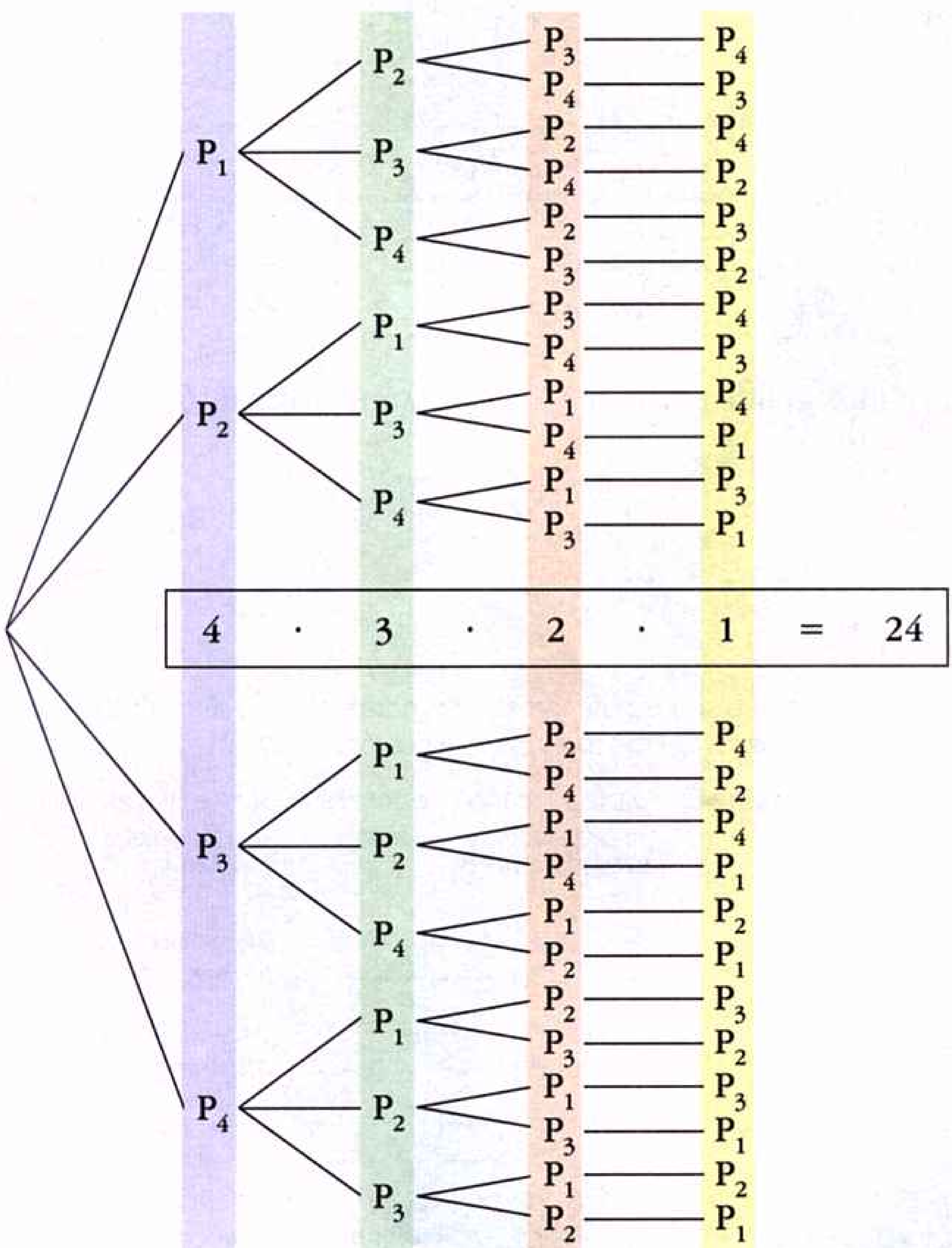
# 1. Princípio fundamental da contagem

A análise combinatória é um ramo da Matemática que tem por objetivo resolver problemas que consistem, basicamente, em escolher e agrupar os elementos de um conjunto. Possui aplicação direta no cálculo das probabilidades, sendo instrumento de vital importância para as ciências aplicadas, como a Medicina, a Engenharia e a Estatística, entre outras.

Cada exemplo abaixo mostra todas as possibilidades de ocorrer um experimento.

a) Em quantas ordens diferentes 4 pessoas podem se sentar num sofá de 4 lugares?

Vamos descrever a árvore de possibilidades:



A árvore mostra todos os modos possíveis de as 4 pessoas se sentarem num sofá de 4 lugares, ou seja:

$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \Rightarrow 24$ possibilidades

O princípio fundamental da contagem diz que um acontecimento ocorre em duas situações sucessivas e independentes, sendo que a 1ª situação ocorre de *a* maneiras e a 2ª situação ocorre de *b* maneiras, então o número total de possibilidades de ocorrência desse acontecimento é dado pelo produto $a \cdot b$.

Exemplo:
Um rapaz possui 4 bermudas e 3 camisas. De quantos modos diferentes ele pode se vestir com essas roupas?
Vamos indicar bermuda com a letra *b* e camisa com a letra *c* e dispor as maneiras possíveis no quadro:

| camisa \ bermuda | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | $b_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $c_1$ | $c_1 \cdot b_1$ | $c_1 \cdot b_2$ | $c_1 \cdot b_3$ | $c_1 \cdot b_4$ |
| $c_2$ | $c_2 \cdot b_1$ | $c_2 \cdot b_2$ | $c_2 \cdot b_3$ | $c_2 \cdot b_4$ |
| $c_3$ | $c_3 \cdot b_1$ | $c_3 \cdot b_2$ | $c_3 \cdot b_3$ | $c_3 \cdot b_4$ |

O quadro mostra que existem $3 \cdot 4 = 12$ modos distintos.

# Exercícios

## Resolvido

Renato, José e Cristina disputam um torneio de xadrez no qual são atribuídos prêmios ao campeão e ao vice-campeão. Quais são as premiações possíveis?

Para facilitar a compreensão do problema, podemos usar a árvore de possibilidades.

| Campeão | Vice-campeão | Premiados |
|---|---|---|
| Renato | José | Renato e José |
| | Cristina | Renato e Cristina |
| José | Renato | José e Renato |
| | Cristina | José e Cristina |
| Cristina | Renato | Cristina e Renato |
| | José | Cristina e José |

Existem $3 \times 2 = 6$ maneiras possíveis de premiação, ou seja, para a posição de campeão há 3 possibilidades e para cada uma delas há 2 possibilidades de vice-campeão.

## Propostos

**917** Marina tem 5 blusas e 2 saias. De quantos modos diferentes ela pode se vestir com essas roupas?

**918** Em um baile há 12 moças e 8 rapazes. Quantos casais podem ser formados?

**919** Renato vai a um clube no qual existem 4 portas de entrada que dão acesso a 2 elevadores. Ele pretende ir ao 6º andar. De quantas maneiras diferentes poderá fazê-lo?

**920** Quantos números pares de 2 algarismos podem ser formados no sistema decimal?

**921** Uma pessoa possui 10 envelopes diferentes e 8 selos diferentes. De quantos modos essa pessoa pode enviar uma carta utilizando 1 envelope e 1 selo?

**922** De quantos modos 3 pessoas podem se sentar num sofá de 5 lugares?

**923** (Unicamp-SP) Sabendo que números de telefone não começam com 0 nem com 1, calcule quantos diferentes números de telefone podem ser formados com 7 algarismos.

**924** (Fatec-SP) Dispomos de 4 cores diferentes entre si; todas elas devem ser usadas para pintar as 5 letras da palavra FATEC, cada letra de uma só cor, e de modo que as vogais sejam as únicas letras pintadas com a mesma cor. De quantos modos pode ser feito isso?

a) 4
b) 36
c) 28
d) 120
e) 24

**925** (UFBA) Existem 5 ruas ligando os supermercados $S_1$ e $S_2$ e 3 ruas ligando os supermercados $S_2$ e $S_3$. Para ir de $S_1$ a $S_3$, passando por $S_2$, o número de trajetos diferentes que podem ser utilizados é:

a) 15
b) 10
c) 8
d) 5
e) 3

**926** (Mack-SP) Com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6 são formados números de 4 algarismos distintos. Entre eles, são divisíveis por 5:

a) 20 números
b) 30 números
c) 60 números
d) 120 números
e) 180 números

# 2. Fatorial

**Considerando um número $n$, sendo $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$, temos:**

$$\boxed{n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1}\text{, onde:}$$

- a leitura do símbolo n! é: "*n* fatorial";
- n! é o produto de todos os números naturais de 1 até *n*;
- estendendo a definição: $0! = 1$ e $1! = 1$.

**Exemplos:**

a) $2! = 2 \cdot 1 = 2$

b) $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

c) $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

d) $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

# Exercícios

## Resolvidos

**1** Simplificar as expressões:

a) $\frac{3!}{2!}$ b) $\frac{12!}{10!}$ c) $\frac{4! + 5!}{4!}$ d) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$, com $n \geq 1$

a) $\frac{3!}{2!} = \frac{3 \cdot 2!}{2!} = \frac{3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 3$

b) $\frac{12!}{10!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot \cancel{10!}}{\cancel{10!}} = \frac{12 \cdot 11 \cdot \cancel{10!}}{\cancel{10!}} = 132$

c) $\frac{4! + 5!}{4!} = \frac{4!}{4!} + \frac{5!}{4!} = \frac{\cancel{4!}}{\cancel{4!}} + \frac{5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 1 + 5 = 6$

d) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+1) \cdot n\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}} = n(n+1)$

**2** Resolver a equação $\frac{(x+2)!}{x!} = 6$, com $x \geq 0$.

$\frac{(x+2)!}{x!} = 6$

$\frac{(x+2)(x+1)!}{x!} = 6$

$\frac{(x+2)(x+1)\cancel{x!}}{\cancel{x!}} = 6$

$(x+2)(x+1) = 6$

$x^2 + x + 2x + 2 = 6$

$x^2 + 3x - 4 = 0$

$x = \frac{-3 \pm 5}{2}$ → $x' = \frac{-3+5}{2} = 1$; $x'' = \frac{-3-5}{2} = -4$ (não convém)

$V = \{1\}$

## Propostos

**927** Calcule o valor dos números fatoriais:

a) $0!$
b) $1!$
c) $6!$
d) $7!$
e) $2! + 3!$
f) $1! + 4!$
g) $3! - 2!$
h) $0! + 1!$
i) $2!\,3!$
j) $0!\,5!$
l) $4!\,2!$

**928** Simplifique as expressões:

a) $\frac{8!}{9!}$
b) $\frac{15!}{13!}$
c) $\frac{4!}{6!}$
d) $\frac{6!}{5!\,2!}$
e) $\frac{8!}{4!\,6!}$
f) $\frac{2 \cdot 4!}{4!\,4!}$

**929** Simplifique as frações:

a) $\frac{n!}{(n-1)!}$
b) $\frac{x!}{(x-2)!}$
c) $\frac{(n+1)!}{n!}$
d) $\frac{(2x+2)!}{(2x)!}$
e) $\frac{x!\,(x+2)!}{(x-1)!\,(x+1)!}$
f) $\frac{(n-1)! + (n-2)!}{n!}$

**930** Determine o valor de $x$, de modo que se tenha:

a) $x! = 1$
b) $x! = 24$
c) $x! = 720$
d) $x! = x$

**931** Resolva as equações:

a) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 12$

b) $\frac{n!}{(n-2)!} = 20$

c) $\frac{(n-1)!\,(n+2)!}{n!\,(n+1)!} = 2$

**932** (Santa Casa-SP) A solução da equação $\frac{(n+2)!\,(n-2)!}{(n+1)!\,(n-1)!} = 4$ é um número natural:

a) par
b) cubo perfeito
c) maior que 10
d) divisível por 5
e) múltiplo de 3

**933** (PUC-SP) Se $(n-6)! = 720$, então $n$ é igual à:

a) 12
b) 576
c) 16
d) 4
e) 30

**934** (UFRN) Se $(x+1)! = 3(x!)$, então $x$ é igual a:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

**935** Simplifique a expressão

$$\frac{(n+2)! + (n+1)(n-1)!}{(n+1)(n-1)!}$$

# 3. Permutação simples

Permutação simples de $n$ elementos distintos é qualquer grupo ordenado dêsses $n$ elementos.

Permutando os 3 elementos distintos de A = {x, y, z}, por exemplo, temos:

(x, y, z); (x, z, y); (y, x, z); (y, z, x); (z, x, y) e (z, y, x).

Obtemos o número de permutações simples igual a 6.

Note que para a primeira posição há três possibilidades (qualquer das letras), para a segunda posição sobram duas letras (2 possibilidades) e para a terceira posição temos só uma letra ainda não usada.

Para cálculo do número de permutações simples, usamos:

$$\boxed{P_n = n!, \text{ ou seja, } P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1}$$

Portanto, o número de permutações simples de $n$ elementos distintos é igual a $n$ fatorial.

Exemplo:
Vamos calcular o número de anagramas da palavra LÁPIS, lembrando que um anagrama é uma palavra formada com as mesmas letras da palavra dada, podendo ter ou não sentido na linguagem usual.
Como a palavra LÁPIS possui 5 letras, basta calcular:

$$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Assim, o número de anagramas da palavra LÁPIS é 120.

# Exercícios

## Resolvido

Considerar a palavra DILEMA e determinar:
a) o número total de anagramas
b) o número de anagramas que começam com a letra *D*
c) o número de anagramas que começam com a letra *D* e terminam com a letra *A*
d) o número de anagramas que começam com vogal

a) O número total de anagramas é:
$P_6 = 6! = 720$

b) Para calcular o número de anagramas que começam com a letra *D*, fixamos a letra *D* e permutamos as demais.
$D\underbrace{ILEMA}_{P_5}$ $\quad P_5 = 5! = 120$

c) Neste caso, vamos fixar a letra *D* e a letra *A* e permutar as demais.
$D\underbrace{ILEM}_{P_4}A$ $\quad P_4 = 4! = 24$

d) No item *b*, vemos que para cada letra fixada na primeira posição há 120 anagramas. Como existem 3 vogais diferentes, o número de anagramas que começam com vogal é:
$3 \cdot 120 = 360$ anagramas

## Propostos

**936** Da palavra LIVRO:
a) quantos anagramas podemos formar?
b) quantos são os anagramas que começam com vogal?
c) quantos são os anagramas que começam com consoante?

**937** Da palavra ADESIVO:
a) quantos anagramas podemos formar com as letras SI juntas e nessa ordem?
b) quantos são os anagramas da palavra ADESIVO que começam com a letra *D* e terminam com a letra *V*?

**938** Quantos anagramas da palavra FUVEST possuem as vogais juntas?

**939** De quantos modos 6 pessoas podem se sentar em 6 cadeiras, em fila?

**940** (FEI-SP) Obter o número de anagramas formados com as letras da palavra REPÚBLICA, nos quais as vogais se mantêm nas respectivas posições.

**941** (Fuvest-SP) O número de anagramas da palavra FUVEST que começam e terminam com vogal é:
a) 24
b) 48
c) 96
d) 120
e) 144

**942** Os anagramas da palavra EDUCATIVO que começam com vogal e terminam com consoante são em número de:
a) $P_9$
b) $P_7$
c) $P_7 \cdot P_5 \cdot P_4$
d) $2 \cdot P_7$
e) $20 \cdot P_7$

**943** (FCC-BA) Quanto aos anagramas da palavra ENIGMA, sejam as afirmações:
I) O número total deles é 720.
II) O número dos que terminam com a letra *A* é 25.
III) O número dos que começam com EN é 24.
Assinale a alternativa correta:
a) Só a afirmação I é verdadeira.
b) A afirmação II é verdadeira.
c) Só a afirmação III é verdadeira.
d) As afirmações I e II são verdadeiras.
e) As afirmações I e III são verdadeiras.

# 4. Arranjo simples

Chamam-se *arranjos simples* todos os agrupamentos simples de $p$ elementos que podemos formar com $n$ elementos distintos, sendo $p \leq n$. Cada um desses agrupamentos se diferencia de outro pela ordem ou natureza de seus elementos.

A notação para o número de arranjos simples de $n$ elementos tomados $p$ a $p$ é:

$$\boxed{A_{n,\,p}}$$

Exemplo:

Uma escola possui 18 professores. Entre eles, serão escolhidos: um diretor, um vice-diretor e um coordenador pedagógico. Quantas são as possibilidades de escolha?

Os agrupamentos são arranjos simples, pois 2 deles se distinguem por terem algum professor diferente ou por terem as mesmas pessoas mas em cargos diferentes.

Veja a tabela:

| **Cargo** | Diretor | Vice | C. Pedagógico |
|---|---|---|---|
| **Possibilidades** | 18 | 17 | 16 |

Logo: $A_{18,3} = 18 \cdot 17 \cdot 16 = 4\,896$

## *Fórmula de arranjo simples*

Vejamos como estabelecer uma fórmula para o cálculo do número $A_{n,p}$.

Considerando o conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ e os números $A_{n,\,1}; A_{n,\,2}; A_{n,\,3}; \dots; A_{n,p}$, temos:

$$A_{n,\,1} = n$$
$$A_{n,\,2} = n \cdot (n - 1)$$
$$A_{n,\,3} = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2)$$
$$A_{n,\,4} = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot (n - 3)$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$A_{n,\,p} = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot ... \cdot (n - p + 1)$$

Multiplicando o segundo membro da igualdade por $\frac{(n - p)!}{(n - p)!}$, encontramos a fórmula do arranjo:

$$A_{n,\,p} = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot ... \cdot (n - p + 1) \cdot \frac{(n - p)!}{(n - p)!}$$

Logo:

$$\boxed{A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}}\text{, sendo } p \leq n$$

Quando $p = n$, temos:

$A_{n,n} = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1$, ou $A_{n,n} = n!$, que é a permutação simples de $n$ elementos.

Assim, $A_{n,n} = P_n = n!$, para cálculo do número de arranjos simples.

Exemplo:

$$A_{5,2} = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 20$$

# Exercícios

## Resolvidos

**1** Retomando o problema dos 18 professores que disputam os cargos de diretor, vice-diretor e coordenador pedagógico, calcular, usando a fórmula, quantas são as possibilidades de escolha.

$$A_{18,3} = \frac{18!}{(18-3)!} = \frac{18!}{15!} = \frac{18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15!}{15!} = \frac{18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot \cancel{15!}}{\cancel{15!}} = 4\,896 \text{ grupos}$$

**2** Resolver a equação $A_{n,2} = 6$.

$$\frac{n!}{(n-2)!} = 6 \Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = 6 \Rightarrow \frac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}} = 6$$

$n(n-1) = 6$

$n^2 - n = 6$

$n^2 - n - 6 = 0$

$$n = \frac{1 \pm 5}{2} \begin{cases} n' = \dfrac{1+5}{2} = 3 \\ n'' = \dfrac{1-5}{2} = -2 \text{ (não convém)} \end{cases}$$

$V = \{3\}$

## Propostos

**944** Calcule:

a) $A_{4,3}$

b) $A_{5,2}$

c) $A_{12,3}$

d) $\dfrac{A_{4,2}}{A_{6,5}}$

**945** Resolva as equações:

a) $A_{n,2} = 30$

b) $\dfrac{A_{n,4}}{A_{n,3}} = 8$

c) $\dfrac{A_{n,2}}{3} = n + 4$

**946** Quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar com os elementos do conjunto E = {1, 2, 3, 4, 5}?

**947** Uma empresa possui 16 funcionários administrativos, entre os quais serão escolhidos 3, que disputarão para os cargos de diretor, vice-diretor e tesoureiro. De quantas maneiras pode ser feita a escolha?

**948** Júlio deseja pintar a palavra LIVRE em um cartaz de publicidade, usando uma cor em cada letra. De quantos modos isso pode ser feito, se ele dispõe de 8 cores de tinta?

**949** Duas pessoas entram num ônibus que tem 7 lugares vagos. De quantas maneiras diferentes as 2 pessoas podem ocupar esses lugares?

**950** (UFBA) Quatro jogadores saíram de Manaus para um campeonato em Porto Alegre, num carro de 4 lugares. Dividiram o trajeto em 4 partes e aceitaram que cada um dirigiria uma vez. Combinaram também que, toda vez que houvesse mudança de motorista, todos deveriam trocar de lugar. O número de arrumações possíveis dos 4 jogadores durante toda a viagem é:

a) 4
b) 8
c) 12
d) 24
e) 162

**951** De quantos modos podem-se arrumar 4 livros de Matemática, 3 de Geografia e 2 de Biologia, numa estante, de modo que:

a) fiquem dispostos em qualquer ordem
b) os livros de mesmo assunto fiquem juntos

**952** (Osec-SP) O número de maneiras diferentes segundo as quais 1 casal, 2 filhos e 1 filha podem sentar-se em torno de uma mesa circular, com a condição de que os 2 filhos não fiquem juntos, é:

a) 6
b) 12
c) 24
d) 60

**953** Num grande prêmio de Fórmula 1, participarão 20 pilotos e somente os 6 primeiros marcam pontos. Quantas são as possibilidades de classificação nos 6 primeiros lugares?

# 5. Combinação simples

Chamam-se *combinações simples* todos os agrupamentos simples de $p$ elementos que podemos formar com $n$ elementos distintos, sendo $p \leq n$. Cada um desses agrupamentos se diferencia do outro apenas pela natureza de seus elementos.

A notação para o número de combinação simples de $n$ elementos tomados $p$ a $p$ é:

$$\boxed{C_{n,\,p}}$$

Exemplo:
Uma escola tem 9 professores de Matemática. Quatro deles deverão representar a escola em um congresso. Quantos grupos de 4 são possíveis?
Os agrupamentos são combinações simples, pois um deles se distingue do outro somente quando apresenta pelo menos uma pessoa diferente. Invertendo a ordem dos elementos, não alteramos o grupo.

Calculamos inicialmente os arranjos simples formados por 4 entre os 9 professores de Matemática ($m_i$): $A_{9,4} = \dfrac{9!}{(9-4)!} = 3\,024$.

Mas aqui consideramos distintos os agrupamentos do tipo $(m_3, m_7, m_6, m_9)$ e $(m_7, m_3, m_6, m_9)$. A quantidade de agrupamentos formados por esses professores, mudando-se apenas a ordem, é dada por $p_4 = 4! = 24$.
Logo, o número de combinações simples será o quociente $3\,024 : 24 = 126$.

## *Fórmula de combinação simples*

Considerando o conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ e uma combinação de $p$ elementos de $A$, podemos fazer as permutações desses elementos, e encontrar p! seqüências, ou seja, os arranjos dos $n$ elementos de $A$ tomados $p$ a $p$. Portanto temos o produto:

$p!\, C_{n,p} = A_{n,p}$, ou seja, $C_{n,p} = \dfrac{A_{n,p}}{p!}$

$\boxed{C_{n,p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}}$, sendo $p \leq n$

Então, para o cálculo do número de combinações simples, temos:

Exemplo:

$$C_{5,2} = \frac{5!}{2!\,(5-2)!} = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{2! \cdot \cancel{3!}} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

# Exercícios

## Resolvidos

**1** Retornando ao problema dos 9 professores de Matemática dentre os quais 4 irão a um congresso, calcular quantos grupos serão possíveis.

$$C_{9,4} = \frac{9!}{4!\,(9-4)!} = \frac{9!}{4!\,5!} = \frac{9 \cdot \overset{2}{\cancel{8}} \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5!}}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{5!}} = 126 \text{ grupos possíveis}$$

**2** Resolver a equação $C_{x,2} = 3$.

$$\frac{x!}{2!\,(x-2)!} = 3 \Rightarrow \frac{x(x-1)\cancel{(x-2)!}}{2!\,\cancel{(x-2)!}} = 3 \Rightarrow \frac{x(x-1)\,(x-2)!}{2 \cdot (x-2)!} = 3 \Rightarrow \frac{x \cdot (x-1)}{2} = 3$$

$$x^2 - x = 6 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm 5}{2} \begin{cases} x' = 3 \\ x'' = -2 \text{ (não convém)} \end{cases}$$

Logo, $V = \{3\}$

## Propostos

**954** Calcule:

a) $C_{5,\,3}$

b) $C_{7,\,5}$

c) $C_{6,\,2}$

d) $\dfrac{C_{10,\,3}}{C_{5,\,3}}$

**955** Resolva as equações:

a) $C_{n,\,2} = 6$

b) $C_{n,\,4} = 4\,C_{n,\,3}$

**956** Quantos grupos diferentes de 4 lâmpadas podem ficar acesos num galpão que tem 10 lâmpadas?

**957** Quantos subconjuntos de 4 elementos possuem um conjunto de 6 elementos?

**958** (FAAP-SP) O número de combinações de *n* objetos distintos tomados 2 a 2 é 15. Determine *n*.

**959** Quantas comissões de 5 membros podemos formar numa assembléia de 12 participantes?

**960** Uma papelaria tem 8 cadernos de cores diferentes, e quero comprar 3 de cores diferentes. Quantas possibilidades de escolha eu tenho?

**961** Quantos produtos de 2 fatores podemos obter com os divisores naturais do número 12?

**962** (Fatec-SP) Há 12 inscritos em um campeonato de boxe. O número total de lutas que podem ser realizadas entre os inscritos é:

a) 12
b) 24
c) 33
d) 66
e) 132

## Problemas envolvendo arranjo e combinação

Com os problemas a seguir procuramos enfatizar os conceitos de arranjo simples e de combinação simples e tornar mais clara a diferença entre eles.

Exemplos:

a) Quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar?

Considerando o conjunto dos algarismos {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, inicialmente aplicamos a fórmula do arranjo simples, ou seja, $A_{10,\,3}$.

$$A_{10,\,3} = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!}$$

$$A_{10,\,3} = 720$$

A seguir, vamos calcular os arranjos cujos números possuem o zero como primeiro algarismo, ou seja, $A_{9,\,2}$, e subtrair do total de arranjos.

$$A_{9,\,2} = \frac{9!}{(9-2)!} = \frac{9!}{7!}$$

$$A_{9,\,2} = 72$$

$$A_{10,\,3} - A_{9,\,2} = 720 - 72 = 648 \text{ números}$$

b) (Unicamp-SP) Uma Câmara Municipal é composta de vereadores de 3 partidos — $A$, $B$ e $C$ —, assim distribuídos: 3 do partido $A$, 6 do partido $B$ e 9 do partido $C$.

I. Qual a menor comissão (em número de vereadores) que se pode formar nessa Câmara, mantendo-se a mesma proporcionalidade partidária?

II. Quantas comissões diferentes com essa característica podem ser formadas?

I. Considerando a distribuição → partido $A$: 3; partido $B$: 6; partido $C$: 9, a menor distribuição que mantém a proporcionalidade é partido $A$: 1; partido $B$: 2; partido $C$: 3.

II. O número de comissões diferentes, que corresponde à característica do item I, é calculado pelo produto das combinações

$C_{3,1} \cdot C_{6,2} \cdot C_{9,3} = 3 \cdot 15 \cdot 84 = 3\,780$ comissões

# Exercícios

## Propostos

**963** (Cesgranrio-RJ) Um mágico se apresenta em público vestindo calça e paletó de cores diferentes. Para que ele possa se apresentar em 24 sessões com conjuntos diferentes, o número mínimo de peças (número de paletós mais número de calças) de que precisa é:

a) 24 c) 12 e) 8
b) 11 d) 10

**964** (Fuvest-SP) Calcule quantos números múltiplos de 3, de 4 algarismos distintos, podem ser formados com 2, 3, 4, 6 e 9.

**965** (FGV-SP) Seis pessoas decidem formar 2 comissões com 3 pessoas cada. De quantas formas diferentes isso pode ser feito?

a) 20 c) 10 e) 48
b) 120 d) 92

**966** (PUC-SP) Pretende-se formar uma comissão de 5 membros a partir de um grupo de 10 operários e 5 empresários, de modo que nessa comissão haja pelo menos 2 representantes de cada uma das 2 classes. O total de diferentes comissões que podem ser assim formadas é:

a) 1 000 c) 19 400 e) 1 650
b) 185 d) 1 750

**967** (Santa Casa-SP) Num hospital, há 3 vagas para trabalhar no berçário, 5 no banco de sangue e 2 na radioterapia. Se 6 funcionários se candidatarem para o berçário, 8 para o banco de sangue e 5 para a radioterapia, de quantas formas distintas essas vagas podem ser preenchidas?

a) 30 d) 11 200
b) 240 e) 16 128 000
c) 1 120

**968** (Unesp-SP) Sobre uma reta marcam-se 3 pontos e sobre outra reta, paralela à primeira, marcam-se 5 pontos. O número de triângulos que obteremos unindo 3 quaisquer desses 8 pontos é:

a) 26 d) 45
b) 90 e) 42
c) 25

**969** Considere os números obtidos do número 12 345, efetuando-se todas as permutações de seus algarismos. Colocando esses números em ordem crescente, qual o lugar ocupado pelo número 43 521?

**970** Uma urna contém 3 bolas azuis e 2 verdes. De quantas maneiras podemos retirar as 5 bolas, uma por vez e sem reposição?

# 6. Permutação com elementos repetidos

Um conjunto foi escrito com $n$ elementos. Um dos elementos foi repetido $\alpha$ vezes, outro elemento foi repetido $\beta$ vezes e assim por diante, até um elemento repetido $\gamma$ vezes.

O número de permutações que se pode obter com os elementos é:

$$\boxed{P_n^{(\alpha, \beta, \ldots, \gamma)} = \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\ldots\gamma!}}$$

Exemplo:
Qual é o número de anagramas que podemos formar com as letras da palavra INFINITO?
Se não houvesse elemento repetido, teríamos um total de $P_8 = 8!$ anagramas. Imagine que uma das letras *N* fosse azul e a outra verde. Para cada anagrama escrito com *N* (azul) à esquerda do *N* (verde), teríamos outro anagrama com *N* (verde) à esquerda do *N* (azul). Mas como, de fato, não há essa distinção entre as letras *N*, calculamos o número em dobro. Para corrigir esse erro, devemos dividir o total por 2!, ou seja, 2.
Porém, a letra *I* também se repete. Imaginando 3 cores para as letras *I*, teríamos uma variação de 3!, isto é, 6 posições. Devemos dividir o total por 3! para corrigir esse erro.
Assim, o número procurado é:

$$P_8^{(3,\,2)} = \frac{8!}{3!\,2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!\,2!} = 3\,360$$

## Exercícios

### Propostos

**971** Qual é o número de anagramas que podemos formar com as letras da palavra URUGUAI?

**972** De quantos modos podemos estacionar 20 automóveis em 3 garagens, sabendo que na primeira cabem 10 automóveis; na segunda, 6; e na terceira, 4?

**973** (Unicamp-SP) As avenidas de uma cidade estão dispostas na direção norte–sul e as ruas na direção leste–oeste. Um trabalhador, que reside numa das esquinas dessa cidade, trabalha numa firma localizada em outra esquina, 2 quadras ao sul e 3 quadras a leste. Quantos caminhos (possíveis) o trabalhador pode seguir para ir de sua casa à fábrica, percorrendo sempre a menor distância?

**974** (Fuvest-SP) Dado um quadrado plano ABCD, escolhem-se 3 pontos sobre o lado AB, 5 pontos sobre BC, 2 pontos sobre CD e 1 ponto sobre AD, de tal modo que nenhum desses pontos coincida com algum vértice do quadrado. Seja *x* o conjunto dos pontos escolhidos. O número de triângulos com vértices em *x* é:

a) 165
b) 55
c) 61
d) 154
e) 990

**975** (Unicamp-SP) Numa Kombi viajam 9 pessoas, das quais 4 podem dirigir. De quantas maneiras diferentes é possível acomodá-las na Kombi (3 no banco da frente, 3 no banco do meio e 3 no banco de trás), de forma que uma das 4 que dirigem ocupe o lugar da direção?

**976** (Fuvest-SP) Seja *P* o conjunto dos 17 vértices de um heptadecágono regular. Qual o número de triângulos cujos vértices pertencem a *P*?

# 7. Números binomiais

Se *n* e *p* são dois números naturais, com $n \geqslant p$, chama-se *número binomial de classe p* ao número $\binom{n}{p}$ dado por:

$$\boxed{\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\ (n - p!)}}$$

Podemos observar que $\binom{n}{p} = C_{n,\ p}$

Exemplos:

a) $\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!\ (6-2)!} = \frac{6!}{2!\ 4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{2 \cdot 4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{2 \cdot \cancel{4!}} = 15$

b) $\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!\ (4-3)!} = \frac{4!}{3!\ 1!} = \frac{4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 4$

## *Casos notáveis*

a) $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\ (n-0)!} = \frac{n!}{1 \cdot n!} = 1$

Exemplo:

$\binom{3}{0} = \frac{3!}{0!\ (3-0)!} = \frac{3!}{1 \cdot 3!} = 1$

b) $\binom{n}{1} = \dfrac{n!}{1!\ (n-1)!} = \dfrac{n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} = n$

Exemplo:

$$\binom{2}{1} = \frac{2!}{1!\ (2-1)!} = \frac{2}{1 \cdot 1} = 2$$

c) $\binom{n}{n} = \dfrac{n!}{n!\ (n-n)!} = \dfrac{n!}{n!\ 0!} = 1$

Exemplo:

$$\binom{5}{5} = \frac{5!}{5!\ (5-5)!} = \frac{5!}{5!\ 0!} = 1$$

## *Números binomiais complementares*

Os números binomiais $\binom{n}{p}$ e $\binom{n}{q}$ de mesmo numerador são complementares, quando $p + q = n$.

Exemplos:

$C_{5,3}$ $\binom{5}{3} = \dfrac{5!}{3!\ (5-3)!} = \dfrac{5!}{3!\ 2!} = 10$

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\ (5-2)!} = \frac{5!}{2!\ 3!} = 10$$

Note que dois números binomiais complementares são iguais.

## *Propriedades dos números binomiais*

*Primeira propriedade:*

$$\boxed{\text{Se } \binom{n}{p} = \binom{n}{q}, \text{ então } \begin{cases} p = q \\ \text{ou} \\ p + q = n \end{cases}}$$

Exemplo:

$\binom{5}{3} = \binom{5}{2}$, pois $3 + 2 = 5$

*Segunda propriedade:* Relação de Stifel

$$\boxed{\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}}$$

Demonstração:

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

Desenvolveremos cada um dos membros e chegaremos a uma identidade.

$$\frac{n!}{p!\,(n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)!\,(n-p-1)!} = \frac{(n+1)!}{(p+1)!\,[(n+1)-(p+1)]!}$$

$$\frac{n!\,(p+1) + n!\,(n-p)}{(p+1)!\,(n-p)!} = \frac{(n+1)!}{(p+1)!\,(n+1-p-1)!}$$

$$\frac{n!\,(p+1+n-p)}{(p+1)!\,(n-p)!} = \frac{(n+1)\cdot n!}{(p+1)!\,(n-p)!}$$

$$\frac{(n+1)\cdot n!}{(p+1)!\,(n-p)!} = \frac{(n+1)\cdot n!}{(p+1)!\,(n-p)!}$$

Exemplo:

$$\begin{array}{ccccc} n & & n & & n+1 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \binom{6}{4} & + & \binom{6}{5} & = & \binom{7}{5} \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ p & & p+1 & & p+1 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{ccccc} \binom{6}{4} & + & \binom{6}{5} & = & \binom{7}{5} \\ 15 & + & 6 & = & 21 \end{array}$$

# Exercícios

## Resolvidos

**1** Determinar:

a) $\binom{5}{3}$

b) $\binom{3}{0} + \binom{4}{1} + \binom{5}{5}$

a) $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3!}{3!\cdot 2} = \frac{5\cdot 4\cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}\cdot 2} = 10$

b) $\binom{3}{0} + \binom{4}{1} + \binom{5}{5} = 1 + 4 + 1 = 6$

**2** Resolver a equação $\binom{5}{x} = \binom{5}{2}$.

Aplicando a primeira propriedade, temos:

$x = 2$ ou $x + 2 = 5$

$x = 3$

Logo: $V = \{2, 3\}$

**3** Determinar $\binom{8}{6} + \binom{8}{7}$.

Aplicando a Relação de Stifel, temos:

$$\binom{8}{6} + \binom{8}{7} = \binom{8+1}{7} = \binom{9}{7} = \frac{9!}{7!\,(9-7)!} = \frac{9!}{7!\,2!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7!}{7!\,2} = \frac{9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!}\,2} = 36$$

# Propostos

**977** Calcule:

a) $\binom{6}{2}$ c) $\binom{7}{6}$

b) $\binom{5}{4}$ d) $\binom{10}{8}$

**978** Calcule o valor das expressões:

a) $\binom{2}{0} + \binom{7}{7}$

b) $\binom{4}{1} - \binom{8}{0}$

c) $\binom{5}{0} + \binom{5}{1} - \binom{5}{5}$

**979** Calcule o valor das expressões aplicando a Relação de Stifel:

a) $\binom{5}{2} + \binom{5}{3}$ b) $\binom{10}{7} + \binom{10}{8}$

**980** Determine o conjunto verdade das equações. Sugestão: comparar com a Relação de Stifel.

a) $\binom{7}{x} = \binom{7}{3}$

b) $\binom{8}{2} = \binom{8}{x}$

c) $\binom{x}{6} = \binom{x}{4}$

d) $\binom{x}{2} + \binom{x}{3} = \binom{8}{3}$

e) $\binom{x}{4} + \binom{x}{5} = \binom{7}{5}$

**981** (FGV-SP) Sabendo-se que $\binom{m}{p} = x$ e $\binom{m+1}{p+1} = y$, então $\binom{m}{p+1}$ é:

a) $x + y$ d) $x - p$

b) $x - y$ e) $y - p$

c) $y - x$

**982** (Unesp-SP) Seja *n* um número natural tal que $\binom{10}{4} + \binom{10}{n+1} = \binom{11}{4}$. Então:

a) $n = 5$ c) $n = 3$

b) $n = 4$ d) $n = 2$

**983** (UECE) A soma das soluções da equação $\binom{18}{6} = \binom{18}{4x-1}$ é:

a) 8 c) 6

b) 5 d) 7

**984** (UFPR) Sejam *n* e *p* números inteiros positivos tais que $n - 1 \geq p$. Então: $\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} + \binom{n}{p+1}$ é igual a:

a) $\binom{n-1}{p-1}$ d) $\binom{n+1}{p-1}$

b) $\binom{n}{p}$ e) $\binom{n+1}{p+1}$

c) $\binom{n+1}{p}$

**985** (Santa Casa-SP) Se, $\binom{n}{3} + \binom{n}{4} = 5n(n-2)$, então *n* é igual a:

a) 11 d) 8

b) 10 e) 7

c) 9

# 8. Triângulo de Pascal

A determinação de números binomiais pode ser obtida por meio de um dispositivo prático chamado triângulo de Pascal, que é construído com base na teoria e propriedade dos números binomiais.

| n \ p | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $\binom{0}{0}$ | | | | | | |
| 1 | $\binom{1}{0}$ | $\binom{1}{1}$ | | | | | |
| 2 | $\binom{2}{0}$ | $\binom{2}{1}$ | $\binom{2}{2}$ | | | | |
| 3 | $\binom{3}{0}$ | $\binom{3}{1}$ | $\binom{3}{2}$ | $\binom{3}{3}$ | | | |
| 4 | $\binom{4}{0}$ | $\binom{4}{1}$ | $\binom{4}{2}$ | $\binom{4}{3}$ | $\binom{4}{4}$ | | |
| 5 | $\binom{5}{0}$ | $\binom{5}{1}$ | $\binom{5}{2}$ | $\binom{5}{3}$ | $\binom{5}{4}$ | $\binom{5}{5}$ | |
| 6 | $\binom{6}{0}$ | $\binom{6}{1}$ | $\binom{6}{2}$ | $\binom{6}{3}$ | $\binom{6}{4}$ | $\binom{6}{5}$ | $\binom{6}{6}$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |

ou

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

.

Verifique no triângulo de Pascal as seguintes propriedades:

1ª) Um "cateto" e a "hipotenusa" do triângulo de Pascal são formados por 1.

2ª) Em cada linha os termos eqüidistantes dos extremos são iguais.

3ª) A soma de dois elementos consecutivos de uma linha é igual ao elemento da linha seguinte, imediatamente abaixo da segunda parcela da soma.

4ª) A soma dos elementos de cada linha do triângulo é uma potência de 2, cujo expoente é o número da linha.

# 9. Binômio de Newton

Supondo um número natural *n*, podemos considerar a seguinte expressão:

$$(x + a)^n = \binom{n}{0} x^n a^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} a^1 + \binom{n}{2} x^{n-2} a^2 + \ldots + \binom{n}{n} x^0 a^n$$

Com o emprego do somatório, a fórmula fica reduzida a:

$$(x + a)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p \cdot x^{n-p}$$

Considerando alguns valores para *n*, temos:

a) $n = 0$

$$(x + a)^0 = \binom{0}{0}$$

b) $n = 1$

$$(x + a)^1 = \binom{1}{0} x^1 a^0 + \binom{1}{1} x^0 a^1$$

c) $n = 2$

$$(x + a)^2 = \binom{2}{0} x^2 a^0 + \binom{2}{1} x^1 a^1 + \binom{2}{2} x^0 a^2$$

d) $n = 3$

$$(x + a)^3 = \binom{3}{0} x^3 a^0 + \binom{3}{1} x^2 a^1 + \binom{3}{2} x^1 a^2 + \binom{3}{3} x^0 a^3$$

## *Termo geral do binômio de Newton*

Todo termo do desenvolvimento do binômio de Newton pode ser representado pela expressão:

$$\boxed{T_{p+1} = \binom{n}{p} x^{n-p} \cdot a^p}$$

Exemplo:
Para determinar o termo em $x^3$ no desenvolvimento do binômio $(x + 4)^5$, fazemos:

$$T_{p+1} = \binom{5}{p} x^{5-p} \cdot a^p$$

Como o expoente de *x* deve ser igual a 3, devemos ter $5 - p = 3$. Logo $p = 2$.

Substituindo p = 2, temos: $T_{2+1} = \binom{5}{2} x^{5-2} \cdot 4^2$

$$T_3 = \frac{5!}{2!\,(5-2)!} \cdot x^3 \cdot 16$$

$$T_3 = 160\,x^3$$

# Exercícios

## Resolvidos

**1** Determinar o termo geral do desenvolvimento do binômio $\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^4$.

$$T_{p+1} = \binom{n}{p} x^{n-p} \cdot a^p$$

$$T_{p+1} = \binom{4}{p} (x^2)^{4-p} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)^p = \binom{4}{p} \cdot x^{8-2p} \cdot (-x^{-2p}) = -\binom{4}{p} \cdot x^{8-4p}$$

**2** (Mauá-SP) No binômio $\left(x^3 + \frac{1}{y^2}\right)^{25}$, escrever o termo que contém $x^9$, calculando o respectivo coeficiente.

$$T_{p+1} = \binom{n}{p} \cdot x^{n-p} \cdot a^p$$

$$T_{p+1} = \binom{25}{p} (x^3)^{25-p} \cdot \left(\frac{1}{y^2}\right)^p = \binom{25}{p} \cdot x^{75-3p} \cdot \frac{1}{y^{2p}}$$

O fator *x* deve ter expoente igual a 9. Logo:

$75 - 3p = 9 \Rightarrow -3p = 9 - 75 \Rightarrow -3p = -66 \Rightarrow p = 22$

Substituindo p = 22 na expressão do termo geral, temos:

$$T_{22+1} = \binom{25}{22} \cdot x^{75-3\cdot 22} \cdot \frac{1}{y^{2\cdot 22}} = \frac{25!}{22!\,(25-22)!} \cdot x^9 \cdot \frac{1}{y^{44}} \Rightarrow T_{23} = 2\,300\,\frac{x^9}{y^{44}}$$

## Propostos

**986** Calcule e verifique que a seqüência dos somatórios dados pela expressão

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n-i}{i}, \text{ onde } (n-i) \geq i,$$ é a seqüência de Fibonacci. A seguir, localize-a no Triângulo de Pascal.

**987** Desenvolva os seguintes binômios:

a) $(x + 2)^3$
b) $(x + 3)^4$
c) $(x + 5)^6$
d) $(x - 1)^3$
e) $(x - 3)^6$
f) $(x - 1)^5$

**988** Determine o termo em $x^3$ no desenvolvimento dos binômios:

a) $(x + 2)^6$
b) $(x + 3)^8$

**989** Determine o termo em $x^5$ no desenvolvimento dos binômios:

a) $(x + 2)^7$
b) $(x - 1)^6$

**990** Calcule o segundo termo no desenvolvimento do binômio $(x + 3)^8$.

**991** Calcule o quarto termo no desenvolvimento do binômio $(x - 1)^7$.

**992** (Cesgranrio-RJ) O coeficiente de $x^4$ no polinômio $P(x) = (x + 2)^6$ é:

a) 64
b) 60
c) 12
d) 4
e) 24

**993** (UFSCar-SP) O termo independente de *x* no desenvolvimento de $\left(x - \frac{1}{x^2}\right)^{15}$ é:

a) 1
b) −3 003
c) −30
d) 1 225
e) −425

**994** (UFBA) O coeficiente de $x^7$ no desenvolvimento de $\left(5x^3 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^7$ é:

a) 35
b) 125
c) 280
d) 875
e) 4 375

**995** (UFES) O termo independente de *x* no desenvolvimento de $\left(x - \frac{1}{3x}\right)^8$ é:

a) 70
b) −70
c) $\frac{70}{81}$
d) $-\frac{70}{81}$

**996** (PUC-SP) Dado o binômio $\left(x^3 + \frac{1}{x^2}\right)^5$, sabe-se que a soma dos coeficientes e o termo independente de *x* no seu desenvolvimento são, respectivamente, iguais aos números de homens e mulheres que participam de um simpósio. De quantos modos distintos podem ser formadas comissões de exatamente 4 pessoas, escolhidas entre os participantes desse simpósio, se cada comissão deve conter homens e mulheres em igual número?

**997** (UFRN) O termo independente de *x* no desenvolvimento de $\left(x - \frac{1}{x}\right)^5$:

a) não existe
b) é o primeiro
c) é o segundo
d) é o terceiro
e) é o quinto

**998** (UFCE) O coeficiente de $x^{15}$ no desenvolvimento de $(x^2 + x^{-3})^{15}$ é:

a) 455
b) 500
c) 555
d) 643
e) n.d.a.

**999** (UFES) Qual o termo central de $(x - 3)^6$?

a) $-540x^3$
b) $-3240x^3$
c) $3240x^3$
d) $540x^3$
e) $540x^4$

**1000** (Mack-SP) A condição que o número natural *n* deve satisfazer para que o desenvolvimento de $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^n$ tenha um termo independente de *x* é ser:

a) par
b) múltiplo de 5
c) múltiplo de 4 e maior que 8
d) múltiplo de 3
e) ímpar

**1001** (PUC-SP) O termo no desenvolvimento de $(2x^2 - y^3)^8$ que contém $x^{10}$ é:

a) 2
b) 3
c) 4
d) 5
e) 6

**1002** (UFMA) O quarto termo no desenvolvimento de $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^6$ é:

a) $20x^3$
b) $12x^2$
c) $\frac{15}{x^6}$
d) $\frac{6}{x^2}$

**1003** (UFGO) O valor de *a* para que o coeficiente de $x^4$ no desenvolvimento de $(x + a)^7$ seja 1 890 é:

a) $3\sqrt[3]{2}$
b) $3\sqrt{2}$
c) $2\sqrt[3]{3}$
d) $2\sqrt{3}$
e) n.d.a.

**1004** (Mack-SP) No desenvolvimento $\left(x^2 + \frac{3}{x}\right)^k$, $K \in \mathbb{N}$, os coeficientes binomiais do quarto e do décimo terceiro termos são iguais. Então, o termo independente de *x* é o:

a) décimo
b) décimo primeiro
c) nono
d) décimo segundo
e) oitavo

# Ficha-resumo

## *Análise combinatória*

- Princípio fundamental da contagem
  Sabendo-se que um acontecimento ocorre em duas situações sucessivas e independentes, sendo que:

  1ª situação: ocorre de *a* maneiras;

  2ª situação: ocorre de *b* maneiras, então, o número total de possibilidades de ocorrer o acontecimento é dada por $a \cdot b$.

- Fatorial: sendo $n \in \mathbb{N}$ e $n > 1$, temos: $\boxed{n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot 1}$. Estendendo a definição, obtemos: $0! = 1$ e $1! = 1$.

- Permutação simples: $\boxed{P_n = n!}$

- Arranjo simples: $\boxed{A_{n,p} = \dfrac{n!}{(n - p)!}}$, com $p \leq n$

- Combinação simples: $\boxed{C_{n,p} = \dfrac{n!}{p!\,(n - p)!}}$

- Permutação com elementos repetidos: $\boxed{P_n^{(\alpha, \beta, \ldots, \gamma)} = \dfrac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\ldots\,\gamma!}}$

- Números binomiais: sendo $\{n, p\} \subset \mathbb{N}$ e $n \geq p$, temos: $\boxed{\dbinom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!\,(n \cdot p)!}}$

  Casos notáveis:

  $$\binom{n}{0} = 1; \binom{n}{1} = n; \binom{n}{n} = 1$$

  Propriedades:

  1ª) $\boxed{\dbinom{n}{p} = \dbinom{n}{q}}$ Temos $p = q$ ou $p + q = n$

  2ª) $\boxed{\dbinom{n}{p} + \dbinom{n}{p + 1} = \dbinom{n + 1}{p + 1}}$ Relação de Stifel

## *Triângulo de Pascal*

| n \ p | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $\binom{0}{0}$ | | | | | |
| 1 | $\binom{1}{0}$ | $\binom{1}{1}$ | | | | |
| 2 | $\binom{2}{0}$ | $\binom{2}{1}$ | $\binom{2}{2}$ | | | |
| 3 | $\binom{3}{0}$ | $\binom{3}{1}$ | $\binom{3}{2}$ | $\binom{3}{3}$ | | |
| 4 | $\binom{4}{0}$ | $\binom{4}{1}$ | $\binom{4}{2}$ | $\binom{4}{3}$ | $\binom{4}{4}$ | |
| 5 | $\binom{5}{0}$ | $\binom{5}{1}$ | $\binom{5}{2}$ | $\binom{5}{3}$ | $\binom{5}{4}$ | $\binom{5}{5}$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |

ou

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | |
| 1 | 1 | | | | |
| 1 | 2 | 1 | | | |
| 1 | 3 | 3 | 1 | | |
| 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | |
| 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 |

- Um "cateto" e a "hipotenusa" do Triângulo de Pascal são formados por 1.
- Em cada linha os termos eqüidistantes dos extremos são iguais.
- A soma de dois elementos consecutivos de uma linha é igual ao elemento da linha seguinte, imediatamente abaixo da segunda parcela da adição.
- A soma dos elementos de cada linha do triângulo é uma potência de 2.

## *Binômio de Newton*

$$(x + a)^n = \binom{n}{0} x^n a^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} \cdot a^1 + \binom{n}{2} x^{n-2} \cdot a^2 + \ldots + \binom{n}{n} x^0 a^n$$

sendo $n \in \mathbb{N}$

Termo geral

$$T_{p+1} = \binom{n}{p} x^{n-p} \cdot a^p$$

Exercícios

## Complementares

**1005** Uma loja de revenda de automóveis possui 4 marcas diferentes, nas cores: azul, vermelho e branco. Quantas são as diferentes possibilidades de comprar um automóvel?

**1006** De quantos modos 3 anéis podem ser colocados nos dedos (um anel em cada dedo) de uma só mão?

**1007** Simplifique as expressões:

a) $\dfrac{7!}{9!}$

b) $\dfrac{3!\,8!}{2!\,6!}$

c) $\dfrac{4! + 6!}{6!}$

d) $\dfrac{5! - 3!}{3!}$

e) $\dfrac{(n + 1)!}{n!}$

f) $\dfrac{n! + (n + 1)!}{n! + 2(n - 1)!}$

**1008** Resolva as equações:

a) $\dfrac{x!}{(x - 2)!} = 2$  b) $\dfrac{(2n + 1)!}{(2n - 1)!} = 6$

**1009** (Fatec-SP) A expressão $\dfrac{1}{n!} - \dfrac{1}{(n + 1)!}$, onde $n \in \mathbb{N}$, é igual a:

a) $\dfrac{1}{2n!}$

b) $\dfrac{1}{n!}$

c) $\dfrac{n - 1}{(n + 1)!}$

d) $\dfrac{n}{(n + 1)!}$

e) n.d.a.

**1010** (UFPR) A soma das raízes da equação $(5x - 7)! = 1$ vale:

a) 5
b) 7
c) 12
d) 3
e) 4

**1011** (FCC-BA) Considerem-se todos os anagramas da palavra MORENA. Quantos deles têm vogais juntas?

a) 36
b) 72
c) 120
d) 144
e) 180

**1012** O número de anagramas da palavra ALUNO que tem as vogais juntas é:

a) 12
b) 24
c) 36
d) 6
e) 9

**1013** (Mack-SP) Com *n* elementos iguais a *X* e 3 elementos iguais a *Y* forma-se um total de $7n + 7$ permutações. Então, *n* vale:

a) 8
b) 7
c) 6
d) 5
e) 4

**1014** (Med. ABC-SP) O número de raízes da equação $C^{2x}_{12} = C^{x^2}_{12}$ é:

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) maior que 3

**1015** Com os algarismos 2, 3 e 4, quantos números de 2 algarismos podem ser escritos?

**1016** O diretório acadêmico de uma faculdade possui 12 membros, entre os quais serão escolhidos 4 para os cargos de presidente, vice-presidente, tesoureiro e secretário. De quantas maneiras pode ser feita a escolha?

**1017** Um estudante possui 9 folhas de papel de cores diferentes e quer encapar 3 cadernos, um de cada cor. Quantas possibilidades existem?

**1018** Determine o número de diagonais do pentágono? (pentágono: polígono de 5 lados)

**1019** (FEI-SP) De todos os números menores que 100 000 e maiores que 50 000, quantos são os que lidos da esquerda para a direita ou da direita para a esquerda fornecem o mesmo valor? (Por exemplo: 56 365.)

a) 450
b) 1 500
c) 1 000
d) 900
e) 500

**1020** (Fuvest-SP) Seja *V* o conjunto dos vértices de uma pirâmide de base quadrada. Determine:

a) o número de triângulos cujos vértices são pontos de *V*;

b) o número de circunferências que passam por pelo menos 3 pontos de *V*.

**1021** Resolva as equações:

a) $\binom{11}{x} = \binom{11}{8}$

b) $\binom{4}{x-1} = \binom{4}{2x+3}$

**1022** Usando a Relação de Stifel, determine o valor de:

a) $\binom{7}{4} + \binom{7}{5}$

b) $\binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{8}{8}$

**1023** Determine o conjunto verdade da equação:

$\binom{n-1}{4} + \binom{n-1}{5} = \binom{n}{5}$

**1024** (Mack-SP) Considere a seqüência de afirmações:

I. $\binom{15}{1} = \binom{15}{3}$

II. $\binom{15}{2} = \binom{15}{13}$

III. $\binom{15}{3x} = \binom{15}{6}$ implica $x = 2$

Associando *V* ou *F* a cada afirmação, conforme seja verdadeira ou falsa, tem-se:

a) F, F, V
b) F, V, V
c) F, V, F
d) F, F, F
e) V, V, V

**1025** Desenvolva os seguintes binômios:

a) $(x + 3)^6$
b) $(x - 1)^5$

**1026** (Mack-SP) No desenvolvimento de $\left(x\sqrt{x} + \frac{1}{4}\right)^n$, a diferença entre os coeficientes binomiais do terceiro e do segundo termos é 44. Então:

a) $n = 7$
b) $n = 8$
c) $n = 9$
d) $n = 10$
e) $n = 11$

**1027** (Mack-SP) A condição que o número natural *n* deve satisfazer para que o desenvolvimento de $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^n$ tenha um termo independente de *x* é ser:

a) par
b) múltiplo de 5
c) múltiplo de 4 e maior que 8
d) múltiplo de 3
e) ímpar

**1028** (FGV-SP) $\sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} 3^{10-k} 2^k$ vale:

a) $5^9$
b) $5^{10}$
c) $6^{10}$
d) $6^9$
e) $10^5$

**1029** (UnB-DF) O coeficiente de $x^9$ em $[2x + (x - 1)^2]^9$ é:

a) 0
b) 27
c) $\sum_{k=0}^{9} \binom{9}{k}$
d) nenhuma dessas

**1030** A expressão $\frac{C_{10,3} + A_{5,2}}{P_4}$ é igual a:

a) $\frac{7}{2}$
b) $\frac{35}{6}$
c) 5
d) 35
e) 120

**1031** (FGV-SP) Considere os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6. De quantos modos podemos permutá-los, de modo que os algarismos ímpares fiquem sempre em ordem crescente?

a) 60
b) 120
c) 150
d) 181
e) 240

**1032** (UFRN) Se o número de combinações de $(n + 2)$ elementos 4 a 4 está, para o número de combinações de *n* elementos 2 a 2, na razão de 14 para 3, então *n* vale:

a) 6
b) 8
c) 10
d) 12
e) 14

**1033** (Mack-SP) O número de formas de oito pessoas ocuparem duas salas distintas, devendo uma das salas conter exatamente três pessoas é:

a) 112
b) 144
c) 160
d) 182
e) 252

# Saiba um pouco mais

## Fichas, dedos e algarismos indianos

*Gerbert d'Aurillac foi um dos primeiros a difundir na Europa os algarismos indo-arábicos*

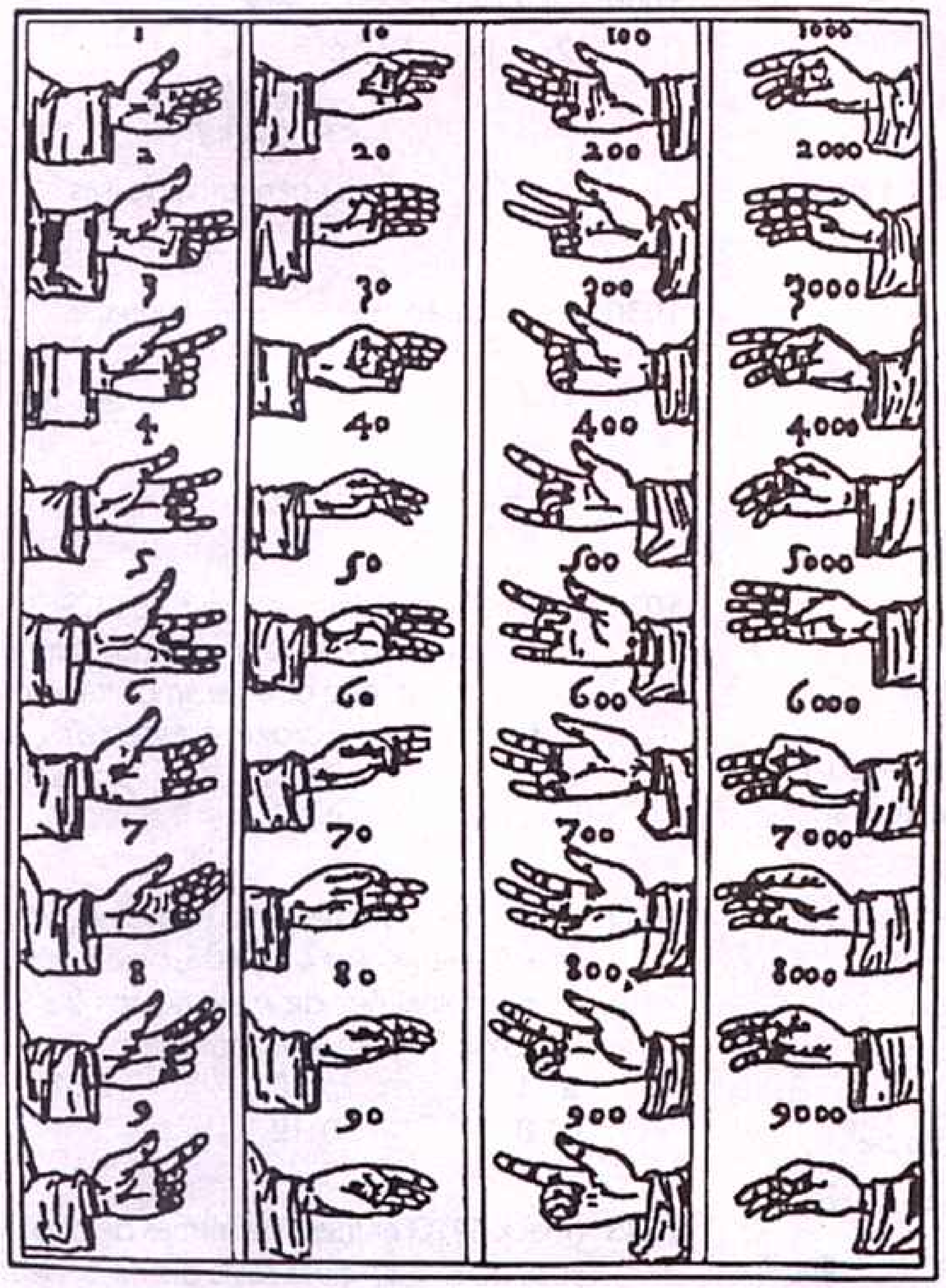



**Tabela de cálculo digital, tirada da *Summa de arithmetica, geometrica, proportioni et proportionalità* (1494), de Luca Pacioli, verdadeiro compêndio dos conhecimentos matemáticos da época.**

Durante a Alta Idade Média (desde o século V, época da queda do Império Romano, até o século IX), os conhecimentos científicos dos autores ocidentais limitaram-se à aritmética especulativa, derivada principalmente da *Introdução aritmética,* do neopitagórico Nicômaco de Gerasa (século II), e a uma aritmética prática que não se valia de cálculos escritos, e sim de fichas. Tais fichas tinham por ancestrais, através dos *calculi* romanos, as pedrinhas utilizadas pelos gregos, no tempo de Pitágoras, para representar os números.

Durante muito tempo, o único rival do sistema de fichas foi o cálculo com os dedos, que no século VII São Beda, o Venerável, assim descreve em seu breve tratado, *Sobre o tempo*:

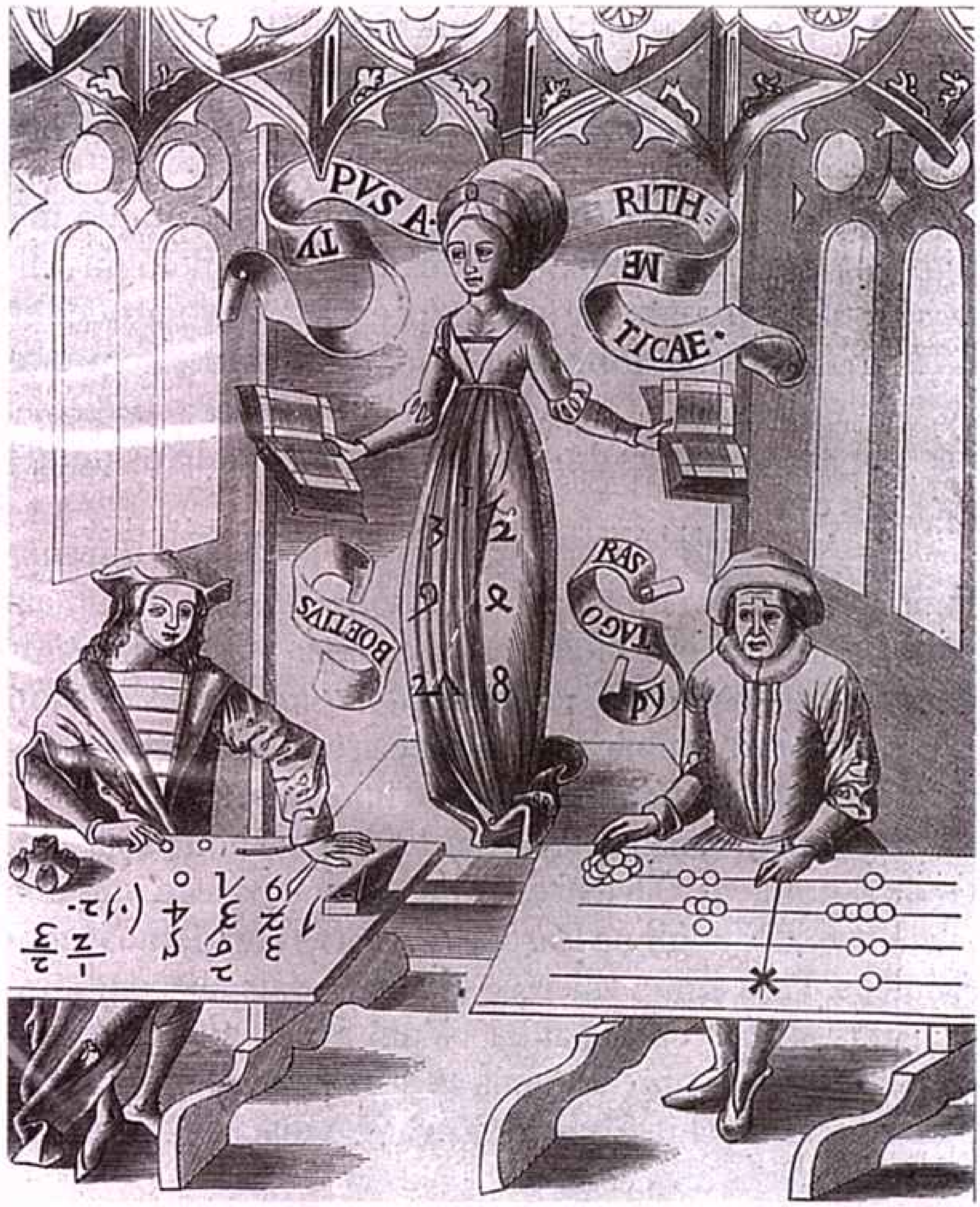
"Quando alguém expressa 1, dobrando o dedo mínimo da mão esquerda, deve levá-lo até o meio da palma da mão. Quando alguém expressa 2, deve proceder da mesma forma, dobrando o segundo dedo, seguinte ao dedo mínimo... Quando alguém expressa 10 vezes 100 mil, deve unir as duas mãos, entrelaçando os dedos uns nos outros..."

Esse cálculo digital também foi praticado durante muito tempo. Em uma das obras sobre Matemática mais importantes da era moderna, a *Summa de arithmetica, geometrica, proportioni et proportionalità* de Luca Pacioli (Luca di Borgo), publicada em Veneza em 1494, ainda consta uma descrição detalhada desse tipo de cálculo.

Gerbert d'Aurillac (que em 1003 se tornou papa, adotando o nome de Silvestre II) foi, ao que parece, um dos primeiros a difundir na Europa o uso dos algarismos indo-arábicos. Para tanto, valeu-se de um tipo de ábaco utilizado pelos árabes da Espanha — um ábaco aperfeiçoado, com 27 colunas sobre as quais se deslocavam as pequenas fichas feitas de chifre que indicavam, o mais das vezes, os nove primeiros algarismos.

# O triunfo do algoritmo

Em virtude da facilidade de calcular utilizando os algarismos indianos, os árabes, já no século X ou mesmo antes, começaram a aperfeiçoar seus métodos. Alguns desses métodos, aliás, não se difundiram através de manuais de aritmética. Foi provavelmente durante uma de suas inúmeras viagens que Leonardo de Pisa, conhecido como Fibonacci, veio a conhecer o método árabe chamado "das casas". Inspirou-se nesse método para criar o seu próprio, "em forma de tabuleiro de xadrez" — um conjunto de quadrados nos quais se inscrevem todos os números e onde se traçam diagonais. Esse método foi muito difundido.




Flandrin. Roger-Viollet/Keystone

Bem no início da Renascença, foi feita em Freiburg-in-Breisgau uma gravura em madeira, que se tornaria célebre, representando a "Pérola filosófica" (*Margarita philosophica,* acima). À esquerda da gravura aparece um cambista, que personifica Boécio, operando com algarismos indo-arábicos e fitando com ar desdenhoso um de seus colegas, que trabalha, um tanto encabulado, com um ábaco. Atrás deles, a Senhora Aritmética mostra claramente suas preferências: até suas vestes estão cobertas de algarismos.

Não haveria exemplo melhor do triunfo dos algarismos no Ocidente medieval. Ainda assim, muito poucas vezes o Ocidente reconheceu sua dívida para com as civilizações indiana e árabe, que lhe legaram, entre outras coisas, esse notável instrumento de trabalho.

(Adaptado de: ALLARD, André. In: *O Correio da Unesco.* Rio de Janeiro, FGV, n. 1, ano 22, pp. 34-6.)