Probabilidade

Tecendo a manhã

Um galo sozinho não tece uma manhã:
ele precisará sempre de outros galos.
De um que apanhe esse grito que ele
e o lance a outro; de um outro galo
que apanhe o grito que um galo antes
e o lance a outro; e de outros galos
que com muitos outros galos se cruzem
os fios de sol de seus gritos de galo,
para que a manhã, desde uma teia tênue,
Se vá tecendo, entre todos os galos.

João Cabral de Melo Neto

1. Elementos do estudo das probabilidades

Experimento aleatório

Consideramos experimentos aleatórios os fenômenos que apresentam resultados imprevisíveis quando repetidos, mesmo que as condições sejam semelhantes.

Exemplos:

a) Lançar 2 moedas e observar as faces voltadas para cima.

b) Retirar 1 carta de 1 baralho com 52 cartas e observar o seu naipe.

c) De uma urna contendo 4 bolas brancas e 5 vermelhas, retirar 1 bola e observar sua cor.

d) Abrir 1 livro ao acaso e depois observar os números das duas páginas.

Espaço amostral

Espaço amostral é o conjunto de todos os resultados possíveis de ocorrer num experimento aleatório. Esse conjunto será indicado pela letra S.

Exemplos:

a) Quando se lançam 2 moedas e se observam as faces voltadas para cima, sendo as faces da moeda cara (c) e coroa (k), o espaço amostral do experimento é:

$S = \{(c, c), (c, k), (k, k), (k, c)\}$, onde o número de elementos do espaço amostral $n(S)$ é igual a 4.

b) Lançam-se 2 dados, primeiro 1 branco e depois 1 azul, e observam-se os números das faces voltadas para cima.

Nesse experimento, o espaço amostral será composto de muitos elementos, por isso convém construir uma tabela:

Dado branco: B

Dado azul: A

B \ A	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1,6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2,5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Observamos que o espaço amostral *S* é o conjunto formado por todos os pares ordenados da tabela. Assim, o número de elementos n (S) é igual a 36.

Evento

Evento (*E*) é qualquer subconjunto de um espaço amostral *S*. Muitas vezes um evento pode ser caracterizado por um fato.

Exemplos

a) No lançamento de 2 moedas:

E_1: aparecerem faces iguais

E_1: {(c, c), (k, k)}

Portanto, o número de elementos do evento E_1 é n (E_1) = 2.

E_2: aparece cara em pelo menos 1 face

E_2: {(c, c), (c, k), (k, c)}, onde n (E_2) = 3

b) No lançamento não simultâneo de 2 dados:

E_1: aparecem números iguais

E_1 = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)}

E_2: o primeiro número é menor ou igual a 2

E_2 = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)}

E_3: a soma dos resultados é menor ou igual a 4

E_3 = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1)}

E_4: o número do primeiro dado é o dobro do número do segundo dado

E_4 = {(2, 1), (4, 2), (6, 3)}

Analisaremos alguns eventos particulares, através de exemplos.

Evento certo: evento que possui os mesmos elementos do espaço amostral, (E = S).

E_5: a soma dos resultados nos 2 dados é menor ou igual a 12.

Evento impossível: evento igual ao conjunto vazio.

E_6: o número do primeiro dado é igual a 7.

$E_6 = \varnothing$

Evento simples: evento que possui 1 único elemento.

E_7: a soma dos resultados nos 2 dados é igual a 12.

$E_7 = \{(6, 6)\}$

Evento complementar: se *A* é um evento de um espaço amostral *S*, o evento complementar de *A* indicado por *A* é tal, que A = S − A.

A: o primeiro número no lançamento dos dados é menor ou igual a 2.

A: o primeiro número no lançamento dos dados é maior que 2.

S: o espaço amostral (ver tabela anterior).

$A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)\}$

Como, A = S − A:

$A = \{(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6),$
$(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

Eventos mutuamente exclusivos: dois ou mais eventos são mutuamente exclusivos quando a ocorrência de um deles implica a não-ocorrência do outro. Se *A* e *B* são eventos mutuamente exclusivos, então $A \cap B = \varnothing$.

Sejam os eventos:

A: quando se lança um dado, o número na face voltada para cima é ímpar.

$A = \{1, 3, 5\}$

B: quando se lança um dado, o número na face voltada para cima é divisível por 4.

$B = \{4\}$

Os eventos *A* e *B* são mutuamente exclusivos, pois $A \cap B = \varnothing$.

Exercícios

Resolvido

Considerar o experimento aleatório: uma moeda é lançada 3 vezes. Determinar:

a) espaço amostral S

b) evento E_1: sair 2 caras e 1 coroa

c) evento E_2: sair 3 caras

d) evento E_3: sair pelo menos 1 cara

e) evento E_4: sair no máximo 2 coroas

f) evento E_5: nenhuma cara

Sendo c = cara e k = coroa:

a) $S = \{(c, c, c), (c, c, k), (c, k, c), (k, c, c), (c, k, k), (k, c, k), (k, k, c), (k, k, k)\}$

b) $E_1 = \{(c, k, c), (c, c, k), (k, c, c)\}$

c) $E_2 = \{(c, c, c)\}$

d) $E_3 = \{(c, c, c,), (c, k, c), (c, c, k), (k, c, c), (c, k, k), (k, c, k), (k, k, c)\}$

e) $E_4 = \{(c, k, c), (c, c, k), (k, c, c), (c, k, k), (k, c, k), (k, k, c), (c, c, c)\}$

f) $E_5 = \{(k, k, k)\}$

Propostos

1034 No lançamento simultâneo de 2 dados, considere as faces voltadas para cima e determine:

a) espaço amostral S.

b) evento E_1: números cuja soma é igual a 5

c) evento E_2: números iguais

d) evento E_3: números cuja soma é um número par.

e) evento E_4: números ímpares nos 2 dados.

f) evento E_5: número 2 em pelo menos 1 dos dados.

g) evento E_6: números cuja soma é menor que 12.

h) evento E_7: números cuja soma é maior que 12.

i) evento E_8: números divisores de 7 nos 2 dados.

1035 Um casal planeja ter 3 filhos. Determine os eventos:

a) os 3 são do sexo feminino

b) pelo menos 1 é do sexo masculino

c) os 3 do mesmo sexo

1036 Uma urna contém 20 bolinhas numeradas de 1 a 20. Escolhe-se ao acaso uma bolinha e observa-se o seu número. Determine os seguintes eventos:

a) o número escolhido é ímpar

b) o número escolhido é maior que 15

c) o número escolhido é múltiplo de 5

d) o número escolhido é múltiplo de 2 e de 3

e) o número escolhido é primo

f) o número escolhido é par e múltiplo de 3.

g) o número escolhido é ímpar e múltiplo de 7.

2. Probabilidade

Considerando um espaço amostral *S*, não-vazio, e um evento *E*, sendo $E \subset S$, a probabilidade de ocorrer o evento *E* é o número real P (E), tal que:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

, sendo $0 \leq P(E) \leq 1$ e *S* um conjunto eqüiprovável, ou seja, todos os elementos têm a mesma "chance" de acontecer.

n (E): número de elementos do evento *E*

n (S): número de elementos do espaço amostral *S*

Exemplo:

Lançando-se um dado, a probabilidade de sair um número ímpar na face voltada para cima é obtida da seguinte forma:

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $\quad n(S) = 6$

$E = \{1, 3, 5\}$ $\quad n(E) = 3$

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

$$P(E) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \text{ ou } 50\%$$

Exercícios

Resolvido

Escolhido ao acaso um elemento do conjunto dos divisores de 30, determinar a probabilidade de que ele seja primo.

Divisores de 30

		1
30	2	2
15	3	3, 6
5	5	5, 10, 15, 30
1		

$S = \{1, 2, 3, 6, 5, 10, 15, 30\}$

$E = \{2, 3, 5\}$

$P(E) = \frac{3}{8}$ ou 37,5%

Propostos

1037 Qual a probabilidade de ocorrer o número 5 no lançamento de um dado?

1038 Qual a probabilidade de se obter um número par no lançamento de um dado?

1039 Um disco tem uma face branca e a outra azul. Se o disco for lançado 3 vezes, qual a probabilidade de a face azul ser sorteada pelo menos uma vez?

1040 Um casal planeja ter 3 filhos. Qual a probabilidade de os 3 serem do mesmo sexo?

1041 (Unesp-SP) João lança um dado sem que Antônio veja. João diz que o número mostrado pelo dado é par. A probabilidade de Antônio descobrir esse número é:

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{6}$

c) $\frac{4}{6}$

d) $\frac{1}{3}$

e) $\frac{3}{36}$

1042 (Vunesp) Um baralho de 12 cartas tem 4 ases. Retiram-se 2 cartas, uma após a outra. Determine a probabilidade de a segunda ser um ás, sabendo que a primeira é um ás.

1043 (UFSCar-SP) Uma urna tem 10 bolas idênticas, numeradas de 1 a 10. Se retirarmos uma bola da urna, a probabilidade de não obtermos a bola número 7 é igual a:

a) $\frac{2}{9}$

b) $\frac{1}{10}$

c) $\frac{1}{5}$

d) $\frac{9}{10}$

e) $\frac{9}{11}$

1044 Determine a probabilidade de se obterem os eventos a seguir, no lançamento simultâneo de 2 dados, observadas as faces voltadas para cima:

a) números iguais

b) números cuja soma é igual a 5

c) números cuja soma é ímpar

d) números cujo produto é par

e) números cuja soma é menor que 12

f) números cuja soma é maior que 12

g) números primos nos 2 dados

1045 Uma urna contém 2 bolas brancas e 5 bolas vermelhas. Retirando-se 2 bolas ao acaso e sem reposição, calcule a probabilidade de:

a) as bolas serem de cores diferentes

b) as 2 bolas serem vermelhas

1046 (Mauá-SP) Uma caixa contém 11 bolas numeradas de 1 a 11. Retirando-se uma delas ao acaso, observa-se que ela tem um número ímpar. Determine a probabilidade de esse número ser menor que 5.

1047 Uma bola é retirada de uma urna que contém bolas coloridas. Sabe-se que a probabilidade de ter sido retirada uma bola vermelha é $\frac{5}{17}$. Calcule a probabilidade de ter sido retirada uma bola que não seja vermelha.

3. União de dois eventos

Considerando *A* e *B* dois eventos contidos em um mesmo espaço amostral *S*, o número de elementos da reunião de *A* com *B* é igual ao número de elementos do evento *A* somado ao número de elementos do evento *B*, subtraído do número de elementos da intersecção de *A* com *B*.

$$n\,(A \cup B) = n\,(A) + n\,(B) - n\,(A \cap B)$$

Sendo n (S) o número de elementos do espaço amostral, vamos dividir os dois membros da equação por n (S) a fim de obter a probabilidade P (A ∪ B).

$$\frac{n\,(A \cup B)}{n\,(S)} = \frac{n\,(A)}{n\,(S)} + \frac{n\,(B)}{n\,(S)} - \frac{n\,(A \cap B)}{n\,(S)}$$

$$\boxed{P\,(A \cup B) = P\,(A) + P\,(B) - P\,(A \cap B)}$$

Para eventos mutuamente exclusivos ($A \cap B = \varnothing$), a equação obtida fica:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Exemplo:

De uma urna com 20 bolinhas numeradas de 1 a 20, retira-se ao acaso uma bolinha. Para calcular a probabilidade de essa bolinha ter um número divisível por 2 ou por 3, consideramos:

$S = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$

A: conjunto dos números divisíveis por 2

$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$

B: conjunto dos números divisíveis por 3

$B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$

$A \cap B$: conjunto dos números divisíveis por 2 e por 3

$A \cap B = \{6, 12, 18\}$

$P(A) = \frac{10}{20}$, $P(B) = \frac{6}{20}$ e $P(A \cap B) = \frac{3}{20}$

$$P(A \cup B) = \frac{10}{20} + \frac{6}{20} - \frac{3}{20}$$

$P(A \cup B) = \frac{13}{20}$ ou $P(A \cup B) = 65\%$

Exercícios

Resolvido

(Fuvest-SP) A probabilidade de que a população atual de um país seja de 110 milhões ou mais é de 95%. A probabilidade de ser 110 milhões ou menos é de 8%. Calcule a probabilidade de ser 110 milhões.

Sendo P (A) a probabilidade de ser 110 milhões ou mais: $P(A) = 95\%$

Sendo P (B) a probabilidade de ser 110 milhões ou menos: $P(B) = 8\%$

$P(A \cap B)$ = a probabilidade de ser 110 milhões: $P(A \cap B) = ?$

$P(A \cup B) = 100\% = 1$

Aplicando a regra da união de dois eventos, temos:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$1 = 0{,}95 + 0{,}08 - P(A \cap B)$

$P(A \cap B) = 0{,}95 + 0{,}08 - 1$

$P(A \cap B) = 0{,}03$ ou $P(A \cap B) = 3\%$

Propostos

1048 Uma urna contém 30 bolinhas numeradas de 1 a 30. Retirando-se ao acaso uma bolinha da urna, qual a probabilidade de essa bolinha ter um número múltiplo de 4 ou de 3?

1049 Jogando-se um dado, qual a probabilidade de se obter o número 3 ou um número ímpar?

1050 Consultadas 500 pessoas sobre as emissoras de tevê que habitualmente assistem, obteve-se o seguinte resultado: 280 pessoas assistem ao canal *A*, 250 assistem ao canal *B* e 70 assistem a outros canais, distintos de *A* e *B*. Escolhida uma pessoa ao acaso, determine a probabilidade de que ela assista:

a) ao canal *A*
b) ao canal *B*
c) ao canal *A* ou ao canal *B*

1051 (PUCCAMP-SP) Num grupo, 50 pessoas pertencem a um clube *A*, 70 pertencem a um clube *B*, 30 a um clube *C*, 20 pertencem aos clubes *A* e *B*, 22 aos clubes *A* e *C*, 18 aos clubes *B* e *C* e 10 pertencem aos 3 clubes. Escolhida ao acaso uma das pessoas presentes, a probabilidade de ela:

a) pertencer aos três clubes é 3/5

b) pertencer somente ao clube *C* é zero

c) pertencer a pelo menos dois clubes é de 60%

d) não pertencer ao clube *B* é 40%

1052 De uma reunião participam 200 profissionais, sendo 60 médicos, 50 dentistas, 32 enfermeiras e os demais nutricionistas. Escolhido ao acaso um elemento do grupo, qual é a probabilidade de ele ser médico ou dentista?

4. Probabilidade condicional

Considerando os eventos *A* e *B* de um espaço amostral *S*, define-se como probabilidade condicional do evento *A*, tendo ocorrido o evento *B* e indicado por $P\left(\frac{A}{B}\right)$, a razão:

$$\boxed{P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

Exemplo:

No lançamento de 2 dados, observando as faces de cima, para calcular a probabilidade de sair o número 5 no primeiro dado, sabendo que a soma dos 2 números é maior que 7, fazemos:

$S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

Evento A: número 5 no primeiro dado

$A = \{(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6)\}$

Evento B: a soma dos dois números é maior que 7

$B = \{(2, 6), (3, 5), (3, 6), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6),$
$(6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

$A \cap B = \{(5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6)\}$

$$P(A \cap B) = \frac{4}{36}$$

$$P(B) = \frac{15}{36}$$

$$\text{Logo, } P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{\frac{4}{36}}{\frac{15}{36}} = \frac{4}{15}$$

Multiplicação de probabilidades

A probabilidade de ocorrer $P(A \cap B)$ é igual ao produto da probabilidade de um deles pela probabilidade do outro em relação ao primeiro.

$$\text{Sendo: } P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{ou} \quad P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)},$$

então:

$$\boxed{P(A \cap B) = P(B) \cdot P\left(\frac{A}{B}\right) \quad \text{ou} \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P\left(\frac{B}{A}\right)}$$

Eventos independentes

Dois eventos A e B de um espaço amostral S são independentes quando $P\left(\frac{A}{B}\right) = P(A)$ ou $P\left(\frac{B}{A}\right) = P(B)$.

Sendo os eventos A e B independentes, temos:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P\left(\frac{A}{B}\right) \quad \text{I} \qquad \text{e} \qquad P\left(\frac{A}{B}\right) = P(A) \quad \text{II}$$

Substituindo II em I, obtemos:

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$$

Exercícios

Resolvido

(Mauá-SP) Lançando-se simultaneamente um dado e uma moeda, determine a probabilidade de se obter 3 ou 5 no dado e cara na moeda.

S = {(1, c), (1, k), (2, c), (2, k), (3, c), (3, k), (4, c), (4, k), (5, c), (5, k), (6, c), (6, k)}

Evento *A*: 3 ou 5 no dado $P(A) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

A = {(3, c), (3, k), (5, c), (5, k)}

Evento *B*: cara na moeda $P(B) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

B = {(1, k), (2, k), (3, k), (4, k), (5, k), (6, k)}

Os eventos são independentes, pois o fato de ocorrer *A* não modifica a probabilidade de ocorrer *B*. Assim, temos:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Portanto, $P(A \cap B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

Note que $A \cap B = \{(3, k); (5, k)\}$ e $P(A \cap B)$ poderia ser calculado por

$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$. No entanto, nem sempre a obtenção de $n(A \cap B)$ é simples.

Propostos

1053 Lançando-se simultaneamente dois dados, qual a probabilidade de se obter o número 1 no primeiro dado e o número 3 no segundo dado?

1054 Uma urna *A* contém 3 bolas brancas, 4 pretas e 2 verdes. Uma urna *B* contém 5 bolas brancas, 2 pretas e 1 verde. Uma urna *C* contém 2 bolas brancas, 3 pretas e 4 verdes. Uma bola é retirada de cada urna. Qual é a probabilidade de as três bolas retiradas da primeira, segunda e terceira urnas serem, respectivamente, branca, preta e verde?

1055 A probabilidade de que um aluno *A* resolva certo problema é $P(A) = \frac{1}{5}$, a de que outro aluno *B* o resolva é $P(B) = \frac{1}{2}$ e a de que um aluno *C* o resolva é $P(C) = \frac{1}{6}$. Calcule a probabilidade de que os três resolvam o problema.

1056 (Cesgranrio-RJ) Dois dados são lançados sobre uma mesa. A probabilidade de ambos os dados mostrarem na face superior números ímpares é:

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{2}{5}$ e) $\frac{3}{5}$

1057 (Unesp) Num grupo de 100 pessoas da zona rural, 25 estão afetadas por uma parasitose intestinal *A* e 11 por uma parasitose intestinal *B*, não se verificando nenhum caso de incidência conjunta de *A* e *B*. Duas pessoas desse grupo são escolhidas, aleatoriamente, uma após a outra. Determine a probabilidade de que, dessa dupla, a primeira pessoa esteja afetada por *A* e a segunda por *B*.

1058 (Unesp) Numa gaiola estão nove camundongos rotulados 1, 2, 3, ..., 9. Selecionando-se conjuntamente dois camundongos ao acaso (todos têm igual probabilidade de escolha), a probabilidade de que na seleção ambos os camundongos tenham rótulo ímpar é:

a) 0,3777...
b) 0,47
c) 0,17
d) 0,2777...
e) 0,13333...

Ficha-resumo

Espaço amostral (S)

É o conjunto não vazio de todos os resultados possíveis de ocorrer, num experimento aleatório.

Evento (E)

Seja um espaço amostral *S*. Denomina-se *evento*, qualquer subconjunto desse espaço amostral *S*.

Probabilidade

$$\boxed{P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}}$$, sendo $0 \leq P(E) \leq 1$ e *S* um conjunto eqüiprovável.

União de dois eventos: $\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$

Eventos mutuamente exclusivos: $\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$

Probabilidade condicional

Probabilidade de ocorrer o evento *A*, tendo ocorrido o evento *B*:

$$P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Multiplicação de probabilidades:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P\left(\frac{B}{A}\right)$$

Eventos independentes:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Exercícios

Complementares

1059 (UFPA) Numa lanchonete que vende cachorro-quente são oferecidos ao freguês pimenta, cebola, mostarda e molho de tomate como temperos adicionais. Quantos tipos de cachorros-quentes diferentes (pela adição ou não de algum tempero) podem ser vendidos?

a) 12 b) 16 c) 24 d) 120

1060 (Fuvest-SP) Duas pessoas, *A* e *B*, jogam dado alternadamente, começando com *A*, até que uma delas obtenha um 6; a primeira que obtiver o 6 ganha o jogo.

a) Qual a probabilidade de *A* ganhar na primeira jogada?

b) Qual a probabilidade de *B* ganhar na segunda jogada?

c) Calcule a probabilidade de *A* ganhar o jogo.

1061 (Fuvest-SP) Duas pessoas *A* e *B* arremessam moedas. Se *A* faz 2 arremessos e *B* faz 1, qual a probabilidade de *A* obter o mesmo número de coroas que *B*?

1062 (Fuvest-SP) Seis pessoas, *A*, *B*, *C*, *D*, *E* e *F*, vão atravessar um rio em 3 barcos. Distribuindo-se ao acaso as pessoas de modo que fiquem 2 em cada barco, a probabilidade de *A* atravessar com *B*, *C* junto com *D* e *E* junto com *F* é:

a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{1}{10}$ c) $\frac{1}{15}$ d) $\frac{1}{20}$ e) $\frac{1}{25}$

1063 (Fuvest-SP) Escolhem-se ao acaso 2 números naturais distintos, de 1 a 20. Qual a probabilidade de que o produto dos números escolhidos seja ímpar?

a) $\frac{9}{38}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{9}{20}$ d) $\frac{1}{4}$ e) $\frac{8}{25}$

1064 De uma urna que contém 18 bolas, sendo 10 pretas e 8 vermelhas, retiramos 3 bolas, sem reposição. Qual é a probabilidade de as 2 primeiras serem pretas e a terceira ser vermelha?

a) $\frac{13}{240}$ b) $\frac{5}{34}$ c) $\frac{1}{26}$ d) $\frac{1}{13}$ e) $\frac{1}{6}$

1065 (Unicamp-SP) Em uma festa para calouros estão presentes 250 calouros e 350 calouras. Para dançar, cada calouro escolhe uma caloura ao acaso formando um par. Pergunta-se:

a) Quantos pares podem ser formados?
b) Qual a probabilidade de que uma determinada caloura não esteja dançando no momento em que todos os calouros estejam dançando?

1066 (Fuvest-SP) Sorteiam-se 2 números ao acaso entre 101 e 1 000, inclusive, com reposição. Calcule a probabilidade de que o algarismo das unidades do produto dos números sorteados não seja zero.

1067 (FEI-SP) Numa urna foram colocadas 30 bolas: 10 bolas azuis numeradas de 1 a 10, 15 bolas brancas numeradas de 1 a 15 e 5 bolas cinza numeradas de 1 a 5. Ao retirar-se aleatoriamente uma bola, a probabilidade de se obter uma bola par ou branca é:

a) $\frac{29}{30}$ b) $\frac{7}{15}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{11}{15}$ e) $\frac{13}{15}$

1068 (Osec-SP) Lançando-se um dado 2 vezes, vamos observar os pares ordenados de números das faces superiores. A probabilidade de ocorrência do número 5 em pelo menos 1 vez, é:

a) $\frac{11}{36}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{5}{18}$ d) $\frac{1}{6}$ e) $\frac{1}{36}$

1069 (Unicamp-SP) Uma urna contém 50 bolas que se distinguem apenas pelas seguintes características:

- x delas são brancas e numeradas seqüencialmente com os números naturais de 1 a x.
- $x + 1$ delas são azuis e numeradas seqüencialmente com os números naturais de 1 a $x + 1$.
- $x + 2$ delas são amarelas e numeradas seqüencialmente com os números naturais de 1 a $x + 2$.
- $x + 3$ delas são verdes e numeradas seqüencialmente de 1 a $x + 3$.

a) Qual o valor numérico de x?
b) Qual a probabilidade de ser retirada, ao acaso, uma bola azul ou uma bola com o número 12?

1070 (ENEM) Em um concurso de televisão, apresentam-se ao participante 3 fichas voltadas para baixo, estando representada em cada uma delas *T*, *V* e *E*. As fichas encontram-se alinhadas em uma ordem qualquer. O participante deve ordenar as fichas ao seu gosto, mantendo as letras voltadas para baixo, tentando obter a sigla TVE. Ao desvirá-las, para cada letra que esteja na posição correta ganhará um prêmio de R$ 200,00.

I) A probabilidade de o participante não ganhar prêmio algum é igual a:

a) 0 b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{1}{6}$

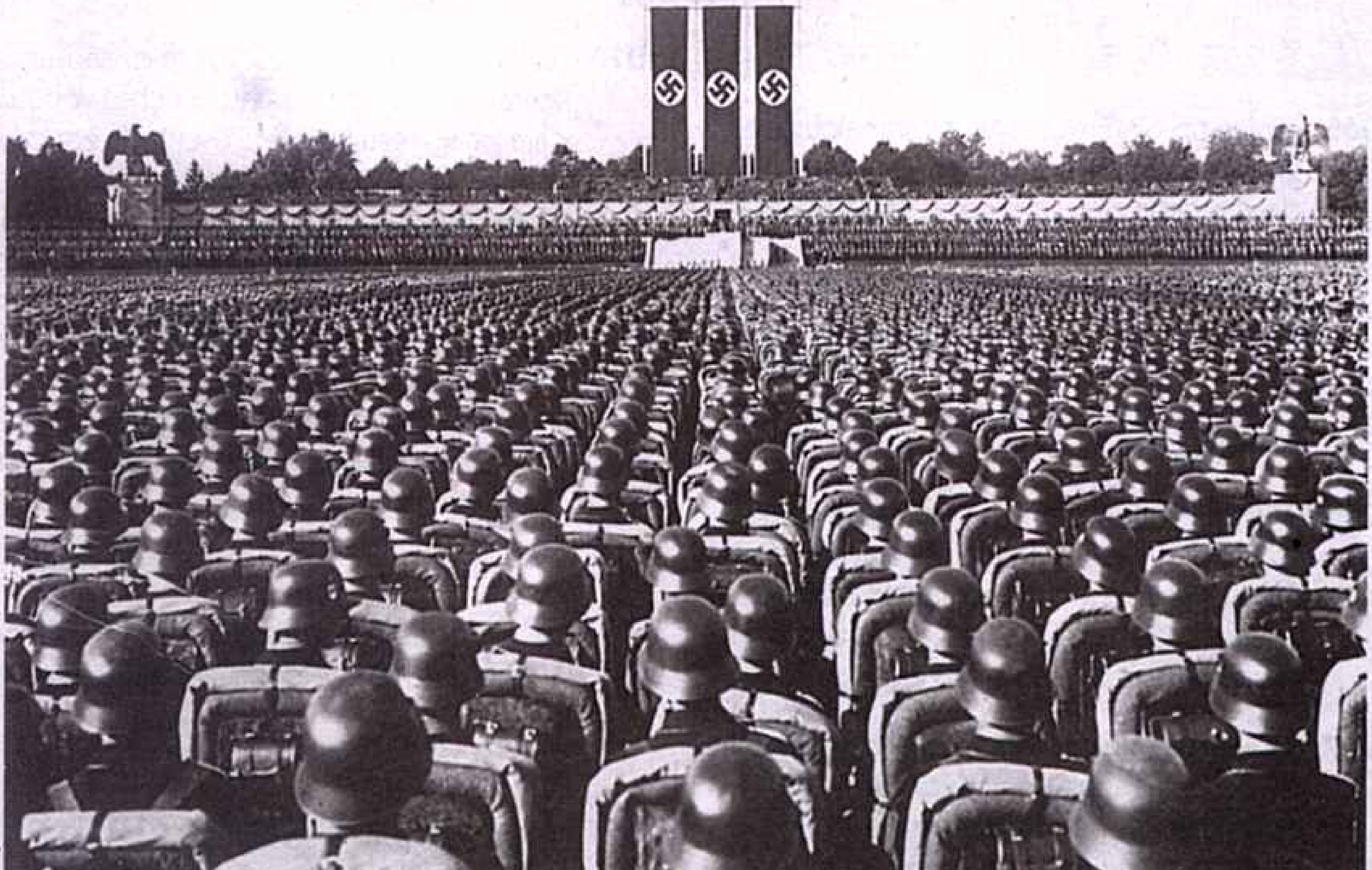
II) A probabilidade de o concorrente ganhar exatamente o valor de R$ 400,00 é igual a:

a) 0 b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{1}{6}$

1071 (Fuvest-SP) Uma urna contém 3 bolas: 1 verde, 1 azul e 1 branca. Tira-se uma bola ao acaso, registra-se a cor e coloca-se a bola de volta na urna. Repete-se essa experiência mais 2 vezes. Qual a probabilidade de serem registradas 3 cores distintas?

Mistura de raças, mistura de genes

No Brasil, o processo de miscigenação tem sido particularmente intenso, favorecendo a troca de genes entre as diferentes populações que se estabeleceram em nosso vasto território


FPG/Keystone

Explorada politicamente, a noção pseudocientífica de raça pura marcou a ignóbil era do nazismo.

Na espécie humana, as "raças puras" só existiram na imaginação dos antropólogos do século passado. Indivíduos geneticamente idênticos só ocorrem em espécies assexuadas. Nas demais, excetuando-se o caso dos gêmeos monozigóticos (originados da mesma célula-ovo), cada indivíduo tem uma constituição genética única, diferente da dos demais membros de sua espécie. Em virtude do fenômeno da recombinação dos genes a que está sujeita toda espécie sexuada, inclusive a humana, alguns indivíduos podem assemelhar-se quanto a determinados caracteres genéticos, mas diferirão quanto a outros.

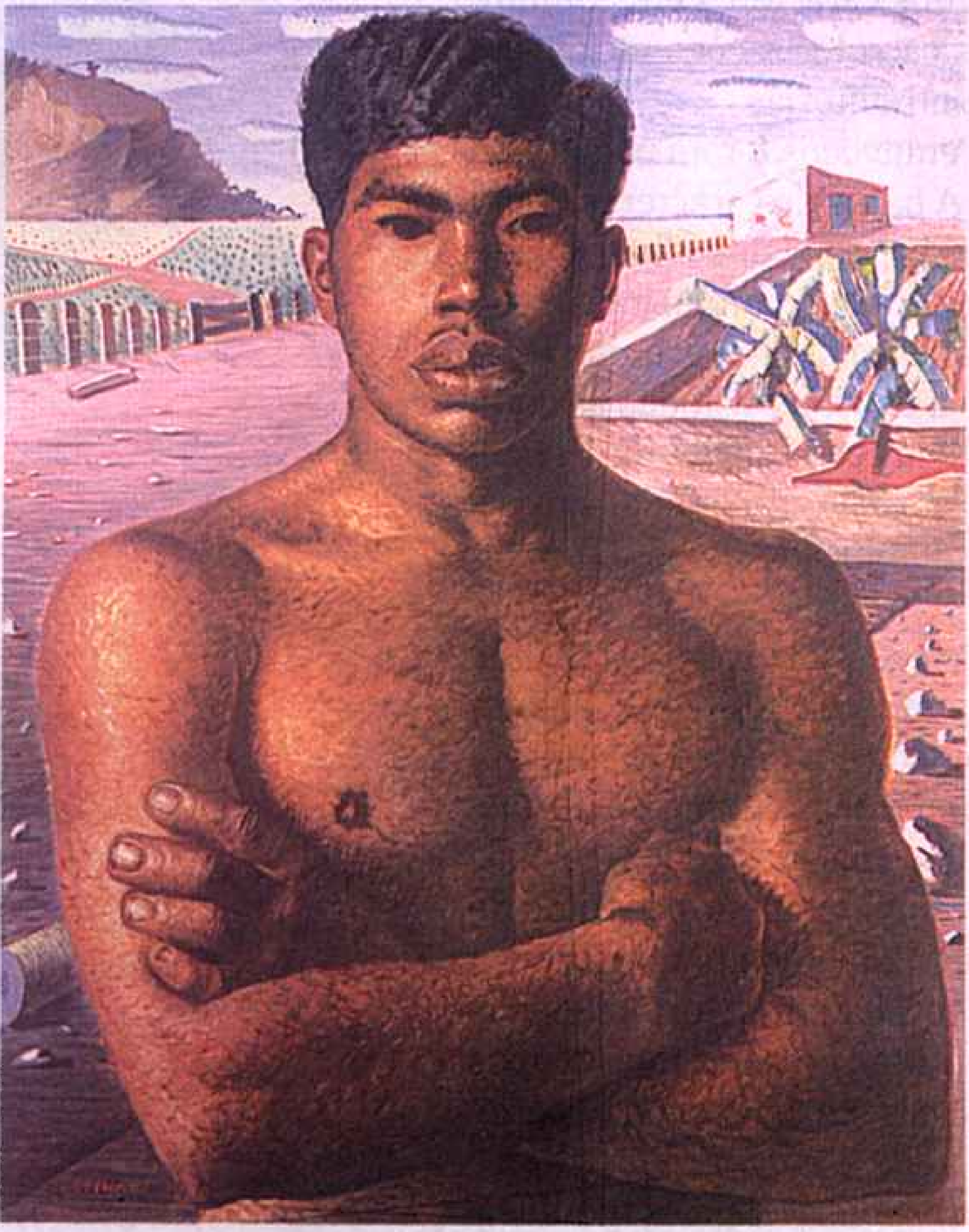
A identificação de grupos raciais depende dos caracteres genéticos a que se considerem. Como as populações podem ter alguns caracteres em comum, mas não todos, diferentes caracterizações raciais podem levar a conclusões contraditórias.

Em pleno século XX, equívocos foram cometidos por muitos antropólogos. A partir de caracteres como altura, índice cefálico, cor da pele e dos olhos, elaboraram-se classificações raciais que conduziram à noção de "raça pura". Foi-se ainda mais longe: numa associação gratuita, passou-se a considerar todas as aquisições da civilização européia como "atributos" de determinada cor de pele ou formato de crânio. Em especial, o tipo nórdico foi identificado como o "superhomem".

Embora o conceito de raça seja relativo, as diferenças raciais, objetivamente consideradas, podem explicar os estágios biológicos em que se encontram diversas populações e grupos raciais humanos. A diferença das freqüências de determinados genes em duas populações podem, por exemplo, refletir o grau de diversidade entre as mesmas. Sabemos também que a diversidade genética observada em determinada espécie é o resultado da adaptação de diferentes grupos às condições ambientais locais em determinado período da evolução.

O processo primário responsável pelas modificações genéticas que se produzem numa população é a mutação. Embora a taxa de mutação de cada gene específico, entre os milhares que caracterizam determinada espécie, seja muito baixa, no conjunto esse valor pode ser relativamente alto, levando ao aparecimento, a cada geração, de alguns novos mutantes. Em sua grande maioria, as mutações são deletérias, isto é, contribuem para diminuir a viabilidade e a fertilidade de seus portadores. Ao longo do processo histórico podem, no entanto, ocorrer mutações que permitam aos membros de uma população um melhor ajustamento às novas condições do ambiente. Estas são então positivamente selecionadas e, uma vez que seus portadores se tornam relativamente mais férteis, tendem a transmitir-se às novas gerações.

O conjunto das investigações genéticas sobre a mistura racial na América revela que o processo de miscigenação foi particularmente intenso no Brasil, superando estimativas estabelecidas em qualquer região de outros territórios. É de se esperar, portanto, que esse processo contínuo de miscigenação nos leve rapidamente a uma situação virtual de homogeneidade genética. Antes que esse equilíbrio se estabeleça, deverão ocorrer, no entanto, mudanças nos padrões éticos, culturais e socioeconômicos dos grupos raciais que ocupam as diferentes áreas do país. •



Projeto Portinari

Na pintura de Candido Portinari, a miscigenação de raças aparece retratada. Quadro *Mestiço*, de 1934, reprodução cedida por João Candido Portinari

(Extraído de: SALDANHA, Pedro H. In: *Ciência Hoje*. Rio de Janeiro, SBPC, v. 9, n. 50, p. 48.)