Geometria espacial

Canção excêntrica

Ando à procura de espaço
para o desenho da vida.
Em números me embaraço
e perco sempre a medida.
Se penso encontrar saída,
em vez de abrir um compasso,
projeto-me num abraço
e gero uma despedida.
Se volto sobre o meu passo,
é já distância perdida.
Meu coração, coisa de aço,
começa a achar um cansaço
esta procura de espaço
para o desenho da vida.
Já por exausta e descrida
não me animo a um breve traço:
— saudosa do que não faço,
— do que faço, arrependida.

Cecília Meireles (1901-1964),
poetisa brasileira

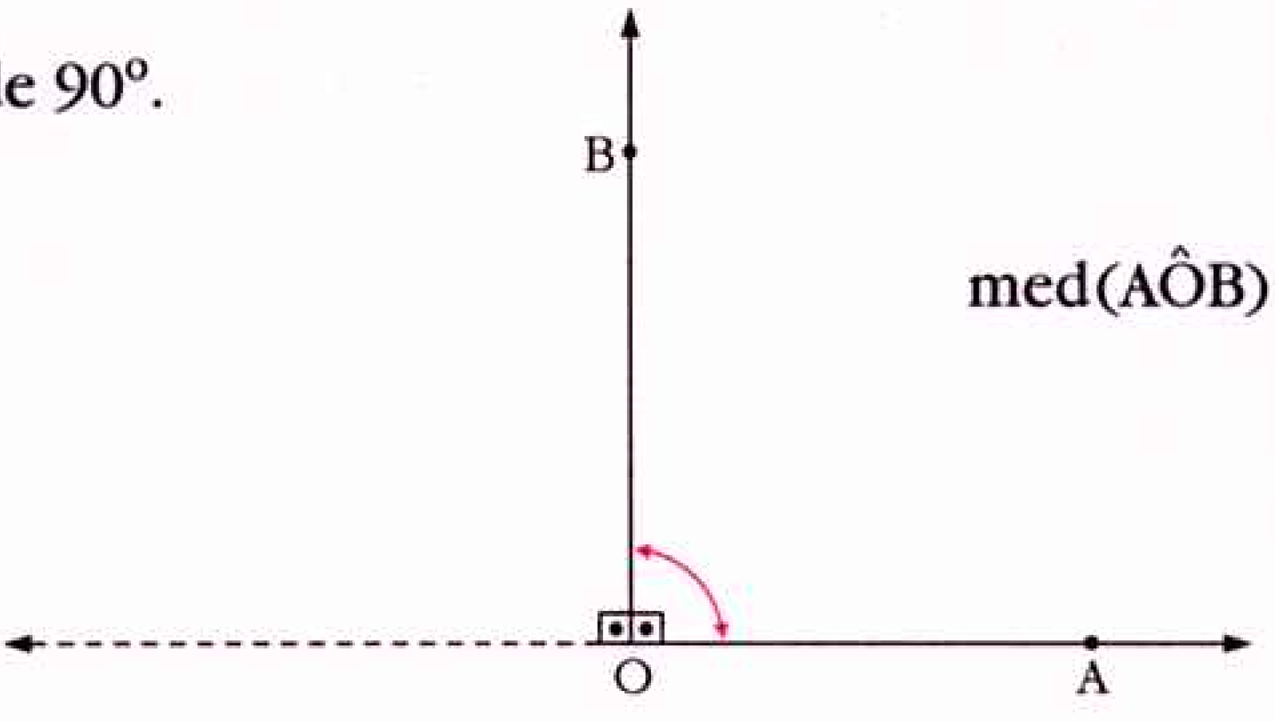
1. Tópicos de geometria plana

Apresentamos aqui um resumo de alguns conceitos estudados em geometria plana, para que você possa recordá-los e aplicá-los, sempre que necessário, neste estudo da geometria espacial.

Ângulos

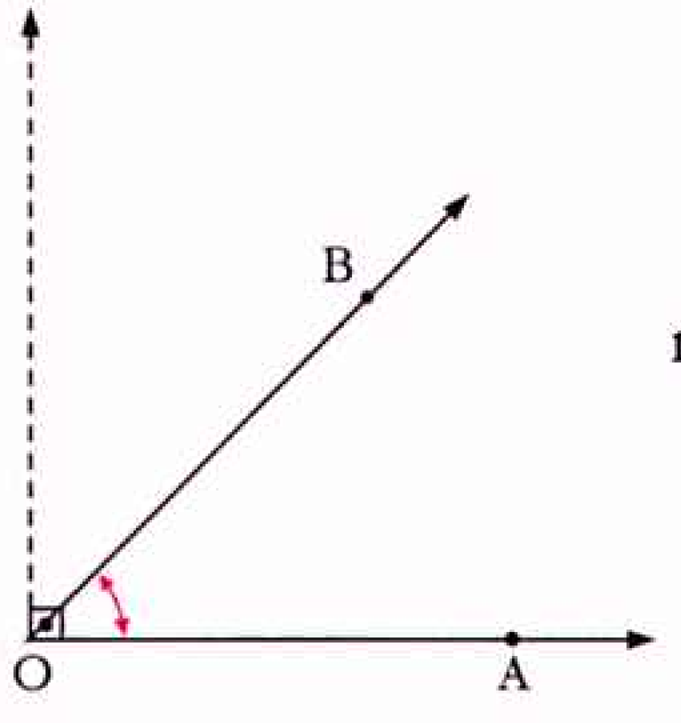
Classificação

Ângulo reto Mede 90°.



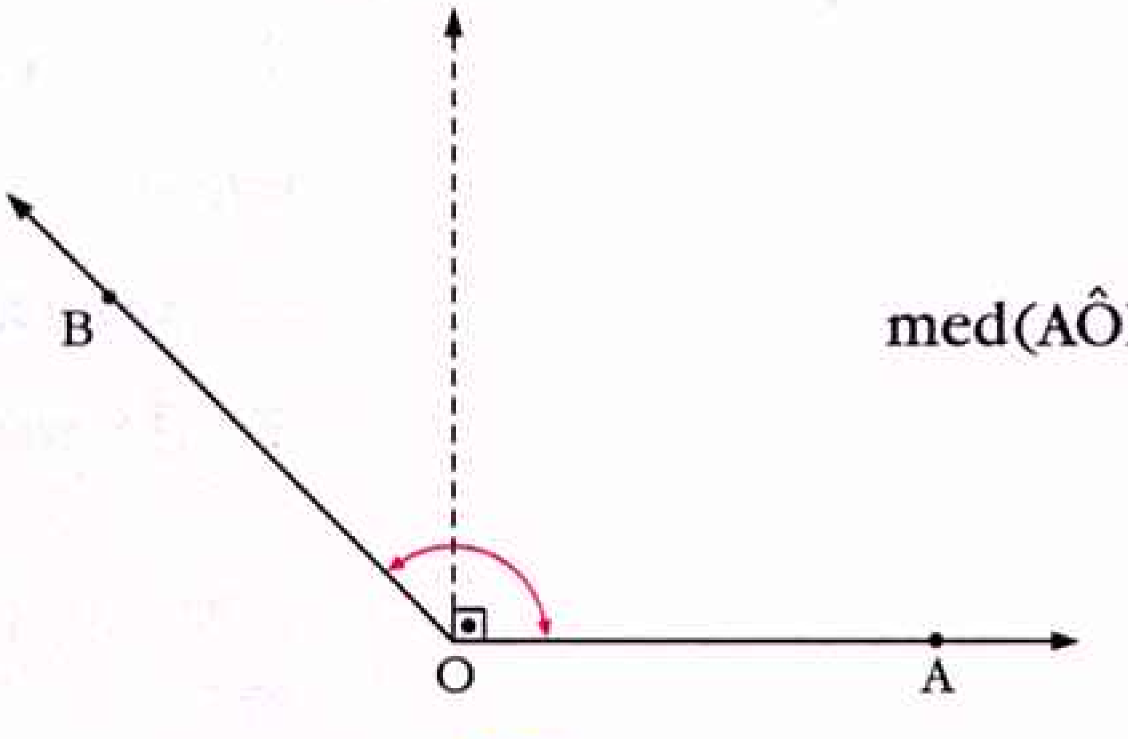
$$\text{med}(A\hat{O}B) = 90°$$

Ângulo agudo A sua medida é menor que a de um ângulo reto.



$$\text{med}(A\hat{O}B) < 90°$$

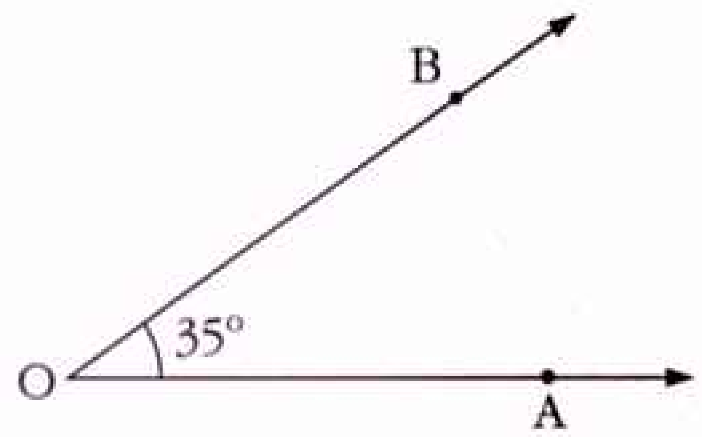
Ângulo obtuso A sua medida é maior que a de um ângulo reto.

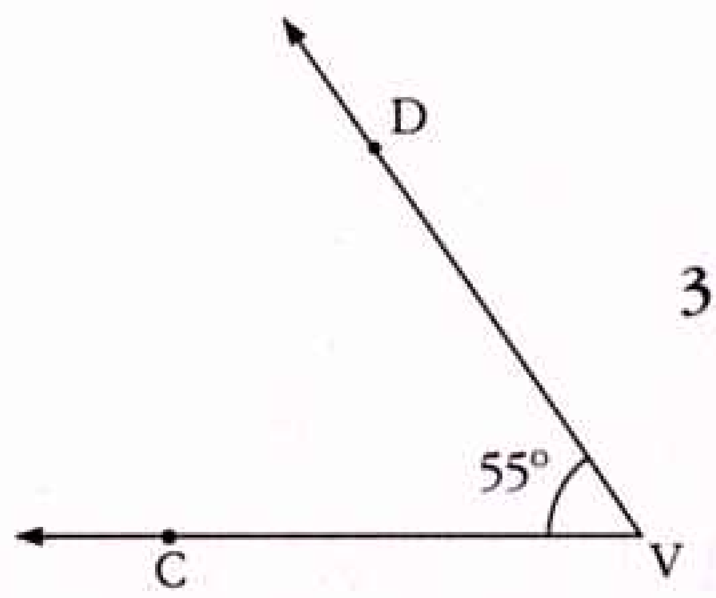


$$\text{med}(A\hat{O}B) > 90°$$

Ângulos complementares

Dois ângulos são complementares quando as suas medidas somam 90°.

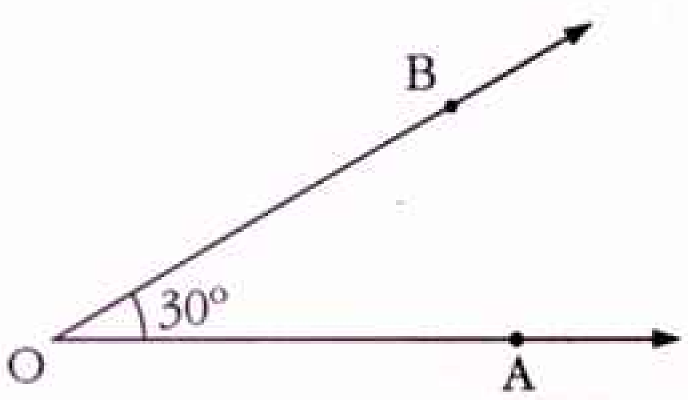




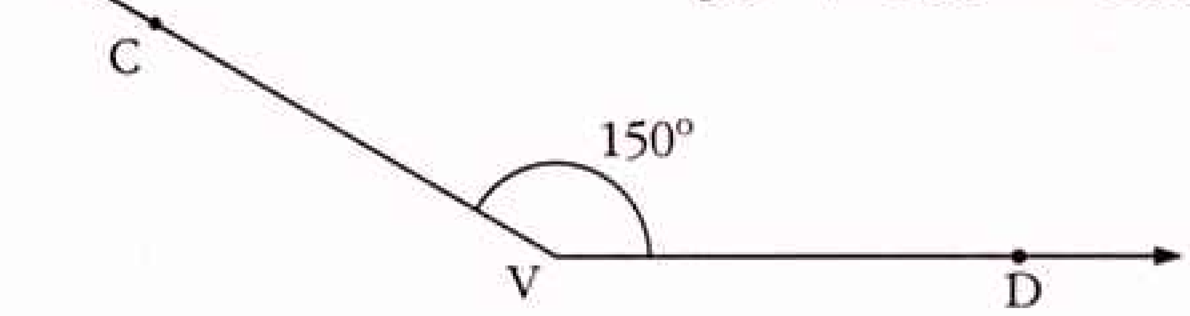
$35° + 55° = 90°$

Ângulos suplementares

Dois ângulos são suplementares quando as suas medidas somam 180°.

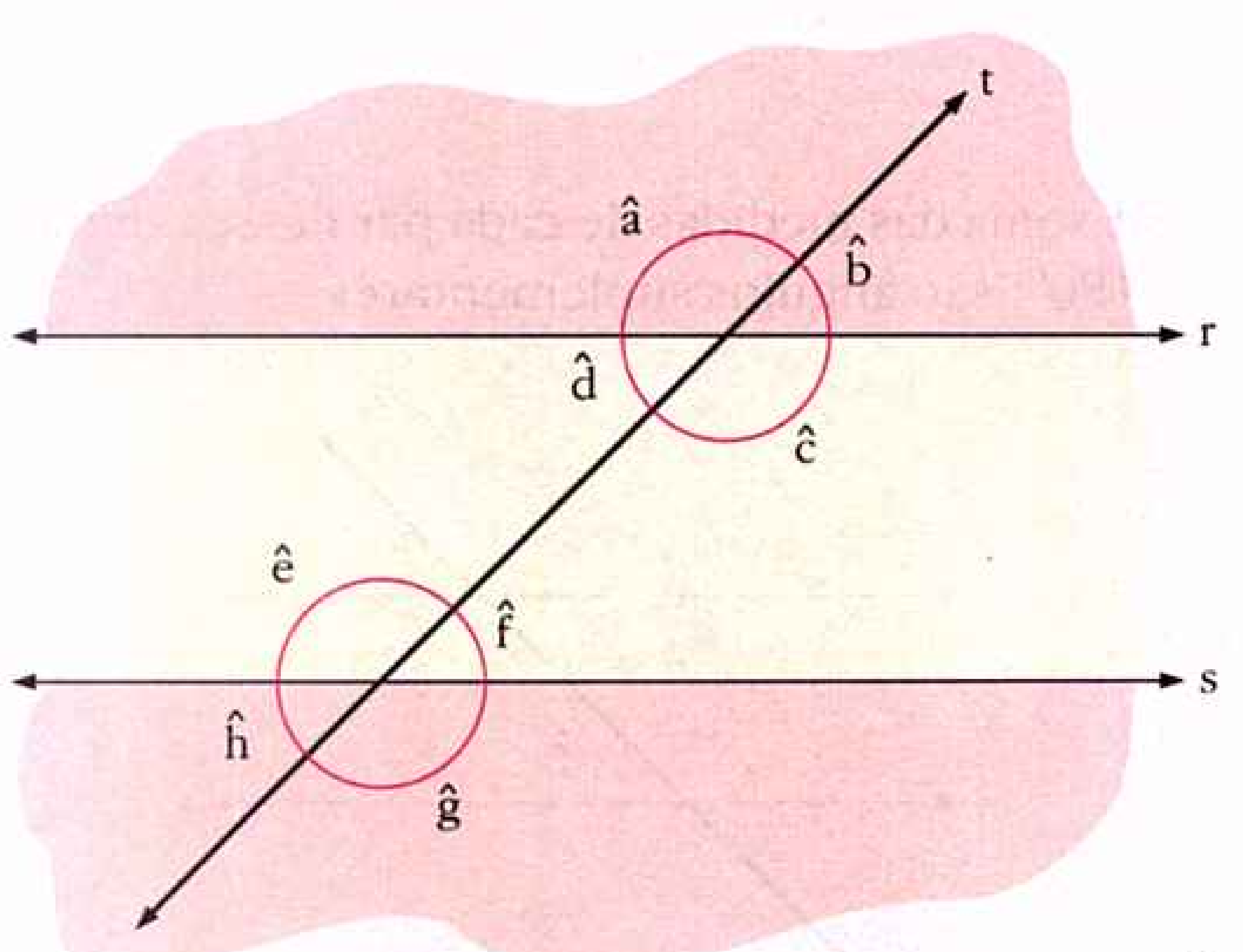


$30° + 150° = 180°$



Duas retas paralelas e uma transversal

Duas retas, *r* e *s*, distintas e paralelas, cortadas por uma transversal, determinam pares de ângulos importantes no estudo da geometria. Veja a figura.



r // s

t é a reta transversal

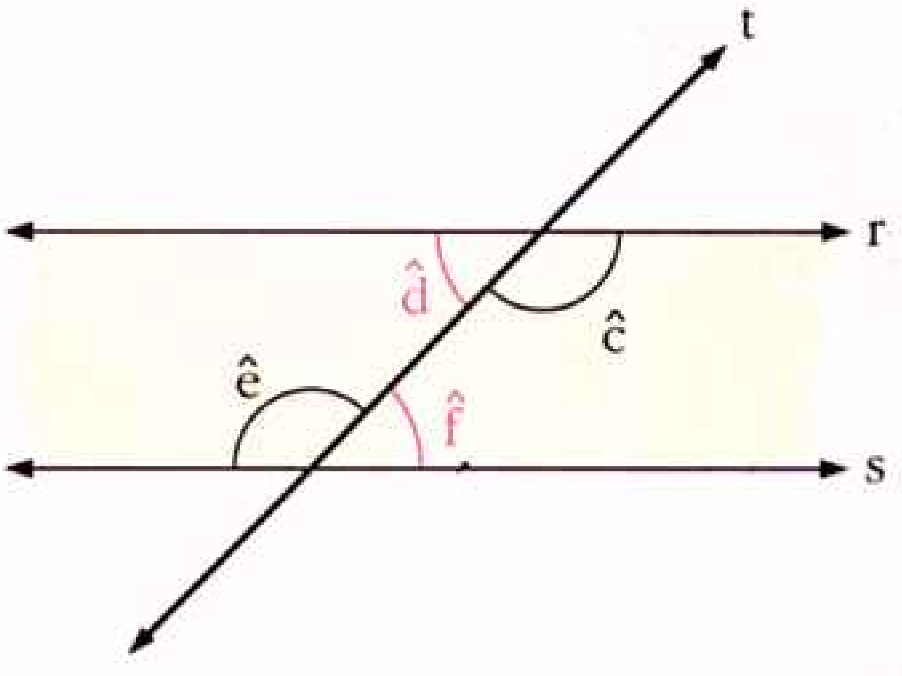
Usamos as seguintes denominações:

Ângulos alternos internos

Cada par desses ângulos tem a mesma medida; são ângulos congruentes.

$\hat{d} \equiv \hat{f}$

$\hat{e} \equiv \hat{c}$

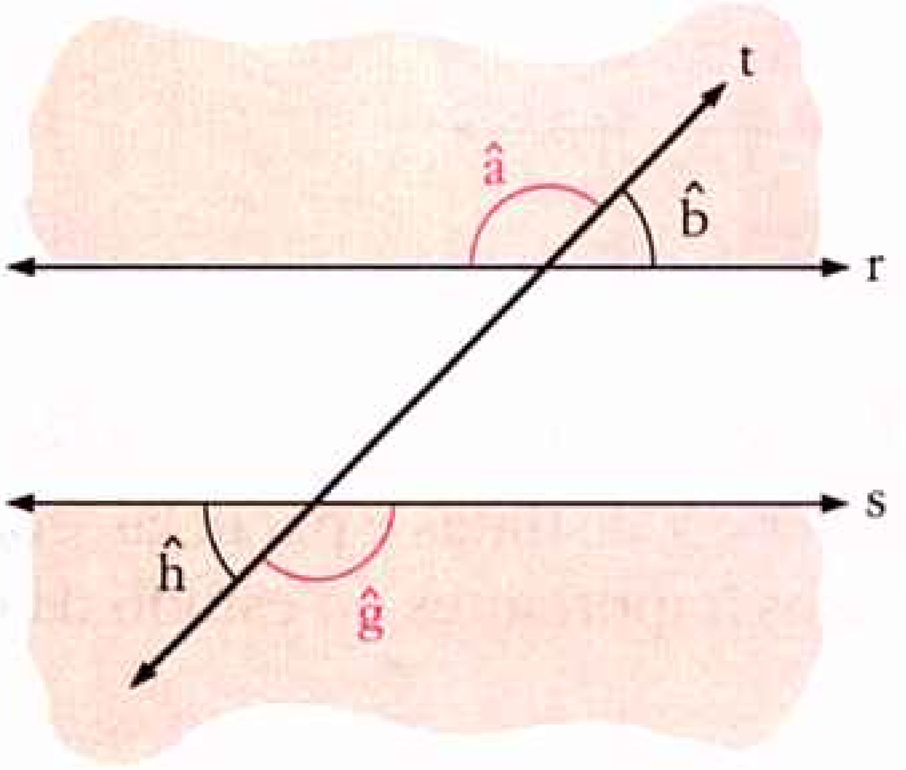


Ângulos alternos externos

Cada par desses ângulos tem a mesma medida; são ângulos congruentes.

$\hat{a} \equiv \hat{g}$

$\hat{b} \equiv \hat{h}$

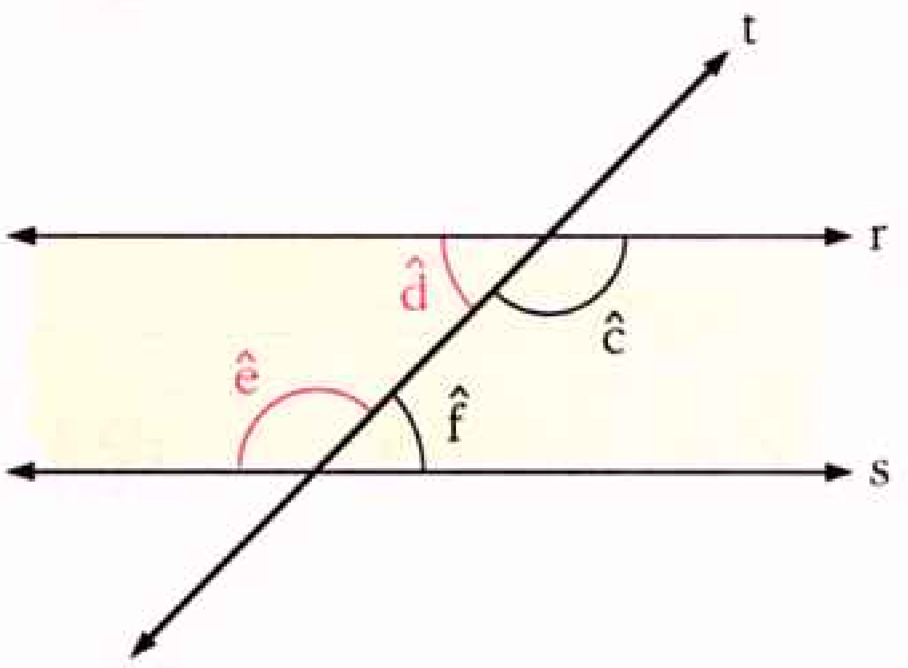


Ângulos colaterais internos

A soma das medidas de cada par desses ângulos vale 180°; são ângulos suplementares.

$\text{med}(\hat{d}) + \text{med}(\hat{e}) = 180°$

$\text{med}(\hat{c}) + \text{med}(\hat{f}) = 180°$

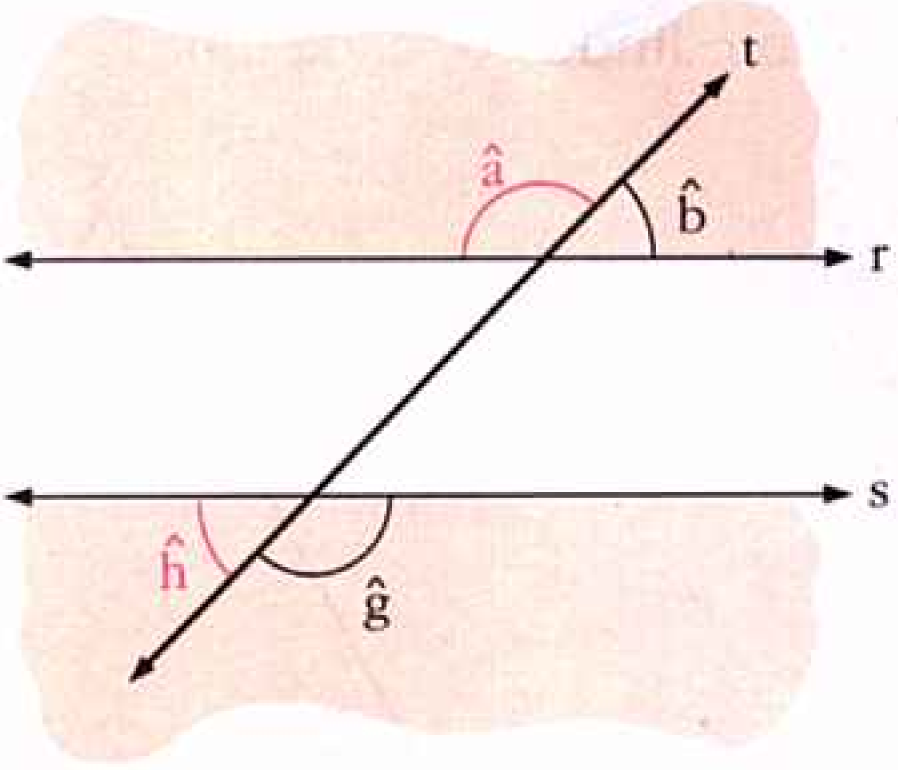


Ângulos colaterais externos

A soma das medidas de cada par desses ângulos vale 180°; são ângulos suplementares.

$\text{med}(\hat{a}) + \text{med}(\hat{h}) = 180°$

$\text{med}(\hat{b}) + \text{med}(\hat{g}) = 180°$

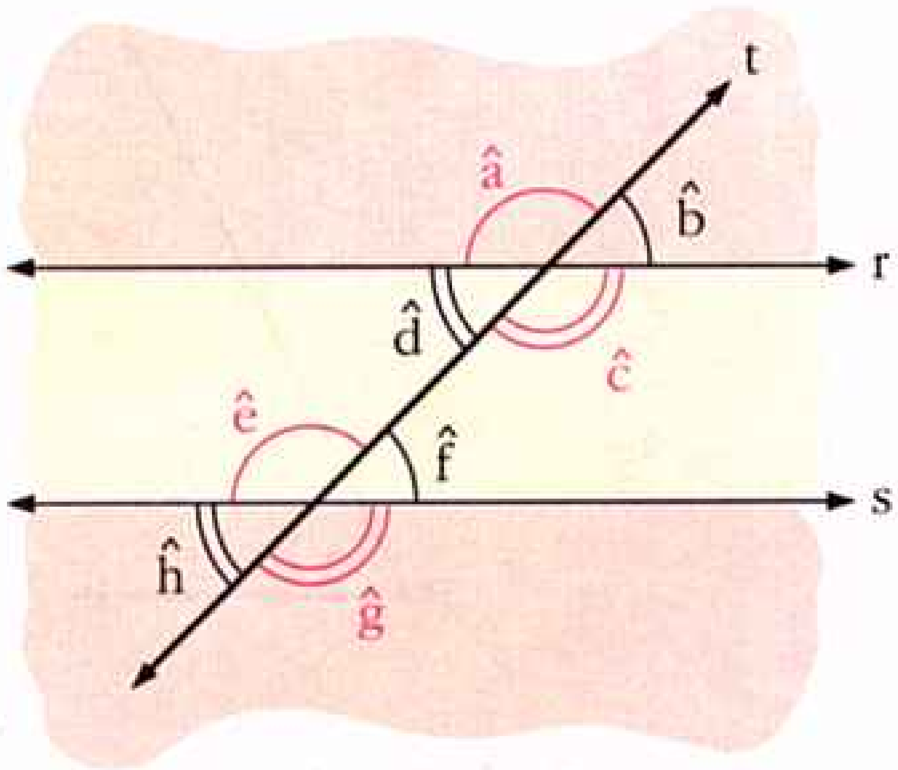


Ângulos correspondentes

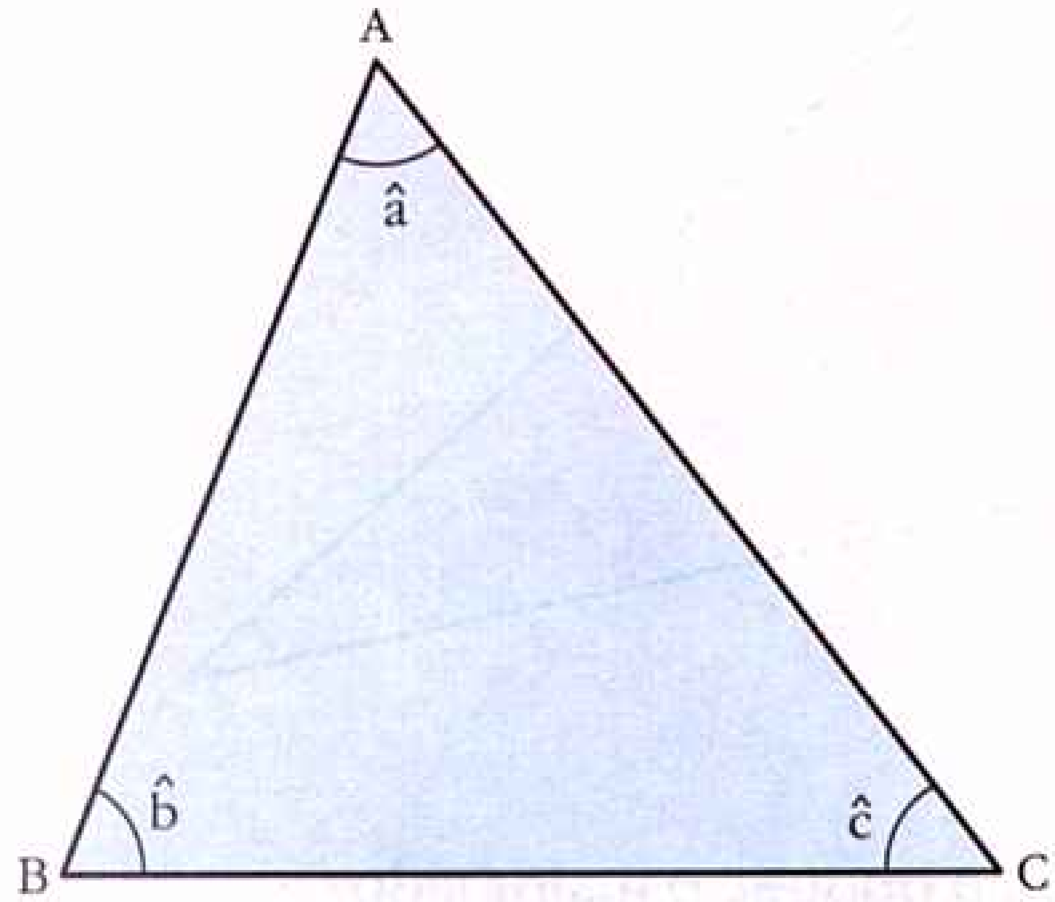
Cada par desses ângulos tem a mesma medida; são ângulos congruentes.

$\hat{a} \equiv \hat{e}$ $\quad \hat{b} \equiv \hat{f}$

$\hat{c} \equiv \hat{g}$ $\quad \hat{d} \equiv \hat{h}$



Triângulos



Indicação: $\triangle ABC$

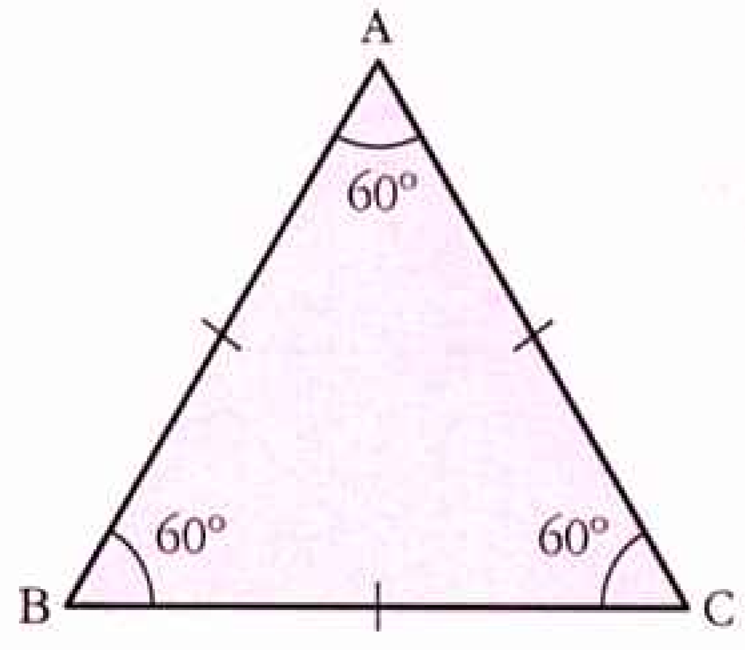
Lados: $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$

Vértices: A, B, C

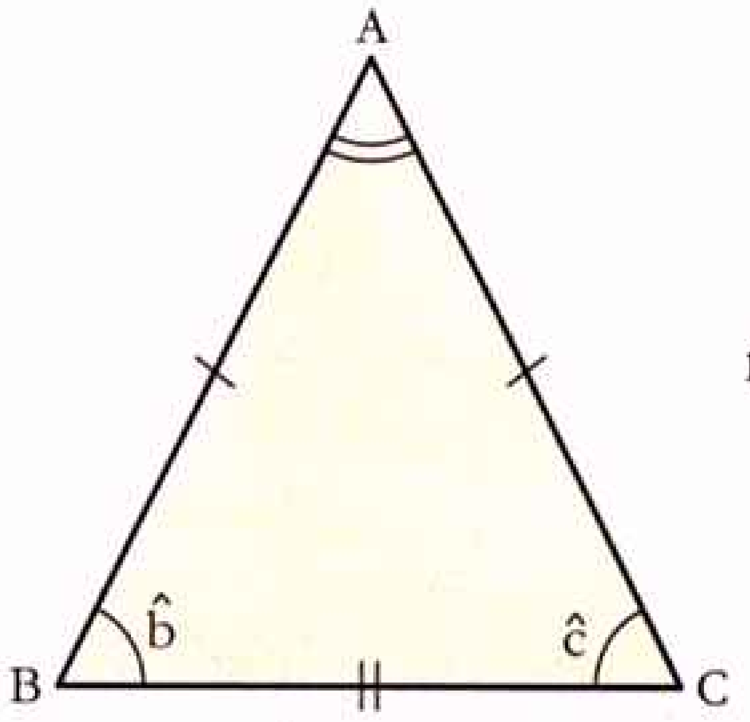
Ângulos internos: $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$ ou $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$

Os triângulos quanto aos lados

Eqüilátero Os três lados são congruentes e os três ângulos internos são congruentes, medindo 60° cada um.

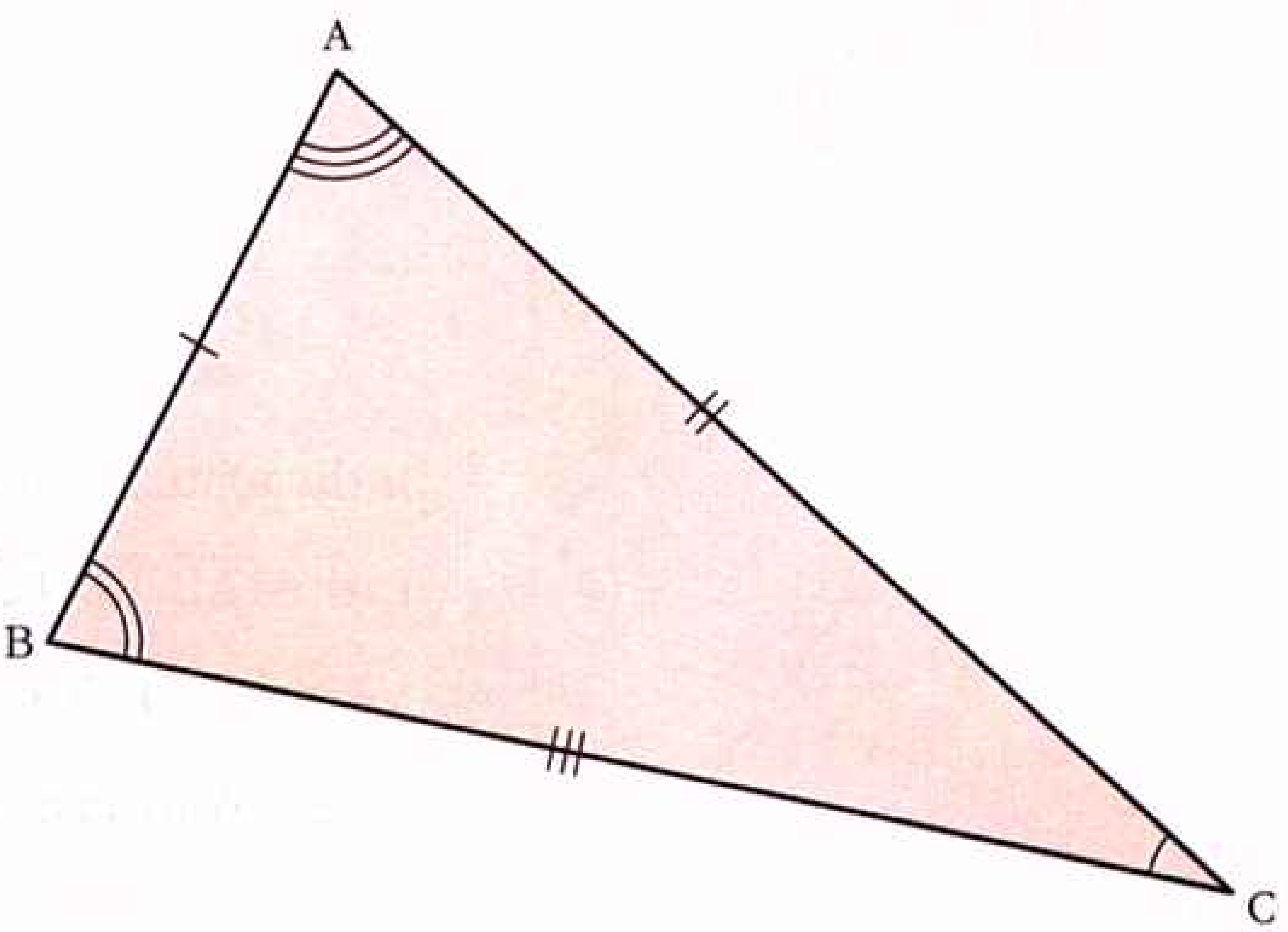


Isósceles Os dois lados são congruentes e os dois ângulos da base são congruentes.



$$\text{med}(\hat{b}) = \text{med}(\hat{c})$$

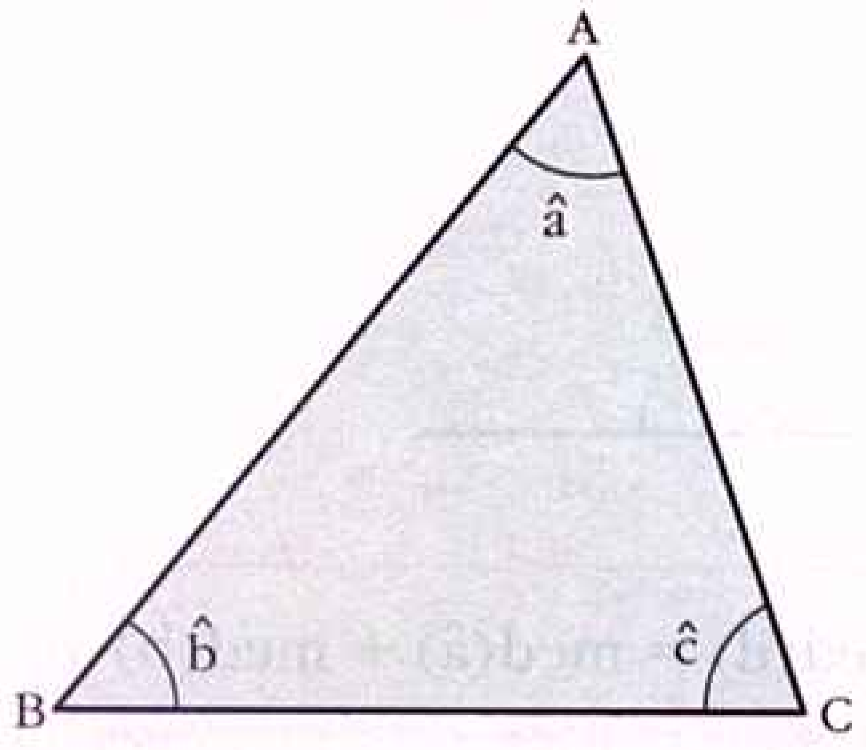
Escaleno Possui uma medida diferente para cada lado e para cada ângulo.



▸ Em um triângulo, ao maior ângulo opõe-se o maior lado.

Os triângulos quanto aos ângulos

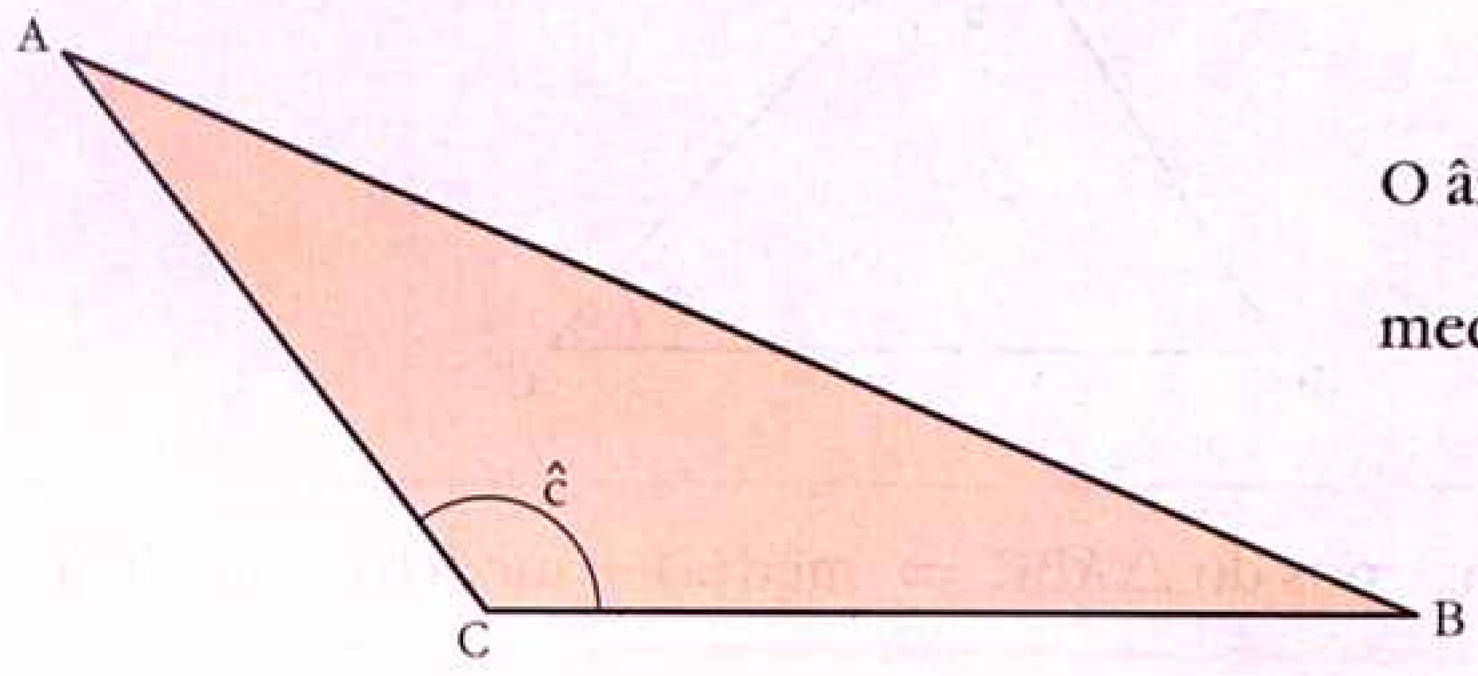
Acutângulo Todos os ângulos internos são agudos.



$\hat{a}$, $\hat{b}$ e $\hat{c}$ são ângulos agudos

$\text{med}(\hat{a}) < 90^\circ$, $\text{med}(\hat{b}) < 90^\circ$ e $\text{med}(\hat{c}) < 90^\circ$

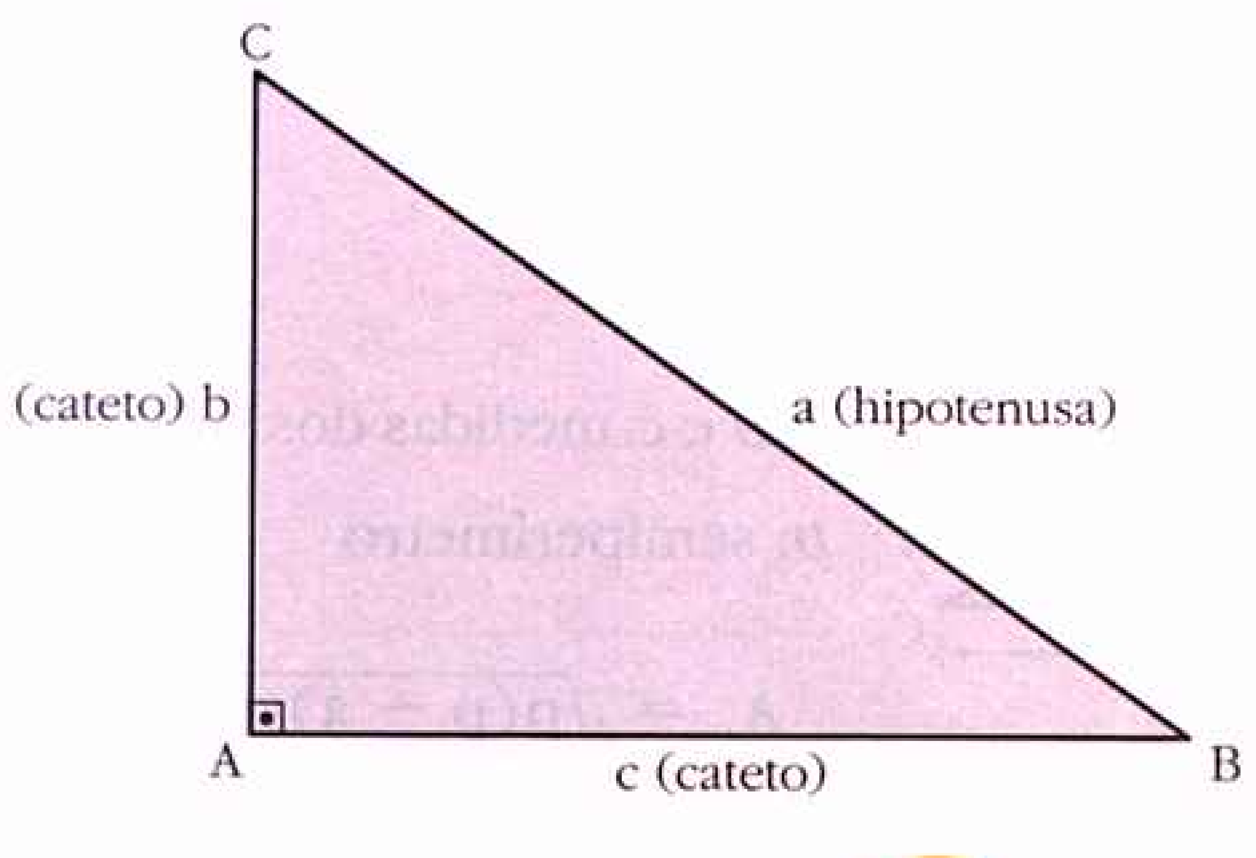
Obtusângulo Possui um ângulo interno obtuso.



O ângulo $\hat{c}$ é obtuso.

$\text{med}(\hat{c}) > 90^\circ$

Retângulo Possui um ângulo interno reto.

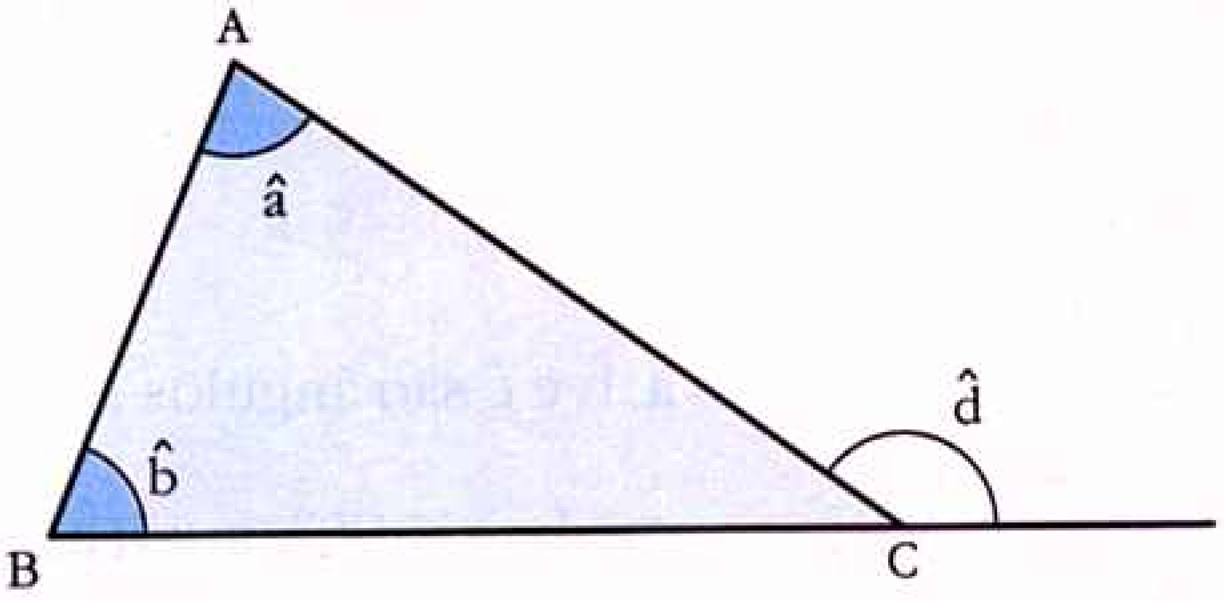


O ângulo $\hat{a}$ é reto.

$\text{med}(\hat{a}) = 90^\circ$

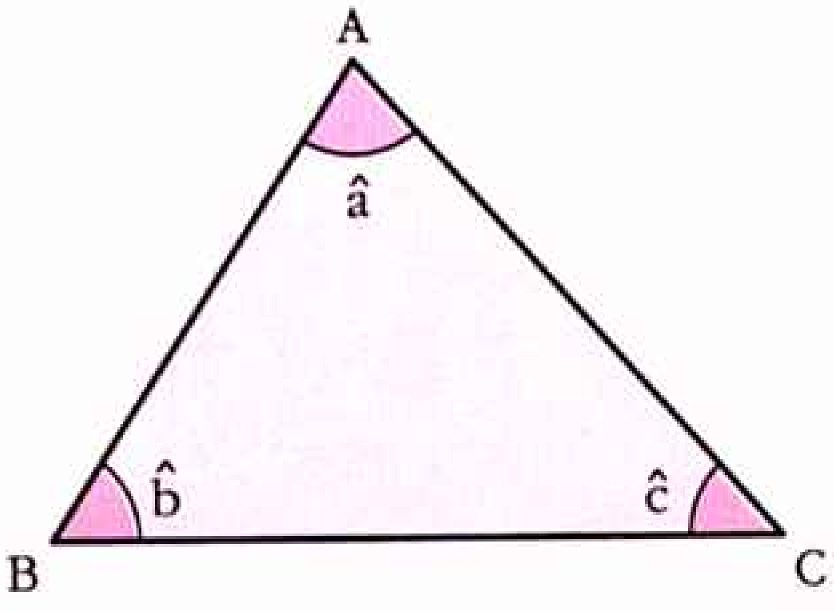
Ângulo externo

Em um triângulo, a medida de qualquer um de seus ângulos externos é igual à soma das medidas dos ângulos internos não-adjacentes a ele.



$\hat{d}$ é ângulo externo e adjacente a $\hat{c} \Rightarrow \text{med}(\hat{d}) = \text{med}(\hat{a}) + \text{med}(\hat{b})$

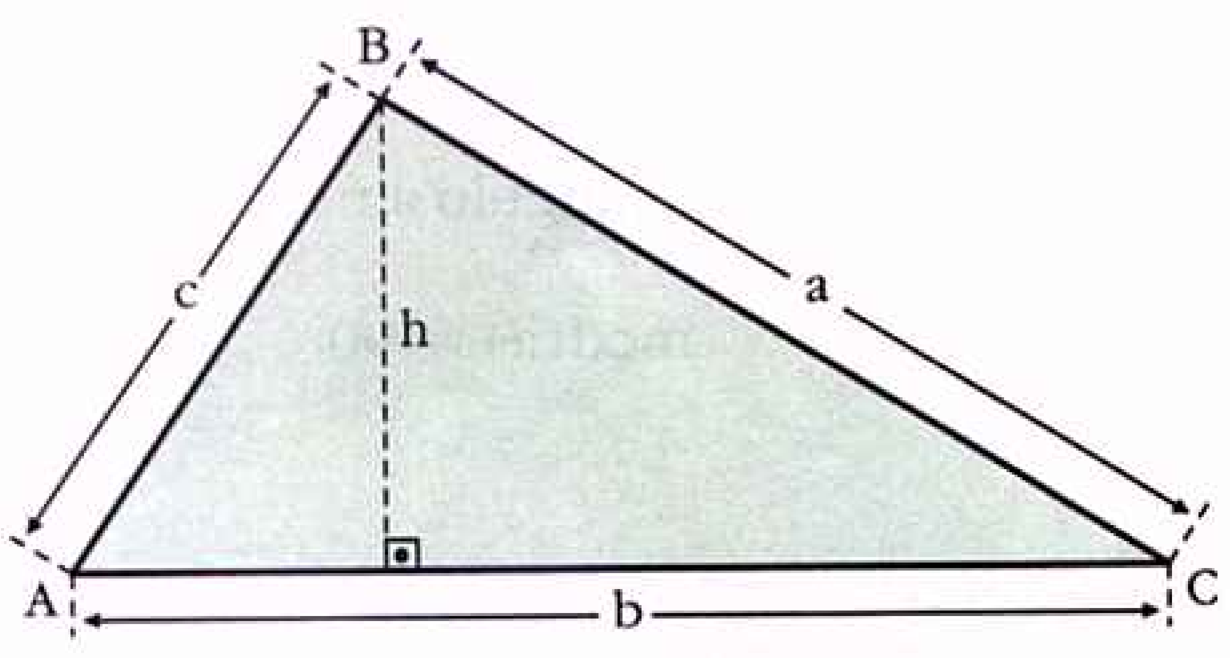
Soma dos ângulos internos de um triângulo



$\hat{a}$, $\hat{b}$ e $\hat{c}$ são ângulos internos do $\triangle ABC \Rightarrow \text{med}(\hat{a}) + \text{med}(\hat{b}) + \text{med}(\hat{c}) = 180^\circ$

Área de um triângulo

Triângulo qualquer



b: medida da base $\overleftrightarrow{AC}$

h: medida da altura relativa à base $\overleftrightarrow{AC}$

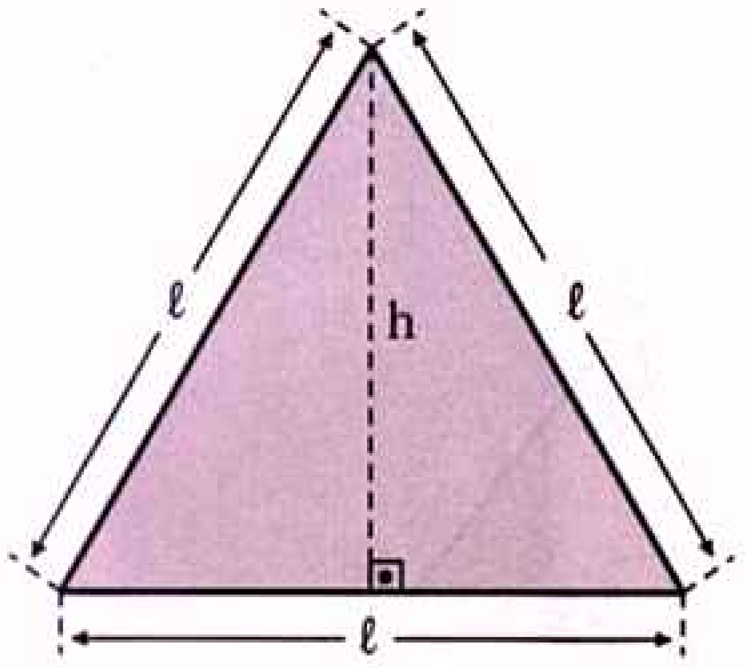
$$A_t = \frac{b \times h}{2}$$

a, *b* e *c*: medidas dos lados $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{AB}$

p: semiperímetro

$$A_t = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Triângulo eqüilátero

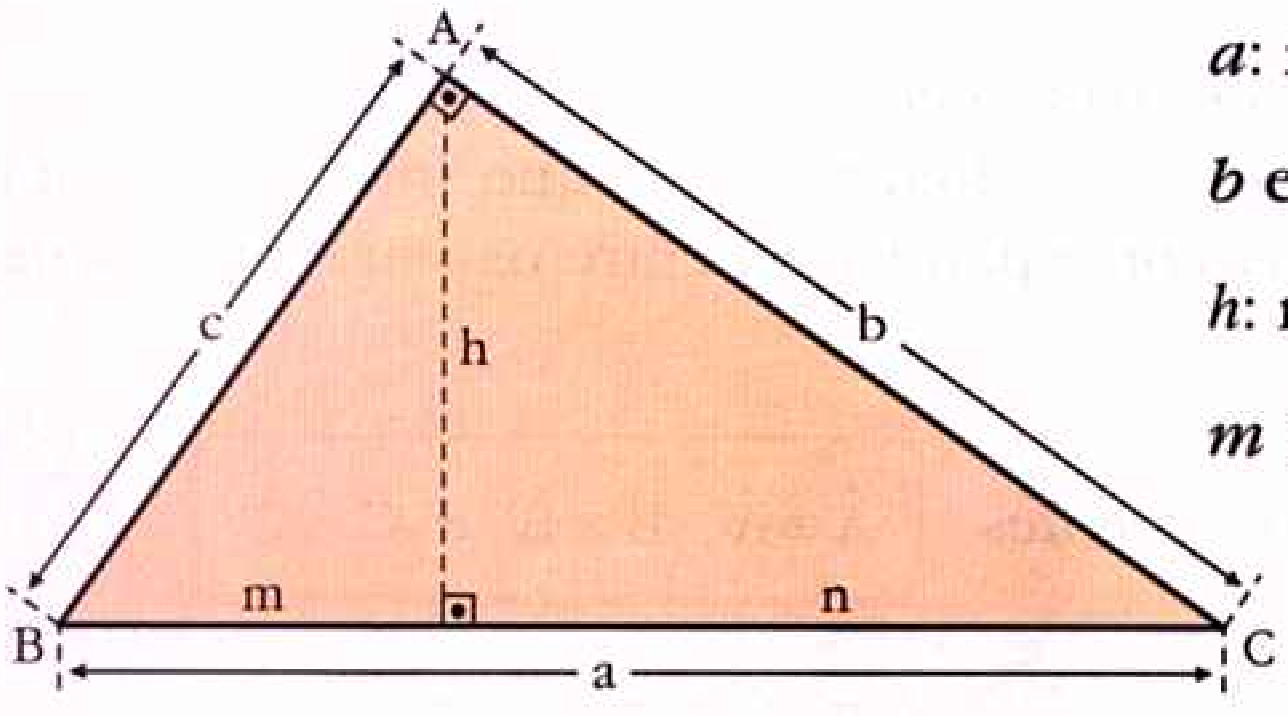


ℓ: medida do lado

h: medida da altura

$$A_t = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \quad \text{e} \quad h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

Relações métricas num triângulo retângulo



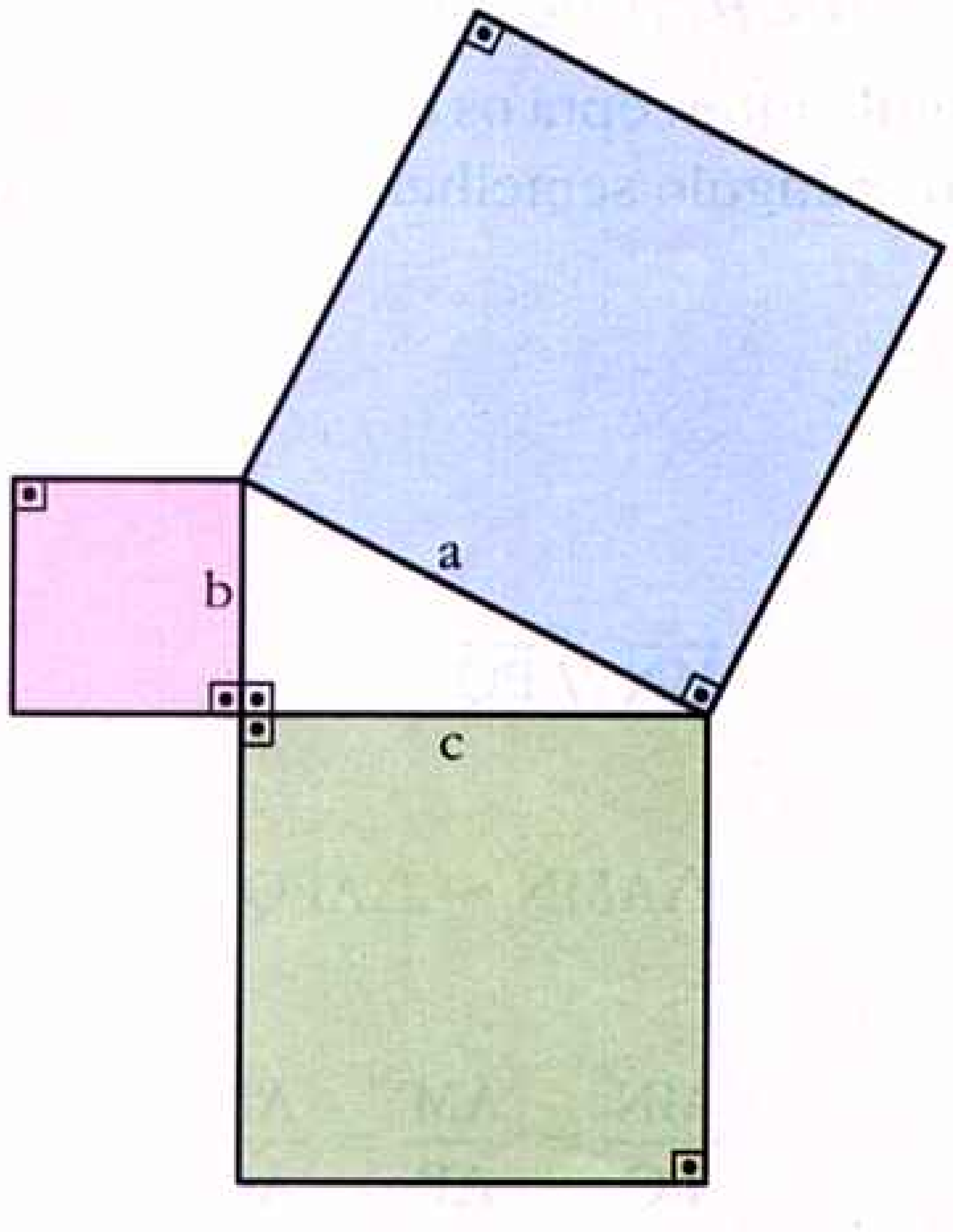
a: medida da hipotenusa

b e c: medidas dos catetos

h: medida da altura relativa à hipotenusa

m e n: medidas das projeções dos catetos sobre a hipotenusa

Relações: $b \cdot c = a \cdot h \qquad h^2 = m \cdot n \qquad b^2 = a \cdot n \qquad c^2 = a \cdot m$

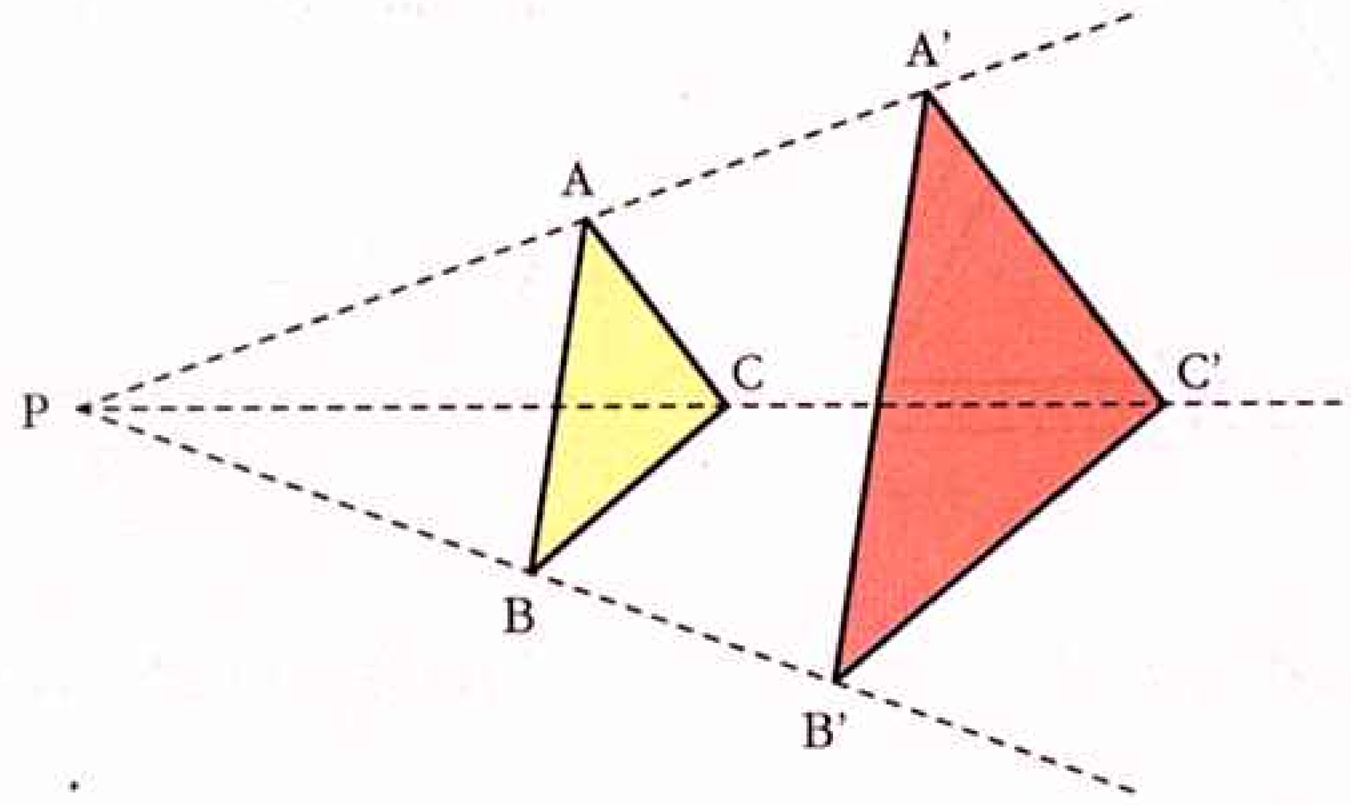


$a^2 = b^2 + c^2$ (teorema de Pitágoras)

Semelhança de triângulos

Definição

Observe a figura, onde $\overleftrightarrow{A'B'} \mathbin{/\!/} \overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{A'C'} \mathbin{/\!/} \overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{B'C'} \mathbin{/\!/} \overleftrightarrow{BC}$:



Os triângulos ABC e A'B'C' têm a mesma forma.

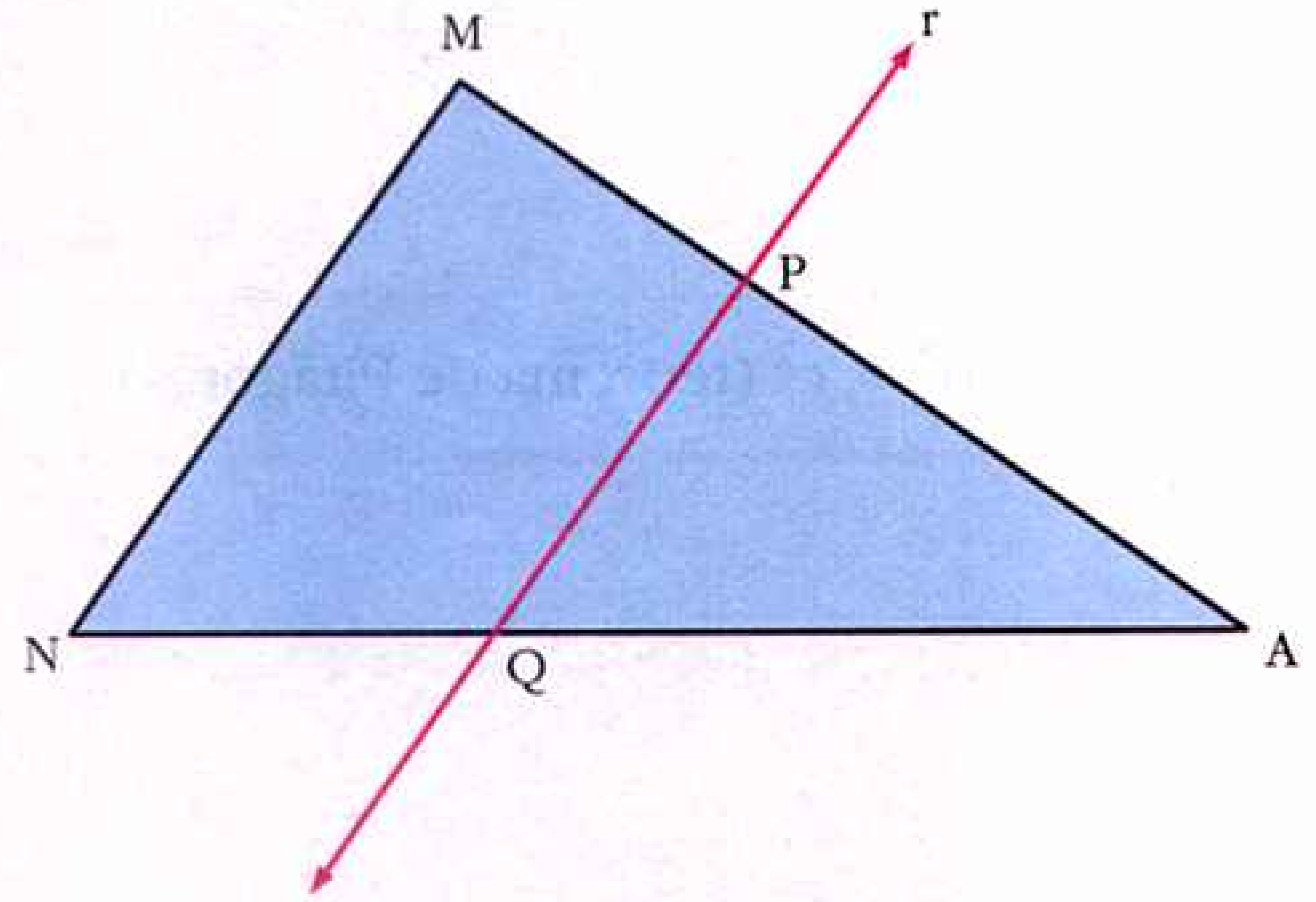
Dizemos que esses triângulos são semelhantes, fato que indicamos com $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, quando existe uma correspondência entre os seus vértices, de modo que:

a. Os ângulos correspondentes são congruentes $\boxed{\hat{A} \equiv \hat{A}',\ \hat{B} \equiv \hat{B}' \text{ e } \hat{C} \equiv \hat{C}'}$

b. Os lados correspondentes são proporcionais $\boxed{\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{AC}{A'C'}}$

Teorema fundamental da semelhança de triângulos

Se uma reta paralela a um lado de um triângulo intercepta os outros dois lados em pontos distintos, então ela determina um novo triângulo semelhante ao primeiro.



$\overleftrightarrow{MN} \mathbin{/\!/} \overleftrightarrow{PQ}$

$\triangle AMN \sim \triangle APQ$ então:

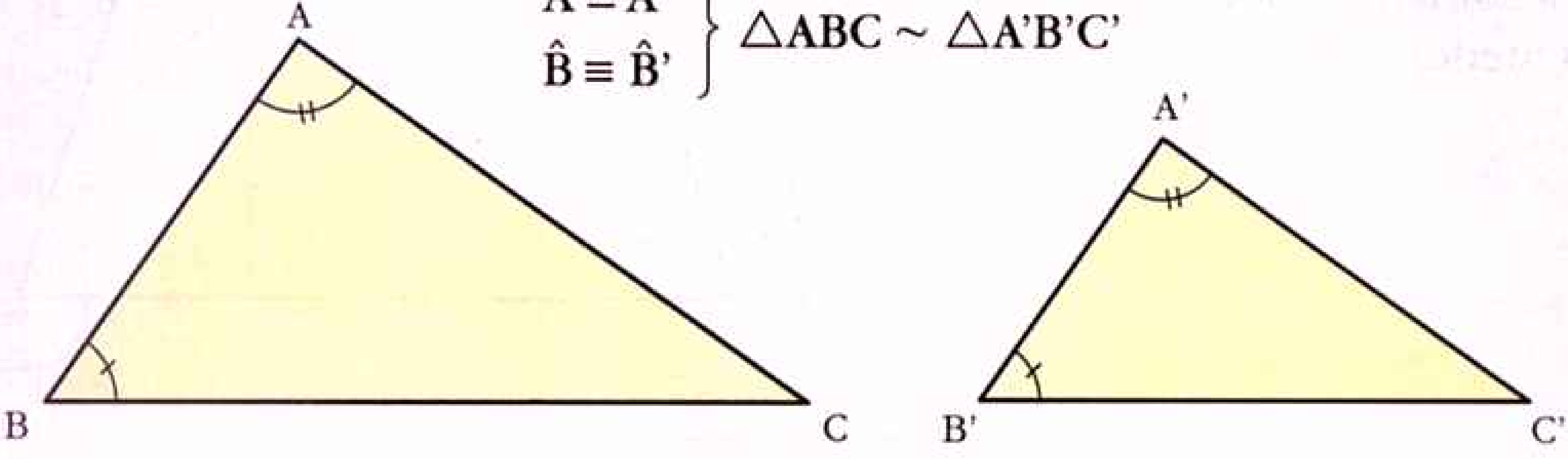
$$\frac{MN}{PQ} = \frac{AM}{AP} = \frac{AN}{AQ}$$

Casos de semelhança

1º caso AA

Dois triângulos que possuam dois ângulos respectivamente congruentes são semelhantes.

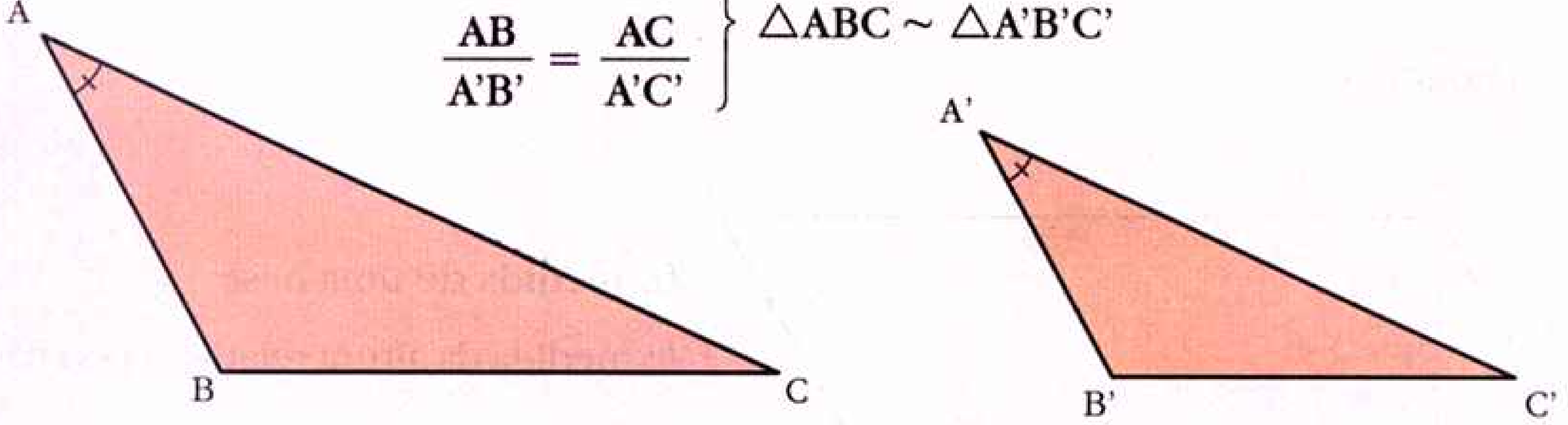
$$\left.\begin{array}{l}\hat{A} \equiv \hat{A}' \\ \hat{B} \equiv \hat{B}'\end{array}\right\} \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$



2º caso LAL

Dois triângulos que possuam dois lados correspondentes proporcionais e os ângulos compreendidos entre eles congruentes são semelhantes.

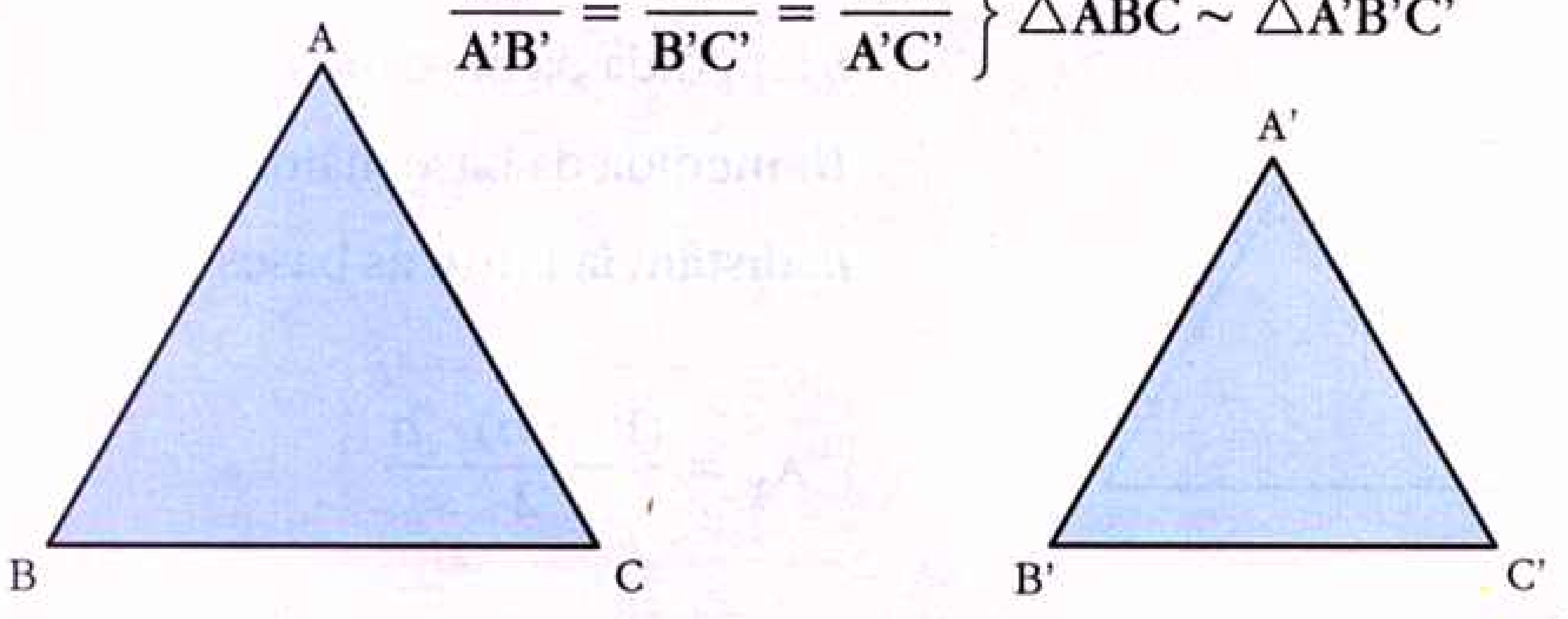
$$\left.\begin{array}{l}\hat{A} \equiv \hat{A}' \\ \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'}\end{array}\right\} \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$



3º caso LLL

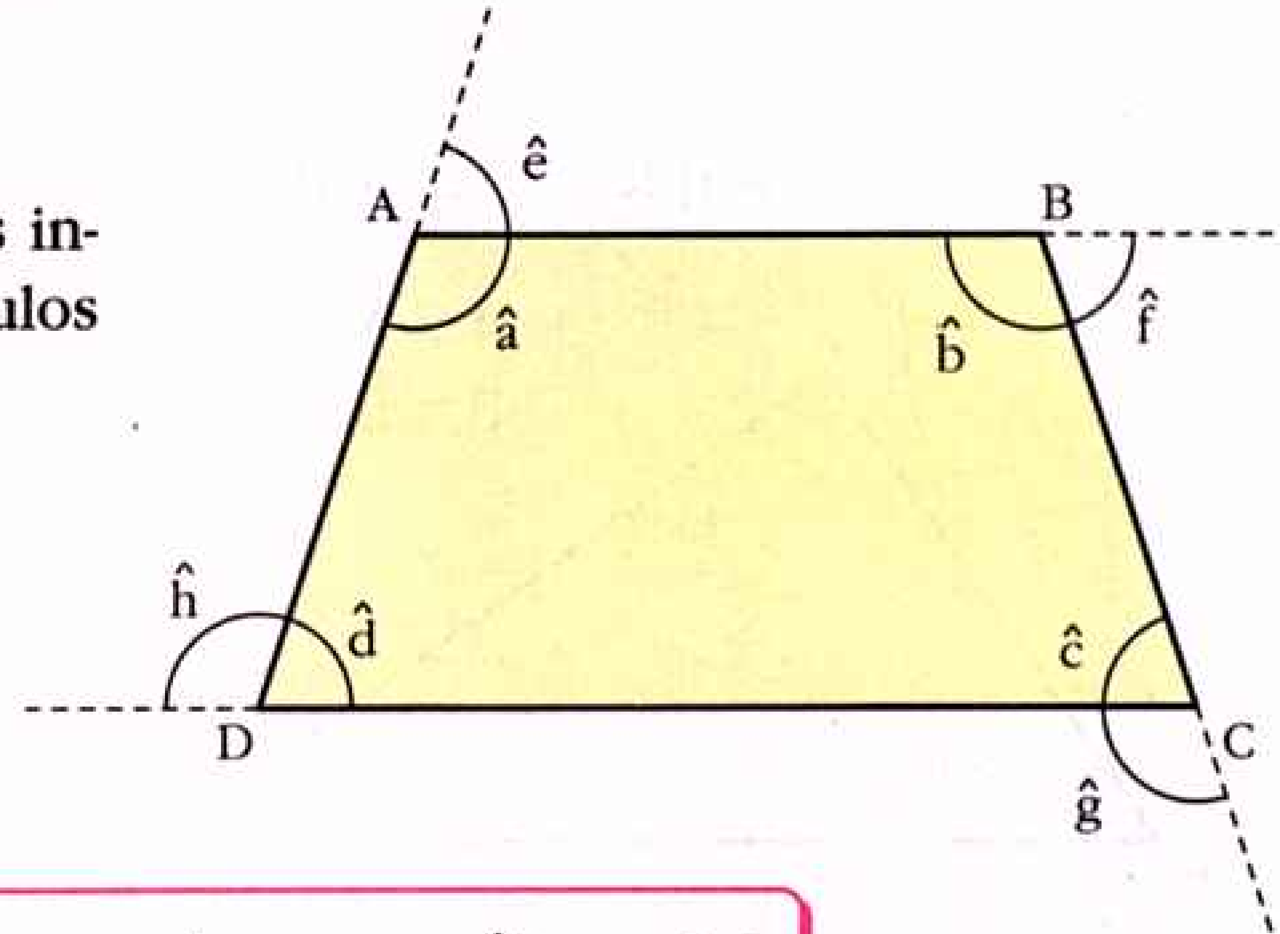
Dois triângulos que possuam os lados correspondentes proporcionais são semelhantes.

$$\left.\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{AC}{A'C'}\right\} \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$



Quadriláteros

A soma das medidas dos ângulos internos e a soma das medidas dos ângulos externos medem 360°.

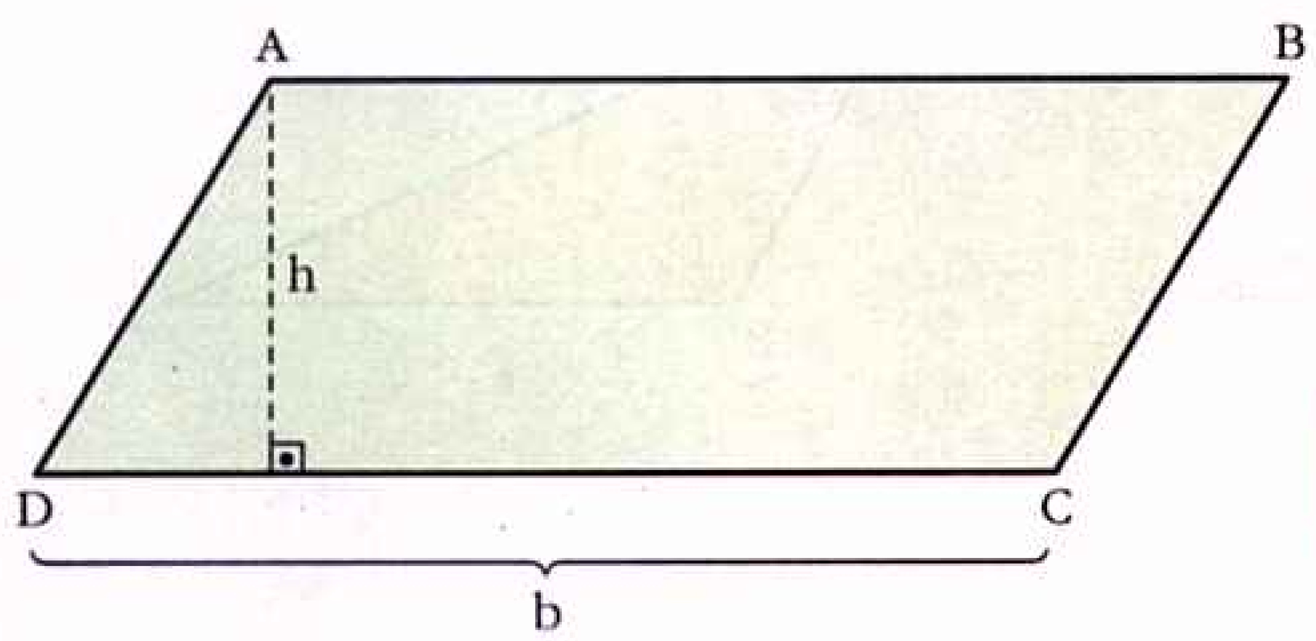


$$\boxed{\text{med}(\hat{a}) + \text{med}(\hat{b}) + \text{med}(\hat{c}) + \text{med}(\hat{d}) = 360°}$$

$$\boxed{\text{med}(\hat{e}) + \text{med}(\hat{f}) + \text{med}(\hat{g}) + \text{med}(\hat{h}) = 360°}$$

Área

Paralelogramo

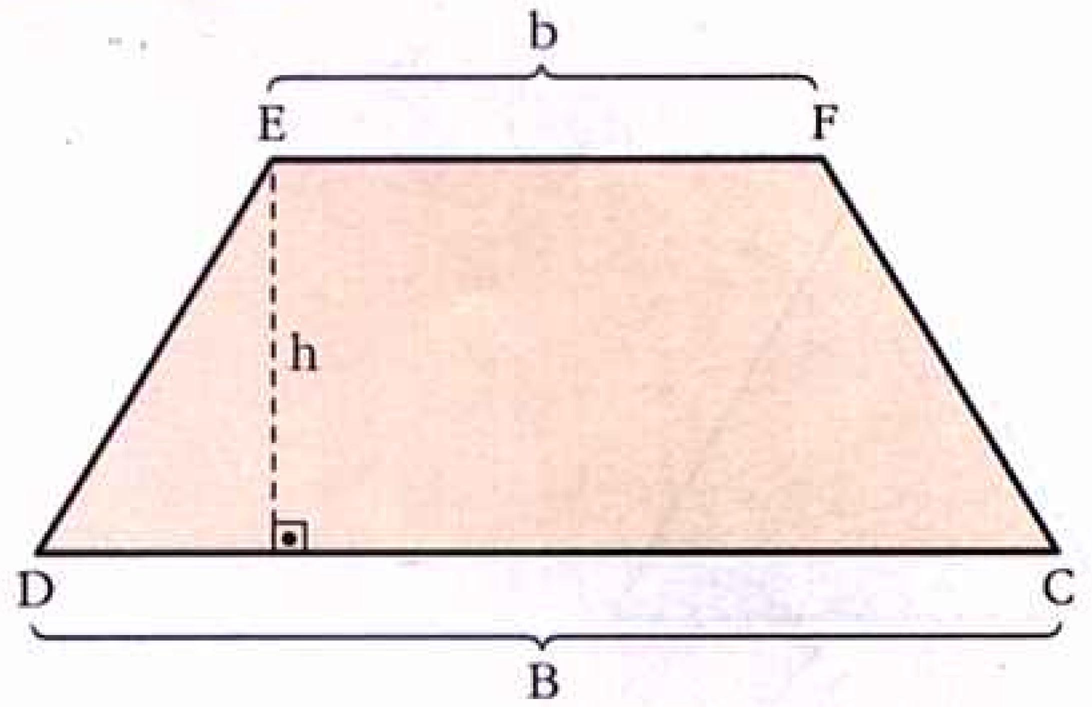


b: medida de uma base

h: medida da altura relativa a essa base

$$\boxed{A_P = b \cdot h}$$

Trapézio



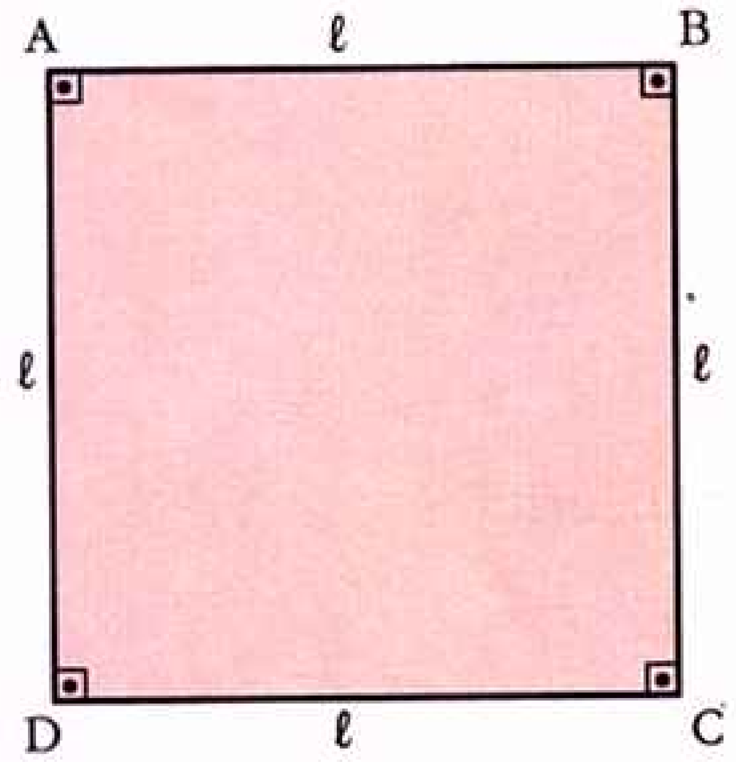
b: medida da base menor

B: medida da base maior

h: distância entre as bases

$$\boxed{A_T = \frac{(B + b) \cdot h}{2}}$$

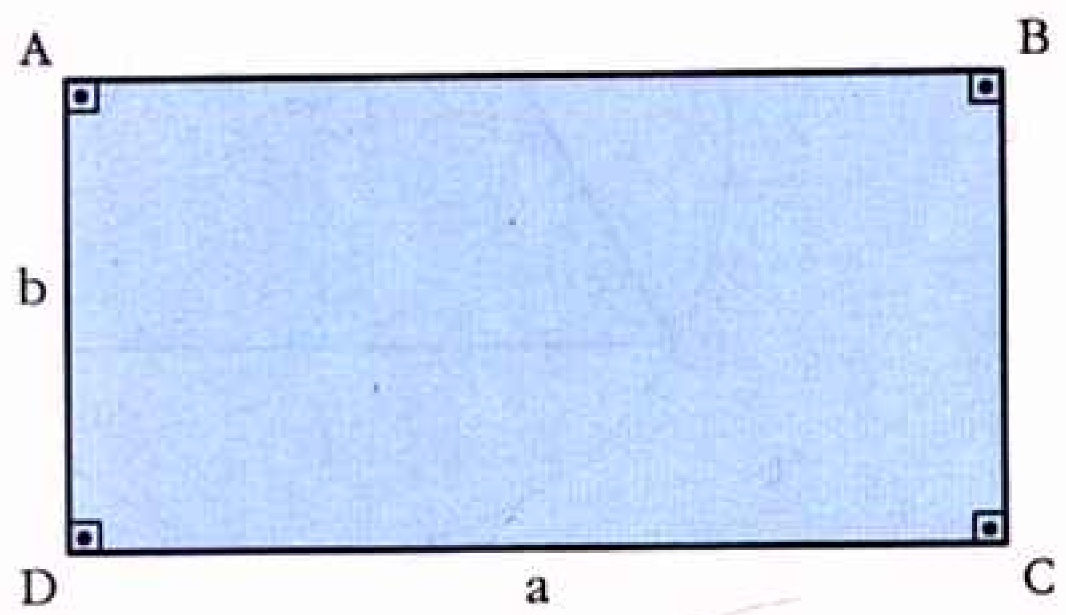
Quadrado



ℓ: medida do lado

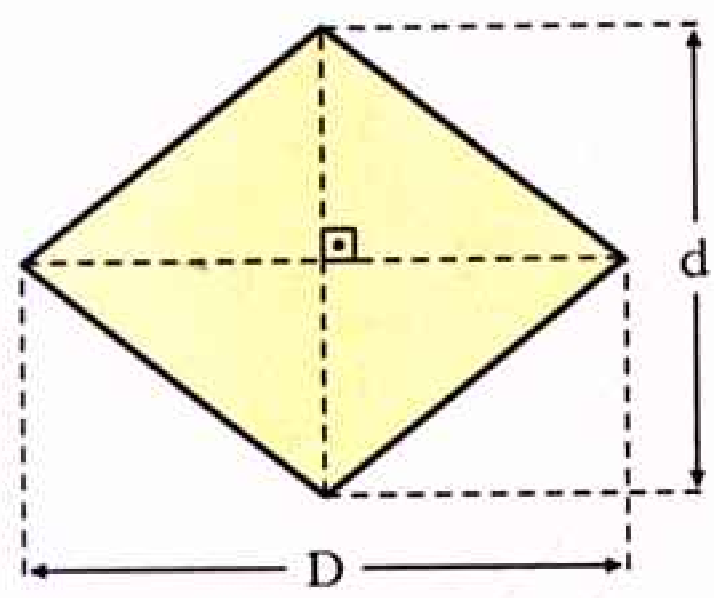
$$\boxed{A_Q = \ell^2}$$

Retângulo



$$\boxed{A_R = a \cdot b}$$

Losango



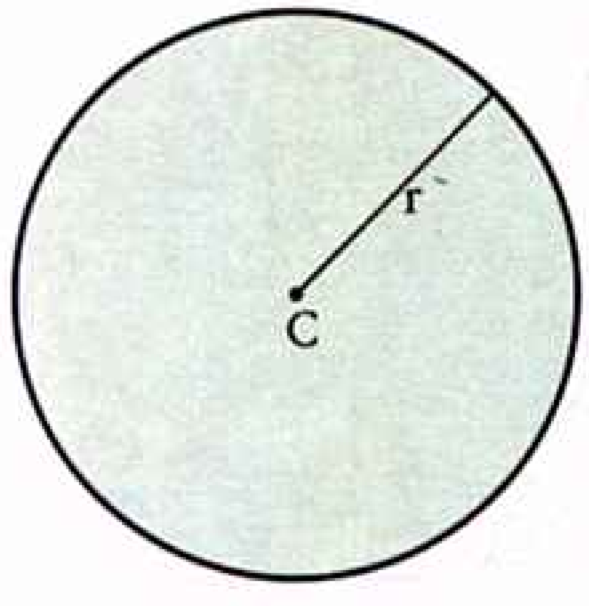
d: medida da diagonal menor

D: medida da diagonal maior

$$\boxed{A_L = \frac{D \cdot d}{2}}$$

Círculo e circunferência

Círculo



r: medida do raio

$\pi \cong 3{,}14$

área do círculo

$$\boxed{A_C = \pi \cdot r^2}$$

comprimento da circunferência

$$\boxed{C = 2\pi \cdot r}$$

Polígonos regulares (relações)

Polígono regular é todo polígono cujos lados são congruentes e cujos ângulos internos são congruentes.

Usaremos a seguinte notação:

ℓ: medida do lado

a: medida do apótema

r: medida do raio da circunferência circunscrita

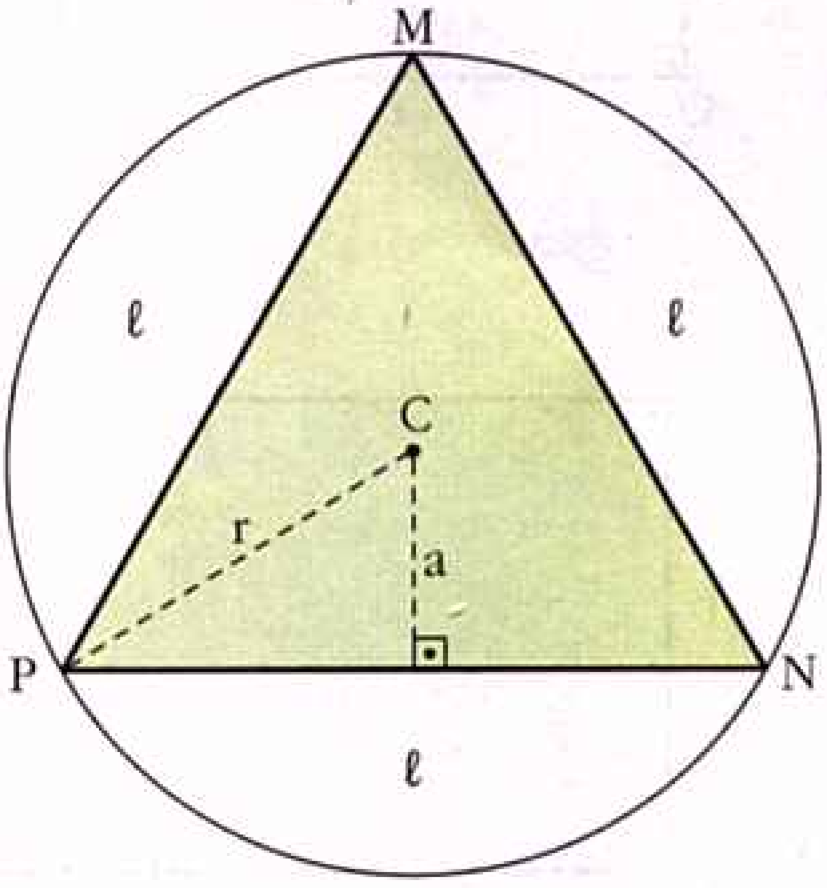
p: semiperímetro

Triângulo eqüilátero

$$\ell = r\sqrt{3}$$

$$a = \frac{r}{2}$$

$$A_T = p \cdot a$$

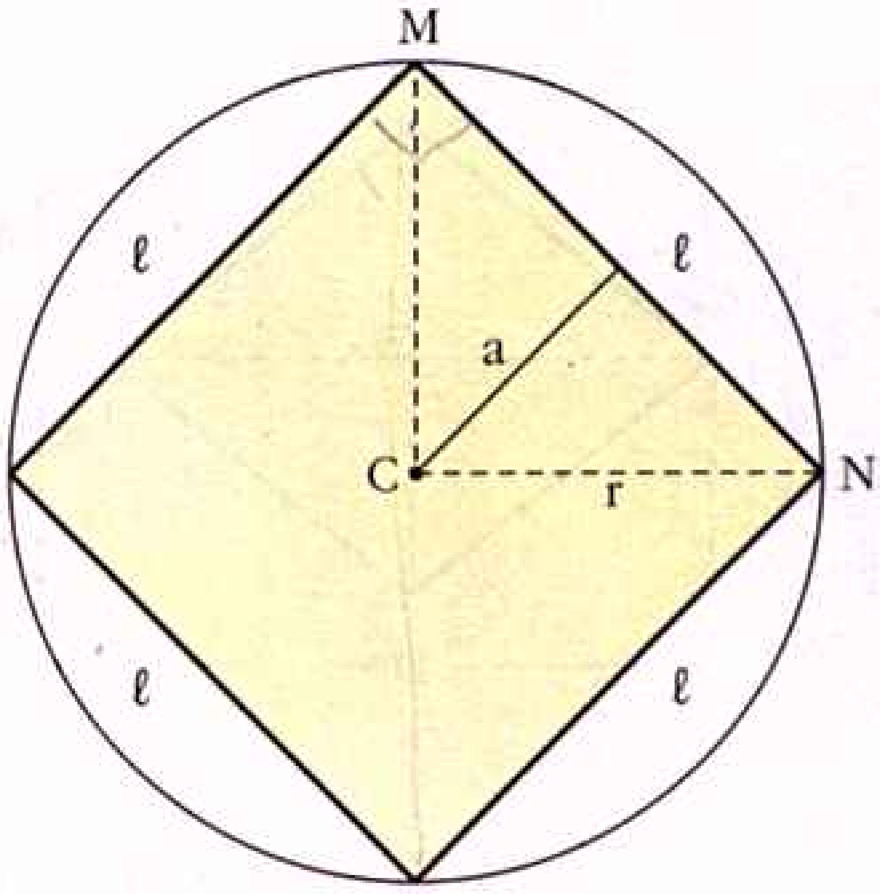


Quadrado

$$\ell = r\sqrt{2}$$

$$a = \frac{\ell}{2}$$

$$A_Q = 2r^2$$

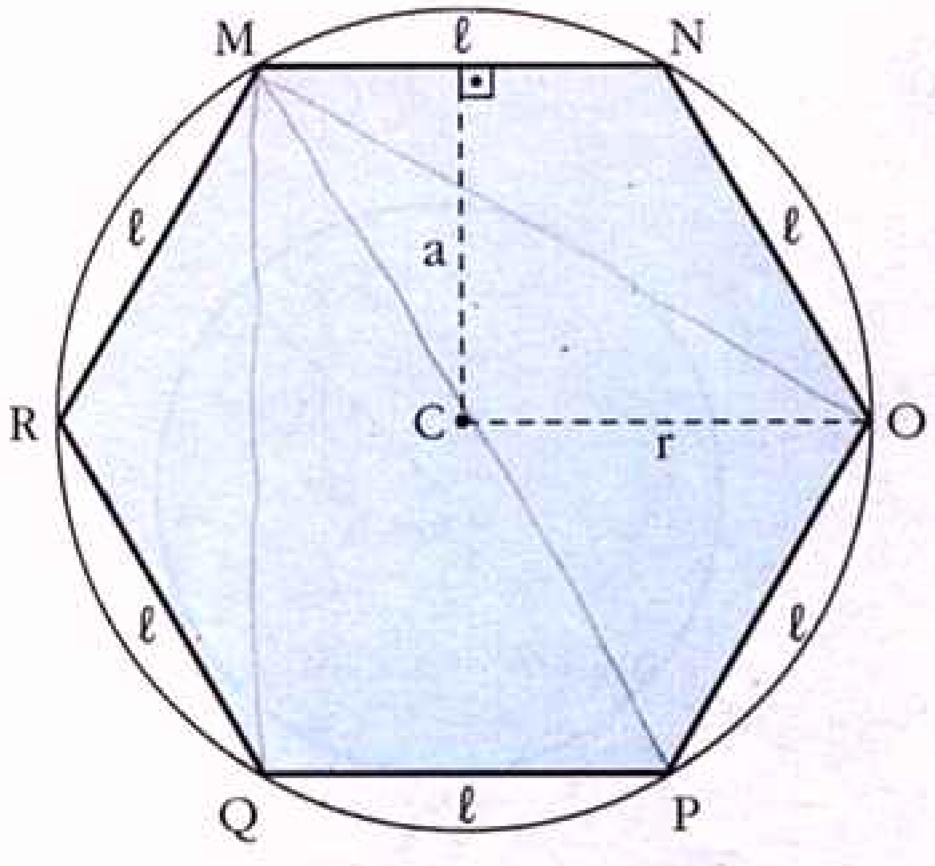


Hexágono

$$\ell = R$$

$$a = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

$$A_H = \frac{3\ell^2\sqrt{3}}{2}$$



Exercícios

Propostos

$x = \frac{5}{4}(180 - x)$ $4x = 900 - 5x$ $9x = 900$ $\boxed{x = 100}$

1072 (UECE) O ângulo igual a $\frac{5}{4}$ do seu suplemento mede:

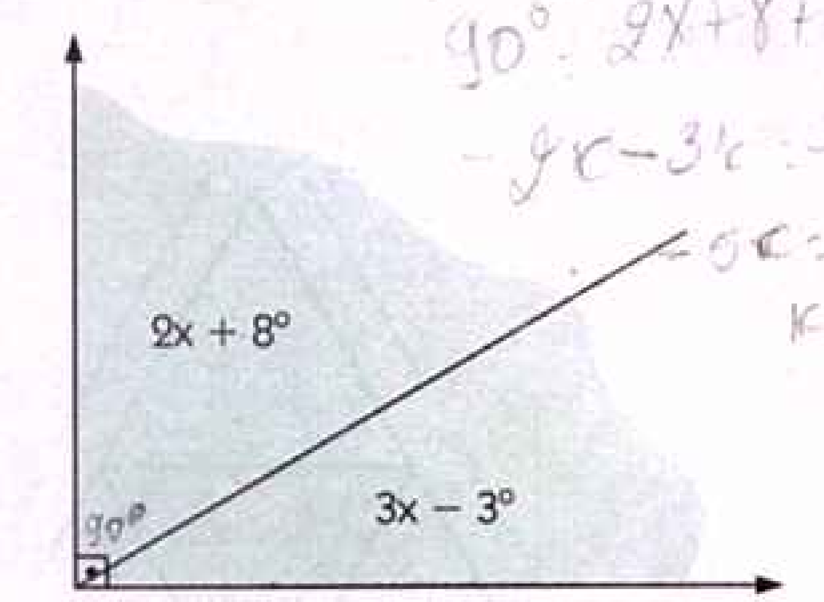
a) 100° c) 36°
b) 144° d) 80°

1073 (UFES) O triplo do complemento de um ângulo é igual à terça parte do suplemento deste ângulo. Este ângulo mede:

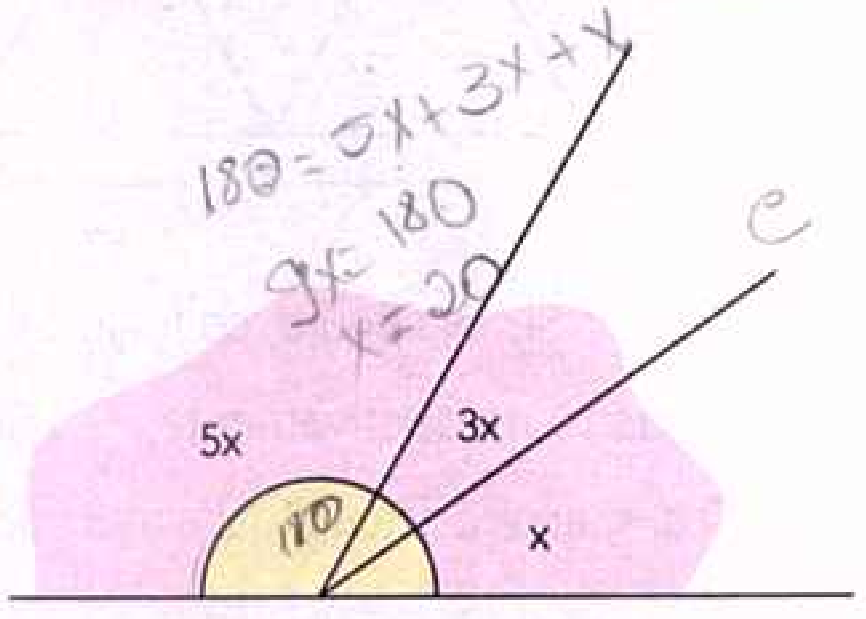
a) $\frac{7\pi}{8}$ rd d) $\frac{7\pi}{16}$ rd
b) $\frac{5\pi}{16}$ rd e) $\frac{5\pi}{8}$ rd
c) $\frac{7\pi}{4}$ rd

1074 Calcule os valores de x, em graus.

a)

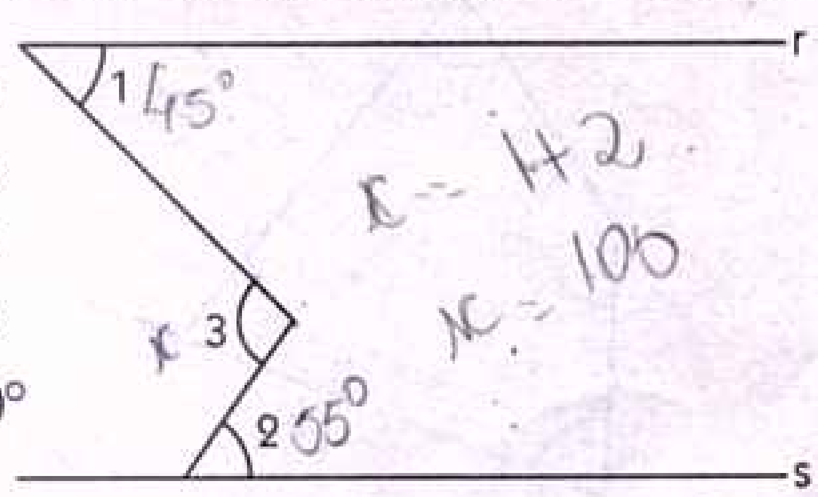


b)



1075 (Fuvest-SP) Na figura, as retas r e s são paralelas, o ângulo 1 mede 45° e o ângulo 2 mede 55°. A medida em graus do ângulo 3 é:

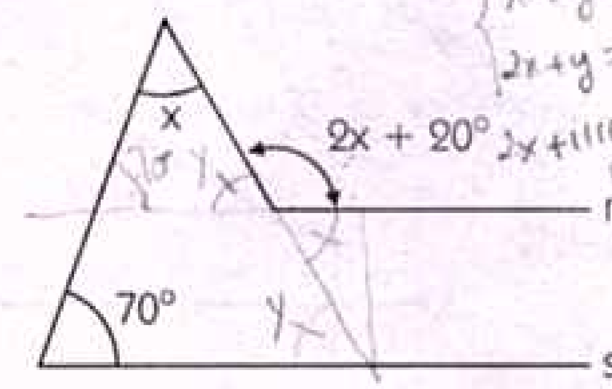
a) 50°
b) 55°
c) 60°
d) 80°
e) 100°



1076 (FEI-SP) Na figura, as retas r e s são paralelas. A medida do ângulo indicado com x é:

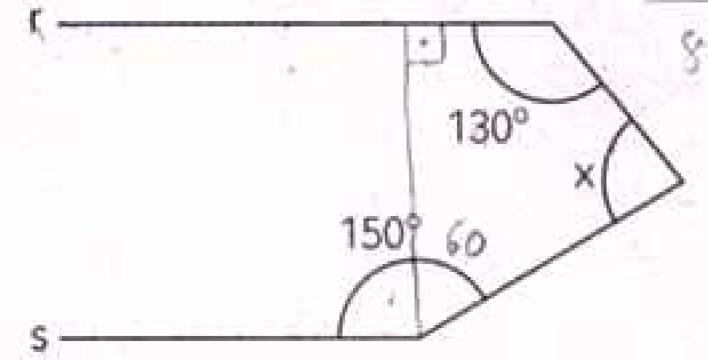
$x + y = 110$
$2x + y = 160$
$\boxed{x = 50}$

a) 70°
b) 50°
c) 60°
d) 85°
e) 65°



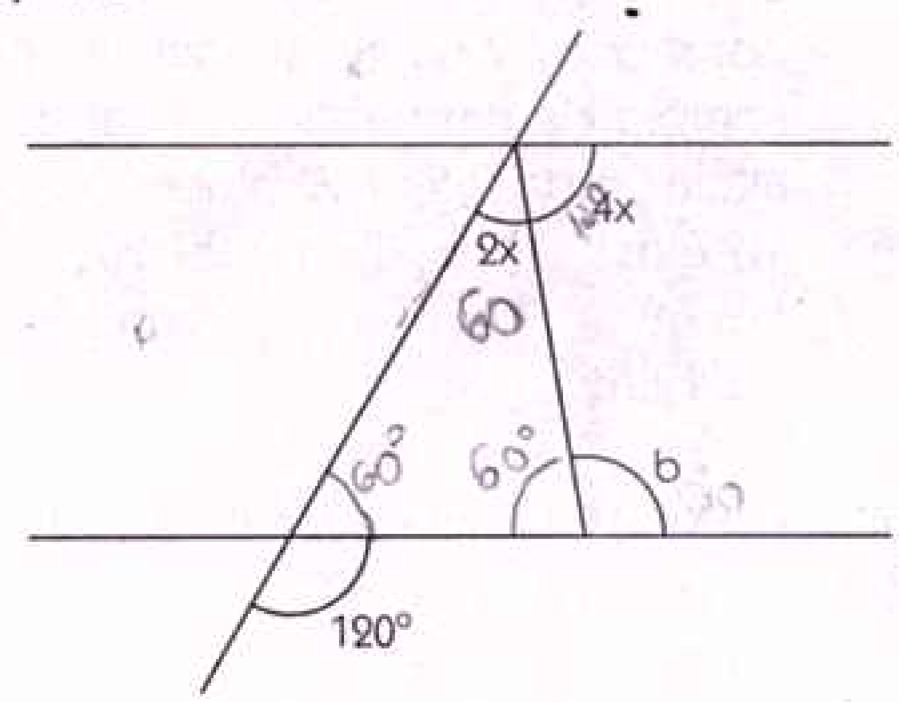
1077 (PUCCAMP-SP) Na figura, r e s são paralelas. O ângulo x mede:

a) 60°
b) 65°
c) 70°
d) 75°
e) 80°



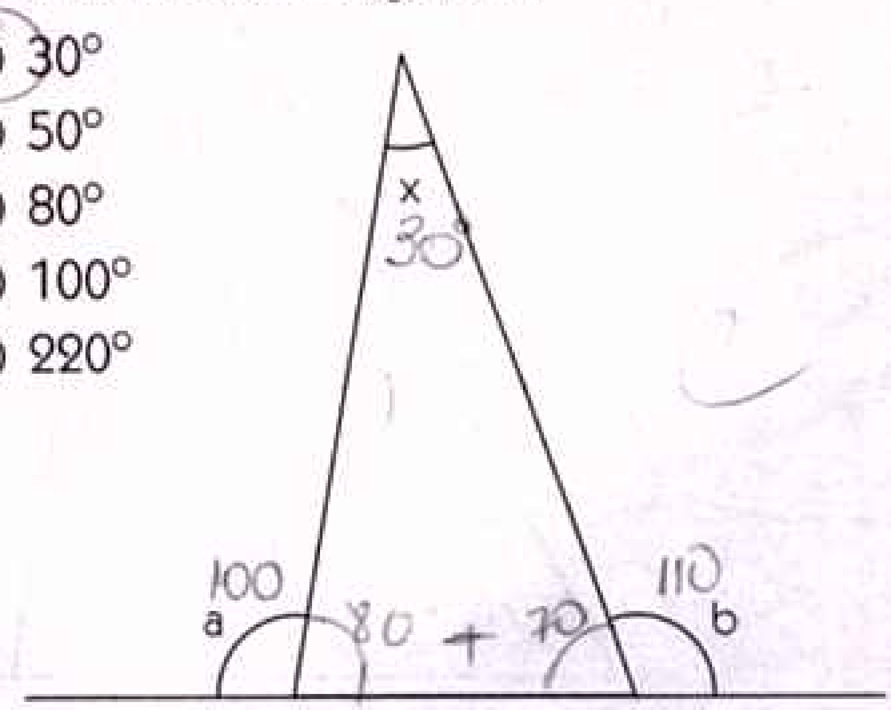
1078 (UFGO) Na figura, as retas r e s são paralelas. A medida do ângulo b é:

a) 100° d) 140°
b) 120° e) 130°
c) 110°



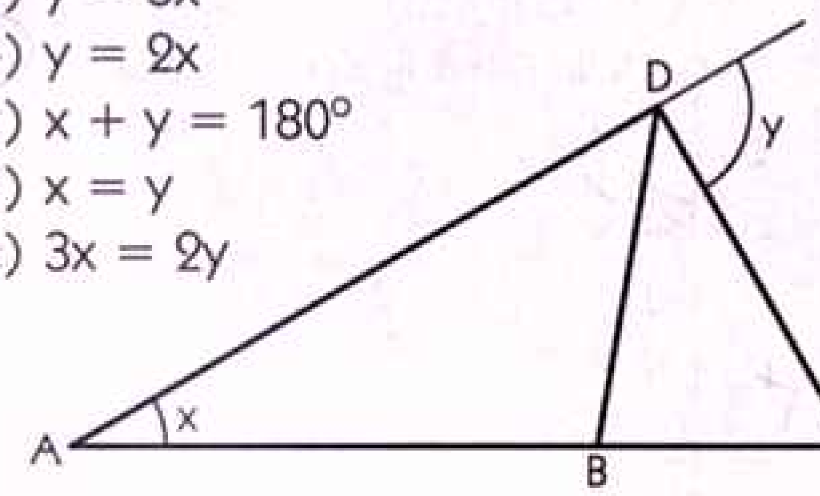
1079 (PUC-SP) Na figura, a = 100° e b = 110°. Quanto mede o ângulo x?

a) 30°
b) 50°
c) 80°
d) 100°
e) 220°



1080 (Fuvest-SP) Na figura: AB = BD = CD. Então:

a) y = 3x
b) y = 2x
c) x + y = 180°
d) x = y
e) 3x = 2y



1081 (UFMG) O recíproco do teorema "Num triângulo isósceles os ângulos da base são iguais" é:

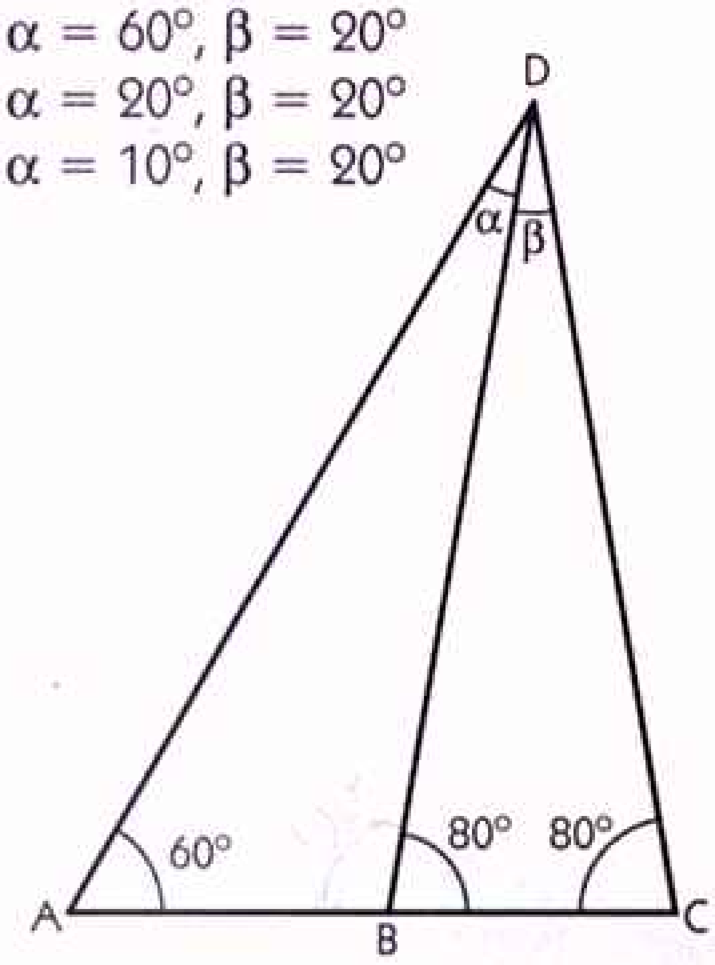
a) Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.
b) Se os ângulos da base de um triângulo são iguais, então o triângulo é isósceles.
c) Num triângulo isósceles, os ângulos da base não são iguais.
d) Se os ângulos da base de um triângulo não são iguais, o triângulo não é isósceles.
e) n.d.a.

1082 (Fuvest-SP) A sombra de um poste vertical, projetada pelo Sol sobre um chão plano, mede 12 m. Nesse mesmo instante, a sombra de um bastão vertical de 1 m de altura mede 0,6 m. A altura do poste é:

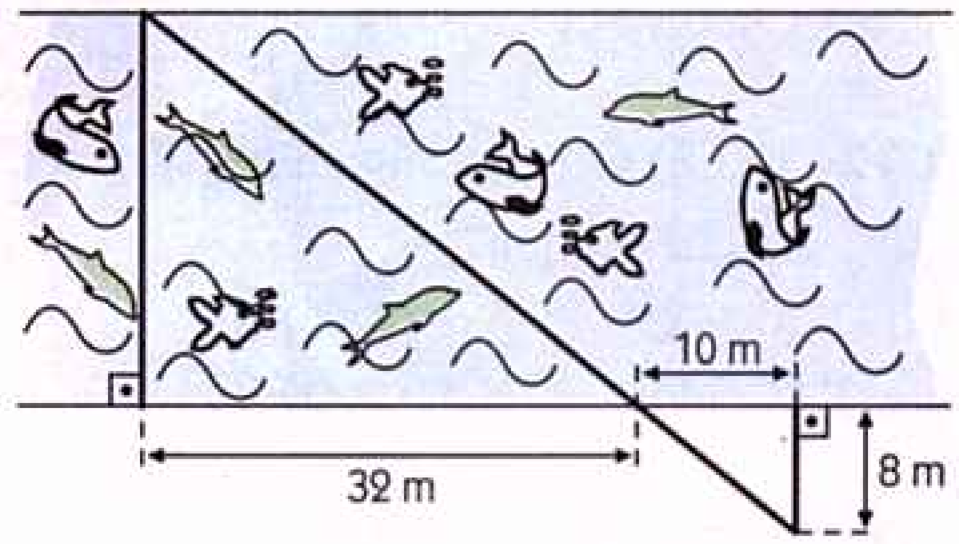
a) 6 m
b) 7,2 m
c) 12 m
d) 20 m
e) 72 m

1083 (UFMG) Os ângulos α e β da figura medem:

a) $\alpha = 20°$, $\beta = 30°$
b) $\alpha = 30°$, $\beta = 20°$
c) $\alpha = 60°$, $\beta = 20°$
d) $\alpha = 20°$, $\beta = 20°$
e) $\alpha = 10°$, $\beta = 20°$



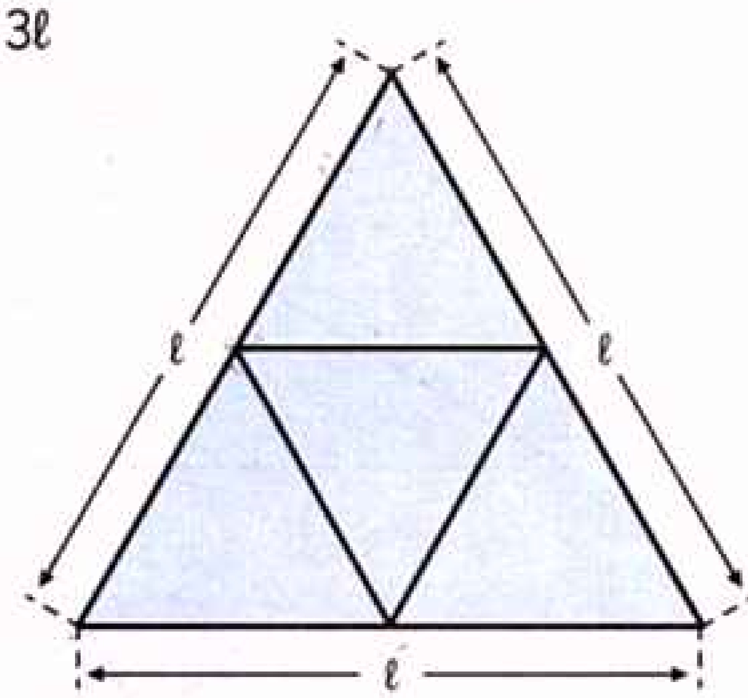
1084 (UFPE) A figura representa um rio cujas margens são retas paralelas.



Qual é a distância entre as margens?

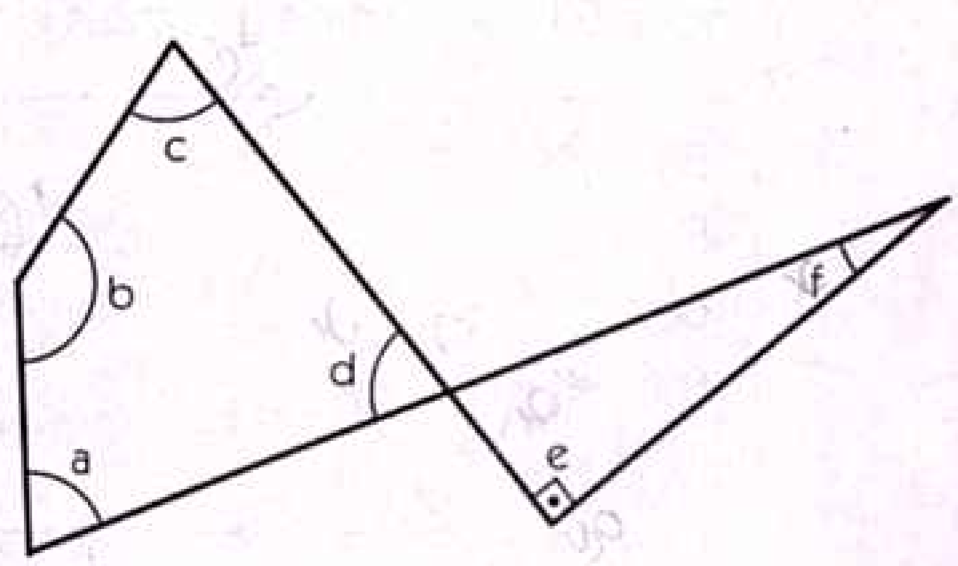
1085 (UFPE) Considere um triângulo eqüilátero de lado ℓ como na figura. Unindo-se os pontos médios dos seus lados obtemos 4 (quatro) novos triângulos. O perímetro de qualquer um desses quatro triângulos é igual a:

a) $\frac{5\ell}{2}$
b) ℓ
c) 3ℓ
d) $\frac{\ell}{2}$
e) $\frac{3\ell}{2}$



1086 (Fuvest-SP) Na figura, os ângulos a, b, c e d medem, respectivamente, $\frac{x}{2}$, $2x$, $\frac{3x}{2}$ e x. O ângulo *e* é reto. Qual a medida do ângulo *f*?

a) 16°
b) 18°
c) 20°
d) 22°
e) 24°



1087 (Vunesp) Considere as seguintes proposições:

- todo quadrado é um losango
- todo quadrado é um retângulo
- todo retângulo é um paralelogramo
- todo triângulo eqüilátero é isósceles

Pode-se afirmar que:

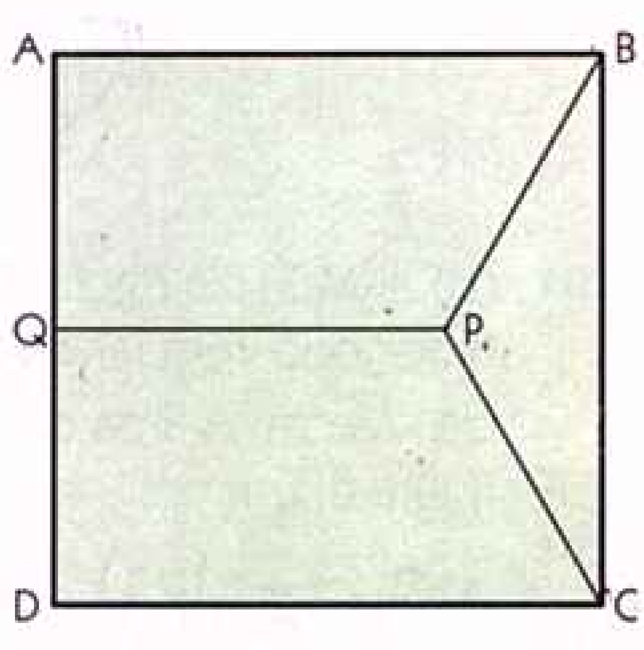
a) só uma é verdadeira
b) todas são verdadeiras
c) só uma é falsa
d) duas são verdadeiras e duas são falsas
e) todas são falsas

1088 (Cesgranrio-RJ) Em um trapézio retângulo, o menor ângulo mede 35°. O maior ângulo desse polígono mede:

a) 155°
b) 150°
c) 145°
d) 142°
e) 140°

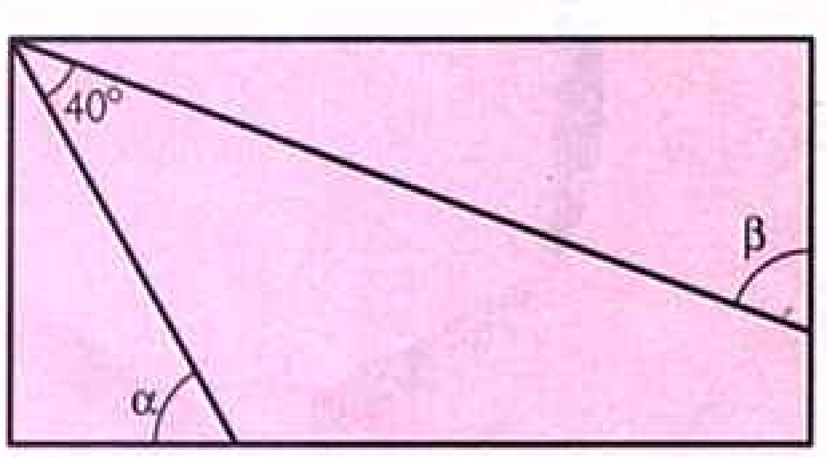
1089 (Unesp) Considere um quadrado ABCD, cuja medida dos lados é 1 dm. Seja *P* um ponto interior ao quadrado e eqüidistante dos vértices *B* e *C* e seja *Q* o ponto médio do lado DA.
Se a área do quadrilátero ABPQ é o dobro da área do triângulo BCP, a distância do ponto *P* ao lado BC é:

a) $\frac{2}{3}$ dm
b) $\frac{2}{5}$ dm
c) $\frac{3}{5}$ dm
d) $\frac{1}{2}$ dm
e) $\frac{4}{7}$ dm

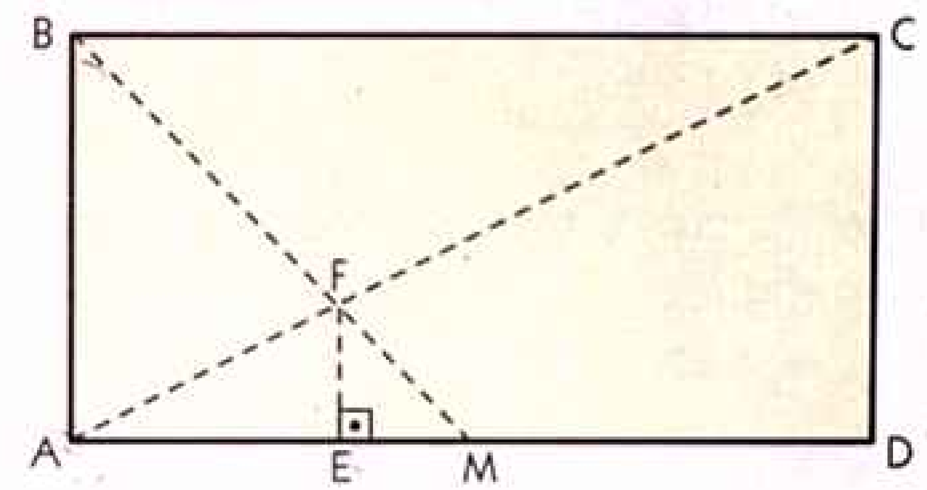


1090 (Fuvest-SP) No retângulo, o valor em graus de $\alpha + \beta$ é:

a) 50°
b) 90°
c) 120°
d) 130°
e) 220°

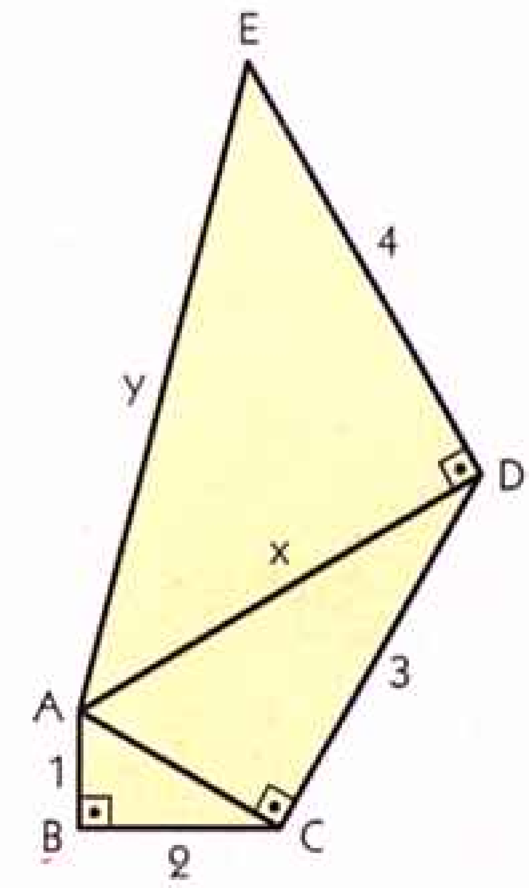


1091 (Fatec-SP) Na figura abaixo indicamos um retângulo ABCD e os pontos *M* e *F*, onde *M* é o ponto médio do lado AD e *F* é a intersecção dos segmentos AC e BM.
Determine a medida do segmento ED, sabendo que $\overline{AD} = 45$ cm, $\overline{AB} = 30$ cm e $\overline{EF} = 10$ cm.



1092 (FEI-SP) Na figura, o valor de $x^2 + y^2$ é:

a) 18
b) 24
c) 36
d) 44
e) 54



1093 (Unisa-SP) Uma escada de 5,50 m de comprimento está apoiada em uma parede, sendo que seu pé está distante 1,50 m dela. Um pintor quer que a extremidade superior da escada alcance 30 cm mais alto. Que distância ele precisa deslocar o pé da escada em direção à parede?

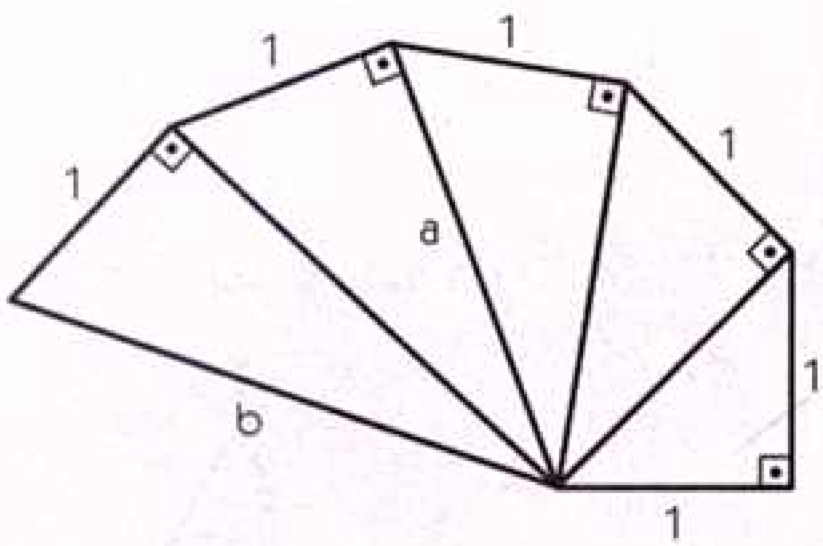
a) 30 cm
b) 10 cm
c) não é possível
d) 1,50 m
e) 1 m

1094 (Vunesp) A área de um triângulo retângulo é 12 dm^2. Se um dos catetos é $\frac{2}{3}$ do outro, calcule a medida da hipotenusa desse triângulo.

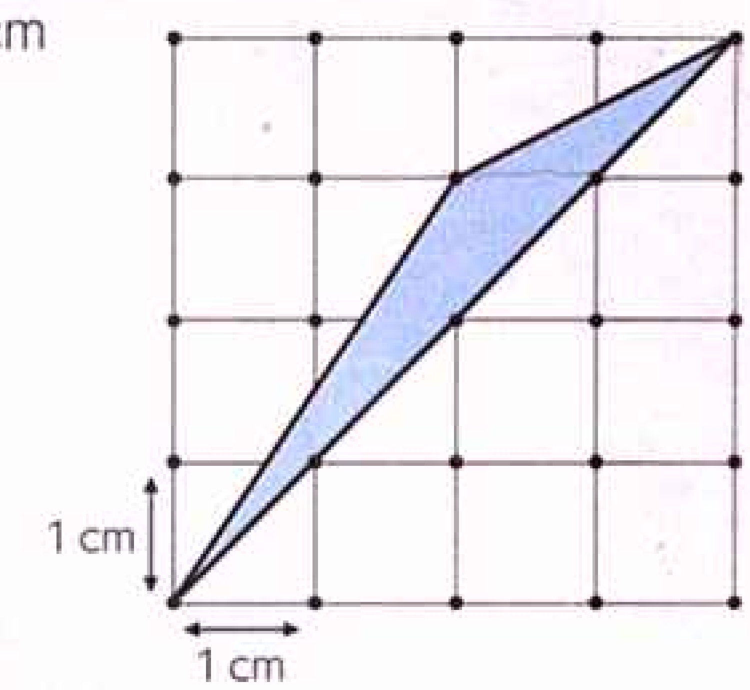
1095 (ITA-SP) Por um ponto A de uma circunferência traça-se o segmento AA' perpendicular a um diâmetro desta circunferência. Sabendo-se que o ponto A' determina no diâmetro segmentos de 4 cm e 9 cm podemos afirmar que a medida do segmento AA' é:

a) 4 cm
b) 12 cm
c) 13 cm
d) 6 cm
e) $\sqrt{13}$ cm

1096 Calcule a medida dos segmentos a e b na figura.



1097 (Fuvest-SP) Considere o triângulo representado na malha quadriculada. A área do triângulo, em cm^2, é:



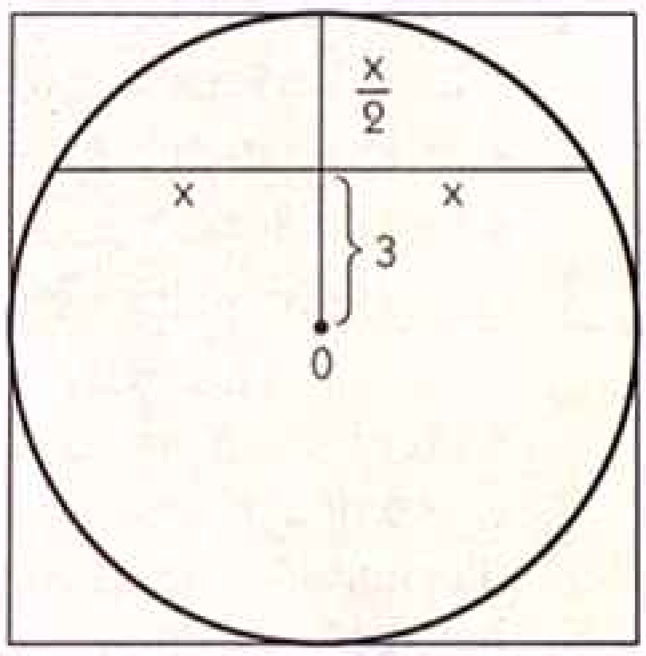
a) 2
b) 3
c) 4
d) 5
e) 6

1098 (Unicamp-SP) O retângulo de uma bandeira do Brasil, cuja parte externa ao losango é pintada de verde, mede 2 m de comprimento por 1,40 m de largura. Os vértices do losango, cuja parte externa ao círculo é pintada de amarelo, distam 17 cm dos lados do retângulo e o raio do círculo mede 35 cm. Para calcular a área do círculo use a fórmula $A = \pi r^2$ e, para facilitar os cálculos, tome π como $\frac{22}{7}$.

a) Qual é a área da região pintada de verde?
b) Qual é a porcentagem da área da região pintada de amarelo, em relação à área total da bandeira? Dê sua resposta com duas casas decimais depois da vírgula.

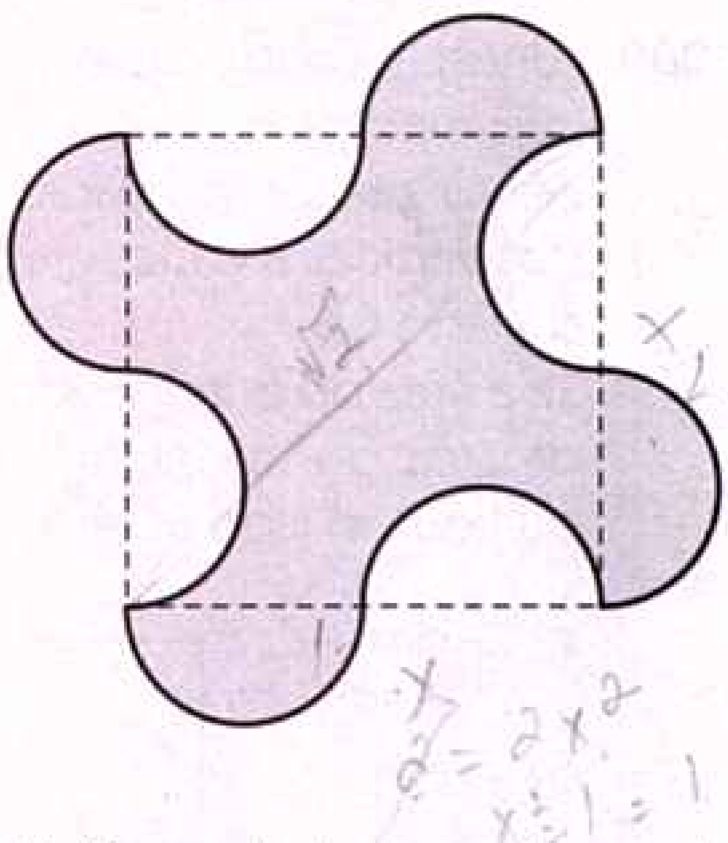
1099 (Mack-SP) Na figura, a área do quadrado de centro O é:

a) 10
b) 16
c) 25
d) 100
e) 2 500



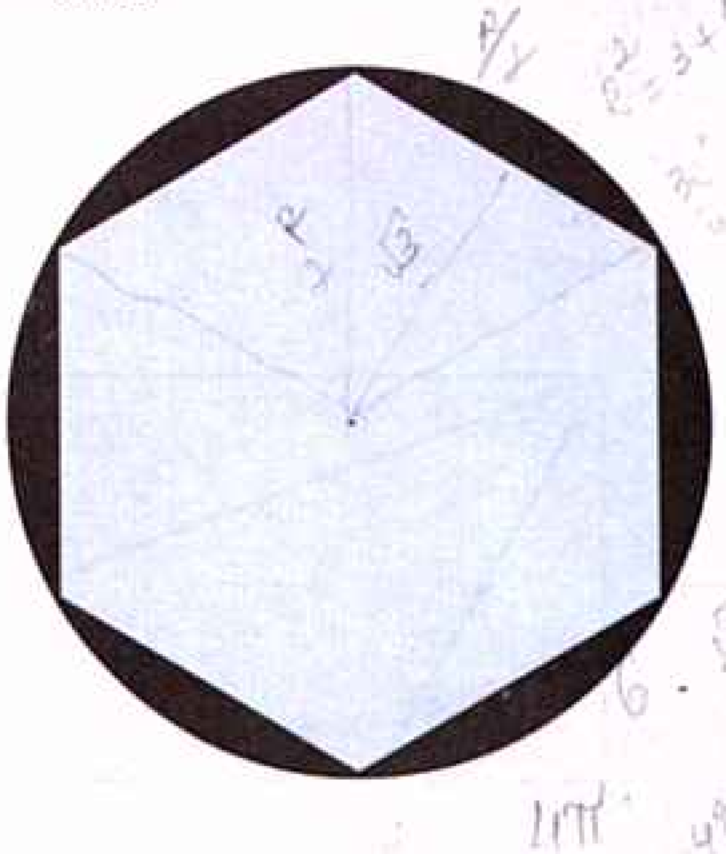
1100 (Mack-SP) A diagonal $\overleftrightarrow{AD}$ do quadrado ABCD mede $\sqrt{2}$ cm. Se o diâmetro de cada uma das semicircunferências na figura abaixo é igual à metade do lado do quadrado, a área da região assinalada é:

a) 1
b) $\frac{1}{\pi}$
c) $\frac{\pi}{8}$
d) 2
e) π



1101 (UFJF-MG) Na figura abaixo, o apótema do hexágono regular inscrito no círculo mede $\sqrt{3}$ cm. A área da região sombreada na figura é, em cm^2:

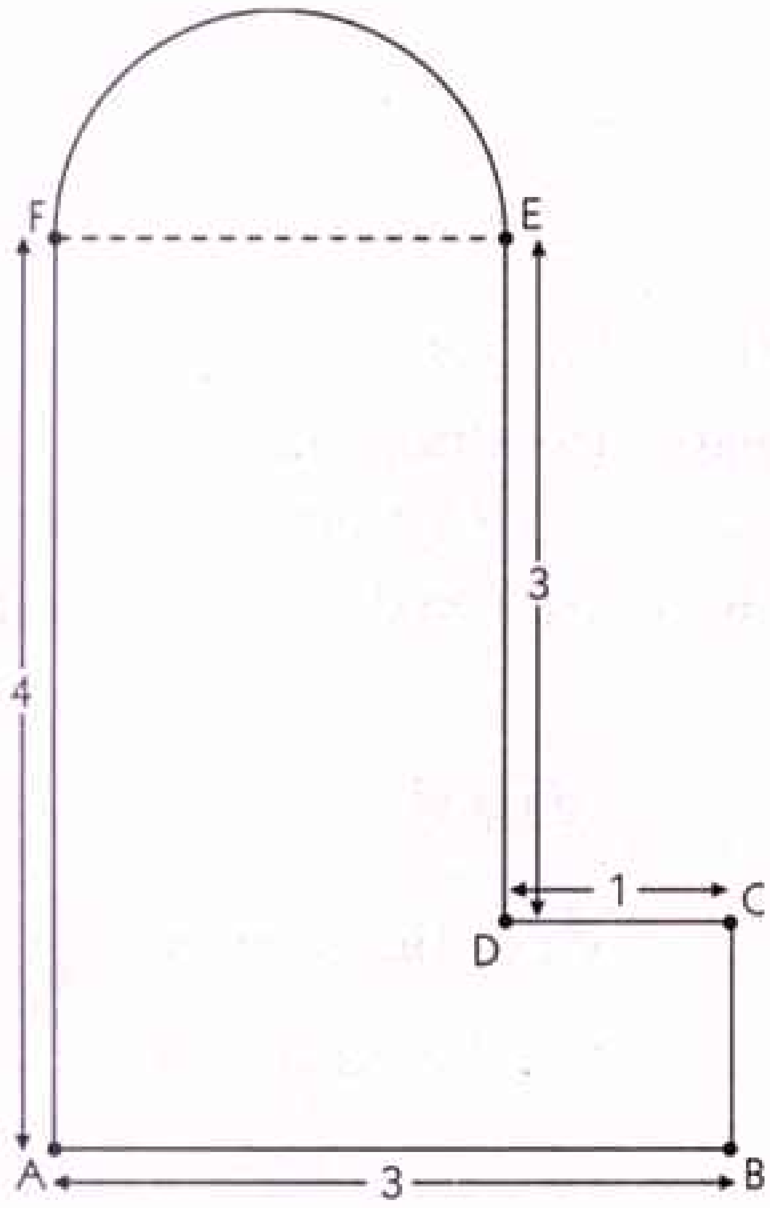
a) $2(2\pi - 3\sqrt{3})$
b) $6\sqrt{3}$
c) $\pi - 3\sqrt{3}$
d) $3(2\pi - 3\sqrt{3})$
e) $4\pi - \sqrt{3}$



1102 (FMTM-MG) Um hexágono regular circunscrito a uma circunferência de raio 6 cm possui área igual a

a) $54\sqrt{3}\ cm^2$
b) $72\sqrt{3}\ cm^2$
c) $216\sqrt{3}\ cm^2$
d) $12\sqrt{3}\ cm^2$
e) $48\sqrt{3}\ cm^2$

1103 (CES-MS) Na figura abaixo, os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ e $\overline{AF}$ têm as medidas indicadas em centímetros. O arco $\widehat{EF}$ é uma semicircunferência.



A área da figura é, em centímetros quadrados, igual a

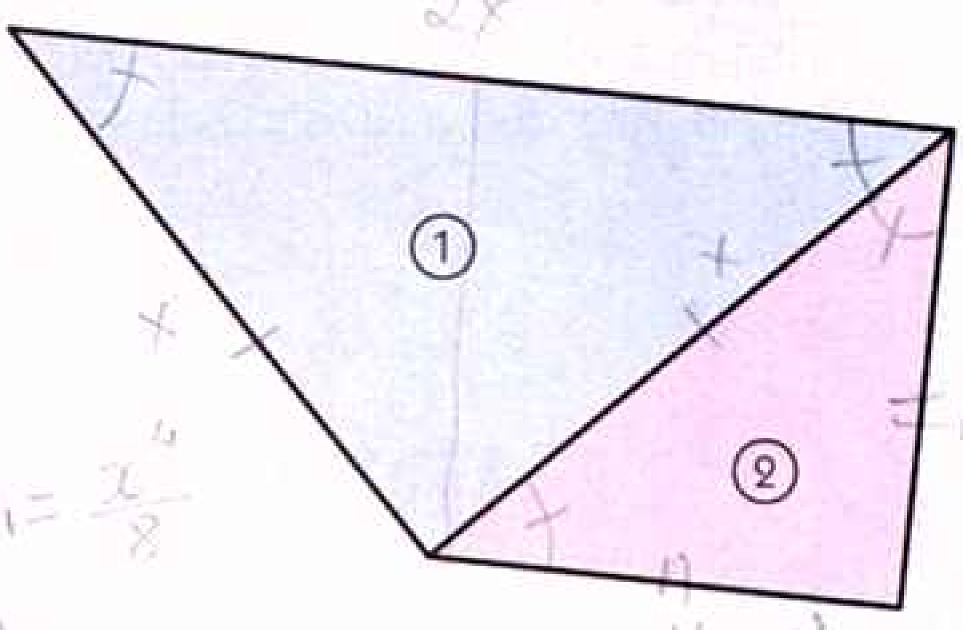
a) 9
b) $9 + \frac{\pi}{2}$
c) $9 + \pi$
d) $9 + 4\pi$
e) $\frac{4 + \pi}{2}$

1104 (Unicamp-SP) Uma folha retangular de cartolina mede 35 cm de largura por 75 cm de comprimento. Dos quatro cantos da folha são cortados quatro quadrados iguais, sendo que o lado de cada um desses quadrados mede *x* cm de comprimento.

a) Calcule a área do retângulo inicial.
b) Calcule *x* de modo que a área da figura obtida, após o corte dos quatro cantos, seja igual a $1\,725\ cm^2$.

1105 (Cesgranrio-RJ) Os triângulos 1 e 2 da figura são retângulos isósceles. Então, a razão da área de 1 para a de 2 é:

a) $\sqrt{3}$
b) $\sqrt{2}$
c) 2
d) $\frac{\sqrt{5}}{2}$
e) $\frac{3}{2}$



1106 (FEI-SP) O lado de um triângulo eqüilátero de 2 cm de altura mede:

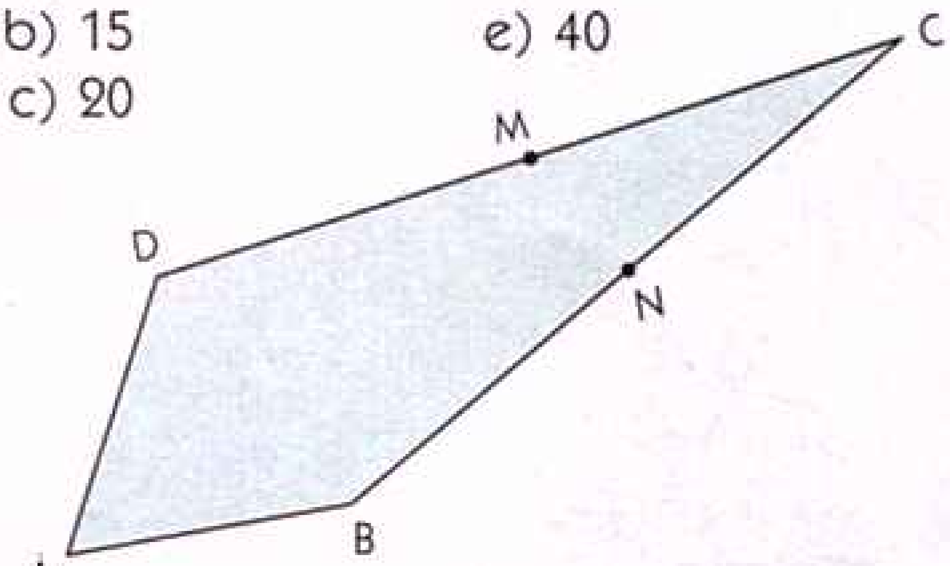
a) $\sqrt{3}$ cm
b) $\sqrt{2}$ cm
c) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ cm
d) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ cm
e) $\sqrt{5}$ cm

1107 (FGV-SP) Qual o perímetro do quadrado que tem a diagonal igual a $3\sqrt{6}$ m?

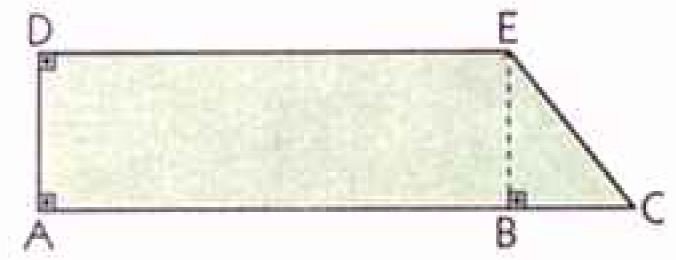
a) $12\sqrt{3}$ m
b) $12\sqrt{6}$ m
c) $6\sqrt{3}$ m
d) $8\sqrt{3}$ m
e) $12\sqrt{2}$ m
f) n.d.a.

1108 (Fuvest-SP) No quadrilátero ABCD abaixo, med($A\hat{B}C$) = 150°, AD = AB = 4 cm, BC = 10 cm, MN = 2 cm, sendo *M* e *N*, respectivamente, os pontos médios de CD e BC. A medida, em cm^2, da área do triângulo BCD é:

a) 10
b) 15
c) 20
d) 30
e) 40



1109 (Fuvest-SP) Dois irmãos herdaram um terreno com a seguinte forma e medidas:



AD = 20 m AB = 60 m BC = 16 m

Para dividir o terreno em duas partes de mesma área, eles usaram uma reta perpendicular a $\overline{AB}$. Para que a divisão seja feita corretamente, a distância dessa reta ao ponto A, em metros, deverá ser:

a) 31 b) 32 c) 33 d) 34 e) 35

1110 (Fuvest-SP) O perímetro de um setor circular de raio R e ângulo central medindo α radianos é igual ao perímetro de um quadrado de lado R. Então α é igual a:

a) $\frac{\pi}{2}$ b) 2 c) 1 d) $\frac{2\pi}{3}$ e) $\frac{\pi}{3}$

2. Prismas

Consideremos um quadrilátero qualquer ABCD contido num plano α e um segmento XY de uma reta concorrente com α. Prisma quadrangular é o conjunto dos pontos de todos os segmentos paralelos e congruentes a $\overline{XY}$, que têm uma extremidade nesse quadrilátero e que estão num mesmo semi-espaço determinado por α.

Elementos do prisma

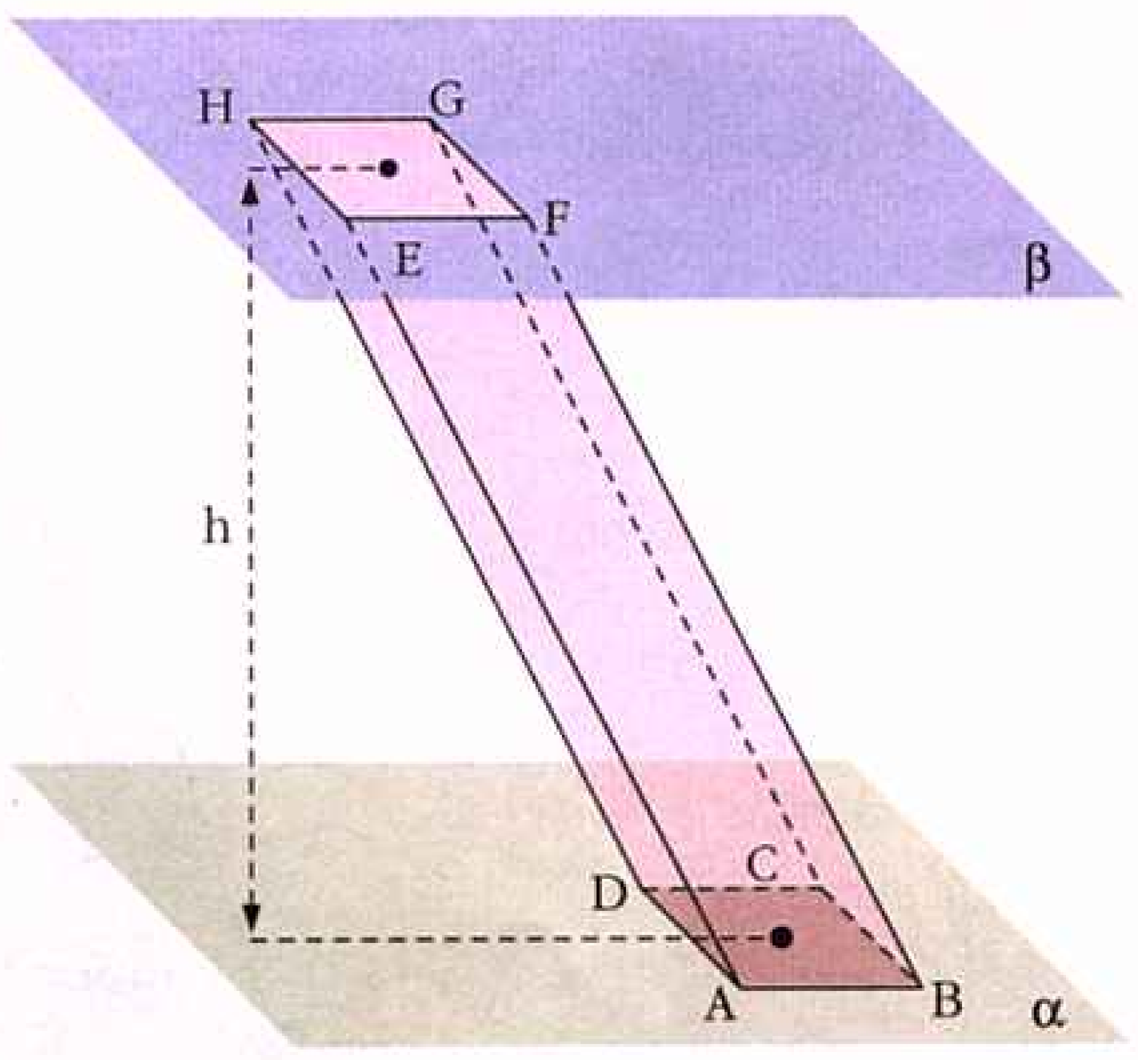
Bases:ABCD e EFGH (são polígonos congruentes e contidos em planos paralelos)

Faces laterais: ABFE, BCGF, CDHG e DAEH (são paralelogramos)

Arestas das bases: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$, $\overline{EF}$, $\overline{FG}$, $\overline{GH}$, $\overline{HE}$

Arestas laterais: $\overline{AE}$, $\overline{BF}$, $\overline{CG}$, $\overline{DH}$

Altura (h): distância entre os planos que contêm as bases



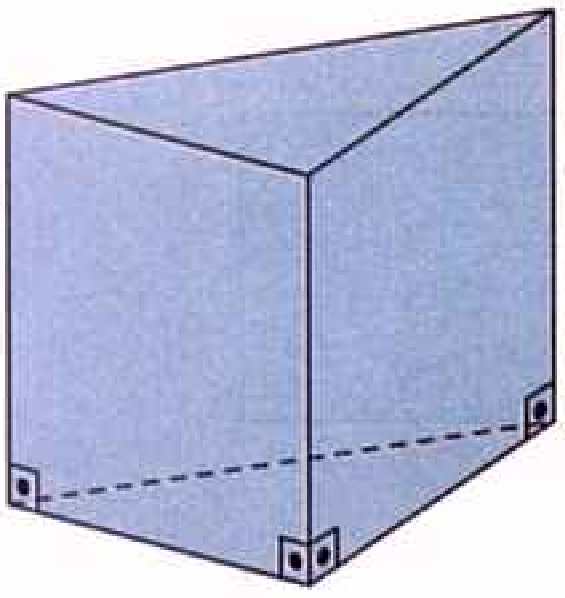
Se no lugar do quadrilátero considerarmos qualquer outro polígono (triângulo, pentágono etc.), o prisma receberá o nome relativo a esse polígono. Aqui estudaremos aqueles de bases convexas, que chamaremos de *prismas convexos*.

Prismas são exemplos de sólidos geométricos.

Classificação

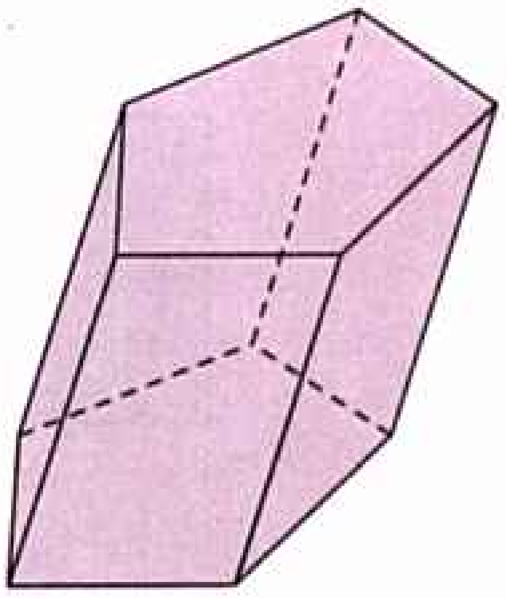
Conforme a inclinação das arestas laterais, os prismas podem ser *retos* ou *oblíquos*:

Reto



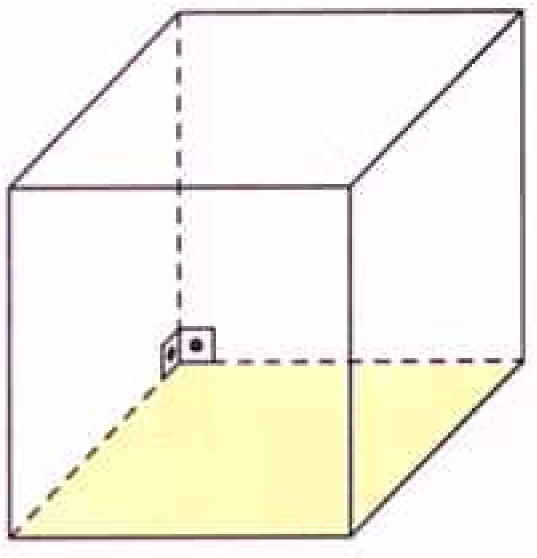
As arestas laterais são perpendiculares às bases (as faces laterais são retângulos).

Oblíquo

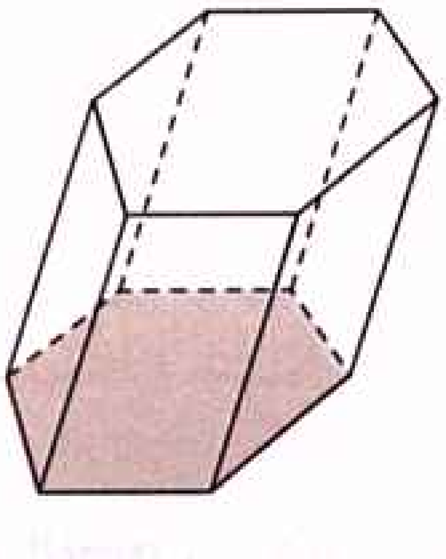


As arestas laterais não são perpendiculares às bases (as faces laterais são paralelogramos).

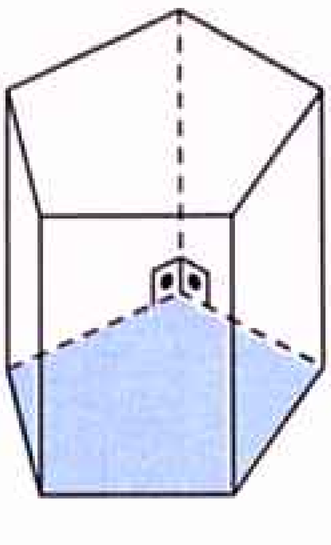
Os prismas também podem ser classificados pelo número de arestas de uma das bases:



Prisma quadrangular reto (base com 4 arestas).

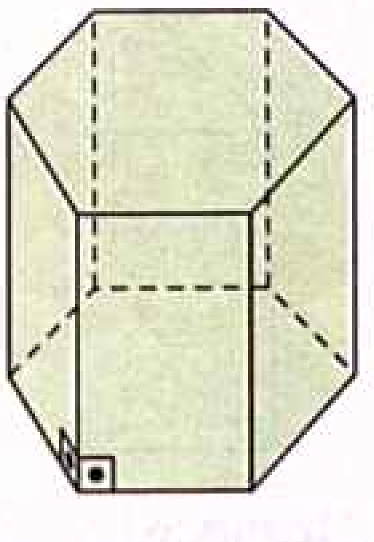


Prisma hexagonal oblíquo (base com 6 arestas).

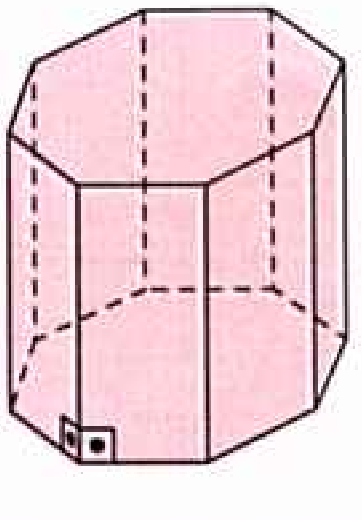


Prisma pentagonal reto (base com 5 arestas).

Quando um prisma é reto e suas bases são polígonos regulares, ele é chamado de *prisma regular*.



Prisma regular hexagonal.

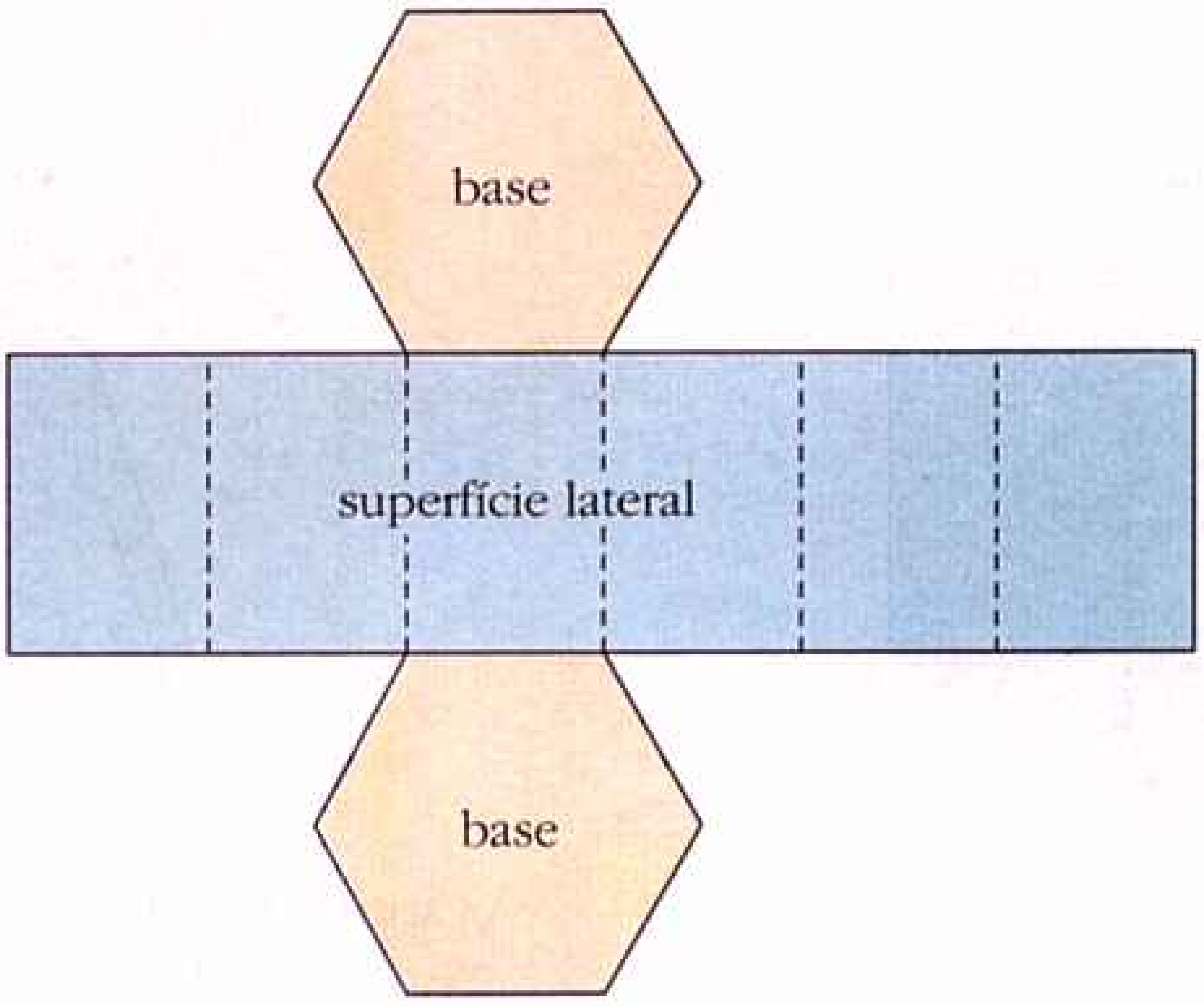


Prisma regular octogonal.

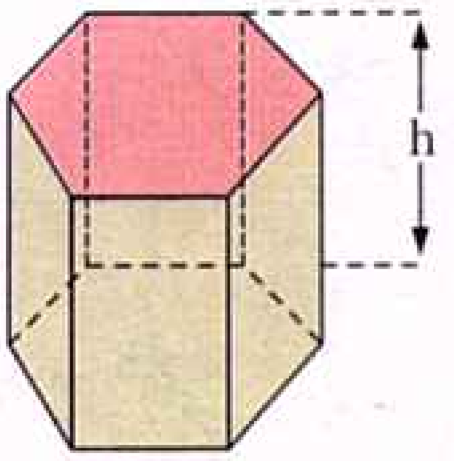
Área da superfície total do prisma reto

A área da superfície total do prisma reto é calculada pela soma das áreas das superfícies das bases com a área da superfície lateral, ou ainda:

$$\boxed{A_T = 2 \cdot A_b + A_L}, \text{ onde: } \begin{cases} A_b\text{: área da superfície da base} \\ A_L\text{: área da superfície lateral} \end{cases}$$



Volume do prisma reto



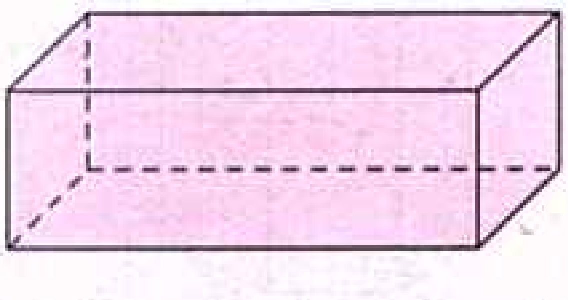
O volume do prisma é calculado pelo produto da área da base (A_b) pela altura (*h*), ou ainda:

$$\boxed{V = A_b \cdot h}$$

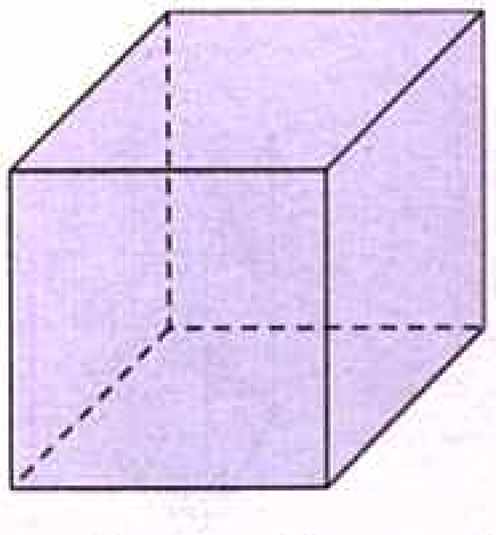
▶ No prisma reto a altura tem a mesma medida que a aresta lateral.

Paralelepípedo

Paralelepípedos são prismas que têm paralelogramo como base.
Observe estes exemplos de paralelepípedos:

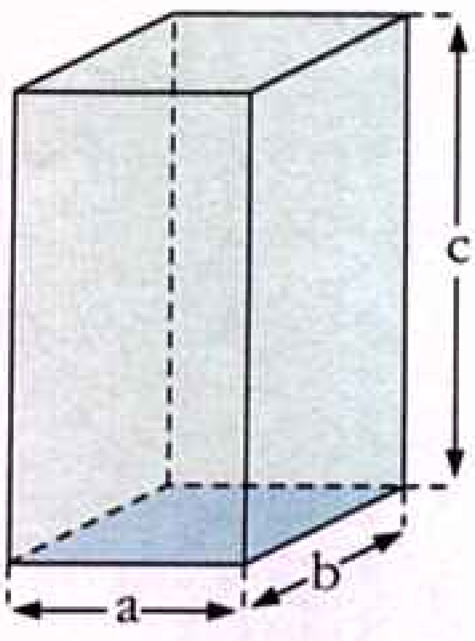


Paralelepípedo retângulo
(as seis faces são retângulos).



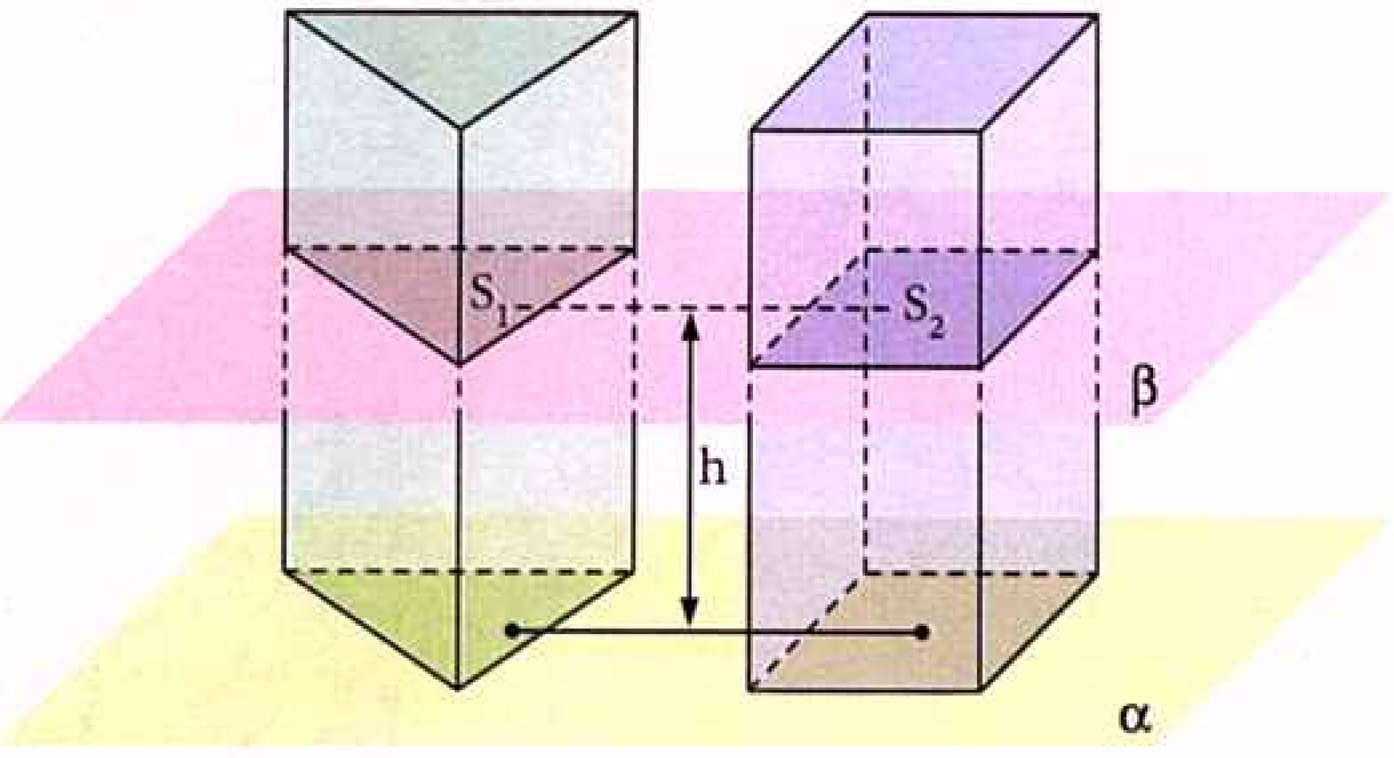
Hexaedro regular ou cubo
(as seis faces são quadrados).

Para compreender a fórmula do volume do prisma reto, observe a fórmula do volume de um paralelepípedo retângulo:



$$V = a \cdot b \cdot c \text{ ou}$$
$$A_b = a \cdot b = \text{área da base}$$
$$h = c = \text{altura}$$
$$V = A_b \cdot h$$

Considere dois sólidos com bases num plano α. Se qualquer plano β, paralelo a α e secante aos sólidos, determinar nos mesmos superfícies S_1 e S_2 com áreas iguais, podemos afirmar, pelo Princípio de Cavalieri, que os dois sólidos têm o mesmo volume.



Logo, o volume do prisma triangular é igual ao volume do paralelepípedo retângulo, ou seja:

$$V_{\text{prisma triangular}} = V_{\text{paralelepípedo retângulo}}$$

Portanto: $$\boxed{V_{\text{prisma}} = A_b \cdot h}$$

As superfícies S_1 e S_2 são chamadas de *seções transversais dos prismas*.

Exercícios

Resolvidos

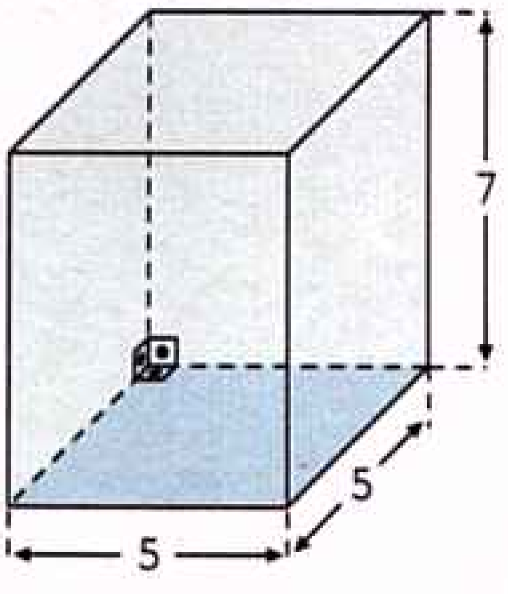
1 Um prisma quadrangular regular tem 7 cm de aresta lateral e 5 cm de aresta da base. Calcular:

a) área da base

b) área lateral

c) área total

d) volume



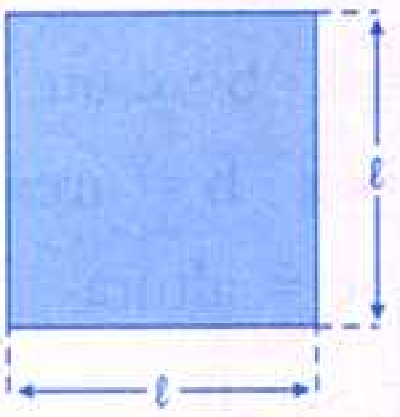
a) A base do prisma é um quadrado de lado 5 cm. Desse modo:

$A_b = a^2$

$A_b = 5^2 = 25$

$A_b = 25\ cm^2$

área do quadrado

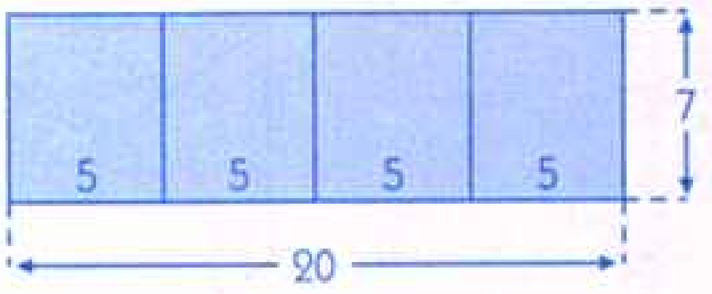


$A = \ell^2$

b) A planificação da superfície lateral é um retângulo de lados 7 cm e 20 cm. Assim, a área de superfície lateral é dada por:

$A_L = 7 \cdot 20 = 140$

$A_L = 140\ cm^2$

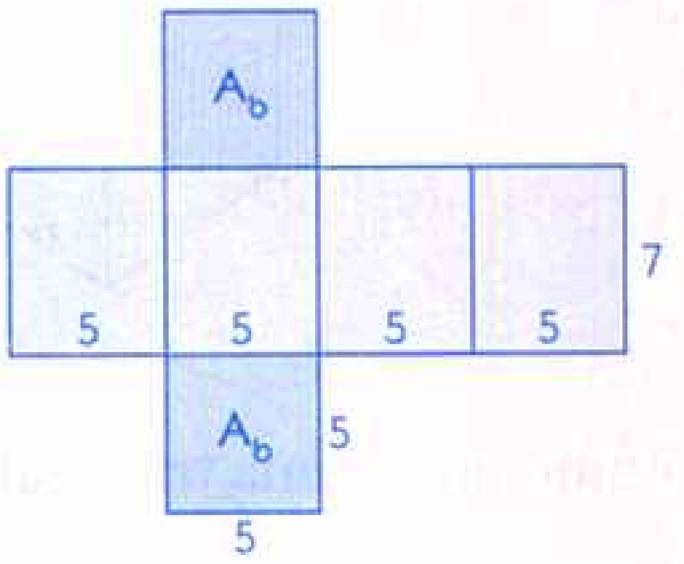


c) A área total é dada por:

$A_T = 2 \cdot A_b + A_L$

$A_T = 2 \cdot 25 + 140$

$A_T = 190\ cm^2$



d) O volume é dado por:

$V = A_b \cdot h$

$V = 25 \cdot 7$

$V = 175\ cm^3$

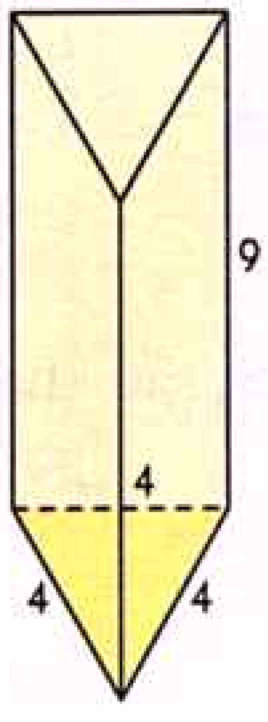
2 Um prisma triangular regular apresenta 9 cm de aresta lateral e 4 cm de aresta da base. Determinar:

a) área da base

b) área lateral

c) área total

d) volume

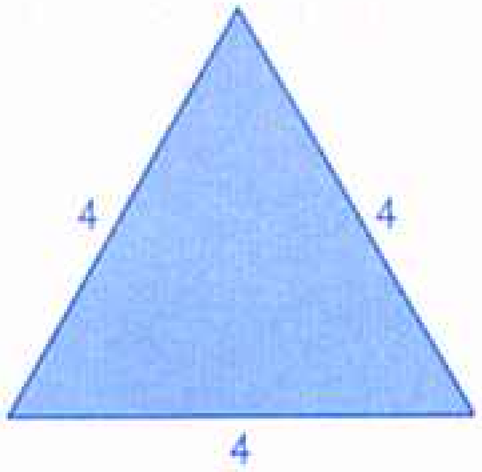


a) A superfície da base é um triângulo eqüilátero e a sua área, em função do lado na geometria plana, é dada por:

$$A_b = \frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

$$A_b = \frac{4^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

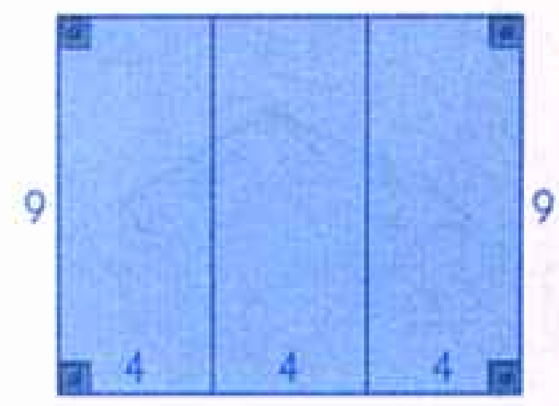
$$A_b = 4 \cdot \sqrt{3}\ cm^2$$



b) A superfície lateral planificada é um retângulo de lados 9 cm e 12 cm. Portanto:

$A_L = 9 \cdot 12$

$A_L = 108 \text{ cm}^2$

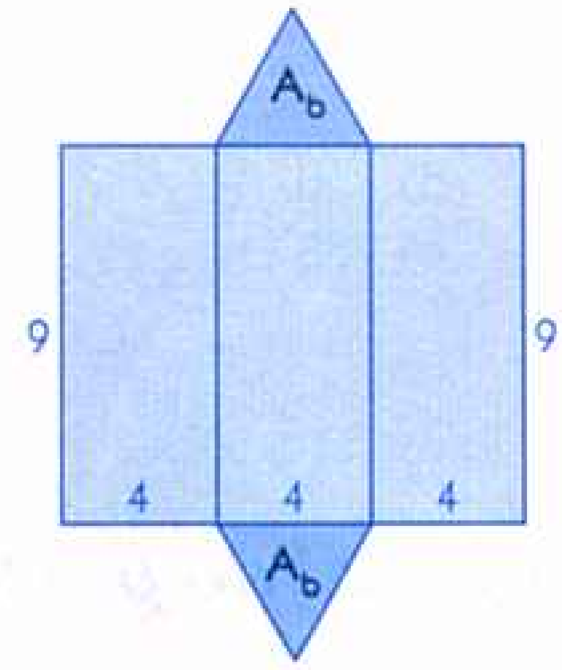


c) A área total é dada por:

$A_T = 2 \cdot A_b + A_L$

$A_T = 2 \cdot 4\sqrt{3} + 108$

$A_T = 8 \cdot \sqrt{3} + 108 \text{ cm}^2$



d) O volume é dado por:

$V = A_b \cdot h$

$V = 4 \cdot \sqrt{3} \cdot 9$

$V = 36 \cdot \sqrt{3} \text{ cm}^3$

A altura é igual à aresta lateral.

Propostos

1111 Calcule a área da base, a área lateral, a área total e o volume em cada caso:

a) prisma quadrangular regular de aresta lateral 8 cm e aresta da base 4 cm

b) prisma triangular regular de aresta lateral 2 cm e aresta da base 4 cm

c) prisma hexagonal regular de aresta lateral 6 cm e aresta da base 3 cm

1112 Um prisma quadrangular regular tem 9 cm de aresta lateral e 36 cm² de área da base. Determine:

a) aresta da base

b) área lateral

c) área total

d) volume

1113 Um prisma triangular regular tem $20\sqrt{3}$ cm³ de volume e 5 cm de aresta lateral. Calcule a aresta da base.

1114 Um prisma hexagonal regular tem $6\sqrt{3}$ cm³ de volume e 6 cm de aresta lateral. Calcule a aresta da base.

1115 (UFPA) Num prisma regular de base hexagonal, a área lateral mede 36 m² e a altura é 3 m. A aresta da base é:

a) 2 m

b) 4 m

c) 6 m

d) 8 m

e) 10 m

1116 (UFMT) Em um paralelepípedo retângulo com 4 cm de altura, a base tem comprimento cuja medida é igual ao dobro da medida da largura. Se esse sólido tem 64 cm² de área total, o seu volume, em centímetros cúbicos, é:

a) 24

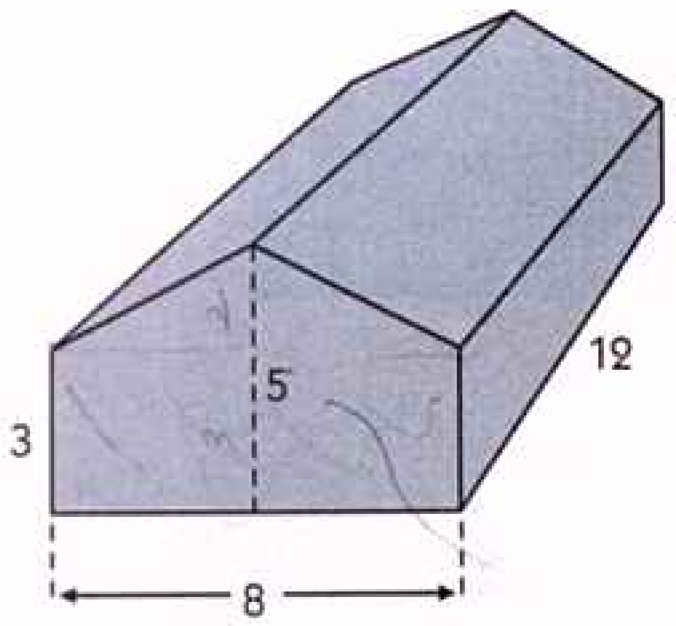
b) 30

c) 32

d) 40

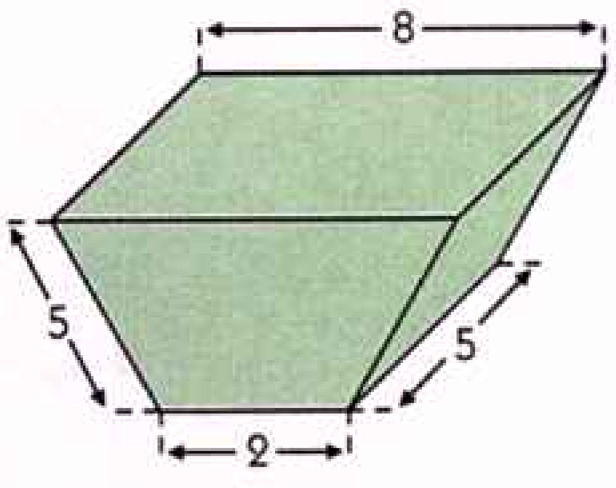
e) 48

1117 (Vunesp) O volume de ar contido em um galpão com a forma e dimensões dadas pela figura abaixo é:



a) 288
b) 384
c) 480
d) 360
e) 768

1118 (PUC-SP) Um tanque de uso industrial tem a forma de um prisma cuja base é um trapézio isósceles. Na figura a seguir, são dadas as dimensões do prisma em metros:
O volume desse tanque em metros cúbicos é:



a) 50
b) 60
c) 80
d) 100
e) 120

Diagonal do paralelepípedo retângulo

O triângulo ABC é retângulo. Logo, a medida d_1 da diagonal da base vale:

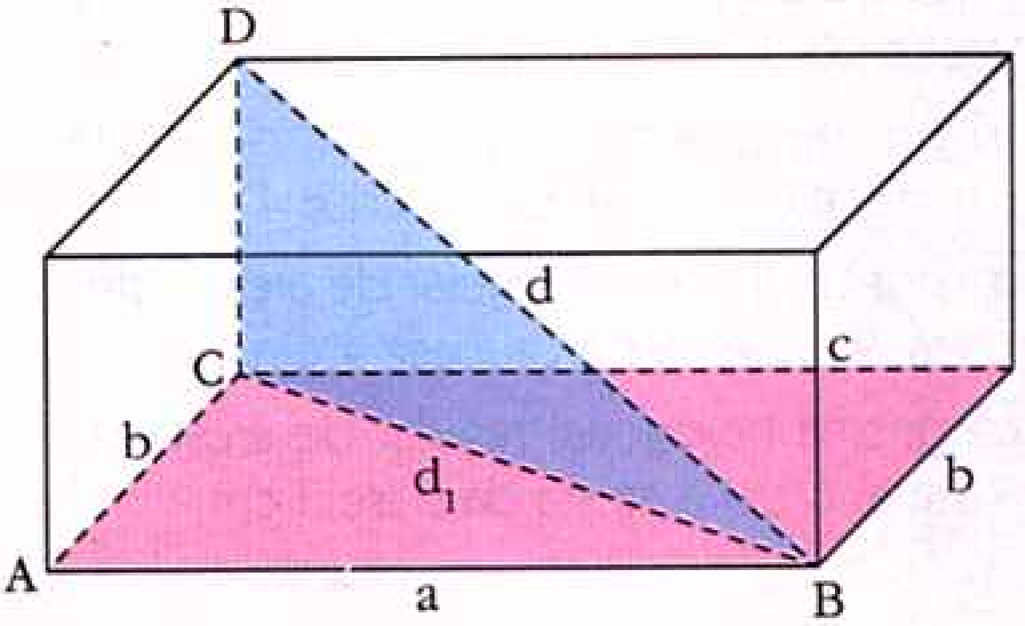
$$d_1 = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{(Pitágoras)}$$

O triângulo BCD é retângulo. Logo, a medida *d* da diagonal do paralelepípedo é dada por:

$$d^2 = {d_1}^2 + c^2 \text{ (Pitágoras)}$$

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

$$\boxed{d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$



Exemplo:

A diagonal de um paralelepípedo retângulo que apresenta aresta lateral 3 cm e arestas da base 2 cm e 5 cm é obtida por meio da fórmula:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$d = \sqrt{2^2 + 5^2 + 3^2}$$

$$d = \sqrt{38} \text{ cm}$$

Exercícios

Resolvido

(ITA-SP) As dimensões *x*, *y* e *z* de um paralelepípedo retângulo estão em progressão aritmética. Se a soma dessas medidas é igual a 33 cm e que a área total do paralelepípedo é igual a 694 cm², então o volume desse paralelepípedo, em centímetros cúbicos, é igual a:

a) 1 200 b) 936 c) 1 155 d) 728 e) 834

Fazendo $x = y - r$ e $z = y + r$:

$x + y + z = 33 \Rightarrow (y - r) + y + (y + r) = 33$

$\therefore y = 11$ cm

$A_T = 694 \text{ cm}^2 \Rightarrow 2 \cdot [(11 - r) \cdot 11 + (11 - r) \cdot (11 + r) + 11(11 + r)] = 694$

$121 - \cancel{11r} + 121 - r^2 + 121 + \cancel{11r} = 347$

$363 - r^2 = 347$

$r = \pm 4$

$(x, y, z) \Rightarrow (7, 11, 15)$ ou $(15, 11, 7)$

$V = 7 \cdot 11 \cdot 15 \Rightarrow V = 1\,155$

Propostos

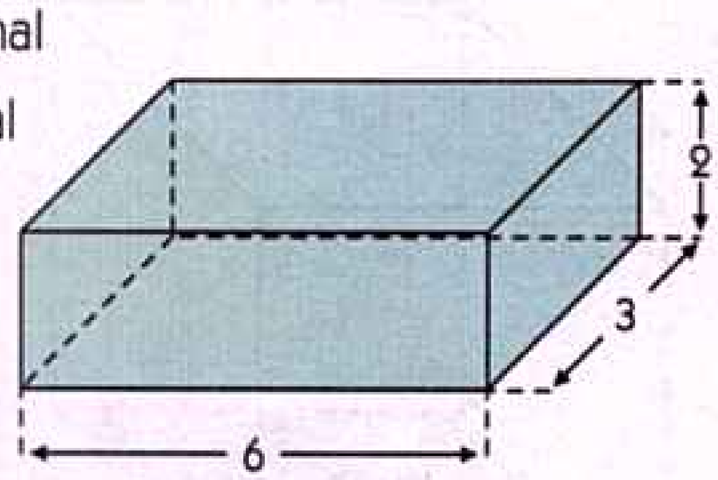
1119 Determine a diagonal de um paralelepípedo retângulo que apresenta aresta lateral 4 cm e arestas da base 2 cm e 6 cm.

1120 Dado um paralelepípedo retângulo de dimensões 2 m, 3 m e 6 m, calcule:

a) a diagonal

b) área total

c) volume

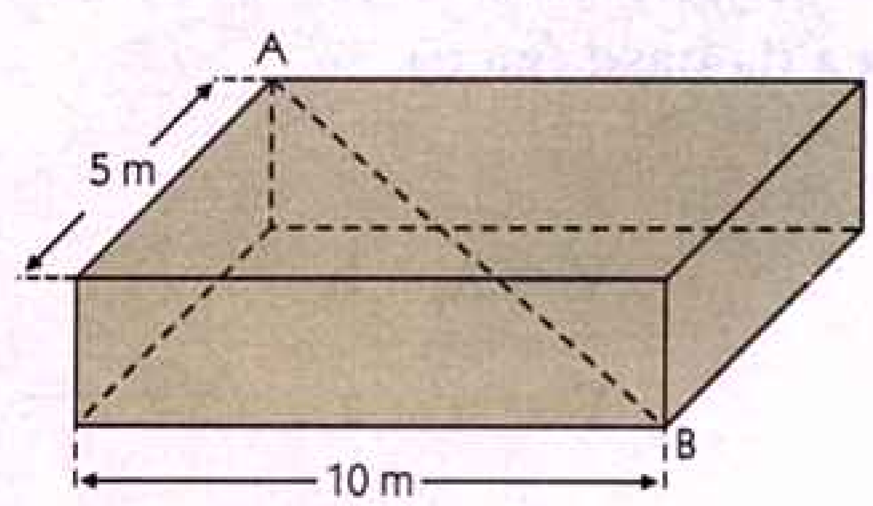


1121 Considere um paralelepípedo retângulo com 4 cm de largura, 5 cm de comprimento e 60 cm³ de volume. Determine sua altura e a diagonal.

1122 Determine a diagonal de um paralelepípedo retângulo cujo volume é 96 cm³ e a base é quadrada, de aresta 4 cm.

1123 Qual o volume de um paralelepípedo retângulo cujas arestas da base medem 3 cm e 4 cm e têm 13 cm de diagonal?

1124 Uma piscina de base retangular e paredes verticais precisa ficar completamente cheia de água. Determine quantos litros serão necessários para enchê-la, sabendo que a largura mede 5 m, o comprimento 10 m e a diagonal $AB = 3\sqrt{14}$ m.



1125 (UFV-MG) Se no paralelepípedo retângulo $a = 1$, $b = 2$ e $c = 3$, o comprimento do segmento AC é:

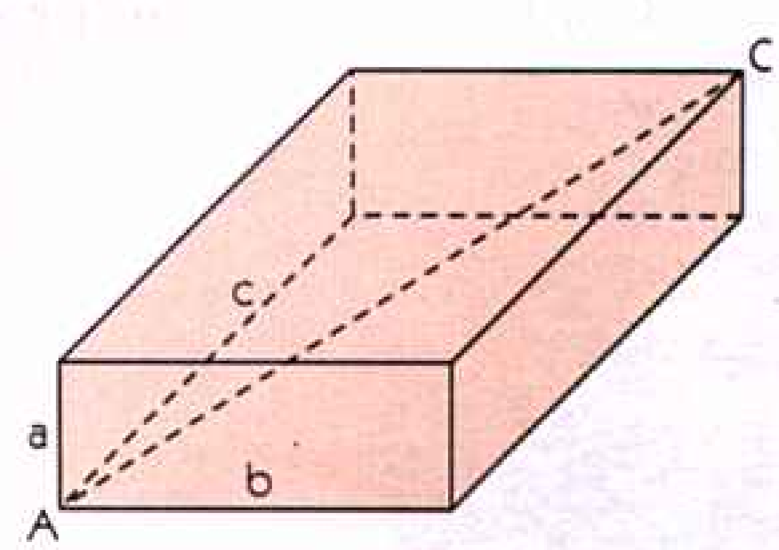
a) 13

b) 11

c) 15

d) $\sqrt{14}$

e) 10



1126 (Fatec-SP) Qual a área total de um paralelepípedo retângulo cujas arestas medem $\frac{1}{2}$ cm, $\frac{a}{2}$ cm e $\frac{a^2}{2}$ cm e o volume 64 cm^3?

1127 (FAAP-SP) Noticiou o Suplemento Agrícola do jornal *O Estado de S. Paulo*, em 6/9/95, que a Secretaria de Agricultura e Abastecimento determinou que os produtores de tomates enviem a mercadoria ao Ceagesp usando caixas padronizadas do tipo *K*, cujas dimensões internas são 495 mm de comprimento, 355 mm de altura e 220 mm de largura. Cada medida tem uma tolerância, para mais ou para menos, de 3 mm. A diferença entre o volume máximo e o mínimo de cada caixa (em milímetros cúbicos) é:

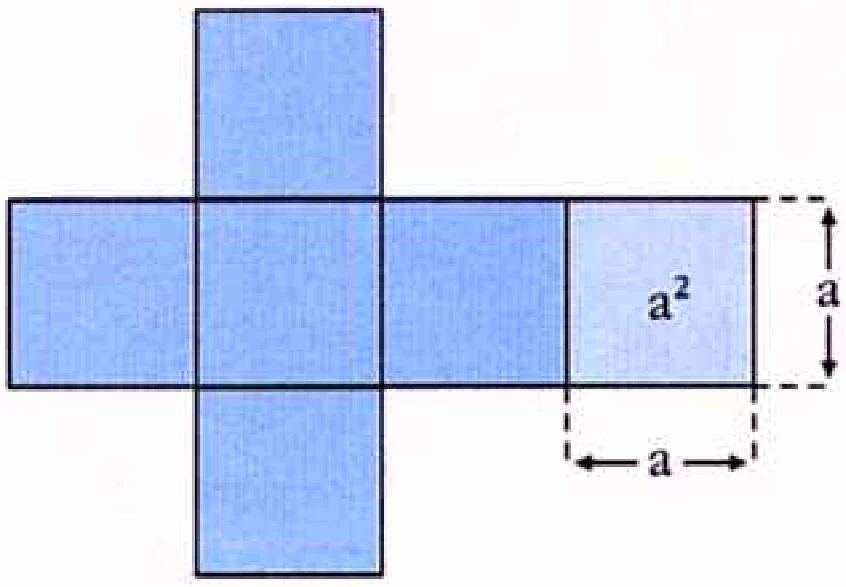
a) 1 097 832
b) 1 078 572
c) 2 176 404
d) 2 160 000
e) 2 700 000

Cubo

O cubo é um prisma regular limitado por 6 quadrados congruentes.
A área total de um cubo de aresta *a* é dada pela área dos 6 quadrados de aresta *a*:

$$A_{Total} = 6 \cdot A_{face}$$

$$\boxed{A_T = 6 \cdot a^2}$$

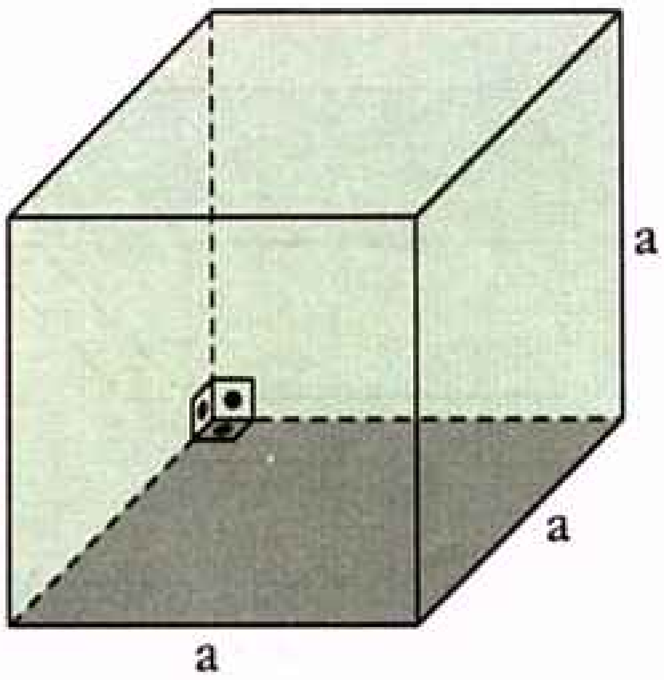


O volume de um cubo de aresta *a* é dado pelo produto da altura (aresta) pela área da base (face).

$$V = A_b \cdot h$$

$$V = a^2 \cdot a$$

$$\boxed{V = a^3}$$



Como o cubo é um prisma retangular, a diagonal de um cubo de aresta *a* é:

$$d = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2}$$

$$d = \sqrt{3a^2}$$

$$\boxed{d = a \cdot \sqrt{3}}$$

Exemplo:

Se a aresta de um cubo mede 3 cm, então:

a) a área total é dada por:

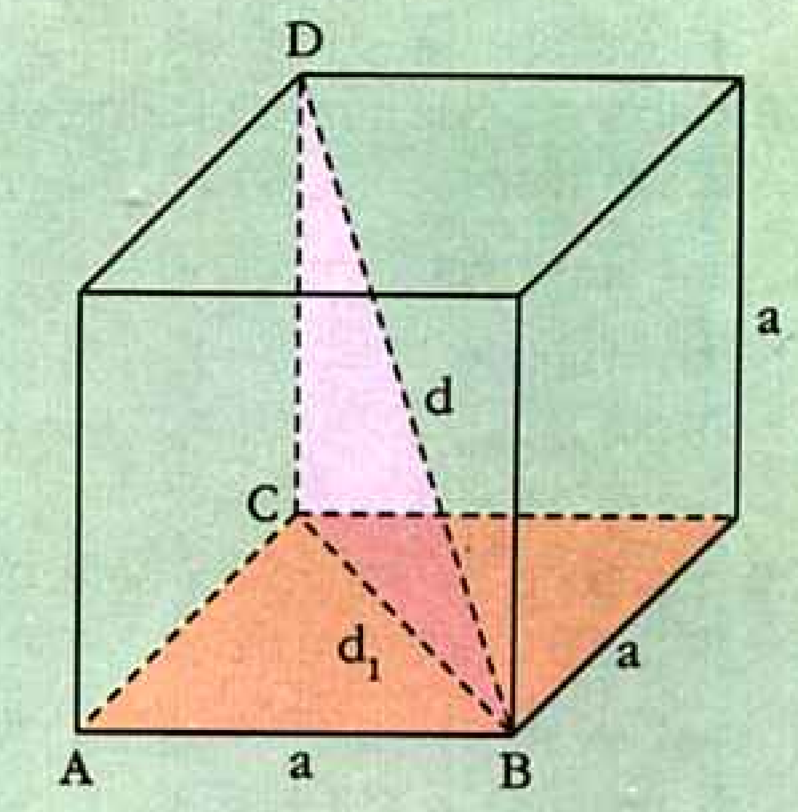
$A_T = 6 \cdot a^2 \Rightarrow A_T = 6 \cdot 3^2 \Rightarrow A_T = 54\ cm^2$

b) o volume é dado por:

$V = a^3 \Rightarrow V = 3^3 \Rightarrow V = 27\ cm^3$

c) a diagonal mede:

$d = a\sqrt{3} \Rightarrow d = 3\sqrt{3}\ cm$



Exercícios

Resolvidos

1 Conhecendo o perímetro da base de um cubo $P_{base} = 16$ cm, determinar:

a) aresta   b) área total   c) volume

a) A base de um cubo de aresta ℓ é um quadrado de lado ℓ. Portanto, seu perímetro é:

$P = 4 \cdot \ell \Rightarrow 16 = 4 \cdot \ell \Rightarrow \ell = 4$ cm

b) A área total é dada por: $A_T = 6 \cdot \ell^2 \Rightarrow A_T = 6 \cdot 4^2 \Rightarrow A_T = 96\ cm^2$

c) O volume é dado por: $V = \ell^3 \Rightarrow V = 4^3 \Rightarrow V = 64\ cm^3$

2 Sabendo que a diagonal de um cubo mede 12 m, determinar:

a) aresta   b) área total   c) volume

a) Cálculo da aresta:

$$d = a\sqrt{3} \Rightarrow 12 = a\sqrt{3} \Rightarrow a = \frac{12}{\sqrt{3}} \cdot \frac{(\sqrt{3})}{(\sqrt{3})} = \frac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3} \Rightarrow a = 4\sqrt{3}\ m$$

b) Área total:

$$A_T = 6 \cdot a^2 \Rightarrow A_T = 6 \cdot (4\sqrt{3})^2 = 288 \Rightarrow A_T = 288\ m^2$$

c) O volume é dado por:

$$V = a^3 \Rightarrow V = (4\sqrt{3})^3 = 192\sqrt{3} \Rightarrow V = 192\sqrt{3}\ m^3$$

3 (Fuvest-SP) Dois blocos de alumínio, em forma de cubo, com arestas medindo 10 cm e 6 cm, são levados juntos à fusão e em seguida o alumínio líquido é moldado como um paralelepípedo reto-retângulo de arestas 8 cm, 8 cm e x cm. O valor de *x* é:

a) 16   b) 17   c) 18   x d) 19   e) 20

O volume do paralelepípedo reto-retângulo obtido é igual à soma dos volumes dos blocos cúbicos iniciais. Portanto:

$$10^3 + 6^3 = 8 \cdot 8 \cdot x \Leftrightarrow x = \frac{1\,216}{64} = 19\ cm$$

Propostos

1128 Sabendo que um cubo tem 2 cm de aresta, determine:

a) área total

b) volume

c) diagonal

1129 Sendo o perímetro da base de um cubo $P_b = 20$ m, determine:

a) aresta

b) área total

c) volume

1130 Se a diagonal de um cubo mede 6 mm, calcule:

a) aresta

b) área total

c) volume

1131 O volume de um cubo é 27 dm^3. Determine:

a) aresta

b) área total

c) diagonal

1132 (PUC-SP) Um cubo tem área total igual a 72 m^2. Sua diagonal vale:

a) $2\sqrt{6}$ m

b) 6 m

c) $\sqrt{6}$ m

d) $\sqrt{12}$ m

e) $2\sqrt{24}$ m

1133 (UFES) Uma formiga pára na superfície de um cubo de aresta *a*. O menor caminho que ela deve seguir para ir de um vértice a um vértice oposto tem comprimento:

a) $a\sqrt{2}$

b) $a\sqrt{3}$

c) 3a

d) $(1 + \sqrt{2})a$

e) $a\sqrt{5}$

1134 (Fuvest-SP) Uma caixa-d'água tem forma cúbica com 1 m de aresta. Quanto baixa o nível da água ao retirarmos 1 ℓ de água da caixa?

1135 (Cesgranrio-RJ) De um bloco cúbico de isopor de aresta 3a recorta-se o sólido, em forma de *H*, mostrado na figura. O volume do sólido é:

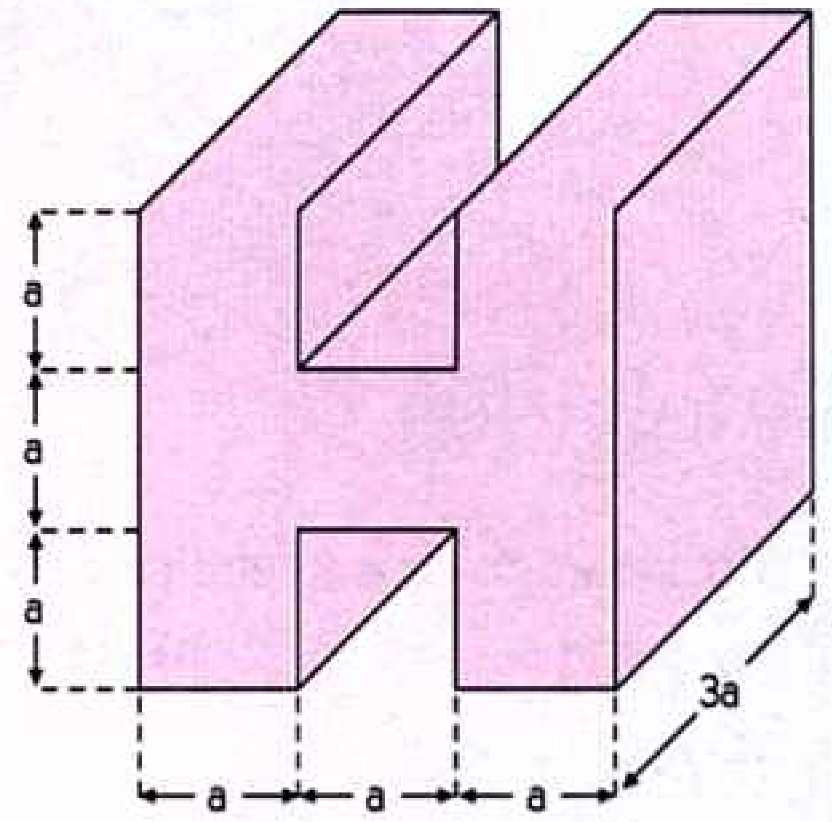
a) $27a^3$

b) $21a^3$

c) $18a^3$

d) $14a^3$

e) $9a^3$



1136 (Vunesp-SP) Quantos cubos *A* precisa-se empilhar para formar o paralelepípedo *B*?

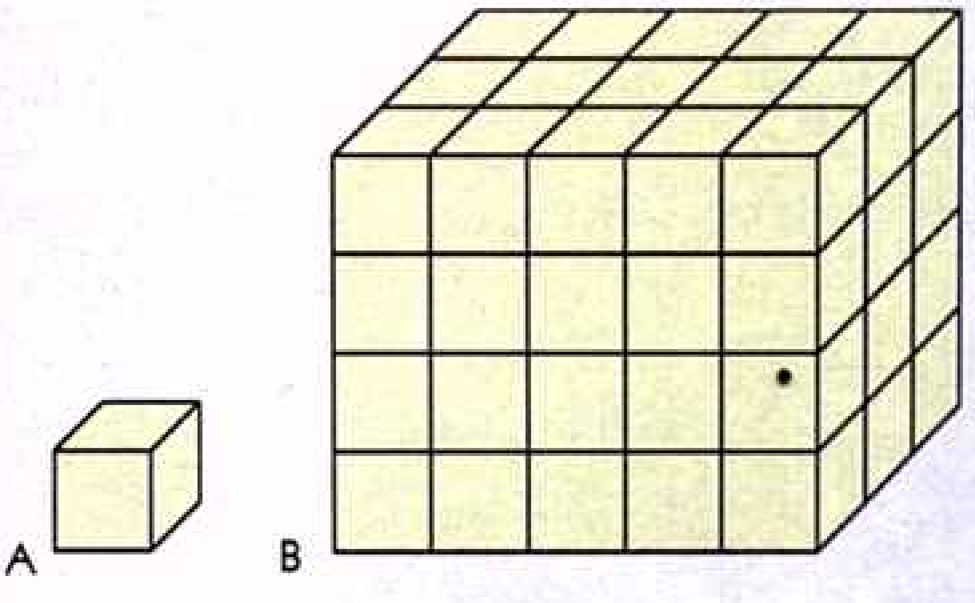
a) 60

b) 47

c) 94

d) 39

e) 48



1137 (FGV-SP) Um cubo tem 96 m^2 de área total. Em quanto deve ser aumentada a sua aresta para que seu volume se torne igual a 216 m^3?

a) 2 m

b) 3 m

c) 1 m

d) 0,5 m

e) 9 m