CADERNO DE ATIVIDADES
TERCEIRÃO FTD 3

Matemática
Módulo 3

Matrizes

1 (Unifor-CE) Indica-se por A^t a transposta de uma matriz A. Uma matriz quadrada A se diz *anti-simétrica* se, e somente se, $A^t = -A$. Nessas condições, qual das matrizes seguintes é anti-simétrica?

a) $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

x c) $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Examinando cada alternativa:

a) $A^t = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = A \therefore A$ não é anti-simétrica.

b) $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A \therefore A$ não é anti-simétrica.

c) $A^t = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = -A \therefore A$ é anti-simétrica.

d) $A^t = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = A \therefore A$ não é anti-simétrica.

e) $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \neq -A \therefore A$ não é anti-simétrica.

2 (ESPM-SP) Considere as seguintes matrizes:

$A = (a_{ij})_{5 \times 3} \mid a_{ij} = 2i - j$

$B = (b_{ij})_{3 \times 7} \mid b_{ij} = i + j$

$C = (c_{ij})_{5 \times 7} \mid C = A \cdot B$

O elemento C_{23} da matriz C vale:

a) 20 b) 22 c) 24 d) 26 x e) 28

Como $C = A \cdot B$, temos:

$C_{23} = a_{21} \cdot b_{13} + a_{22} \cdot b_{23} + a_{23} \cdot b_{33}$

$C_{23} = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 6$

$C_{23} = 28$

3 (PUC-RS) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & -6 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$, a 2ª linha da matriz 2AB é:

a) $-1 \quad 3 \quad 2$

b) $0 \quad 4 \quad 2$

c) $0 \quad 2 \quad 1$

d) $0 \quad -3 \quad -3$

x e) $0 \quad -6 \quad -6$

Seja $C = A \cdot B$

Os elementos da 2ª linha da matriz C serão:

$C_{21} = (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) = 0$

$C_{22} = (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) = -3$

$C_{23} = (-1) \cdot 5 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = -3$

Portanto, a 2ª linha da matriz 2AB será:

$$\underbrace{2 \cdot 0}_{0} \quad \underbrace{2 \cdot (-3)}_{-6} \quad \underbrace{2 \cdot (-3)}_{-6} \rightarrow 0 \quad -6 \quad -6$$

4 (UFSCar-SP) Seja a matriz $M = (m_{ij})_{2 \times 3}$, tal que $m_{ij} = j^2 - i^2$.

a) Escreva M na forma matricial.

b) Sendo M^t a matriz transposta de M, calcule o produto $M \cdot M^t$.

a) $M = (m_{ij})_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

b) $M \cdot M^t = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 + 3 \cdot 3 + 8 \cdot 8 & 0 \cdot (-3) + 3 \cdot 0 + 8 \cdot 5 \\ (-3) \cdot 0 + 0 \cdot 3 + 5 \cdot 8 & (-3) \cdot (-3) + 0 \cdot 0 + 5 \cdot 5 \end{pmatrix}$

$M \cdot M^t = \begin{pmatrix} 73 & 40 \\ 40 & 34 \end{pmatrix}$

5 (Unifesp-SP) Uma indústria farmacêutica produz, diariamente, p unidades do medicamento X e q unidades do medicamento Y, ao custo unitário de r e s reais, respectivamente. Considere as matrizes M, 1×2, e N, 2×1:

$$M = \begin{bmatrix} 2p & q \end{bmatrix} \text{ e } N = \begin{bmatrix} r \\ 2s \end{bmatrix}$$

A matriz produto $M \cdot N$ representa o custo da produção de:

a) 1 dia
x b) 2 dias
c) 3 dias
d) 4 dias
e) 5 dias

$M \cdot N = \begin{bmatrix} 2p & q \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r \\ 2s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2pr + 2qs \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} pr + qs \end{bmatrix}$

Mas $\underbrace{pr}_{\text{custo diário de } p \text{ unidades de } X} + \underbrace{qs}_{\text{custo diário de } q \text{ unidades de } Y}$ = custo diário da produção de p unidades de X e q unidades de Y

Portanto, $2pr + 2qs$ = custo da produção de dois dias dessa indústria.

6 (UFMT) Uma empresa fabrica três produtos. Suas despesas de produção estão divididas em três categorias (Tabela I). Em cada uma dessas categorias, faz-se uma estimativa do custo de produção de um único exemplar de cada produto. Faz-se, também, uma estimativa da quantidade de cada produto a ser fabricado por estação (Tabela II).

Tabela I

Custo de produção por item (em dólares)			
Categorias	Produto		
	A	B	C
Matéria-prima	0,10	0,30	0,15
Pessoal	0,30	0,40	0,25
Despesas gerais	0,10	0,20	0,15

Tabela II

Quantidade produzida por estação				
Produto	Estação			
	Verão	Outono	Inverno	Primavera
A	4 000	4 500	4 500	4 000
B	2 000	2 600	2 400	2 200
C	5 800	6 200	6 000	6 000

As tabelas I e II podem ser representadas, respectivamente, pelas matrizes

$$M = \begin{bmatrix} 0{,}10 & 0{,}30 & 0{,}15 \\ 0{,}30 & 0{,}40 & 0{,}25 \\ 0{,}10 & 0{,}20 & 0{,}15 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$P = \begin{bmatrix} 4\,000 & 4\,500 & 4\,500 & 4\,000 \\ 2\,000 & 2\,600 & 2\,400 & 2\,200 \\ 5\,800 & 6\,200 & 6\,000 & 6\,000 \end{bmatrix}$$

A empresa apresenta a seus acionistas uma única tabela mostrando o custo total por estação de cada uma das três categorias: matéria-prima, pessoal e despesas gerais.

A partir das informações dadas, julgue os itens:

a) A tabela apresentada pela empresa a seus acionistas é representada pela matriz MP de ordem 3×4.

b) Os elementos na 1ª linha de MP representam o custo total de matéria-prima para cada uma das quatro estações.

c) O custo com despesas gerais para o outono será 2 160 dólares.

$$MP = \begin{bmatrix} 0{,}10 & 0{,}30 & 0{,}15 \\ 0{,}30 & 0{,}40 & 0{,}25 \\ 0{,}10 & 0{,}20 & 0{,}15 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4\,000 & 4\,500 & 4\,500 & 4\,000 \\ 2\,000 & 2\,600 & 2\,400 & 2\,200 \\ 5\,800 & 6\,200 & 6\,000 & 6\,000 \end{bmatrix}$$

$$MP = \begin{bmatrix} 1\,870 & 2\,160 & 2\,070 & 1\,960 \\ 3\,450 & 3\,940 & 3\,810 & 3\,580 \\ 1\,670 & 1\,900 & 1\,830 & 1\,740 \end{bmatrix}$$

a) Verdadeiro
b) Verdadeiro
c) Falso
O custo com despesas gerais para o outono é representado pelo produto da 3ª linha de M pela 2ª coluna de P, isto é, o elemento a_{32} de MP, cujo valor é 1 900 dólares.

7 (MACK-SP) No produto de matrizes

$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, o valor de bc − ad é:

a) 0
b) $\frac{1}{50}$
c) $-\frac{1}{20}$
d) $-\frac{1}{5}$
x e) $\frac{1}{10}$

$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2c & 2d \\ 5a - c & 5b - d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 2c = 1 \rightarrow c = \frac{1}{2} \\ 2d = 0 \rightarrow d = 0 \\ 5a - c = 0 \rightarrow 5a = c \rightarrow a = \frac{c}{5} = \frac{1}{10} \\ 5b - d = 1 \rightarrow 5b = 1 \rightarrow b = \frac{1}{5} \end{cases}$$

Então:

$bc - ad = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{10} \cdot 0 = \frac{1}{10}$

8 (FGV-SP) *A*, *B* e *C* são matrizes quadradas de ordem 3, e *I* é a matriz identidade de mesma ordem. Assinale a alternativa correta:

a) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
b) $B \cdot C = C \cdot B$
c) $(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2$
x d) $C \cdot I = C$
e) $I \cdot A = I$

a) Incorreta
$(A + B)^2 = (A + B) \cdot (A + B) = A^2 + AB + BA + B^2$ e, em geral, $AB \neq BA$.

b) Incorreta
Em geral, $BC \neq CB$.

c) Incorreta
$(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - AB + BA - B^2$ e, em geral, $AB \neq BA$, portanto, $-AB + BA \neq 0$.

d) Correta
$C \cdot I = I \cdot C = C$

e) Incorreta
$I \cdot A = A \cdot I = A$

9 (IBMEC) Seja a matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Então M^{10} é a matriz:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2^{10} \\ 2^{10} & 4^{10} \end{pmatrix}$

x c) $\begin{pmatrix} 5^9 & 2 \cdot (5^9) \\ 2 \cdot (5^9) & 4 \cdot (5^9) \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 5^{10} & 2 \cdot (5^{10}) \\ 2 \cdot (5^{10}) & 4 \cdot (5^{10}) \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Sendo $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, temos:

- $M^2 = M \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \cdot 5 \\ 2 \cdot 5 & 4 \cdot 5 \end{pmatrix}$

- $M^4 = M^2 \cdot M^2 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \cdot 5 \\ 2 \cdot (5) & 4 \cdot (5) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \cdot 5 \\ 2 \cdot (5) & 4 \cdot (5) \end{pmatrix}$

  $M^4 = \begin{pmatrix} 5^3 & 2 \cdot (5^3) \\ 2 \cdot (5^3) & 4 \cdot (5^3) \end{pmatrix}$

- $M^8 = M^4 \cdot M^4 = \begin{pmatrix} 5^3 & 2 \cdot (5^3) \\ 2 \cdot (5^3) & 4 \cdot (5^3) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5^3 & 2 \cdot (5^3) \\ 2 \cdot (5^3) & 4 \cdot (5^3) \end{pmatrix}$

  $M^8 = \begin{pmatrix} 5^7 & 2 \cdot (5^7) \\ 2 \cdot (5^7) & 4 \cdot (5^7) \end{pmatrix}$

- $M^{10} = M^8 \cdot M^2 = \begin{pmatrix} 5^7 & 2 \cdot (5^7) \\ 2 \cdot (5^7) & 4 \cdot (5^7) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \cdot (5) \\ 2 \cdot (5) & 4 \cdot (5) \end{pmatrix}$

  $M^{10} = \begin{pmatrix} 5^9 & 2 \cdot (5^9) \\ 2 \cdot (5^9) & 4 \cdot (5^9) \end{pmatrix}$

10 (UniSantos-SP) A matriz $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$ tem inversa.

Então o elemento a_{21} da matriz inversa será:

a) −7
x b) 7
c) −1
d) 1

Sejam $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$ e $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

Então: $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$\begin{cases} 4a - c = 1 \\ -7a + 2c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} a = 2 \\ c = 7 \end{matrix}$ $\quad$ $\begin{cases} 4b - d = 0 \\ -7b + 2d = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} b = 1 \\ d = 4 \end{matrix}$

$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \therefore a_{21} = 7$

11 (UEL-PR) Uma nutricionista recomendou aos atletas de um time de futebol a ingestão de uma quantidade mínima de certos alimentos (fruta, leite e cereais) necessária para uma alimentação sadia. A matriz D fornece a quantidade diária mínima (em gramas) daqueles alimentos. A matriz M fornece a quantidade (em gramas) de proteínas, gorduras e carboidratos fornecida por grama ingerido dos alimentos citados.

$$D = \begin{bmatrix} 200 \\ 300 \\ 600 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{fruta} \\ \text{leite} \\ \text{cereais} \end{array}$$

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{fruta} & \text{leite} & \text{cereais} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}006 & 0{,}033 & 0{,}108 \\ 0{,}001 & 0{,}035 & 0{,}018 \\ 0{,}084 & 0{,}052 & 0{,}631 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{proteínas} \\ \text{gorduras} \\ \text{carboidratos} \end{array}$$

A matriz que mostra a quantidade diária mínima (em gramas) de proteínas, gorduras e carboidratos fornecida pela ingestão daqueles alimentos é:

a) $\begin{bmatrix} 18{,}20 \\ 36{,}30 \\ 454{,}20 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 29{,}70 \\ 16{,}20 \\ 460{,}20 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 48{,}30 \\ 36{,}00 \\ 432{,}40 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 51{,}90 \\ 48{,}30 \\ 405{,}60 \end{bmatrix}$

X e) $\begin{bmatrix} 75{,}90 \\ 21{,}50 \\ 411{,}00 \end{bmatrix}$

A matriz que mostra a quantidade diária mínima (em gramas) de proteínas, gorduras e carboidratos é dada pelo produto:

$$M \cdot D = \begin{bmatrix} 1{,}2 + 9{,}9 + 64{,}8 \\ 0{,}2 + 10{,}5 + 10{,}8 \\ 16{,}8 + 15{,}6 + 378{,}6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 75{,}90 \\ 21{,}50 \\ 411{,}00 \end{bmatrix}$$

12 (Unesp-SP) Considere três lojas, L_1, L_2 e L_3, e três tipos de produtos, P_1, P_2 e P_3. A matriz a seguir descreve a quantidade de cada produto vendido por cada loja na primeira semana de dezembro. Cada elemento a_{ij} da matriz indica a quantidade do produto P_i vendido pela loja L_j, i, j = 1, 2, 3.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} L_1 & L_2 & L_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 30 & 19 & 20 \\ 15 & 10 & 8 \\ 12 & 16 & 11 \end{bmatrix} \end{array}$$

Analisando a matriz, podemos afirmar que:

a) a quantidade de produtos do tipo P_2 vendidos pela loja L_2 é 11.

b) a quantidade de produtos do tipo P_1 vendidos pela loja L_3 é 30.

c) a soma das quantidades de produtos do tipo P_3 vendidos pelas três lojas é 40.

d) a soma das quantidades de produtos do tipo P_i vendidos pelas lojas L_i, i = 1, 2, 3 é 52.

X e) a soma das quantidades dos produtos dos tipos P_1 e P_2 vendidos pela loja L_1 é 45.

Analisando a matriz, podemos afirmar que a loja L_1 vendeu 30 produtos P_1 e 15 produtos P_2. A soma das quantidades dos produtos dos tipos P_1 e P_2 vendidos pela loja L_1 é, portanto, 30 + 15 = 45.

Determinantes

1 (ITA-SP) Seja a matriz $\begin{bmatrix} \cos 25° & \text{sen } 65° \\ \text{sen } 120° & \cos 390° \end{bmatrix}$.

O valor de seu determinante é:

a) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$
b) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
d) 1
X e) 0

Como:
- $\text{sen } 65° = \cos (90° - 65°) = \cos 25°$
- $\text{sen } 120° = \text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\cos 390° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

temos:

$$A = \begin{bmatrix} \cos 25° & \text{sen } 65° \\ \text{sen } 120° & \cos 390° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 25° & \cos 25° \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\det A = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos 25° - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 25° = 0$$

2 (UFSCar-SP) Sejam as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ \log 0,1 & 5 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} \log 0,01 & 0 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

Calcule:

a) o determinante da matriz (B − A);
b) a matriz inversa da matriz (B − A).

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ \log 0,1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} \log 0,01 & 0 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$

Então: $B - A = \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ +5 & -8 \end{bmatrix} \rightarrow \det (B - A) = 40 + 10 = 50$

b) Seja $(B - A)^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$

Então: $\begin{bmatrix} -5 & -2 \\ +5 & -8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, e obtemos os sistemas:

$$\begin{cases} -5x - 2z = 1 \\ 5x - 8z = 0 \end{cases} \rightarrow x = -\frac{4}{25} \text{ e } z = -\frac{1}{10}$$

$$\begin{cases} -5y - 2w = 0 \\ 5y - 8w = 1 \end{cases} \rightarrow y = \frac{1}{25} \text{ e } w = -\frac{1}{10}$$

Logo: $\begin{bmatrix} -\frac{4}{25} & \frac{1}{25} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \end{bmatrix}$

3 (UFRJ) Os números reais *a*, *b*, *c* e *d* formam, nessa ordem, uma PA. Calcule o determinante da matriz $A = \begin{pmatrix} e^a & e^b \\ e^c & e^d \end{pmatrix}$.

$$\det A = \begin{vmatrix} e^a & e^b \\ e^c & e^d \end{vmatrix} = e^a \cdot e^d - e^b \cdot e^c = e^{a+d} - e^{b+c}$$

Como *a*, *b*, *c*, *d* estão em PA, temos:

$b = a + r$; $c = a + 2r$ e $d = a + 3r$

Então:

$$e^{a+d} - e^{b+c} = e^{a+a+3r} - e^{a+r+a+2r} = e^{2a+3r} - e^{2a+3r} = 0$$

4 (UFC) Considere a matriz $A = a_{ij_{3 \times 2}}$ tal que $a_{ij} = i - j$. Calcule $\det (A \cdot A^t)$.

De acordo com a definição, temos:

$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e, portanto, $A^t = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Daí, $(A \cdot A^t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ e, então,

$\det (A \cdot A^t) = 5 + 0 + 0 - 1 - 0 - 4 = 0.$

5 (Unicap-PE) Encontre o valor absoluto do menor valor de *x* que torna a igualdade abaixo verdadeira, em que o primeiro membro é o determinante associado a uma matriz.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & x-1 \\ x & 0 & x \end{vmatrix} = 12$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & x-1 \\ x & 0 & x \end{vmatrix} = 12 \rightarrow -2x + x(x-1) + 3x - 4x = 12$$

$x^2 - 4x - 12 = 0$ ⟨ $x' = -2$, $x'' = 6$

Logo, o menor valor de *x* que torna a igualdade verdadeira é -2, cujo valor absoluto $|-2| = 2$.

6 (Unifesp-SP) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & \text{sen } x & 0 \\ 0 & 2 & \cos x \end{bmatrix}$$, em que *x* varia no conjunto dos números reais. Calcule:

a) o determinante da matriz *A*;

b) o valor máximo e o valor mínimo desse determinante.

a) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & \text{sen } x & 0 \\ 0 & 2 & \cos x \end{vmatrix} = \text{sen } x \cdot \cos x + 8$

b) $\det A = \text{sen } x \cdot \cos x + 8 = \dfrac{2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x}{2} + 8 = \dfrac{\text{sen } (2x)}{2} + 8$

Como $-1 \leqslant \text{sen } 2x \leqslant 1$, temos:

$(\det A)_{\text{máx}} = \dfrac{1}{2} + 8 = 8{,}5$

$(\det A)_{\text{mín}} = -\dfrac{1}{2} + 8 = 7{,}5$

7 (Fatec-SP) Determine *x*, de modo que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix} > 0.$$

a) $x < -3$ ou $x > 2$

x b) $-3 < x < 2$

c) Não existe $x \in \mathbb{R}$.

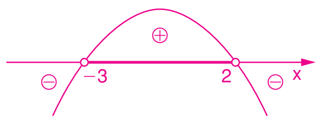
d) para todo $x \in \mathbb{R}$

e) n.d.a.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix} > 0 \rightarrow -3x^2 + 4x + 18 + 12 - 9x - 2x^2 > 0$$

$-x^2 - x + 6 > 0$

$-x^2 - x + 6 = 0$ ⟨ $x' = 2$, $x'' = -3$



Logo, $-3 < x < 2$.

8 (PUC-PR) Para uma matriz quadrada *A*, do tipo $n \times n$, considere as seguintes afirmações:

I. Se a matriz *B*, do tipo $n \times n$, é obtida a partir de *A*, permutando-se duas colunas, então $\det(B) = -\det(A)$.

II. Se duas linhas da matriz *A* são idênticas, então $\det(A) = 0$.

III. $\det(K \cdot A) = K \cdot \det(A)$, em que *K* é um número real.

IV. Sendo A^t a matriz transposta de *A*, então $\det(A^t) = -\det(A)$.

Podemos afirmar:

a) Todas as afirmações são falsas.

b) Somente uma afirmação é verdadeira.

c) Somente uma afirmação é falsa.

x d) Somente duas afirmações são verdadeiras.

e) Todas as afirmações são verdadeiras.

I. Verdadeira

II. Verdadeira

III. Falsa, pois $\det(K \cdot A) = K^n \cdot \det(A)$.

IV. Falsa, pois $\det(A^t) = \det(A)$.

9 (UFV-MG) Uma matriz quadrada A é denominada matriz ortogonal se $AA^t = A^tA = I$, em que A^t denota a transposta da matriz A e I é a matriz identidade de ordem n.

a) Mostre que os possíveis valores do determinante de uma matriz ortogonal A são 1 e -1.

b) Verifique se $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ é ortogonal.

a) Se A é ortogonal, temos:

$A \cdot A^t = I \rightarrow \det(A \cdot A^t) = \det I \rightarrow \det A \cdot \underbrace{\det A^t}_{\det A} = 1$

$(\det A)^2 = 1 \rightarrow \det A = 1$ ou $\det A = -1$

b) $B \cdot B^t = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 & 17 \\ 17 & 10 \end{pmatrix} \neq I$

Portanto, B não é ortogonal.

10 (PUC-RS) Se $M = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$, então $\det(M^2)$ é igual a:

a) 0 x b) 1 c) -1 d) -7 e) $-\frac{7}{25}$

• Sendo $M = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$, então $\det M = -\frac{9}{25} - \frac{16}{25} = -1$.

• $\det(M^2) = \det(M \cdot M) = \det M \cdot \det M = (-1) \cdot (-1)$

$\det(M^2) = 1$

11 (UFC) Sejam A e B matrizes 3×3 tais que $\det A = 3$ e $\det B = 4$. Então $\det(A \cdot 2B)$ é igual a:

a) 32 b) 48 c) 64 d) 80 x e) 96

$\det(A \cdot 2B) = \det A \cdot \det(2B) = \det A \cdot 2^3 \det B = 3 \cdot 2^3 \cdot 4 = 96$

12 (Unesp-SP) Sejam A e B matrizes quadradas de ordem 3.

Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ e B é tal que $B^{-1} = 2A$, o determinante de B será:

a) 24 b) 6 c) 3 d) $\frac{1}{6}$ x e) $\frac{1}{24}$

$\det B^{-1} = \det(2A) = 2^3 \cdot \det A = 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 \cdot (-2 + 2 + 3) =$

matriz de ordem 3

$= 8 \cdot 3 = 24$

Como $\det B^{-1} = \frac{1}{\det B} \rightarrow \det B = \frac{1}{\det B^{-1}} = \frac{1}{24}$.

Em questões como a 13, a resposta é dada pela soma dos números que identificam as alternativas corretas.

13 (UFG) Após uma prova de 4 questões aplicada a 4 alunos, o professor construiu uma matriz (A) em que cada linha corresponde a um aluno e cada coluna às questões da prova, colocou 0 (zero) se o aluno errou a questão e 1 (um) se acertou. Com base nesse enunciado podemos afirmar:

(01) Se cada aluno acertou apenas 1 questão, a matriz pode ser a matriz identidade se as questões acertadas são distintas.

(02) Se um aluno tirou zero na prova, o determinante da matriz é zero.

(04) A única situação em que $A^2 = 0$ é se todos os alunos tirarem zero na prova.

(08) Se $A = [a_{ij}]_{4 \times 4}$ em que $a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ se } i \geqslant j \\ 0 \text{ se } i < j \end{cases}$, então um aluno acertou todas as questões.

(16) Considere a função *f* definida em $\{a_{ij}, 1 \leqslant i, j \leqslant 4\}$ cuja lei de formação é $f(a_{ij}) = a_{ij}$. Se $A = I$ (identidade), a função *f* é a função nula.

(32) Se todos os alunos acertarem todas as questões da prova, então $\det A \neq 0$.

Determine a soma dos números associados à(s) proposição(ões) verdadeira(s).

01. É correta, pois se $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, os alunos acertaram apenas uma questão, e as questões acertadas são distintas.

02. É correta, pois como uma das linhas da matriz *A* só tem elementos nulos, seu determinante necessariamente é igual a zero.

04. É incorreta. Tome, por exemplo, $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Então, $A^2 = 0$ e o 4º aluno não tirou zero na prova (acertou a 1ª questão).

08. É correta. Temos $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, o que significa que o 4º aluno acertou todas as questões.

16. É incorreta. Se $A = I$, temos:

$$\begin{cases} f(a_{11}) = 1;\ f(a_{12}) = 0;\ f(a_{13}) = 0;\ f(a_{14}) = 0 \\ f(a_{21}) = 0;\ f(a_{22}) = 1;\ f(a_{23}) = 0;\ f(a_{24}) = 0 \\ f(a_{31}) = 0;\ f(a_{32}) = 0;\ f(a_{33}) = 1;\ f(a_{34}) = 0 \\ f(a_{41}) = 0;\ f(a_{42}) = 0;\ f(a_{43}) = 0;\ f(a_{44}) = 1 \end{cases}$$

32. É incorreta. *A* seria uma matriz com pelo menos duas linhas iguais. Então, $\det A = 0$.

Portanto: $1 + 2 + 8 = 11$

14 (UFBA) Sabendo-se que o determinante da matriz inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x+1 & 2 \\ 1 & 1 & x-3 \end{pmatrix}$ é igual a $-\frac{1}{4}$, calcule *x*.

Seja $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x+1 & 2 \\ 1 & 1 & x-3 \end{pmatrix}$ e M^{-1} sua inversa.

$\det M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x+1 & 2 \\ 1 & 1 & x-3 \end{vmatrix}$

$\det M = (x+1)(x-3) + 2 + 1 - (x+1) - 2 - (x-3) = x^2 - 4x$

$\det M^{-1} = \frac{1}{\det M} \rightarrow -\frac{1}{4} = \frac{1}{x^2 - 4x} \rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$

$x = 2$

15 (FGV-SP) A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 2 & 5 \\ x^2 & 4 & 25 \end{bmatrix}$ admite inversa, se e somente se:

a) $x \neq 5$
b) $x \neq 2$
X c) $x \neq 2$ e $x \neq 5$
d) $x \neq 4$ e $x \neq 25$
e) $x \neq 4$

Como $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$, então a matriz *A* admite inversa se, e somente se, $\det A \neq 0$.

Assim, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 2 & 5 \\ x^2 & 4 & 25 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow (2 - x)(5 - x)(5 - 2) \neq 0 \rightarrow x \neq 2$ e $x \neq 5$.

Sistemas Lineares

1 (IBMEC) Sendo $M = \begin{pmatrix} K^3 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ e $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, a equação matricial $M \cdot X = P$ terá solução única se tomarmos valores de *K* tais que:

a) $K \neq 2$
b) $K = -2$
x c) $K \neq -2$
d) $K \neq 0$
e) não existe *K* para obter a asserção.

$M \cdot X = P$

$$\begin{pmatrix} K^3 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} K^3x + 2y \\ -4x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} K^3x + 2y = 1 \\ -4x + y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} K^3x + 2y = 1 \\ 8x - 2y = -2 \\ \hline (K^3 + 8)x = -1 \end{array}$$

Solução única: $K^3 + 8 \neq 0 \rightarrow K^3 \neq -8 \rightarrow K \neq -2$

2 (ENEM) Uma companhia de seguros levantou dados sobre os carros de determinada cidade e constatou que são roubados, em média, 150 carros por ano.
O número de carros roubados da marca *X* é o dobro do número de carros roubados da marca *Y*, e as marcas *X* e *Y* juntas respondem por cerca de 60% dos carros roubados.
O número esperado de carros roubados da marca *Y* é:

a) 20 x b) 30 c) 40 d) 50 e) 60

Pelos dados do problema, temos:

$$\begin{cases} x = 2y \quad ① \\ x + y = 0,6 \cdot 150 \rightarrow x + y = 90 \quad ② \end{cases}$$

Substituindo ① em ②, obtemos:
$2y + y = 90 \rightarrow 3y = 90 \rightarrow y = 30$

3 (Unesp-SP) A agência Vivatur vendeu a um turista uma passagem que foi paga, à vista, com cédulas de 10, 50 e 100 dólares, num total de 45 cédulas. O valor da passagem foi 1 950 dólares e a quantidade de cédulas recebidas de 10 dólares foi o dobro das de 100. O valor, em dólares, recebido em notas de 100 pela agência na venda dessa passagem foi:

a) 1 800 b) 1 500 c) 1 400 x d) 1 000 e) 800

Se *x* for o número de notas de 50 dólares e *y* o número de notas de 100 dólares, então 2y será o número de notas de 10; portanto:

$$\begin{cases} 2y + x + y = 45 \\ 10 \cdot 2y + 50x + 100y = 1\,950 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3y + x = 45 \\ 120y + 50x = 1\,950 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} y = 10 \\ x = 15 \end{array}$$

O valor, em dólares, recebido em notas de 100 pela agência, na venda da passagem, foi $10 \cdot 100 = 1\,000$.

4 (UFC) Se um comerciante misturar 2 kg de café em pó do tipo I com 3 kg de café em pó do tipo II, ele obterá um tipo de café cujo preço é R$ 4,80 o quilograma. Mas, se misturar 3 kg de café em pó do tipo I com 2 kg de café do tipo II, a nova mistura custará R$ 5,20 o quilograma. Os preços do quilograma do café do tipo I e do quilograma do café do tipo II são, respectivamente:

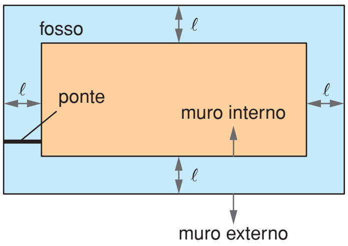
a) R$ 5,00 e R$ 3,00
b) R$ 6,40 e R$ 4,30
c) R$ 5,50 e R$ 4,00
d) R$ 5,30 e R$ 4,50
x e) R$ 6,00 e R$ 4,00

Sejam *x* o preço do quilograma do café tipo I e *y* o preço do quilograma do café tipo II.
Pelo problema, temos:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \cdot (4,80) = 24 \\ 3x + 2y = 5 \cdot (5,20) = 26 \end{cases} \rightarrow x = 6 \text{ e } y = 4$$

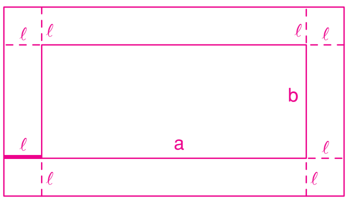
Os preços são: (I) R$ 6,00 e (II) R$ 4,00.

5 (Fuvest-SP) Um senhor feudal construiu um fosso, circundado por muros, em volta de seu castelo, conforme a planta abaixo, com uma ponte para atravessá-lo.



Em um certo dia, ele deu uma volta completa no muro externo, atravessou a ponte e deu uma volta completa no muro interno. Esse trajeto foi completado em 5 320 passos. No dia seguinte, ele deu duas voltas completas no muro externo, atravessou a ponte e deu uma volta completa no muro interno, completando esse novo trajeto em 8 120 passos. Pode-se concluir que a largura ℓ do fosso, em passo, é:

a) 36 x b) 40 c) 44 d) 48 e) 50



Pelos dados do problema, temos:

$$\begin{cases} 2(a + 2\ell) + 2(b + 2\ell) + 2a + 2b + \ell = 5\,320 \rightarrow 1^{\text{o}} \text{ dia} \\ 4(a + 2\ell) + 4(b + 2\ell) + 2a + 2b + \ell = 8\,120 \rightarrow 2^{\text{o}} \text{ dia} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a + 4b + 9\ell = 5\,320 \\ 6a + 6b + 17\ell = 8\,120 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4(a + b) + 9\ell = 5\,320 \\ 6(a + b) + 17\ell = 8\,120 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12(a + b) + 27\ell = 15\,960 \\ 12(a + b) + 34\ell = 16\,240 \end{cases} \rightarrow 7\ell = 280 \rightarrow \ell = 40$$

6 (UniFEI-SP) Resolver o sistema S: $\begin{cases} 5^x \cdot 5^y \cdot 5^z = 125 \\ 3^x \cdot 3^z = 3^9 \cdot 9^y \\ 128 \cdot 2^x = 2^z \end{cases}$.

$$S: \begin{cases} 5^x \cdot 5^y \cdot 5^z = 125 \\ 3^x \cdot 3^z = 3^9 \cdot 9^y \\ 128 \cdot 2^x = 2^z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5^{x + y + z} = 5^3 \\ 3^{x + z} = 3^{9 + 2y} \\ 2^{7 + x} = 2^z \end{cases}$$

Obtemos o sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 & ① \\ x + z = 9 + 2y & ② \\ 7 + x = z & ③ \end{cases}$$

Substituindo ② em ①:
$(9 + 2y) + y = 3 \rightarrow y = -2$

Substituindo ③ em ②:
$x + (7 + x) = 9 + 2 \cdot (-2) \rightarrow x = -1$
Em ③: $7 + (-1) = z \rightarrow z = 6$.

Em questões como a 7, a resposta é dada pela soma dos números que identificam as alternativas corretas.

7 (UFSC) Marque a soma dos números associados à(s) proposição(ões) correta(s).

(01) O número de elementos de uma matriz quadrada de ordem 12 é 48.

(02) Somente podemos multiplicar matrizes de mesma ordem.

(04) A soma das raízes da equação $\begin{vmatrix} x & x & x \\ 4 & x & x \\ 4 & 4 & x \end{vmatrix} = 0$ é 8.

(08) Uma matriz quadrada pode ter diversas matrizes inversas.

(16) O sistema $\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$ é indeterminado.

01. Incorreta
Como são 12 linhas e 12 colunas, o número de elementos é $12 \times 12 = 144$.

02. Incorreta
Para multiplicar duas matrizes, a quantidade de colunas da primeira deve ser igual à quantidade de linhas da segunda.

04. Correta

$$\begin{vmatrix} x & x & x \\ 4 & x & x \\ 4 & 4 & x \end{vmatrix} = 0 \rightarrow x^3 + 4x^2 + 16x - 4x^2 - 4x^2 - 4x^2 = 0$$

$$x^3 - 8x^2 + 16x = 0$$

$$x(x^2 - 8x + 16) = 0 \begin{cases} x' = 0 \\ x^2 - 8x + 16 = 0 \\ x'' = 4 \end{cases}$$

08. Incorreta
Se uma matriz é inversível, sua inversa é única.

16. Incorreta

$$\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \rightarrow x = 0 \text{ e } y = 0 \text{ (sistema possível e determinado)}$$

Portanto: 4

8 (FGV-SP) Resolvendo o sistema $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y - 2z = 1, \\ 6y + 3z = -12 \end{cases}$ obtém-se para z o valor:

a) −3 b) −2 c) 0 x d) 2 e) 3

Resolvendo o sistema por escalonamento:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y - 2z = 1 \\ 6y + 3z = -12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -3y - 4z = 1 \\ 6y + 3z = -12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -3y - 4z = 1 \\ -5z = -10 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} x = 1 \\ y = -3 \\ z = 2 \end{matrix}$$

9 (IBMEC) Considere o sistema linear:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ x + 2y + z = 4 \\ x + y + 2z = 6 \end{cases}$$

O conjunto solução S = {(x, y, z)} forma uma:

a) PA de razão 1.
b) PG de razão 1.
c) PA de razão 2 cuja soma dos termos é 12.
X d) PA de razão 2 cuja soma dos termos é 3.
e) PA de razão nula.

$$\begin{cases} x + y + 2z = 6 \\ x + 2y + z = 4 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 6 \\ y - z = -2 \\ -y - 3z = -10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 6 \\ y - z = -2 \\ -4z = -12 \end{cases}$$

z = 3
y = 1 S = {(−1, 1, 3)}
x = −1

−1 + 2 = 1; 1 + 2 = 3 → (−1, 1, 3) PA de razão 2, cuja soma dos termos é 3.

10 (UERJ) Um negociante de carros dispõe de certa quantia, em reais, para comprar dois modelos de carro, *A* e *B*. Analisando as várias possibilidades de compra, concluiu, em relação a essa quantia, que:

I. faltaria R$ 10 000,00 para comprar cinco unidades do modelo *A* e duas do modelo *B*;
II. sobraria R$ 29 000,00 se comprasse três unidades de cada modelo;
III. gastaria exatamente a quantia disponível se comprasse oito unidades do modelo *B*.

Estabeleça a quantia de que o negociante dispõe.

Fazendo: x = valor do modelo *A*; y = valor do modelo *B*; z = quantia disponível, podemos representar as afirmações I, II e III da seguinte maneira:

$$\begin{matrix} \text{I. } 5x + 2y = z + 10 \\ \text{II. } 3x + 3y = z - 29 \\ \text{III. } 8y = z \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} 5x + 2y - z = 10 \\ 3x + 3y - z = -29 \\ 8y = z \end{cases}$$

Substituindo z = 8y nas duas primeiras equações:

$$\begin{cases} 5x + 2y - 8y = 10 \\ 3x + 3y - 8y = -29 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5x - 6y = 10 \\ 3x - 5y = -29 \end{cases} \rightarrow x = 32 \text{ e } y = 25$$

z = 8y = 8 · 25 = 200
Quantia disponível: R$ 200 000,00

11 (Fuvest-SP) Um caminhão transporta maçãs, peras e laranjas, num total de 10 000 frutas. As frutas estão acondicionadas em caixas (cada caixa só contém um tipo de fruta), sendo que cada caixa de maçãs, peras e laranjas tem, respectivamente, 50 maçãs, 60 peras e 100 laranjas e custa, respectivamente, 20, 40 e 10 reais. Se a carga do caminhão tem 140 caixas e custa 3 300 reais, calcule quantas maçãs, peras e laranjas estão sendo transportadas.

Sendo *m*, *p* e *ℓ*, respectivamente, a quantidade de maçãs, peras e laranjas transportadas, tem-se:

$$\begin{cases} m + p + \ell = 10\,000 \text{ (quantidade de frutas)} \\ \dfrac{m}{50} + \dfrac{p}{60} + \dfrac{\ell}{100} = 140 \text{ (quantidade de caixas)} \\ 20 \cdot \dfrac{m}{50} + 40 \cdot \dfrac{p}{60} + 10 \cdot \dfrac{\ell}{100} = 3\,300 \text{ (custo total)} \end{cases}$$

Assim, tem-se:

$$\begin{cases} m + p + \ell = 10\,000 \\ 6m + 5p + 3\ell = 42\,000 \\ 12m + 20p + 3\ell = 99\,000 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m + p + \ell = 10\,000 \\ 3m + 2p = 12\,000 \\ 9m + 17p = 69\,000 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m + p + \ell = 10\,000 \\ 3m + 2p = 12\,000 \\ 11p = 33\,000 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} \ell = 5\,000 \\ m = 2\,000 \\ p = 3\,000 \end{matrix}$$

12 (UFBA) Um teatro colocou à venda ingressos para um espetáculo, com três preços diferenciados de acordo com a localização da poltrona. Esses ingressos, a depender do preço, apresentavam cores distintas: azul, branco e vermelho. Observando-se quatro pessoas na fila da bilheteria, constatou-se o seguinte: a primeira comprou 2 ingressos azuis, 2 brancos e 1 vermelho e gastou R$ 160,00; a segunda comprou 2 ingressos brancos e 3 vermelhos e gastou R$ 184,00 e a terceira pessoa comprou 3 ingressos brancos e 2 vermelhos, gastando R$ 176,00.
Sabendo-se que a quarta pessoa comprou apenas 3 ingressos azuis, calcule, em reais, quanto ela gastou.

Sejam *a*, *b* e *v* os preços, em reais, dos ingressos azuis, brancos e vermelhos, respectivamente. Do enunciado temos que:

$$\begin{cases} 2a + 2b + v = 160 \\ 2b + 3v = 184 \\ 3b + 2v = 176 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2a + 2b + v = 160 & ① \\ 6b + 9v = 552 & ② \\ -6b - 4v = -352 & ③ \end{cases}$$

De ② + ③: 5v = 200 → v = R$ 40,00.
Em ③: 6b + 9 · 40 = 552 → b = R$ 32,00.

Em ①: 2a + 2 · 32 + 40 = 160 → a = R$ 28,00.

Portanto, a quarta pessoa gastou:
3 · a = 3 · R$ 28,00 = R$ 84,00

13 (PUC-SP) Alfeu, Bento e Cíntia foram a certa loja e cada qual comprou camisas escolhidas entre três tipos, gastando nessa compra os totais de R$ 134,00, R$ 115,00 e R$ 48,00, respectivamente.

Sejam as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \text{ tais que:}$$

I. os elementos de cada linha de *A* correspondem às quantidades dos três tipos de camisas compradas por Alfeu (1ª linha), Bento (2ª linha) e Cíntia (3ª linha).

II. os elementos de cada coluna de *A* correspondem às quantidades de um mesmo tipo de camisa.

III. os elementos de *X* correspondem aos preços unitários, em reais, de cada tipo de camisa.

Nessas condições, o total a ser pago pela compra de uma unidade de cada tipo de camisa é:

x a) R$ 53,00
b) R$ 55,00
c) R$ 57,00
d) R$ 62,00
e) R$ 65,00

Nas condições dadas, temos:

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 134 \\ 115 \\ 48 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3y + 4z = 134 \\ x + 5z = 115 \\ 2x + y = 48 \end{cases} \to \begin{cases} 3y + 4z = 134 \\ y - 10z = -182 \\ 2x + y = 48 \end{cases} \to \begin{cases} 3y + 4z = 134 \\ 34z = 680 \\ 2x + y = 48 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y + 4z = 134 \\ z = 20 \\ 2x + y = 48 \end{cases} \to \begin{matrix} y = 18 \\ z = 20 \\ 2x + y = 48 \end{matrix} \to \begin{matrix} y = 18 \\ z = 20 \\ x = 15 \end{matrix} \to x + y + z = 53$$

14 (UFBA) Num livro muito velho e em péssimo estado de conservação, Maria notou que existia, em um exercício, uma matriz 3×3 rasurada, $M = \begin{bmatrix} . & 1 & . \\ . & . & 5 \\ 3 & . & . \end{bmatrix}$, na qual se podiam ler apenas os três elementos indicados em *M*. No enunciado do exercício, constava que a matriz *M* era igual à sua transposta e que a soma dos elementos de cada linha era igual à soma dos elementos da diagonal principal. O valor dessa soma era:

x a) 9 b) 8 c) 6 d) 4 e) 3

Seja $M = \begin{bmatrix} a & 1 & b \\ c & d & 5 \\ 3 & e & f \end{bmatrix}$

Pelos dados: $M = M^t \to \begin{bmatrix} a & 1 & b \\ c & d & 5 \\ 3 & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c & 3 \\ 1 & d & e \\ b & 5 & f \end{bmatrix} \to \begin{matrix} c = 1 \\ b = 3 \\ e = 5 \end{matrix}$

Ainda pelos dados:

$a + d + f = a + 1 + b \to a + d + f = a + 4 \to d + f = 4$

$a + d + f = c + d + 5 \to a + f = 6$

$a + d + f = 3 + e + f \to a + d = 8$

$$\begin{cases} d + f = 4 \\ a + f = 6 \\ a + d = 8 \end{cases} \to \begin{matrix} a = 5 \\ d = 3 \\ f = 1 \end{matrix}$$

$a + d + f = 5 + 3 + 1 = 9$

15 (Fuvest-SP) O sistema $\begin{cases} x + (c + 1)y = 0 \\ cx + y = -1 \end{cases}$, em que $c \neq 0$, admite uma solução (x, y), com x = 1. Então, o valor de *c* é:

a) −3 x b) −2 c) −1 d) 1 e) 2

Para x = 1:

$$\begin{cases} 1 + (c + 1)y = 0 \\ c + y = -1 \end{cases} \to \begin{cases} 1 + (c + 1)y = 0 \\ y = -c - 1 \end{cases}$$

Substituindo a 2ª equação na 1ª equação:

$1 + (c + 1)(-c - 1) = 0 \to -c^2 - 2c = 0 \to -c(c + 2) = 0$

$c = 0 \to$ não serve, pois pelo enunciado $c \neq 0$ e $c = -2$.

Note que para $c = -2$ o sistema em *x* e *y* é possível e determinado, com solução (1, 1).

16 (FGV-SP) Considere o sistema linear nas incógnitas *x*, *y* e *z*:

$$\begin{cases} x + y + m \cdot z = 3 \\ 2x + 3y - 5z = -7 \\ 3x - y + z = 4 \end{cases}$$

a) Para que valores de *m* o sistema é determinado?
b) Resolva o sistema para m = 0.

a) O sistema $\begin{cases} x + y + m \cdot z = 3 \\ 2x + 3y - 5z = -7 \\ 3x - y + z = 4 \end{cases}$ é determinado se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 2 & 3 & -5 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow 3 - 15 - 2m - 9m - 5 - 2 \neq 0 \rightarrow m \neq -\frac{19}{11}$$

b) Para m = 0, temos:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 3y - 5z = -7 \\ 3x - y + z = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ y - 5z = -13 \\ -4y + z = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ y - 5z = -13 \\ -19z = -57 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{matrix}$$

17 (Unicamp-SP) Considere o sistema linear abaixo, no qual *a* é um parâmetro real:

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 2 \\ x + y + az = -3 \end{cases}$$

a) Mostre que para a = 1 o sistema é impossível.
b) Encontre os valores do parâmetro *a* para os quais o sistema tem solução única.

a) Para a = 1 o sistema linear é impossível, pois se reduz a um sistema de três equações incompatíveis:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ x + y + z = -3 \end{cases}$$

b) Para que o sistema linear tenha solução única, pelo teorema de Cramer:

$$D = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \neq 0$$

$a^3 - 3a + 2 \neq 0 \rightarrow (a - 1)(a^2 + a - 2) \neq 0$
$a \neq 1$ e $a \neq -2$

18 (PUC-RJ) Dado o sistema $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$.

a) Existe uma solução do tipo x = a + 1, y = 2a e z = a?
b) Ache todas as soluções do sistema.

a) Substituindo os valores dados para *x*, *y* e *z* no sistema de equações, obtém-se:
① a + 1 + 2a − a = 1, ou seja, a = 0
② a + 1 − 2a + a = 1, ou seja, 1 = 1
③ −a − 1 + 2a + a = 1, ou seja, a = 1
Logo, não existe solução desse tipo.

b) Somando membro a membro as duas primeiras equações, obtém-se x = 1.
Somando membro a membro a primeira e a terceira, obtém-se y = 1.
Somando membro a membro a segunda e a terceira, obtém-se z = 1.
Logo, a única solução é x = 1, y = 1 e z = 1.

19 (UFPR) A respeito do sistema de equações

$\begin{cases} x + 3y - 4z = 0 \\ 3x + y = a \\ 4x + bz = 0 \end{cases}$, em que *a* e *b* são números reais,

é correto afirmar:

a) Se a = 0, existe algum valor de *b* para o qual o sistema é impossível.
b) Se o valor de *b* for tal que o determinante da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & b \end{bmatrix}$ não seja nulo, o sistema terá uma única solução, qualquer que seja o valor de *a*.
c) Se a = 1 e b = 2, o sistema tem mais de uma solução.
d) Se a = b = 0, o sistema possui somente a solução nula.

a) Correto
Se a = 0, temos o sistema: $\begin{cases} x + 3y - 4z = 0 \\ 3x + y = 0 \\ 4x + bz = 0 \end{cases}$, que é um sistema homogêneo, admitindo portanto a solução (0, 0, 0), independentemente do valor de *b*.

b) Correto
A matriz considerada é a dos coeficientes das incógnitas. Se esse determinante não for nulo, o sistema será possível e determinado, tendo uma única solução.

c) Incorreto
Se a = 1 e b = 2: $\begin{cases} x + 3y - 4z = 0 \\ 3x + y = 1 \rightarrow y = 1 - 3x \\ 4x + 2z = 0 \rightarrow z = -2x \end{cases}$
Substituindo na 1ª equação:
$x + 3(1 - 3x) - 4(-2x) = 0$
$x + 3 - 9x + 8x = 0 \rightarrow 0x = -3 \rightarrow \nexists\, x$
Segue que o sistema não tem solução.
(Outra resolução seria pelo determinante da matriz dos conjuntos das incógnitas do sistema.)

d) Correto
Se a = b = 0: $\begin{cases} x + 3y - 4z = 0 \\ 3x + y = 0 \\ 4x = 0 \end{cases}$ e segue-se que x = y = z = 0.

20 (FGV-SP) Considere o sistema linear nas incógnitas x, y e z:

$$\begin{cases} x - 2y - z = 8 \\ 2x + y + 3z = -2 \\ ax + y + 2z = 8 \end{cases}$$

a) Encontre o valor de a que torna o sistema impossível ou indeterminado.

b) Utilize o valor de a encontrado no item anterior para verificar se o sistema dado é impossível ou indeterminado.

a) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ a & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 2 - 6a - 2 + a + 8 - 3 = 0$
$a = 1$

b) $\begin{cases} x - 2y - z = 8 & \times(-2) \\ 2x + y + 3z = -2 & \\ x + y + 2z = 8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - 2y - z = 8 & \times(-1) \\ 5x + 5z = -18 \\ x + 2y + z = 8 \end{cases}$

$\begin{cases} x - 2y - z = 8 \\ 5y + 5z = -18 & \times(-3) \\ 3y + 3z = 0 & \times 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - 2y - z = 8 \\ 3y + 3z = 0 \\ 0 = -18 \end{cases}$

O sistema é impossível.

21 (ITA-SP) O sistema linear $\begin{cases} bx + y = 1 \\ by + z = 1 \\ x + bz = 1 \end{cases}$ não admite solução se, e somente se, o número real b for igual a:

X a) -1 b) 0 c) 1 d) 2 e) -2

$\begin{vmatrix} b & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 1 & 0 & b \end{vmatrix} = 0 \rightarrow b^3 + 1 = 0 \rightarrow b = -1$

Escalonando para $b = -1$:

$\begin{cases} -x + y + 0z = 1 & \times 1 \\ -y + z = 1 \\ x + 0y - z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x + y + 0z = 1 \\ -y + z = 1 & \times 1 \\ y - z = 2 \end{cases} \rightarrow$

$\begin{cases} -x + y + 0z = 1 \\ -y + z = 1 \\ 0 = 3 \end{cases}$

O sistema é impossível, isto é, não admite solução.
Assim: $b = -1$.

22 (Vunesp-SP) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Determine todos os números reais λ para os quais se tem $\det(A - \lambda I) = 0$, em que I é a matriz identidade de ordem 3.

b) Tomando $\lambda = -2$, dê todas as soluções do sistema

$$\begin{cases} (6 - \lambda)x - 3y = 0 \\ -3x + (6 - \lambda)y = 0 \\ x - y + (2 - \lambda)z = 0 \end{cases}$$

a) Se $A = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ e $\lambda I = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$,

então $A - \lambda I = \begin{bmatrix} 6 - \lambda & -3 & 0 \\ -3 & 6 - \lambda & 0 \\ 1 & -1 & 2 - \lambda \end{bmatrix}$.

Portanto:

$\det(A - \lambda I) = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 6 - \lambda & -3 & 0 \\ -3 & 6 - \lambda & 0 \\ 1 & -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$

$(2 - \lambda) \cdot [(6 - \lambda)^2 - 9] = 0 \rightarrow 2 - \lambda = 0$ ou $(6 - \lambda)^2 = 9$
$\lambda = 2$ ou $6 - \lambda = \pm 3 \rightarrow \lambda = 2$ ou $\lambda = 3$ ou $\lambda = 9$

b) Se $\det(A - \lambda I) = 0 \rightarrow \lambda = 2$ ou $\lambda = 3$ ou $\lambda = 9$, então para $\lambda = -2$ temos:

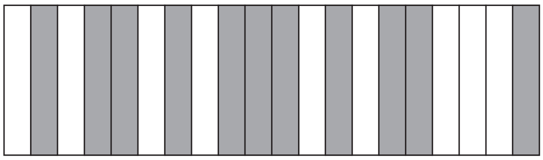
$\begin{vmatrix} 6 - \lambda & -3 & 0 \\ -3 & 6 - \lambda & 0 \\ 1 & -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} \neq 0$

Assim sendo, o sistema homogêneo

$\begin{cases} (6 - \lambda)x - 3y = 0 \\ -3x + (6 - \lambda)y = 0 \\ x - y + (2 - \lambda)z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (6 - \lambda)x - 3y + 0z = 0 \\ -3x + (6 - \lambda)y + 0z = 0 \\ x - y + (2 - \lambda)z = 0 \end{cases}$ é determinado e a única solução é $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Análise Combinatória

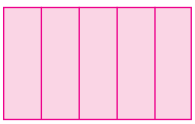
1 (ENEM) O código de barras, contido na maior parte dos produtos industrializados, consiste num conjunto de várias barras que podem estar preenchidas com cor escura ou não. Quando um leitor óptico passa sobre essas barras, a leitura de uma barra clara é convertida no número 0 e a de uma barra escura, no número 1. Observe abaixo um exemplo simplificado de um código em um sistema de código com 20 barras.



Se o leitor óptico for passado da esquerda para a direita, irá ler: 01011010111010110001.
Se o leitor óptico for passado da direita para a esquerda, irá ler: 10001101011101011010.
No sistema de código de barras, para se organizar o processo de leitura óptica de cada código, deve-se levar em consideração que alguns códigos podem ter leitura da esquerda para a direita igual à da direita para a esquerda, como o código 00000000111100000000, no sistema descrito acima.
Em um sistema de códigos que utilize apenas cinco barras, a quantidade de códigos com leitura da esquerda para a direita igual à da direita para a esquerda, desconsiderando-se todas as barras claras ou todas as escuras, é:

a) 14 b) 12 c) 8 x d) 6 e) 4

Utilizando barras, vamos considerar os casos:



- As barras *A*, *B*, *C*, *D*, *E* podem estar preenchidas com cor escura ou não, ou seja, 2 possibilidades cada uma.
- *A* e *E* devem estar preenchidas com a mesma cor: 2 possibilidades.
  B e *D* devem estar preenchidas com a mesma cor: 2 possibilidades.
  C tem 2 possibilidades de preenchimento.
- Assim, existem $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ códigos com leitura da esquerda para a direita igual à da direita para a esquerda, das quais 2 têm todas as barras claras ou todas escuras.
  Logo, a resposta é $8 - 2 = 6$.

2 (Unesp-SP) Dispomos de 4 cores distintas e temos de colorir o mapa mostrado na figura com os países *P*, *Q*, *R* e *S*, de modo que países cuja fronteira é uma linha não podem ser coloridos com a mesma cor.

P	Q
R	S

Responda, justificando sua resposta, de quantas maneiras é possível colorir o mapa, se:
a) os países *P* e *S* forem coloridos com cores distintas;
b) os países *P* e *S* forem coloridos com a mesma cor.

a) Se *P* e *S* forem coloridos com cores distintas, existirão:
- 4 maneiras de escolher a cor de *P*,
- 3 maneiras de escolher a cor de *S*,
- 2 maneiras de escolher a cor de *Q* e
- 2 maneiras de escolher a cor de *R*,

Portanto, $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 48$ maneiras de colorir o mapa.

b) Se *P* e *S* forem coloridos com a mesma cor, existirão:
- 4 maneiras de escolher a cor de *P* e *S*,
- 3 maneiras de escolher a cor de *Q* e
- 3 maneiras de escolher a cor de *R*,

Portanto, $4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$ maneiras de colorir o mapa.

3 (UFC) A quantidade de números inteiros, positivos e ímpares, formados por três algarismos distintos, escolhidos dentre os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, é igual a:

x a) 320 b) 332 c) 348 d) 360 e) 384

- Para que o número seja ímpar, existem 5 possibilidades para o algarismo das unidades.
- Como os três algarismos devem ser distintos, temos 8 possibilidades para o algarismo das centenas (o zero não pode ser escolhido).

Portanto, $8 \cdot 8 \cdot 5 = 320$ números inteiros, positivos e ímpares.

4 (UFMG) Em uma lanchonete, os sorvetes são divididos em três grupos: o vermelho, com 5 sabores; o amarelo, com 3 sabores; e o verde, com 2 sabores. Pode-se pedir uma casquinha com 1, 2 ou 3 bolas, mas cada casquinha não pode conter 2 bolas de um mesmo grupo.
O número de maneiras distintas de pedir uma casquinha é:

x a) 71 b) 86 c) 131 d) 61

- Existem $5 + 3 + 2 = 10$ maneiras de pedir uma casquinha com 1 bola.
- Existem $5 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 31$ maneiras de pedir uma casquinha com 2 bolas (não contendo 2 bolas de um mesmo grupo).
- Existem $5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$ maneiras de pedir uma casquinha com 3 bolas (não contendo 2 bolas e não contendo 3 bolas de um mesmo grupo).

Portanto, existem $10 + 31 + 30 = 71$ maneiras de pedir uma casquinha com 1, 2 ou 3 bolas.

5 (UEL-PR) Uma distribuidora de sabonetes, xampus e condicionadores tem três marcas diferentes de cada um desses produtos. Ao receber as encomendas de três fregueses, um funcionário da distribuidora anotou apenas os nomes dos fregueses e os produtos solicitados: cada um pediu uma caixa de sabonete, uma caixa de xampu e uma caixa de condicionador. Quanto às marcas, o funcionário lembra-se que cada um solicitou marcas diferentes daquelas solicitadas pelos outros. Quando percebeu a sua falha, o funcionário imaginou que a falta da informação sobre as marcas não teria sérias conseqüências, pois bastaria fazer algumas tentativas até conseguir entregar os produtos de acordo com os pedidos. Quantas possibilidades existem de distribuição dos pedidos entre os três fregueses?

x a) $(3!)^3$ c) $\frac{3! \cdot 3!}{3}$ e) $\frac{9!}{3! \cdot 3!}$

b) $3 \cdot 3!$ d) 3^9

- Para a distribuição de sabonetes temos $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$ maneiras distintas.
- Para a distribuição de xampus temos $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$ maneiras distintas.
- Para a distribuição de condicionadores temos $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$ maneiras distintas.

Portanto, as possibilidades de distribuição dos pedidos entre os três fregueses é $(3!) \cdot (3!) \cdot (3!) = (3!)^3$.

Em questões como a 6, a resposta é dada pela soma dos números que identificam as alternativas corretas.

6 (UFMS) Sobre análise combinatória, é correto afirmar:

(01) Se A é o conjunto de números de dois algarismos distintos formados a partir dos dígitos 1, 2 e 3, então o número de elementos de A é 9.

(02) x Lançando-se uma moeda 3 vezes, o número de seqüências possíveis de cara e/ou coroa é 8.

(04) Com relação à palavra VESTIBULAR temos $9 \cdot 4!$ anagramas que começam com vogal.

(08) Se $A_{m,3} = 30m$, então $m = 10$.

01. Incorreto

$A = A_{3,2} \rightarrow A = \frac{3!}{1!}$

$A = 6$

02. Correto

Pelo princípio multiplicativo, o número de seqüências possíveis é $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

04. Incorreto

O número de anagramas que começam com vogal é dado por $4 \cdot P_9 = 4 \cdot 9!$.

08. Incorreto

$A_{m,3} = 30m \rightarrow \frac{m!}{(m-3)!} = 30m$

$\frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot (m-3)!}{(m-3)!} = 30m$

$m^2 - 3m - 28 = 0 \begin{cases} m' = 7 \\ m'' = -4 \text{ (não serve, pois } m \in \mathbb{N}) \end{cases}$

$m = 7$

Portanto: 2

7 (ESPM-SP) Permutando-se de todas as maneiras os elementos da matriz $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, obtém-se x matrizes diferentes e y determinantes diferentes. O valor de $x + y$ é:

a) 24 b) 25 c) 27 x d) 30 e) 36

- Existem $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ matrizes distintas, obtidas com a permutação de todos os elementos de M. Portanto, $x = 24$.
- De todas essas 24 novas matrizes, os seus determinantes só poderão ser obtidos por meio dos seguintes cálculos possíveis:
  $1 \cdot 2 - 3 \cdot 4$ ou $3 \cdot 4 - 1 \cdot 2$ ou $1 \cdot 3 - 2 \cdot 4$ ou $2 \cdot 4 - 1 \cdot 3$ ou $1 \cdot 4 - 2 \cdot 3$ ou $2 \cdot 3 - 1 \cdot 4$ e, portanto, $y = 6$
  Logo: $x + y = 30$.

8 (PUC-SP) No saguão de um teatro, há um lustre com 10 lâmpadas, todas de cores distintas entre si. Como medida de economia de energia elétrica, o gerente desse teatro estabeleceu que só deveriam ser acesas, simultaneamente, de 4 a 7 lâmpadas, de acordo com a necessidade. Nessas condições, de quantos modos distintos podem ser acesas as lâmpadas desse lustre?

a) 664 x b) 792 c) 852 d) 912 e) 1 044

Número de maneiras distintas de acender:

- 4 lâmpadas: $L_{10,\,4} = \dfrac{10!}{4!6!} = 210$
- 5 lâmpadas: $L_{10,\,5} = \dfrac{10!}{5!5!} = 252$
- 6 lâmpadas: $L_{10,\,6} = \dfrac{10!}{6!4!} = 210$
- 7 lâmpadas: $L_{10,\,7} = \dfrac{10!}{7!3!} = 120$

210 + 252 + 210 + 120 = 792 maneiras distintas de acender 4, 5, 6 ou 7 das 10 lâmpadas.

9 (ITA-SP) Listando-se em ordem crescente todos os números de cinco algarismos distintos, formados com os elementos do conjunto {1, 2, 4, 6, 7}, o número 62 417 ocupa o n-ésimo lugar. Então *n* é igual a:

a) 74º b) 75º c) 79º x d) 81º e) 92º

Colocando os números em ordem crescente:

$\boxed{1}\ \square\ \square\ \square\ \square \to P_4 = 4! = 24$

$\boxed{2}\ \square\ \square\ \square\ \square \to P_4 = 4! = 24$

$\boxed{4}\ \square\ \square\ \square\ \square \to P_4 = 4! = 24$

$\boxed{6}\ \boxed{1}\ \square\ \square\ \square \to P_3 = 3! = 6$

$\boxed{6}\ \boxed{2}\ \boxed{1}\ \square\ \square \to P_2 = 2! = 2$

$\boxed{6}\ \boxed{2}\ \boxed{4}\ \boxed{1}\ \boxed{7} \to 81^{\text{o}}$

10 (FGV-SP) A soma dos coeficientes do desenvolvimento de $(2x + y)^5$ é igual a:

a) 81 b) 128 x c) 243 d) 512 e) 729

$$(2x + y)^5 = \binom{5}{0}(2x)^5 \cdot y^0 + \binom{5}{1}(2x)^4 \cdot y^1 + \binom{5}{2}(2x)^3 \cdot y^2 + \binom{5}{3}(2x)^2 \cdot y^3 + \binom{5}{4}(2x)^1 \cdot y^4 + \binom{5}{5}(2x)^0 \cdot y^5$$

$1 \cdot 32x^5 \cdot 1 + 5 \cdot 16x^4 \cdot y + 10 \cdot 8 \cdot x^3 \cdot y^2 + 10 \cdot 4 \cdot x^2 \cdot y^3 + 5 \cdot 2 \cdot x \cdot y^4 + 1 \cdot y^5 = 32x^5 + 80x^4y + 80x^3y^2 + 40x^2y^3 + 10xy^4 + 1y^5$

Soma dos coeficientes: 32 + 80 + 80 + 40 + 10 + 1 = 243

11 (Unifesp-SP) O corpo clínico da pediatria de certo hospital é composto de 12 profissionais, dos quais 3 são capacitados para atuação sobre crianças que apresentam necessidades educacionais especiais. Para fins de assessoria, deverá ser criada uma comissão de 3 profissionais, de tal maneira que 1 deles, pelo menos, tenha a capacitação referida. Quantas comissões distintas podem ser formadas nessas condições?

a) 792 b) 494 c) 369 x d) 136 e) 108

Existem 3 possibilidades:

- A comissão é formada por 1 especialista e 2 outros profissionais. Assim, tem-se:
  $C_{3,\,1} \cdot C_{9,\,2} = 3 \cdot 36 = 108$
- A comissão é formada por 2 especialistas e 1 outro profissional. Assim, tem-se:
  $C_{3,\,2} \cdot C_{9,\,1} = 3 \cdot 9 = 27$
- A comissão é formada por 3 especialistas. Assim, tem-se:
  $C_{3,\,3} = 1$

O total de comissões possíveis é:

108 + 27 + 1 = 136

12 (Unesp-SP) Na convenção de um partido para lançamento da candidatura de uma chapa ao governo de certo estado havia 3 possíveis candidatos a governador, sendo dois homens e uma mulher, e 6 possíveis candidatos a vice-governador, sendo quatro homens e duas mulheres. Ficou estabelecido que a chapa governador/vice-governador seria formada por duas pessoas de sexos opostos. Sabendo que os nove candidatos são distintos, o número de maneiras possíveis de formar a chapa é:

a) 18 b) 12 x c) 8 d) 6 e) 4

Se a chapa governador/vice-governador é formada por duas pessoas de sexos opostos, então ela pode ser formada:

- por um dos dois homens candidatos a governador e uma das duas mulheres candidatas a vice-governador $\to C_{2,\,1} \cdot C_{2,\,1}$
  ou
- pela mulher candidata a governador e por um dos quatro homens candidatos a vice-governador $\to C_{1,\,1} \cdot C_{4,\,1}$

  Assim, o número de maneiras de formar a chapa é:
  $C_{2,\,1} \cdot C_{2,\,1} + C_{1,\,1} \cdot C_{4,\,1} = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 4 = 8$

13 (UEL-PR) Quando os deputados estaduais assumiram as suas funções na Câmara Legislativa, tiveram de responder a três questionamentos cada um. No primeiro, cada deputado teria de escolher um colega para presidir os trabalhos, dentre cinco previamente indicados. No segundo, deveria escolher, com ordem de preferência, três de seis prioridades previamente definidas para o primeiro ano de mandato. No último, deveria escolher dois dentre sete colegas indicados para uma reunião com o governador. Considerando que todos responderam a todos os questionamentos, conforme solicitado, qual o número de respostas diferentes que cada deputado poderia dar?

a) 167
b) 810
c) 8 400
d) 10 500
x e) 12 600

Existem:
- 5 respostas possíveis para o primeiro questionamento;
- $A_{6,\,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ respostas possíveis para o segundo questionamento;
- $C_{7,\,2} = \dfrac{7 \cdot 6}{2} = 21$ respostas possíveis para o terceiro.

Portanto, existem $5 \cdot 120 \cdot 21 = 12\,600$ respostas diferentes.

14 (FGV-SP)

a) Uma senha de um banco é constituída de três letras escolhidas entre as 26 do alfabeto, seguidas de três algarismos, escolhidos entre os dez algarismos de 0 a 9. Quantas senhas podem ser formadas usando-se três vogais e três algarismos pares?

b) Um professor precisa elaborar uma prova de Matemática com cinco questões, sendo uma de trigonometria, duas de álgebra e duas de geometria. Ele dispõe de três questões de trigonometria, seis de álgebra e cinco de geometria. De quantas formas a prova pode ser elaborada, não se levando em conta a ordem das questões?

a) Vogais: *a*, *e*, *i*, *o*, *u* → 5 possibilidades
Algarismos pares: 0, 2, 4, 6, 8 → 5 possibilidades
De acordo com o enunciado, temos:

$$\overbrace{\bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc}^{\text{vogais}}\quad \overbrace{\square\ \square\ \square}^{\text{pares}}$$

$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^6 = 15\,625$ senhas possíveis.

b) Possibilidades de escolha para:
- trigonometria: $C_{3,\,1} = 3$
- álgebra: $C_{6,\,2} = 15$
- geometria: $C_{5,\,2} = 10$

Então, temos $3 \cdot 15 \cdot 10 = 450$ formas diferentes de elaborar a prova.

15 (Fuvest-SP) Uma ONG decidiu preparar sacolas, contendo 4 itens distintos cada uma, para distribuir entre a população carente. Esses 4 itens devem ser escolhidos entre 8 tipos de produtos de limpeza e 5 tipos de alimentos não perecíveis. Em cada sacola, deve haver pelo menos um item que seja alimento não perecível e pelo menos um item que seja produto de limpeza. Quantos tipos de sacolas distintas podem ser feitos?

a) 360 b) 420 c) 540 d) 600 x e) 640

- O número total de tipos de sacolas distintas, cada uma com 4 itens, que podem ser feitos com 8 produtos de limpeza e 5 produtos alimentícios é: $C_{13,\,4} = \dfrac{13!}{4!9!} = 715$.
- O número total de tipos de sacolas distintas, com 4 itens de limpeza, escolhidos entre os 8 disponíveis, é: $C_{8,\,4} = \dfrac{8!}{4!4!} = 70$.
- O número total de tipos de sacolas distintas, com 4 itens de alimentação, escolhidos entre os 5 disponíveis, é $C_{5,\,4} = 5$.
- O número total de tipos de sacolas distintas com pelo menos um item de limpeza e um de alimentação é $715 - 70 - 5 = 640$.

16 (UFMG) Um baralho é composto de 52 cartas divididas em quatro naipes distintos. Cada naipe é constituído por 13 cartas — 9 cartas numeradas de 2 a 10, mais valete, dama, rei e ás, representadas, respectivamente, pelas letras *J*, *Q*, *K* e *A*.
Um par e uma trinca consistem, respectivamente, de duas e de três cartas de mesmo número ou letra. Um *full hand* é uma combinação de cinco cartas, formada por um par e uma trinca.
Considerando essas informações, calcule:

I. de quantas maneiras distintas se pode formar um *full hand* com um par de reis e uma trinca de dois;
II. de quantas maneiras distintas se pode formar um *full hand* com um par de reis;
III. de quantas maneiras distintas se pode formar um *full hand*.

I. Existem:
a) $C_{4,\,2} = \dfrac{4 \cdot 3}{2} = 6$ maneiras distintas de formar-se um par de reis;
b) $C_{4,\,3} = 4$ maneiras distintas de formar uma trinca de dois.
Portanto, $6 \cdot 4 = 24$ maneiras distintas de formar um *full hand* com um par de reis e uma trinca de dois.

II. Existem:
a) $C_{4,\,2} = 6$ maneiras distintas de formar um par de reis;
b) $12 \cdot C_{4,\,3} = 12 \cdot 4 = 48$ maneiras distintas de formar uma trinca com as demais cartas restantes (excluindo-se os "reis").
Portanto, $6 \cdot 48 = 288$ maneiras distintas de formar um *full hand* com um par de reis.

III. Existem:
a) $13 \cdot C_{4,\,2} = 13 \cdot 6 = 78$ maneiras distintas de formar um par;
b) $12 \cdot C_{4,\,3} = 12 \cdot 4 = 48$ maneiras distintas de formar uma trinca com as demais cartas restantes.
Portanto, $78 \cdot 48 = 3\,744$ maneiras distintas de formar um *full hand*.

17 (ITA-SP) Quantos anagramas com 4 letras distintas podemos formar com as 10 primeiras letras do alfabeto e que contenham 2 das letras *a*, *b* e *c*?

a) 1 692 b) 1 572 c) 1 520 x d) 1 512 e) 1 392

Interpretando "2 das letras *a*, *b* e *c*" como "apenas 2 das letras *a*, *b* e *c*", temos:

- O número de maneiras de escolher 2 das letras *a*, *b* e *c* é $C_{3,\,2} = 3$.
- O número de maneiras de escolher as outras 2 letras entre as 7 restantes é $C_{7,\,2} = 21$.
- Permutando, para cada caso, as 4 letras escolhidas, resulta: $C_{3,\,2} \cdot C_{7,\,2} \cdot P_4 = 3 \cdot 21 \cdot 24 = 1\,512$

18 (PUC-RJ) Se $\dfrac{n!}{(n+2)! + (n+1)!} = \dfrac{1}{48}$, então:

a) n = 2
b) n = 12
x c) n = 5
d) n = 7
e) n = 10

$(n + 2)! = (n + 2) \cdot (n + 1) \cdot n!$
$(n + 1)! = (n + 1) \cdot n!$

Então:

$$\frac{n!}{(n+2)! + (n+1)!} = \frac{n!}{(n+2)(n+1)n! + (n+1)n!}$$

$$\frac{n!}{n![(n+2)(n+1) + n + 1]} = \frac{1}{(n+1)(n+3)} = \frac{1}{48}$$

$n^2 + 4n + 3 = 48 \to n^2 + 4n - 45 = 0 \to n' = 5$ ou $n'' = -9$ (não serve)

19 (UFC) O coeficiente de x^3 no polinômio $p(x) = (x - 1) \cdot (x + 3)^5$ é:

a) 30 b) 50 c) 100 d) 120 x e) 180

- Cálculo do coeficiente de x^2 no binômio $(x + 3)^5$:

$$\left.\begin{array}{l} T_{k+1} = \dbinom{5}{k} \cdot x^{5-k} \cdot 3^k \\ 5 - k = 2 \to k = 3 \end{array}\right\} \to T_4 = \dbinom{5}{3} \cdot x^2 \cdot 3^3 = 270 \cdot x^2$$

- Cálculo do coeficiente de x^3 no binômio $(x + 3)^5$:

$$\left.\begin{array}{l} T_{k+1} = \dbinom{5}{k} \cdot x^{5-k} \cdot 3^k \\ 5 - k = 3 \to k = 2 \end{array}\right\} \to T_3 = \dbinom{5}{2} \cdot x^3 \cdot 3^2 = 90 \cdot x^3$$

- O coeficiente de x^3 no polinômio $p(x) = (x - 1) \cdot (x + 3)^5$ é proveniente de $x \cdot (270x^2) - 1 \cdot (90x^3) = 180 \cdot x^3$, portanto vale 180.

20 (PUC-RS) A soma das raízes da equação $(x + 1)! = x^2 + x$ é:

a) 0 b) 1 c) 2 x d) 3 e) 4

$(x + 1)! = x^2 + x$
$(x + 1) \cdot x \cdot (x - 1)! = x \cdot (x + 1)$
$(x - 1)! = 1$
Logo, $x - 1 = 0$ e $x = 1$ ou $x - 1 = 1$ e $x = 2$, cuja soma das raízes é $1 + 2 = 3$.

21 (UFSC) Assinale a soma dos números associados à(s) proposição(ões) correta(s).

(01) A solução da equação $(x + 3)! + (x + 2)! = 8 \cdot (x + 1)!$ é 0 (zero).

(02) A solução da equação $A_{x,\,3} = 4 \cdot A_{x,\,2}$ é 6.

(04) No desenvolvimento do binômio $(2x - 1)^6$, o termo independente de *x* é 1.

(08) O número de anagramas que podemos formar com as letras da palavra BRASIL, que começam com *B* e terminam com *L*, é 24.

(16) Um time de futebol de salão é formado por 5 jogadores. Dispondo de 8 jogadores, podemos formar 64 times de futebol de salão.

01. Correta
$(x + 3)! + (x + 2)! = 8 \cdot (x + 1)!$
$(x + 3)(x + 2)(x + 1)! + (x + 2) \cdot (x + 1)! = 8 \cdot (x + 1)!$
$(x + 3)(x + 2) + (x + 2) = 8$
$x^2 + 6x = 0$
$x(x + 6) = 0$
$x' = 0$
$x'' = -6$ (não serve)

02. Correta
$A_{x,\,3} = 4 \cdot A_{x,\,2} \to \dfrac{x!}{(x-3)!} = 4\,\dfrac{x!}{(x-2)!}$

$\dfrac{x!}{(x-3)!} = 4\,\dfrac{x!}{(x-2)(x-3)!} \to 1 = \dfrac{4}{x-2} \to x - 2 = 4 \to x = 6$

04. Correta
Termo geral do desenvolvimento de $(2x - 1)^6$:

$$T_{p+1} = \binom{6}{p} \cdot (-1)^p \cdot (2x)^{6-p}$$

$$T_{p+1} = \binom{6}{p} \cdot (-1)^p \cdot 2^{6-p} \cdot x^{6-p}$$

Fazendo $6 - p = 0 \to p = 6$ (7º termo):

$$T_7 = \binom{6}{6} \cdot (-1)^6 \cdot (2x)^0 = 1$$

08. Correta

$\underline{\ B\ }\ \underbrace{\underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}}_{P_4}\ \underline{\ L\ } \to P_4 = 4! = 24$ anagramas

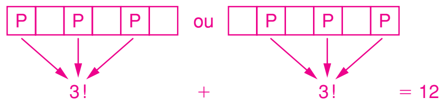
16. Incorreta
Podemos formar: $C_{8,\,5} = \dfrac{8!}{3!5!} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} = 56$ times.

Portanto: 1 + 2 + 4 + 8 = 15

22 (Vunesp-SP) O número de maneiras que três pessoas podem sentar-se em uma fileira de seis cadeiras vazias, de modo que, entre duas pessoas próximas (seguidas), sempre tenha exatamente uma cadeira vazia, é:

a) 3 b) 6 c) 9 X d) 12 e) 15

Sendo *P* uma cadeira ocupada, temos:



23 (UFPB) Um sorveteiro vende sorvetes de três bolas, de sabores escolhidos dentre os de coco, manga, graviola, cajá, acerola, maracujá e pitanga. Calcule o número de possibilidades de escolha de três sabores distintos que devem compor um sorvete, de modo que uma das bolas seja, necessariamente, de coco.

Uma vez escolhido o sabor coco, restam seis possibilidades de sabores para as outras duas bolas. Dessa forma, o número de possibilidades de escolhas é $C_{6,\,2} = \frac{6!}{4!\ 2!} = 15$.

24 (Fuvest-SP) Em certa comunidade, dois homens sempre se cumprimentam (na chegada) com um aperto de mão e se despedem (na saída) com outro aperto de mão. Um homem e uma mulher se cumprimentam com um aperto de mão, mas se despedem com um aceno. Duas mulheres só trocam acenos, tanto para se cumprimentarem quanto para se despedirem.

Em uma comemoração, na qual 37 pessoas almoçaram juntas, todos se cumprimentaram e se despediram na forma descrita acima. Quantos dos presentes eram mulheres, sabendo que foram trocados 720 apertos de mão?

a) 16 X b) 17 c) 18 d) 19 e) 20

Sendo *x* o número de homens, temos:
- cumprimentos entre dois homens: $2C_{x,\,2}$
- cumprimentos entre um homem e uma mulher: $x(37 - x)$

Assim:

$2C_{x,\,2} + x(37 - x) = 720$

$x(x - 1) + 37x - x^2 = 720$

$\cancel{x^2} - x + 37x - \cancel{x^2} = 720 \rightarrow x = 20$

Logo, o número de mulheres é 37 − 20, ou seja, 17.

25 (UFPE-UFRPE) De um grupo de 10 pessoas, entre as quais Maria, Marta e Mércia, deseja-se escolher uma comissão com 4 componentes. Quantas comissões podem ser formadas, das quais participem Maria e Marta, mas Mércia não participe?

Como Maria e Marta já fazem parte da comissão e Mércia não participa, devemos contar o número de maneiras de escolher 2 pessoas de um grupo de 10 − 3 = 7 pessoas. Logo:

$C_{7,\,2} = \frac{7!}{2!\ 5!} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ possibilidades

26 (MACK-SP) Uma sala tem 5 lâmpadas com interruptores independentes. O número de formas de iluminá-la, com pelo menos duas lâmpadas acesas, é:

X a) 26 b) 20 c) 28 d) 40 e) 46

$\binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} = 10 + 10 + 5 + 1 = 26$

Probabilidade

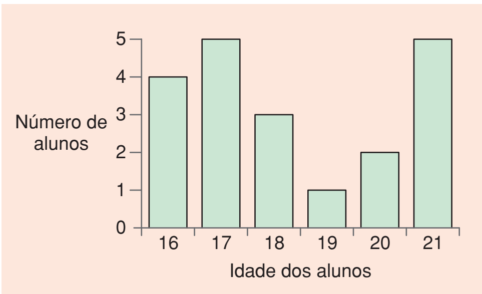
1 (FGV-SP) A área da superfície da Terra é aproximadamente 510 milhões de km^2. Um satélite artificial dirige-se aleatoriamente para a Terra. Qual a probabilidade de ele cair numa cidade cuja superfície tem área igual a 102 km^2?

a) $2 \cdot 10^{-9}$
b) $2 \cdot 10^{-8}$
c) $2 \cdot 10^{-7}$
d) $2 \cdot 10^{-6}$
e) $2 \cdot 10^{-5}$

A probabilidade, no caso, é igual a:

$$\frac{102\ \text{km}^2}{510\ 000\ 000\ \text{km}^2} = \frac{102}{510 \cdot 10^6} = \frac{1}{5 \cdot 10^6} = 0{,}2 \cdot 10^{-6} = 2 \cdot 10^{-7}$$

2 (Unesp-SP) Num curso de Inglês, a distribuição das idades dos alunos é dada pelo gráfico seguinte:



Com base nos dados do gráfico, determine:

a) o número total de alunos do curso e o número de alunos com no mínimo 19 anos;
b) escolhido um aluno ao acaso, qual a probabilidade de sua idade ser no mínimo 19 anos ou ser exatamente 16 anos.

a) O número de alunos do curso é $4 + 5 + 3 + 1 + 2 + 5 = 20$.
O número de alunos com no mínimo 19 anos é $1 + 2 + 5 = 8$.
b) nº de alunos com no mínimo 19 anos: 8
nº de alunos com exatamente 16 anos: 4
A probabilidade *P* da idade de um aluno, escolhido ao acaso, ter no mínimo 19 ou exatamente 16 anos é tal que:

$$P = \frac{8 + 4}{20} = \frac{12}{20} = 0{,}60 = 60\%$$

Em questões como a 3, a resposta é dada pela soma dos números que identificam as alternativas corretas.

3 (UFPR) Um experimento consiste em imprimir as letras *A*, *B*, *C*, em ordem aleatória e sem repetição de qualquer uma das letras. Desse experimento, é correto afirmar:

(01) O espaço amostral do experimento possui 3 elementos.
(02) A probabilidade de que pelo menos uma das letras ocupe o seu lugar próprio do alfabeto é $\frac{2}{3}$.
(04) A probabilidade de que nenhuma das letras ocupe o seu lugar próprio do alfabeto é 0,25.
(08) A probabilidade de que todas as letras ocupem o seu lugar próprio do alfabeto é $\frac{1}{6}$.
(16) A probabilidade de a letra *A* não ocupar o seu lugar próprio do alfabeto é $\frac{2}{3}$.

01. Incorreta
$U = \{(A, B, C), (A, C, B), (B, A, C), (B, C, A), (C, A, B), (C, B, A)\}$
$n(U) = 6$
02. Correta
$E_1 = \{(A, B, C), (A, C, B), (B, A, C), (C, B, A)\} \rightarrow n(E_1) = 4$
$P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(U)} \rightarrow P(E_1) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$
04. Incorreta
$E_2 = \{(B, C, A), (C, A, B)\} \rightarrow n(E_2) = 2$
$P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(U)} \rightarrow P(E_2) = \frac{2}{6} \simeq 0{,}33$
08. Correta
$E_3 = \{(A, B, C)\} \rightarrow n(E_3) = 1$
$P(E_3) = \frac{n(E_3)}{n(U)} \rightarrow P(E_3) = \frac{1}{6}$
16. Correta
$E_4 = \{(B, A, C), (B, C, A), (C, A, B), (C, B, A)\} \rightarrow n(E_4) = 4$
$P(E_4) = \frac{n(E_4)}{n(U)} \rightarrow P(E_4) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$
Portanto: $2 + 8 + 16 = 26$

O quadro abaixo refere-se às questões 4 e 5.

Em um concurso de televisão, apresentam-se ao participante 3 fichas voltadas para baixo, estando representada em cada uma delas as letras *T*, *V* e *E*. As fichas encontram-se alinhadas em uma ordem qualquer. O participante deve ordenar as fichas ao seu gosto, mantendo as letras voltadas para baixo, tentando obter a sigla TVE. Ao desvirá-las, para cada letra que esteja na posição correta ganhará um prêmio de R$ 200,00.

4 (ENEM) A probabilidade de o participante não ganhar qualquer prêmio é igual a:

a) 0 x b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{1}{6}$

Espaço amostral *E*
Evento *A*: não ganhar qualquer prêmio
P(A) = probabilidade de ocorrer *A*
E = {TVE, VET, ETV, VTE, TEV, EVT} → n(E) = 6
A = {VET, ETV} → n(A) = 2

$P(A) = \frac{n(A)}{n(E)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

5 (ENEM) A probabilidade de o concorrente ganhar exatamente o valor de R$ 400,00 é igual a:

x a) 0 b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{1}{6}$

Evento *B*: ganhar exatamente o valor de R$ 400,00
P(B) = probabilidade de ocorrer *B*
Para ocorrer o evento *B* o concorrente deverá acertar duas e apenas duas letras na posição correta, o que é impossível. Se duas letras estiverem na posição correta, a terceira letra também estará.
Assim, n(B) = 0.

$P(B) = \frac{n(B)}{n(E)} = \frac{0}{6} = 0$

6 (UFBA) Uma pessoa esqueceu a senha de seu cartão de crédito que é composta de seis algarismos distintos. Lembrou-se de quais eram os três primeiros algarismos e os três últimos, mas não da ordem em que eles apareciam. Sendo *P* a probabilidade de que ela acerte a senha na primeira tentativa, calcule $\frac{1}{P}$.

- Para os três primeiros algarismos, temos: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ possibilidades.
- Para os três últimos algarismos, temos: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ possibilidades.

A probabilidade para acertar a senha na primeira tentativa é:

$P = \frac{1}{6 \cdot 6} = \frac{1}{36}$

Logo, $\frac{1}{P} = 36$.

7 (MACK-SP) Considere a seqüência (2, 3, ..., 37), de números primos maiores que 1 e menores que 40. Escolhidos ao acaso dois deles, a probabilidade de serem ímpares consecutivos é:

a) $\frac{1}{12}$ x b) $\frac{5}{66}$ c) $\frac{2}{33}$ d) $\frac{1}{33}$ e) $\frac{4}{33}$

A seqüência dos números primos, entre 1 e 40, é:
B = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37}
Existem 5 pares de dois primos, entre ímpares consecutivos em *B*:
(3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19) e (29, 31)
Existem $C_{12,\,2} = 66$ duplas de elementos de *B*.
Então, a probabilidade procurada é $P = \frac{5}{66}$.

8 (ENEM) Em determinado bairro há duas empresas de ônibus, ANDABEM e BOMPASSEIO, que fazem o trajeto levando e trazendo passageiros do subúrbio ao centro da cidade. Um ônibus de cada uma dessas empresas parte do terminal a cada 30 minutos, nos horários indicados na tabela.

Horários dos ônibus	
ANDABEM	BOMPASSEIO
...	...
6h 00min	6h 10min
6h 30min	6h 40min
7h 00min	7h 10min
7h 30min	7h 40min
...	...

Carlos mora próximo ao terminal de ônibus e trabalha na cidade. Como não tem hora certa para chegar ao trabalho nem preferência por qualquer das empresas, toma sempre o primeiro ônibus que sai do terminal. Nessa situação, pode-se afirmar que a probabilidade de Carlos viajar num ônibus da empresa ANDABEM é:

a) um quarto da probabilidade de ele viajar num ônibus da empresa BOMPASSEIO.
b) um terço da probabilidade de ele viajar num ônibus da empresa BOMPASSEIO.
c) metade da probabilidade de ele viajar num ônibus da empresa BOMPASSEIO.
X d) duas vezes maior do que a probabilidade de ele viajar num ônibus da empresa BOMPASSEIO.
e) três vezes maior do que a probabilidade de ele viajar num ônibus da empresa BOMPASSEIO.

Carlos tomará o ônibus da empresa BOMPASSEIO se ele chegar ao terminal depois das 6 h e antes das 6h 10min ou depois das 6h 30min e antes das 6h 40min, ou seja, isso pode ocorrer num intervalo de 10 minutos a cada período de 30 minutos. Então, a probabilidade correspondente é $\frac{10}{30}$ ou $\frac{1}{3}$.
Mas, se Carlos chegar ao terminal depois das 6h 10min e antes das 6h 30min ou depois das 6h 40min e antes das 7 h, ele tomará o ônibus da empresa ANDABEM, o que pode ocorrer num intervalo de 20 minutos a cada período de 30 minutos. Então, a probabilidade correspondente é de $\frac{20}{30}$ ou $\frac{2}{3}$.

Logo, a probabilidade de Carlos viajar num ônibus da empresa ANDABEM é duas vezes a probabilidade de ele viajar num ônibus da empresa BOMPASSEIO.

9 (Unicamp-SP) Em Matemática, um número natural *a* é chamado *palíndromo* se seus algarismos, escritos em ordem inversa, produzem o mesmo número. Por exemplo, 8, 22 e 373 são palíndromos. Pergunta-se:

a) Quantos números naturais palíndromos existem entre 1 e 9 999?
b) Escolhendo-se ao acaso um número natural entre 1 e 9 999, qual é a probabilidade de que esse número seja palíndromo? Tal probabilidade é maior ou menor que 2%? Justifique sua resposta.

a) Considerando a frase "existem entre 1 e 9 999" como "existem entre 1 e 9 999, inclusive 1 e 9 999", tem-se:
- 9 "palíndromos" com um algarismo;
- $9 \cdot 1 = 9$ "palíndromos" com dois algarismos;
- $9 \cdot 10 \cdot 1 = 90$ "palíndromos" com três algarismos;
- $9 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 1 = 90$ "palíndromos" com quatro algarismos; portanto, existem $(9 + 9 + 90 + 90) = 198$ "palíndromos" entre 1 e 9 999.

b) A probabilidade de um número natural escolhido entre 1 e 9 999, inclusive 1 e 9 999, ser "palíndromo" é $\frac{198}{9\,999} = \frac{2}{101} < \frac{2}{100} = 2\%$.

10 (PUC-SP) Serão sorteados 4 prêmios iguais entre os 20 melhores alunos de um colégio, dentre os quais estão Tales e Euler. Se cada aluno pode receber apenas um prêmio, a probabilidade de que Tales ou Euler façam parte do grupo sorteado é:

a) $\frac{3}{95}$ b) $\frac{1}{19}$ c) $\frac{3}{19}$ X d) $\frac{7}{19}$ e) $\frac{38}{95}$

O número de grupos possíveis de 4 alunos premiados e que podem ser escolhidos dentre os 20 é $C_{20,\,4}$.
Desse total, Euler e Tales não fazem parte do grupo sorteado em $C_{18,\,4}$ deles.
A probabilidade pedida é, portanto, igual a:

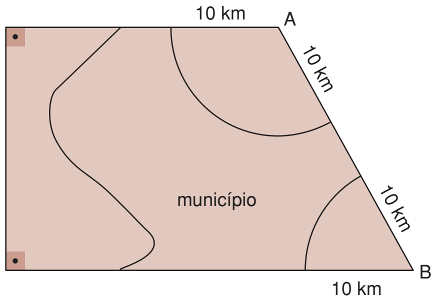
$$P = 1 - \frac{C_{18,\,4}}{C_{20,\,4}}$$

$$C_{18,\,4} = \frac{18!}{4!14!} = 12 \text{ e } C_{20,\,4} = \frac{20!}{4!16!} = 19$$

Então:

$$P = 1 - \frac{12}{19} = \frac{7}{19}$$

11 (ENEM) Um município de 628 km² é atendido por duas emissoras de rádio cujas antenas *A* e *B* alcançam um raio de 10 km do município, conforme mostra a figura.



Para orçar um contrato publicitário, uma agência precisa avaliar a probabilidade que um morador tem de, circulando livremente pelo município, encontrar-se na área de alcance de pelo menos uma das emissoras. Essa probabilidade é de, aproximadamente:

a) 20% x b) 25% c) 30% d) 35% e) 40%

Na figura, os ângulos de vértices *A* e *B* são ângulos suplementares, isto é, a soma de suas medidas é 180°. Logo, a superfície coberta por uma das emissoras corresponde a um semicírculo de raio 10 km cuja área é dada por $\frac{\pi 10^2}{2}$ km², ou seja, aproximadamente 157 km².

A probabilidade de um morador encontrar-se na área de alcance de pelo menos uma das emissoras é $\frac{157}{628} = 25\%$.

12 (UFV-MG) Os bilhetes de uma rifa são numerados de 1 a 100. A probabilidade de o bilhete sorteado ser um número maior que 40 ou um número par é:

a) 60% b) 70% x c) 80% d) 90% e) 50%

Nas condições do problema:
- existem 60 números maiores que 40;
- existem 50 números pares;
- existem 30 números pares, maiores que 40.

Logo, a probabilidade de o bilhete sorteado ser um número maior que 40 ou par é:

P = P (maior que 40) + P (par) − P (maior que 40 e par)

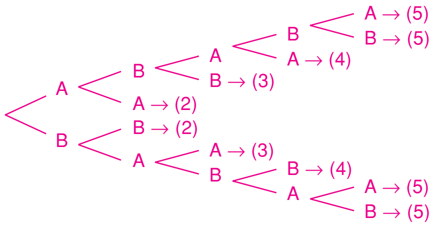
$$P = \frac{40}{100} + \frac{50}{100} - \frac{30}{100}$$

$$P = \frac{60 + 50 - 30}{100} = 80\%$$

13 (UFC) Duas equipes disputam entre si uma série de jogos em que não pode ocorrer empate e as duas equipes têm as mesmas chances de vitória. A primeira equipe que conseguir duas vitórias seguidas ou três vitórias alternadas vencerá a série de jogos. Qual a probabilidade de uma equipe vencer a série de jogos com duas vitórias seguidas?

Sejam *A* e *B* as equipes envolvidas na disputa. Como as chances de vitória das equipes são iguais, a probabilidade de uma equipe vencer um jogo é $\frac{1}{2}$.

Construindo a árvore de possibilidades:



Observando a árvore, concluímos que existem 10 possibilidades de encerramento da série de jogos:

1) Com dois jogos:

$$AA \text{ e } BB \rightarrow P(AA) = P(BB) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

2) Com três jogos:

$$ABB \text{ e } BAA \rightarrow P(ABB) = P(BAA) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

3) Com quatro jogos:

ABAA e BABB → P(ABAA) = P(BABB)

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

4) Com cinco jogos: ABABB, BABAA, ABABA e BABAB, em que apenas ABABB e BABAA têm duas vitórias seguidas

$$P(ABABB) = P(BABAA) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$$

Portanto, a probabilidade de uma equipe vencer a série de jogos com duas vitórias seguidas é:

$$P = 2 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{1}{16} + 2 \cdot \frac{1}{32} = \frac{15}{16}$$

14 (UERJ) Numa cidade, 20% dos carros são da marca *W*, 25% dos carros são táxis e 60% dos táxis não são da marca *W*.

Determine a probabilidade de que um carro escolhido ao acaso, nessa cidade, não seja táxi nem seja da marca *W*.

Porcentagem de táxis que não são da marca *W*: 0,60 · 0,25 = 0,15 = 15%.

Se 20% dos carros são da marca *W*, 80% são de outras marcas.

Desses 80%, 15% são táxis, portanto, 80% − 15% = 65% não são táxis nem da marca *W*.

15 (UFMT) Uma indústria farmacêutica fez uma estimativa da eficiência de um medicamento para tratamento de determinada doença, ministrando-o a um grande número de pessoas portadoras dessa doença. Os resultados obtidos, classificados em três categorias: *Cura, Melhora* (mas não cura total) e *Nenhuma alteração*, são mostrados na tabela abaixo.

Resultado	%	Probabilidade
Cura	70	0,7
Melhora	20	0,2
Nenhuma alteração	10	0,1

Considere a experiência aleatória que consiste em selecionar 4 pessoas portadoras da doença, ministrar-lhes o medicamento e determinar em que categoria o resultado se enquadra. Sendo *P* a probabilidade de a 1ª pessoa apresentar melhora, a 2ª e a 3ª não terem qualquer alteração e a 4ª ser curada, calcule $p \cdot 10^4$.

$P = \underbrace{0,2}_{1^a} \cdot \underbrace{0,1}_{2^a} \cdot \underbrace{0,1}_{3^a} \cdot \underbrace{0,7}_{4^a} = 2 \cdot 7 \cdot 10^{-4}$

$P \cdot 10^4 = 14 \cdot 10^{-4} \cdot 10^4 = 14$

16 (UFSCar-SP) Um jogo para duas pessoas consiste em uma urna com 2 bolas vermelhas e 1 azul. Ganha o jogo quem retirar da urna a bola azul. Caso um jogador retire uma bola vermelha, essa volta para a urna, e o outro jogador faz sua retirada. Os jogadores vão alternando suas retiradas até que saia a bola azul. Todas as bolas têm a mesma probabilidade de ser retiradas. A probabilidade de o primeiro a jogar ganhar o jogo, isto é, em uma de suas retiradas pegar a bola azul, vale:

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{5}$ c) $\frac{1}{2}$ x d) $\frac{3}{5}$ e) $\frac{2}{3}$

O primeiro jogador ganhará o jogo se retirar a bola azul na primeira jogada ou na terceira ou na quinta, e assim por diante.
Sendo *P* a probabilidade de o primeiro jogador ganhar o jogo, temos:

$P = \underbrace{\frac{1}{3}}_{1^a\text{ rodada}} + \underbrace{\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}}_{2^a\text{ rodada}} + \underbrace{\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}}_{3^a\text{ rodada}} + \ldots$ → Soma de uma PG infinita, em que: $a_1 = \frac{1}{3}$ e $q = \left(\frac{2}{3}\right)^2$

$P = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{9}} = \frac{3}{5}$

17 (UEL-PR) Uma máquina caça-níqueis possui três discos. Cada disco contém um conjunto de símbolos que, na figura abaixo, estão representados nas três colunas à direita:

Ao se inserir R\$ 1,00 e pressionar um botão, os três discos começam a rodar. O jogador deve, então, pressionar outros três botões, ao acaso, para parar cada disco. Os três símbolos que aparecem na linha horizontal marcada serão iluminados e determinarão o quanto o jogador ganhará:

Combinação	Prêmio (em R$)
3 bandeiras	1 500,00
2 bandeiras	750,00
3 bolas	250,00
3 camisas	250,00
3 chuteiras	250,00

Qual a probabilidade de uma pessoa, em apenas uma jogada, ganhar R\$ 1 500,00?

a) $\frac{1}{8\,000}$ x b) $\frac{1}{4\,000}$ c) $\frac{1}{400}$ d) $\frac{1}{80}$ e) $\frac{1}{4}$

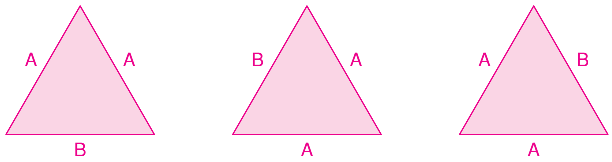
A probabilidade de que, em apenas uma jogada, se ganhe R\$ 1 500,00 é:

$P = \underbrace{\frac{1}{20}}_{1^o\text{ disco}} \cdot \underbrace{\frac{1}{20}}_{2^o\text{ disco}} \cdot \underbrace{\frac{2}{20}}_{3^o\text{ disco}} = \frac{1}{4\,000}$

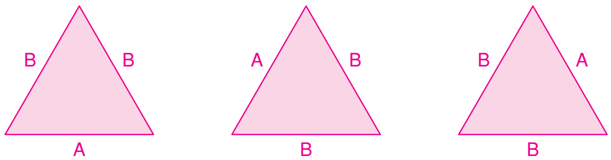
18 (Fuvest-SP) Dois triângulos congruentes, com lados coloridos, são indistinguíveis se podem ser sobrepostos de tal modo que as cores dos lados coincidentes sejam as mesmas. Dados dois triângulos eqüiláteros congruentes, cada um de seus lados é pintado com uma cor escolhida dentre duas possíveis, com igual probabilidade. A probabilidade de que esses triângulos sejam indistinguíveis é de:

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{9}{16}$ x d) $\frac{5}{16}$ e) $\frac{15}{32}$

Supondo que as cores disponíveis para pintar os lados dos triângulos sejam *A* e *B* e observando que os triângulos



são indistinguíveis pela definição dada, como também são indistinguíveis os triângulos



tem-se:

- A tabela apresenta as possibilidades de pintura de cada triângulo e sua respectiva probabilidade:

Pintura	Probabilidade
3 lados de cor *A*	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$
2 lados de cor *A* e um de cor *B*	$3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$
1 lado de cor *A* e 2 de cor *B*	$3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$
3 lados de cor *B*	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

- A probabilidade de que esses dois triângulos sejam indistinguíveis é:

$$P = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} + \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} + \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{20}{64} = \frac{5}{16}$$

19 (ESPM-SP) Uma urna contém cinco bolas idênticas, numeradas de 1 a 5. Uma bola é retirada da urna aleatoriamente e seu número é observado. Se for um número ímpar, essa bola será deixada fora da urna, mas, se for par, ela retornará à urna. Em ambos os casos uma segunda bola é retirada. A probabilidade de que ela apresente um número par é:

a) 32% x b) 46% c) 48% d) 52% e) 64%

Seja P_1 a probabilidade de que a 1ª bola seja ímpar e a 2ª bola seja par e P_2 a probabilidade de que a 1ª bola seja par e a 2ª seja par.

Temos:

$$P_1 = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10} = 30\% \text{ e } P_2 = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25} = 16\%$$

A probabilidade pedida é:

$P = P_1 + P_2 = 30\% + 16\% = 46\%$

20 (FGV-SP) Uma escola comprou computadores de três fabricantes: *A*, *B*, *C*. Trinta por cento foram comprados de *A*, trinta por cento de *B*, e o restante de *C*. A probabilidade de um computador fabricado por *A* apresentar algum tipo de problema, nos próximos 30 meses, é 0,1. As mesmas probabilidades dos fabricantes *B* e *C* são, respectivamente, 0,15 e 0,2.

a) Qual a probabilidade de que um computador escolhido ao acaso seja fabricado por *A* e represente algum problema nos próximos 30 meses?

b) Se um computador apresentar algum problema nos próximos 30 meses, qual a probabilidade de que tenha sido fabricado por *A*?

a) Probabilidade de:
- ser fabricado por *A*: 30% = 0,3
- apresentar algum problema: 0,1

Então, a probabilidade de que um computador seja fabricado por *A* e apresente algum problema é dada por:

$P = 0,3 \cdot 0,1 = 0,03$

b) Se um computador apresentar algum problema, então a probabilidade de que ele tenha sido fabricado por *A* será:

$$P = \frac{0,3 \cdot 0,1}{0,3 \cdot 0,1 + 0,3 \cdot 0,15 + 0,4 \cdot 0,2}$$

$$P = \frac{0,03}{0,03 + 0,045 + 0,08} = \frac{30}{155} = \frac{6}{31}$$

21 (UnB-DF) Para ganhar na loteria LOTOGOL, da Caixa Econômica Federal (CAIXA), ilustrada na cartela abaixo, o apostador deve acertar o número de gols marcados por cada um dos dois times participantes em 5 jogos de futebol. Mais precisamente, o apostador deve acertar se cada time marcará 0, 1, 2, 3 ou mais de 3 gols. Para cada jogo, o apostador pode marcar 5^2 resultados diferentes. Conseqüentemente, o número de possíveis apostas diferentes existentes na LOTOGOL é 25^5 (= 9 765 625). Supondo que os 9 765 625 resultados diferentes sejam igualmente prováveis, julgue os itens seguintes, considerando um apostador que preencha uma única cartela de aposta:

a) A probabilidade de o apostador acertar os resultados dos 5 jogos é igual a $\dfrac{1}{5^{10}}$.

b) É mais provável o apostador obter 20 caras ao lançar ao acaso 20 vezes uma moeda não viciada do que acertar os resultados dos 5 jogos.

c) A probabilidade de o apostador acertar os resultados de somente 4 jogos é igual a 120 vezes a probabilidade de ele acertar os resultados dos 5 jogos.

d) A probabilidade de o apostador acertar os resultados de apenas 3 jogos é igual a 5 760 vezes a probabilidade de ele acertar os resultados dos 5 jogos.

a) Verdadeiro, pois a probabilidade de o apostador acertar os resultados dos 5 jogos é:

$$P = \frac{1}{5^2} \cdot \frac{1}{5^2} \cdot \frac{1}{5^2} \cdot \frac{1}{5^2} \cdot \frac{1}{5^2} = \frac{1}{5^{10}} = \frac{1}{9\,765\,625}$$

b) Verdadeiro, pois a probabilidade de obter 20 caras ao lançar uma moeda é:

$$P = \left(\frac{1}{2}\right)^{20} = \frac{1}{1\,048\,576} > \frac{1}{9\,765\,625}$$

c) Verdadeiro, pois a probabilidade de acertar somente 4 jogos é:

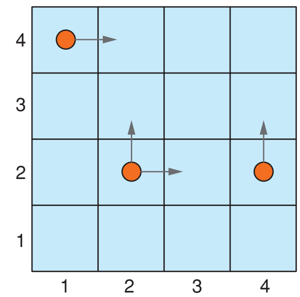
$$P = C_{5,\,4} \cdot \frac{1}{5^2} \cdot \frac{1}{5^2} \cdot \frac{1}{5^2} \cdot \frac{1}{5^2} \cdot \frac{24}{5^2} = 120 \cdot \frac{1}{5^{10}}$$

d) Verdadeiro, pois a probabilidade de acertar somente 3 jogos é:

$$P = C_{5,\,3} \cdot \frac{1}{5^2} \cdot \frac{1}{5^2} \cdot \frac{1}{5^2} \cdot \frac{24}{5^2} \cdot \frac{24}{5^2} = 5\,760 \cdot \frac{1}{5^{10}}$$

22 (Fuvest-SP) Um tabuleiro tem 4 linhas e 4 colunas. O objetivo de um jogo é levar uma peça da casa inferior esquerda, casa (1, 1), para a casa superior direita, casa (4, 4), sendo que esta peça deve mover-se, de cada vez, para a casa imediatamente acima ou imediatamente à direita. Se apenas uma dessas casas existir, a peça irá mover-se necessariamente para ela. Por exemplo, dois caminhos possíveis para completar o trajeto são $(1, 1) \to (1, 2) \to (2, 2) \to (2, 3) \to$ $\to (3, 3) \to (3, 4) \to (4, 4)$ e $(1, 1) \to (2, 1) \to (2, 2) \to (3, 2) \to$ $\to (4, 2) \to (4, 3) \to (4, 4)$.

a) Por quantos caminhos distintos pode-se completar esse trajeto?



b) Suponha que o caminho a ser percorrido seja escolhido da seguinte forma: sempre que houver duas opções de movimento, lança-se uma moeda não viciada; se der cara, a peça move-se para a casa à direita e se der coroa, ela se move para a casa acima. Dessa forma, cada caminho contado no item *a* terá uma certa probabilidade de ser percorrido. Descreva os caminhos que têm maior probabilidade de ser percorridos e calcule essa probabilidade.

a) Chamando de *C* cada movimento para cima e de *D* cada movimento para a direita, o número de caminhos distintos para se completar o trajeto é igual ao número de anagramas da "palavra" CCCDDD.
Temos, então, uma permutação com repetição.
Esse total é dado por $P_6^{(3,\,3)} = \dfrac{6!}{3!3!} = 20$.

b) Os caminhos que têm a maior probabilidade de ser percorridos são aqueles em que é mínimo o número de "duas opções de movimento" para a casa seguinte.
Esse fato ocorre quando são realizados três movimentos consecutivos para a direita ou três movimentos consecutivos para cima.
Os dois caminhos são:
$(1, 1) \to (2, 1) \to (3, 1) \to (4, 1) \to (4, 2) \to (4, 3) \to (4, 4)$ e $(1, 1) \to (1, 2) \to$ $\to (1, 3) \to (1, 4) \to (2, 4) \to (3, 4) \to (4, 4)$ e para cada um deles a probabilidade é $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = \dfrac{1}{8}$.

23 (PUC-SP) Aser, Bia, Cacá e Dedé fazem parte de um grupo de 8 pessoas que serão colocadas lado a lado para tirar uma única fotografia. Se os lugares em que eles ficarão posicionados forem aleatoriamente escolhidos, a probabilidade de que, nessa foto, Aser e Bia apareçam um ao lado do outro e Cacá e Dedé não apareçam um ao lado do outro será:

X a) $\frac{5}{28}$ b) $\frac{3}{14}$ c) $\frac{7}{28}$ d) $\frac{2}{7}$ e) $\frac{9}{28}$

O número de modos diferentes para que as 8 pessoas se posicionem, lado a lado, para a foto é 8!.
O número de modos nos quais Aser e Bia aparecem juntos e Cacá e Dedé não aparecem juntos será dado por:

$$\overbrace{2 \cdot 7!}^{\text{Aser e Bia juntos}} - \overbrace{2 \cdot 2 \cdot 6!}^{\text{Aser e Bia juntos e Cacá e Dedé juntos}}$$

Assim, a probabilidade pedida será:

$$\frac{2 \cdot 7! - 2 \cdot 2 \cdot 6!}{8!} = \frac{5}{28}$$

24 (MACK-SP) Uma loja colocou à venda 27 calças *jeans*, das quais 6 apresentam defeito. Escolhendo-se 3 calças ao acaso, a probabilidade de as 3 estarem com defeito é:

a) $\frac{15}{351}$ b) $\frac{2}{9}$ c) $\frac{6}{117}$ X d) $\frac{4}{585}$ e) $\frac{24}{65}$

Do enunciado, temos:

$$P = \overset{\text{Defeito}}{\frac{6}{27}} \cdot \overset{\text{Defeito}}{\frac{5}{26}} \cdot \overset{\text{Defeito}}{\frac{4}{25}} = \frac{4}{585}$$

25 (Unesp-SP) Joga-se um dado honesto. O número que ocorreu (isto é, da face voltada para cima) é o coeficiente *b* da equação $x^2 + bx + 1 = 0$. Determine a probabilidade de essa equação ter:

a) raízes reais;

b) raízes reais, sabendo-se que ocorreu um número ímpar.

a) Para que a equação $x^2 + bx + 1 = 0$, com $b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, tenha raízes reais, o discriminante (Δ) dessa equação deve ser não-negativo. Como $\Delta = b^2 - 4$, então os valores possíveis de *b* são 2, 3, 4, 5 e 6, ou seja, existem cinco possibilidades para *b*.

Portanto, a probabilidade de essa equação ter raízes reais é $\frac{5}{6}$.

b) Sabendo que ocorreu um número ímpar (ou seja, 1, 3 ou 5), temos do item *a* que a probabilidade pedida é $\frac{2}{3}$.

26 (FGV-SP)

a) Uma urna contém 6 bolas brancas, 8 bolas pretas e 4 bolas verdes, todas iguais e indistinguíveis ao tato. Um jogador tira uma bola ao acaso. Se a bola for branca, ele ganhará; se a bola for preta, ele perderá. Se a bola for verde, ele retirará outra bola ao acaso, sem repor a verde. Ele ganhará se a segunda bola for branca; se não, ele perderá.
Determine a probabilidade de o jogador ganhar.

b) Sete pessoas, entre elas Bento e Paulo, estão reunidas para escolher, entre si, a diretoria de um clube formada por um presidente, um vice-presidente, um secretário e um tesoureiro. Determine o número de maneiras de compor a diretoria, em que Paulo é vice-presidente e Bento não é presidente nem tesoureiro.

a) O jogador ganhará se tirar a 1ª branca ou se tirar a 1ª verde e a 2ª branca.
Assim:

$$P = \overset{\text{B}}{\frac{6}{18}} \overset{\text{ou}}{+} \overset{\text{V}}{\frac{4}{18}} \overset{\text{e}}{\cdot} \overset{\text{B}}{\frac{6}{17}} = \frac{7}{17}$$

b) Do enunciado, temos:

Com Bento:

Pres.	Paulo	Bento	Tes.	
↓	↓	↓	↓	
5 ·	1 ·	1 ·	4	= 20

ou

Sem Bento:

Pres.	Paulo	Sec.	Tes.	
↓	↓	↓	↓	
5 ·	1 ·	4 ·	3	= 60

Logo, o número pedido é 20 + 60 = 80.

Sólidos Geométricos

Em questões como a 1, as alternativas verdadeiras devem ser marcadas na coluna I e as falsas, na II.

1 (Unicap-PE) As proposições desta questão estão relacionadas a poliedros.

I – II

0 – $\cancel{0}$ Em um poliedro convexo, se o número de vértices é 8 e o de arestas é 12, então o número de faces é igual a 4.

1 – $\cancel{1}$ Existem seis, e somente seis, classes de poliedros de Platão.

2 – $\cancel{2}$ Um poliedro convexo pode ter duas faces em um mesmo plano.

3 – $\cancel{3}$ A soma dos ângulos das faces de um poliedro convexo é dada por 360° · V, em que *V* é o número de vértices.

$\cancel{4}$ – 4 Em um poliedro de Platão, em cada vértice concorre o mesmo número de arestas.

0 0 Falsa
Pela relação de Euler: $A + 2 = V + F \rightarrow 12 + 2 = 8 + F \rightarrow F = 6$.

1 1 Falsa
São cinco as classes de poliedros de Platão: tetraedro regular, hexaedro regular, octaedro regular, dodecaedro regular e icosaedro regular.

2 2 Falsa

3 3 Falsa
A fórmula correta é $360° \cdot (V - 2)$.

4 4 Verdadeira

I	II
0	$\cancel{0}$
1	$\cancel{1}$
2	$\cancel{2}$
3	$\cancel{3}$
$\cancel{4}$	4

2 (UFRJ) Uma pedra de massa 25 kg tem a forma de um paralelepípedo com 2 cm de espessura. Sua base é um quadrado com 1 m de lado. Qual a massa de uma outra pedra, do mesmo material, que tem a forma de um paralelepípedo com 2 m de comprimento, 80 cm de largura e 3 cm de espessura?

Pedra 1: $V_1 = 1 \cdot 1 \cdot 0{,}02 = 0{,}02\ m^3 \rightarrow$ massa = 25 kg
Pedra 2: $V_2 = 2 \cdot 0{,}80 \cdot 0{,}03 = 0{,}048\ m^3$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{0{,}048}{0{,}02} = \frac{4{,}8 \cdot 10^2}{2 \cdot 10^2} = 2{,}4$$

Massa da pedra 2 = 2,4 · massa da pedra 1 = 2,4 · 25 = 60 kg

3 (UERJ) Para construir um poliedro convexo, um menino dispõe de folhas retangulares de papel de seda, cada uma com 56 cm de comprimento por 32 cm de largura, e de 9 varetas de madeira, cada uma com 40 cm de comprimento. Na construção da estrutura desse poliedro todas as faces serão triangulares e cada aresta corresponderá a uma vareta. Admita que o menino usará as 9 varetas e que todas as faces serão revestidas com o papel de seda.
Determine o número mínimo de folhas do papel de seda necessárias para revestir o poliedro.

A: número de arestas e *F*: número de faces triangulares
Pelos dados do problema:
$A = 9 \cdot 2 = 18$ lados para os triângulos
$F = 18 : 3 = 6$ faces triangulares
• Cálculo da área total das faces (6 triângulos eqüiláteros)

$$A_{faces} = 6 \cdot \frac{40^2\sqrt{3}}{4} = 2\,400\sqrt{3} \simeq 2\,400 \cdot 1{,}7 = 4\,080\ cm^2$$

• Cálculo da área de cada folha de papel retangular:
$A_{folha} = 56 \cdot 32 = 1\,792\ cm^2$
Número mínimo de folhas: $\frac{4\,080}{1\,792} \simeq 2{,}28 \rightarrow 3$ folhas

4 (UENF-RJ) Para uma demonstração prática, um professor utiliza um tanque com a forma de um paralelepípedo retângulo, cujas dimensões internas correspondem a 30 cm de largura, 60 cm de comprimento e 50 cm de altura. Esse tanque possui uma torneira que pode enchê-lo, estando ele completamente vazio, em 10 minutos, e um ralo que pode esvaziá-lo, estando ele completamente cheio, em 18 minutos. O professor abre a torneira, deixando o ralo aberto, e solicita que um aluno registre o tempo decorrido até que o tanque fique totalmente cheio.
Estabeleça o tempo que deve ser registrado pelo aluno.

O volume do tanque é: $30 \cdot 60 \cdot 50 = 90\,000\ cm^3 = 90\ \ell$.
Em cada minuto, entram no tanque: $\frac{90\ \ell}{10} = 9\ \ell$.
Em cada minuto, saem do tanque: $\frac{90\ \ell}{18} = 5\ \ell$.
Em cada minuto, restam no tanque: $9\ \ell - 5\ \ell = 4\ \ell$.
Portanto, 90 : 4 = 22,5 min.

5 (UEL-PR) A figura construída segundo a seqüência abaixo é denominada Esponja de Sierpinski ou Esponja de Menger. Representa um fractal gerado a partir de um cubo. Partindo-se do cubo inicial, obtêm-se outros cubos menores, com arestas iguais a $\frac{1}{3}$ da aresta deste. O cubo central e os cubos do centro de cada face são removidos. O procedimento se repete em cada um dos cubos menores restantes. O processo é interado infinitas vezes, gerando a Esponja.

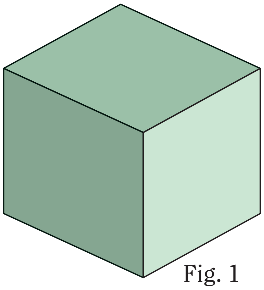


Fig. 1

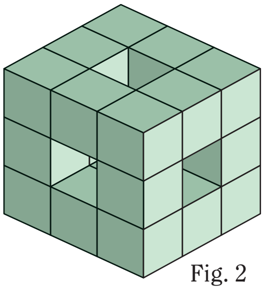


Fig. 2

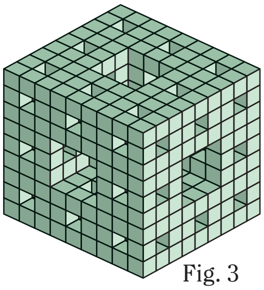


Fig. 3

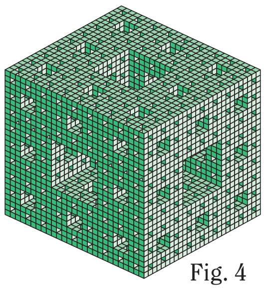


Fig. 4

Supondo que a medida da aresta do cubo inicial seja igual a 1 m, qual é a área, em m², de uma face da figura 30?

a) $\left(\frac{8}{9}\right)^{30}$

x b) $\left(\frac{8}{9}\right)^{29}$

c) $\left(\frac{9}{8}\right)^{30}$

d) $\left(\frac{20}{27}\right)^{19}$

e) $\left(\frac{27}{20}\right)^{19}$

Cálculo das áreas das faces:

Fig. 1: $S_1 = 1\ m^2$

Fig. 2: $S_2 = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}\ m^2$

Fig. 3: $S_3 = \frac{8}{9} - 8 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 = \frac{8}{9} - \frac{8}{81} = \frac{64}{81}\ m^2$

Fig. 4: $S_4 = \frac{64}{81} - 64 \cdot \left(\frac{1}{27}\right)^2 = \frac{64}{81} - \frac{64}{729} = \frac{512}{729}\ m^2$

A seqüência das áreas: $\left(1, \frac{8}{9}, \frac{64}{81}, \frac{512}{729}, \ldots\right)$ é uma PG

em que $a_1 = 1$ e $q = \frac{8}{9}$.

Portanto, temos: $a_{30} = a_1 \cdot q^{29} = 1 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^{29} = \left(\frac{8}{9}\right)^{29}$.

6 (MACK-SP) Um poliedro convexo tem 3 faces triangulares, 4 quadrangulares e 5 pentagonais. O número de vértices desse poliedro é:

a) 25 b) 12 x c) 15 d) 9 e) 13

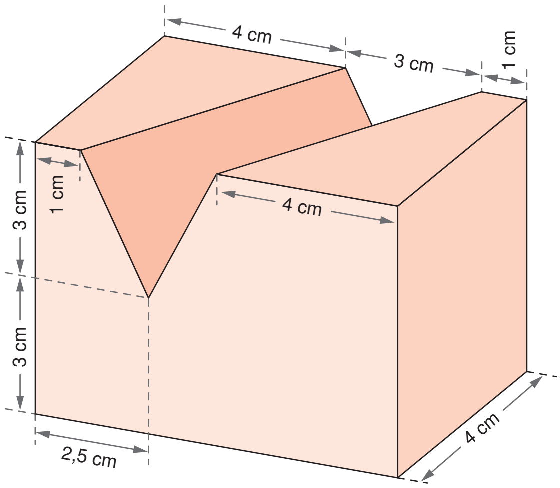
$F = 3 + 4 + 5 \rightarrow F = 12$

$A = \frac{3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 5}{2} \rightarrow A = 25$

$V - A + F = 2 \rightarrow V - 25 + 12 = 2 \rightarrow V = 15$

7 (UnB-DF) Considere o sólido obtido de um paralelepípedo retângulo, retirando-se um prisma, conforme indica a figura abaixo.

Calcule, em centímetros cúbicos, a metade do volume desse sólido.



Sejam *A* o paralelepípedo de dimensões 8 cm × 4 cm × 6 cm e *B* o prisma retirado.

O prisma retirado *B* tem altura H = 4 cm e a base é um triângulo em que um dos lados mede 3 cm e a respectiva altura, 3 cm.

$V = V_A - V_B$

$V_A = 8 \cdot 4 \cdot 6 = 192 \rightarrow V_A = 192\ cm^3$

$V_B = S_{b \cdot H} = \frac{3 \cdot 3}{2} \cdot 4 = 18 \rightarrow V_B = 18\ cm^3$

$V = 192 - 18 = 174 \rightarrow V = 174\ cm^3$

A metade do volume é $\frac{V}{2} = 87\ cm^3$.

8 (MACK-SP) O recipiente da figura, que contém água, é um prisma reto cujas bases são triângulos eqüiláteros de altura 2. A superfície da água é paralela à face ABCD. Se o volume ocupado pela água é metade do volume do prisma, o valor de h é:

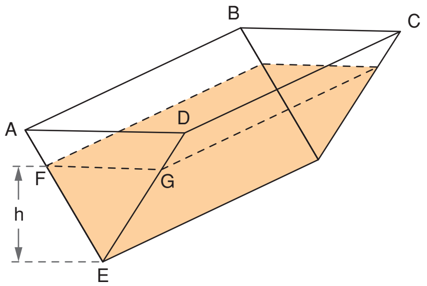
a) $\frac{6}{5}$

b) $\sqrt{3}$

x c) $\sqrt{2}$

d) $\frac{1}{2}$

e) $\frac{3}{4}$



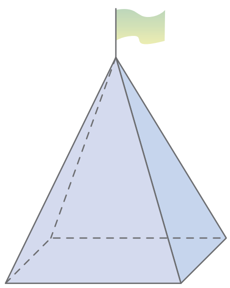
O volume ocupado pela água é metade do volume do prisma, quando a área do triângulo EFG é metade da área do triângulo ADE (pois o prisma recipiente e o prisma ocupado pela água possuem a mesma altura).

$$\frac{A_{\triangle EFG}}{A_{\triangle ADE}} = \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{h^2}{4} = \frac{1}{2} \rightarrow h^2 = 2$$

$$h = \sqrt{2}$$

9 (Vunesp-SP) O prefeito de uma cidade pretende colocar em frente à prefeitura um mastro com uma bandeira, que será apoiado sobre uma pirâmide de base quadrada feita de concreto maciço, como mostra a figura.



Sabendo-se que a aresta da base da pirâmide terá 3 m e que a altura da pirâmide será de 4 m, o volume de concreto (em m³) necessário para a construção da pirâmide será:

a) 36 b) 27 c) 18 x d) 12 e) 4

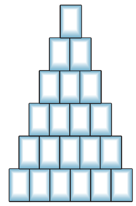
Pelos dados, temos:

$$V = \frac{A_B \cdot h}{3}$$

$$V = \frac{3^2 \cdot 4}{3}$$

$$V = 12 \text{ m}^3$$

10 (UFV-MG) Em um supermercado, as latas de óleo de determinada marca foram empilhadas de tal forma que cada nível tem uma lata a menos que o nível anterior e o vigésimo nível tem apenas uma lata. A visão frontal de parte dessa pilha está ilustrada na figura abaixo.



Sabendo-se que a lata de óleo tem a forma de um paralelepípedo retângulo de dimensões $0{,}10 \text{ m} \times 0{,}10 \text{ m} \times 0{,}18 \text{ m}$, o volume da pilha de latas é, em m³:

a) 0,342 b) 0,036 c) 0,756 x d) 0,378 e) 0,360

Começando pelo topo, o número de latas por pilha obedece à seqüência: (1, 2, 3, 4, ..., 20), que é uma PA em que $a_1 = 1$, $a_{20} = 20$ e $r = 1$.

$1 + 2 + 3 + 4 + ... + 20$

$V_{lata} = 0{,}10 \cdot 0{,}10 \cdot 0{,}18 = 0{,}0018 \text{ m}^3$

Volume da pilha: $210 \cdot 0{,}0018 = 0{,}378 \text{ m}^3$

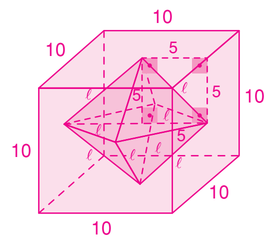
11 (Unicamp-SP) Considere um cubo cuja aresta mede 10 cm. O sólido cujos vértices são os centros das faces do cubo é um octaedro regular, cujas faces são triângulos eqüiláteros congruentes.

a) Calcule o comprimento da aresta desse octaedro regular.

b) Calcule o volume do mesmo octaedro.

Sejam:

- ℓ o comprimento, em centímetros, de cada aresta desse octaedro regular;
- V o volume, em cm³, desse octaedro.



a) ℓ é a diagonal de um quadrado de lado 5 cm.

Assim, $\ell = 5\sqrt{2}$ cm.

b) Como o volume do octaedro corresponde aos volumes de duas pirâmides de base quadrada com aresta da base ℓ e altura h = 5 cm:

$$V = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \ell^2 \cdot 5$$

Assim:

$$V = \frac{2}{3}\left(5\sqrt{2}\right)^2 \cdot 5 \rightarrow V = \frac{500}{3} \text{ cm}^2$$

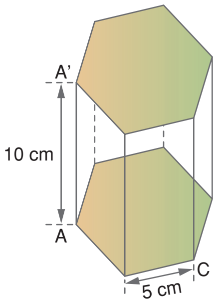
12 (UFJF-MG) Um paralelepípedo retângulo tem 22 m² de área total e arestas iguais a x, x + 1 e x + 2 metros. Calcule o volume desse sólido.

Seja S_T a área total do paralelepípedo retângulo.
Temos:
$S_T = 2[x(x + 1) + x(x + 2) + (x + 1)(x + 2)] = 22$
$3x^2 + 6x - 9 = 0 \to x^2 + 2x - 3 = 0$
Resolvendo esta última equação, obtemos $x = 1$ ou $x = -3$.
Logo, $x = 1$ e as arestas do paralelepípedo medem 1, 2 e 3 m.
Portanto, o volume V do paralelepípedo é: $V = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6\ m^3$.

13 (Unicamp-SP) A figura ao lado apresenta um prisma reto cujas bases são hexágonos regulares. Os lados dos hexágonos medem 5 cm cada um e a altura do prisma mede 10 cm.

a) Calcule o volume do prisma.

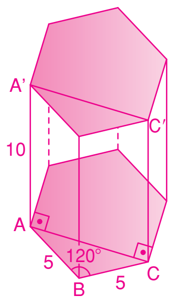
b) Encontre a área da secção desse prisma pelo plano que passa pelos pontos A, C e A'.



a) O volume V pedido, em cm³, é tal que:

$$V = \left(6 \cdot \frac{5^2 \cdot \sqrt{3}}{4}\right) \cdot 10 \to V = 375\sqrt{3}\ cm^3$$

b) Do enunciado, temos a figura, cotada em centímetros:

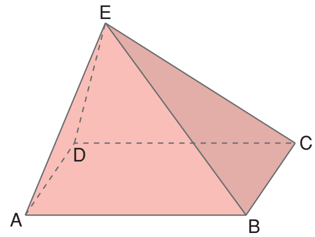


Aplicando o teorema dos cossenos no triângulo ABC, temos:
$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 - 2 \cdot (AB) \cdot (BC) \cdot \cos(A\hat{B}C)$

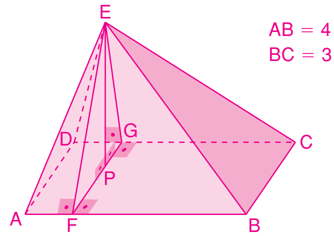
$$(AC)^2 = 5^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$AC = 5\sqrt{3}$ cm
A área S pedida, em cm², é a área do retângulo ACC'A'. Logo:
$S = (AC) \cdot (AA') \to S = 5\sqrt{3} \cdot 10 \to S = 50\sqrt{3}\ cm^2$

14 (Fuvest-SP) A base ABCD da pirâmide ABCDE é um retângulo de lados AB = 4 e BC = 3.
As áreas dos triângulos ABE e CDE são, respectivamente, $4\sqrt{10}$ e $2\sqrt{37}$. Calcule o volume da pirâmide.



Considere a figura, na qual $\overline{EP}$ é a altura da pirâmide ABCDE:



Vamos tomar o plano (EFG), que contém $\overline{EF}$ e é perpendicular a $\overline{AB}$ em F e a $\overline{CD}$ em G. Nessas condições, $\overline{EF}$ e $\overline{EG}$ são alturas dos triângulos ABE e CDE, respectivamente, e FG = 3.

Do enunciado, temos:

$$\frac{1}{2} \cdot AB \cdot EF = 4\sqrt{10} \to \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot EF = 4\sqrt{10} \to EF = 2\sqrt{10}$$

e

$$\frac{1}{2} \cdot CD \cdot EG = 2\sqrt{37} \to \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot EG = 2\sqrt{37} \to EG = \sqrt{37}$$

Aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos EFP e EGP, temos:

$EP^2 + PF^2 = EF^2 \to EP^2 + PF^2 = (2\sqrt{10})^2 \to EP^2 = 40 - PF^2$ ①

$EP^2 + PG^2 = EG^2 \to EP^2 + (3 - PF)^2 = (\sqrt{37})^2$
$EP^2 = 37 - (3 - PF)^2$ ②

De ① e ②, temos que $40 - PF^2 = 37 - (3 - PF)^2$, ou seja, PF = 2.
Substituindo em ①, temos que EP = 6.

O volume pedido é igual a $\frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 6$, ou seja, 24 unidades de volume.

15 (ITA-SP) Uma pirâmide regular tem por base um hexágono cuja diagonal menor mede $3\sqrt{3}$ cm. As faces laterais dessa pirâmide formam diedros de 60° com o plano da base. A área total da pirâmide, em cm², é:

X a) $\frac{81\sqrt{3}}{2}$

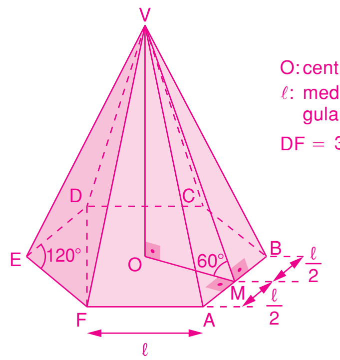
b) $\frac{81\sqrt{2}}{2}$

c) $\frac{81}{2}$

d) $27\sqrt{3}$

e) $27\sqrt{2}$

Do enunciado temos a figura, cotada em centímetros, em que está representada a pirâmide regular hexagonal VABCDEF, de vértice *V*:



O: centro do hexágono regular ABCDEF
ℓ: medida de cada lado do hexágono regular ABCDEF
DF = $3\sqrt{3}$

Aplicando o teorema dos cossenos ao triângulo DEF, temos:
$(DF)^2 = (DE)^2 + (EF)^2 - 2 \cdot DE \cdot EF \cdot \cos 120°$

$(3\sqrt{3})^2 = \ell^2 + \ell^2 - 2 \cdot \ell \cdot \ell \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \rightarrow \ell = 3$

Sendo $\overline{OM}$ uma altura do triângulo eqüilátero OAB, temos que

$OM = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

No triângulo retângulo VOM, temos:

$\cos 60° = \frac{OM}{VM} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{VM} \rightarrow VM = 3\sqrt{3}$

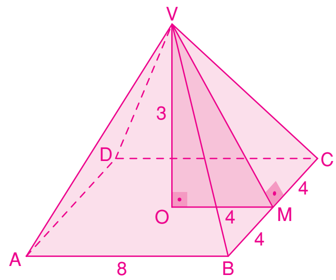
Logo, a área *S* pedida é tal que:

$S = 6 \cdot \frac{3^2\sqrt{3}}{4} + 6 \cdot \frac{3 \cdot 3\sqrt{3}}{2} \rightarrow S = \frac{81\sqrt{3}}{2}$ cm²

16 (Fuvest-SP) Um telhado tem a forma da superfície lateral de uma pirâmide regular, de base quadrada. O lado da base mede 8 m e a altura da pirâmide, 3 m. As telhas para cobrir esse telhado são vendidas em lotes que cobrem 1 m². Supondo que possa haver 10 lotes de telhas desperdiçadas (quebras e emendas), o número mínimo de lotes de telhas a ser comprado é:

X a) 90 b) 100 c) 110 d) 120 e) 130

Do enunciado, temos a figura:



No triângulo retângulo VOM, temos:
$(VM)^2 = (VO)^2 + (OM)^2$
$(VM)^2 = 3^2 + 4^2 \rightarrow VM = 5$ m

A área *S* da superfície lateral dessa pirâmide é $S = 4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot BC \cdot VM\right)$.

Portanto, $S = 4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5\right)$, ou seja, $S = 80$ m².

Sabendo-se que as telhas para cobrir esse telhado são vendidas em lotes que cobrem 1 m² e supondo-se que possa haver 10 lotes desperdiçados, o número mínimo de lotes de telhas a serem comprados é 80 + 10, ou seja, 90.

17 (UFJF-MG) Uma pirâmide quadrangular regular tem 36 dm² de área da base e 4 dm de altura. Encontre a área total dessa pirâmide.

Como a pirâmide é quadrangular regular, temos que sua base é um quadrado e suas faces laterais são triângulos isósceles congruentes.
Seja *b* a medida do lado da base.

Assim, $b^2 = 36$ dm², b = 6 dm e o apótema $\frac{b}{2}$ da base vale 3 dm.

Seja *a* a altura do triângulo que caracteriza cada face da pirâmide.
Temos:

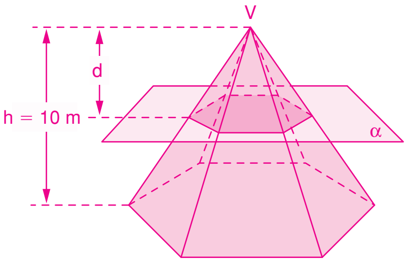
$a^2 = 4^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \rightarrow a^2 = 16 + 9 \rightarrow a^2 = 25 \rightarrow a = 5$ dm

A área total A_T da pirâmide é dada por: $A_T = A_b = 4A_f$, em que A_b é a área da base e A_f é a área do triângulo que compõe cada face da pirâmide.

Portanto, $A_T = 36 + 4 \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} = 36 + 4 \cdot 15 = 36 + 60 = 96$ dm².

18 (ITA-SP) Seja uma pirâmide regular de base hexagonal e altura 10 m. A que distância do vértice devemos cortá-la por um plano paralelo à base de forma que o volume da pirâmide obtida seja $\frac{1}{8}$ do volume da pirâmide original?

a) 2 m b) 4 m x c) 5 m d) 6 m e) 8 m



Sendo V_1 o volume da pirâmide de altura *d* e *V* o volume da pirâmide de altura h = 10 m, tem-se:

$$\frac{V_1}{V} = \frac{1}{8} \text{ e } \frac{V_1}{V}\left(\frac{d}{h}\right)^3$$

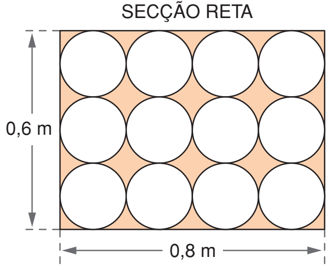
Assim:

$$\left(\frac{d}{10}\right)^3 = \frac{1}{8} \rightarrow \frac{d}{10} = \frac{1}{2} \rightarrow d = 5 \text{ m}$$

19 (UEPA) Um empresário paraense, querendo aproveitar o estoque de caixas de papelão existente no almoxarifado, contratou uma empresa para produzir embalagens cilíndricas de tal forma que cada caixa contivesse 12 unidades do produto, conforme secção reta abaixo. Sabendo-se que a altura das caixas de papelão é de 30 cm e que a altura das embalagens deve coincidir com a altura dessas caixas, pergunta-se:

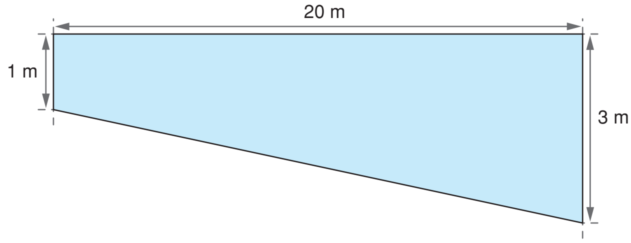
a) Qual o raio da embalagem cilíndrica a ser produzida?
b) Qual o volume da embalagem cilíndrica a ser produzida?

SECÇÃO RETA



a) Cada embalagem cilíndrica terá 0,8 : 4 = 0,6 : 3 = 0,2 m de diâmetro, portanto 0,1 m = 10 cm de raio.
b) $V_{cil} = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 10^2 \cdot 30 = 3\,000\pi \text{ cm}^3 = 0{,}003\pi \text{ m}^3$

20 (UFV-MG) A figura abaixo exibe a seção transversal de uma piscina de 20 m de comprimento por 10 m de largura, com profundidade variando uniformemente de 1 m a 3 m.



a) Determine o volume de água necessário para encher a piscina até a borda.
Sugestão: Calcule a área da seção transversal da piscina ilustrada pela figura.

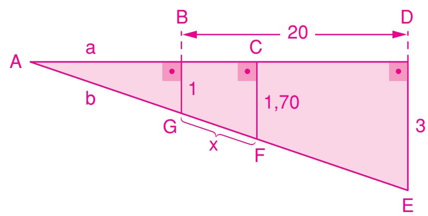
b) Qual a distância mínima que uma pessoa de 1,70 m deve caminhar, saindo do ponto mais raso da piscina, para que fique totalmente submersa?
Sugestão: Use semelhança de triângulos.

a) A seção transversal da piscina é um trapézio, com bases medindo 3 m e 1 m e altura 20 m.

$$S = \frac{(3 + 1) \cdot 20}{2} = 40 \text{ m}^2$$

A piscina tem a forma de um prisma reto com um trapézio como base e altura igual a 10 m (largura da piscina).
$V = S_B \cdot h = 40 \cdot 10 = 400 \text{ m}^3 = 400\,000 \text{ dm}^3 = 400\,000\ \ell$

b)



Na figura acima, temos: △ABG ~ △ADE

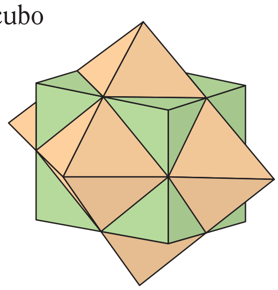
$$\frac{a}{1} = \frac{a + 20}{3} \rightarrow 3a = a + 20 \rightarrow a = 10 \text{ m}$$

No △ABG: $10^2 + 1^2 = b^2 \rightarrow$ △ABG ~ △ACF

$$\frac{\sqrt{101}}{1} = \frac{\sqrt{101} + x}{1{,}70} \rightarrow x + \sqrt{101} = 1{,}70\sqrt{101} \rightarrow x = 0{,}70\sqrt{101} \text{ m}$$

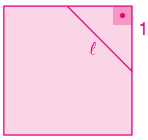
Como $\sqrt{101} \simeq 10$, ele teria de caminhar um pouco mais de 7 m.

21 (UEL-PR) As superfícies de um cubo e de um octaedro regular interpenetram-se, dando origem à figura mostrada abaixo. Sobre cada face do cubo elevam-se pirâmides que têm a base quadrada e as faces em forma de triângulos eqüiláteros. Os vértices das bases das pirâmides estão localizados nos pontos médios das arestas do cubo e do octaedro. A aresta do cubo mede 2 cm. Qual o volume do sólido limitado pela figura?



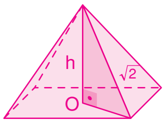
x a) 12 cm^3
b) 14 cm^3
c) 16 cm^3
d) 18 cm^3
e) 20 cm^3

O sólido é composto do cubo mais 6 pirâmides.
- $V_{cubo} = 2^3 = 8$ cm^3
- Cálculo do volume das pirâmides:



face do cubo

$\ell^2 = 1^2 + 1^2$ (aresta da base da pirâmide)
$S_B = \ell^2 = 2$ cm^2



OA: metade da diagonal da base

$OA = \dfrac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = 1$ cm

No $\triangle VOA$: $h^2 + 1^2 = (\sqrt{2})^2$

$h^2 = 1 \rightarrow h = 1$ cm

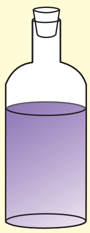
$V_{pir} = \dfrac{1}{3} \cdot S_B \cdot h = \dfrac{1}{3} \cdot 2 \cdot 1 = \dfrac{2}{3}$ cm^3

Como são 6 pirâmides: $V = 6 \cdot \dfrac{2}{3} = 4$ cm^3

- Volume do sólido: $V = V_{cubo} + V_{pir} = 8 + 4 = 12$ cm^3

O quadro abaixo refere-se às questões 22 e 23.

> Uma garrafa cilíndrica está fechada, contendo um líquido que ocupa quase completamente seu corpo, conforme mostra a figura. Suponha que, para fazer medições, você disponha apenas de uma régua milimetrada.



22 (ENEM) Para calcular o volume do líquido contido na garrafa, o número mínimo de medições a serem realizadas é:

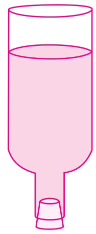
a) 1 x b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

Para calcular o volume do líquido nessa garrafa cilíndrica é suficiente medir o diâmetro da base (supondo que o fundo seja plano) e a altura do líquido, pois:
$V_{cil} = \pi r^2 \cdot h$, em que $r = \dfrac{\text{diâmetro}}{2}$ é o raio da base e *h* é a altura do cilindro.

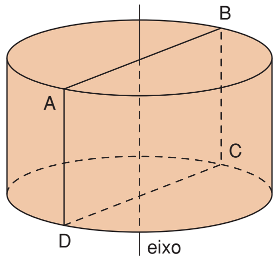
23 (ENEM) Para calcular a capacidade total da garrafa, lembrando que você pode virá-la, o número mínimo de medições a serem realizadas é:

a) 1 b) 2 x c) 3 d) 4 e) 5

Medimos, inicialmente, o diâmetro da base e a altura do líquido. Depois, virando a garrafa para baixo, medimos a altura da coluna de ar. Essas três medidas são suficientes para calcular o volume do líquido e o volume do ar na garrafa. O volume total é a soma dos dois.



24 (UFMG) Num cilindro de 5 cm de altura, a área da base é igual à área de uma seção por um plano que contém o eixo do cilindro, tal como a seção ABCD na figura abaixo.



O volume desse cilindro é de:

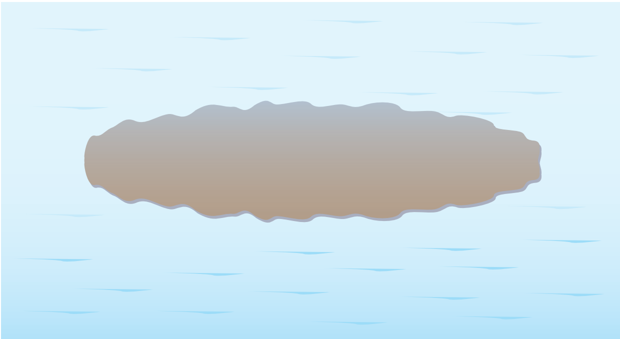
a) $\dfrac{250}{\pi}$ cm^3 c) $\dfrac{625}{\pi}$ cm^3

x b) $\dfrac{500}{\pi}$ cm^3 d) $\dfrac{125}{\pi}$ cm^3

$S_B = S_{ABCD} \rightarrow \pi r^2 = 2r \cdot 5 \rightarrow r = \dfrac{10}{\pi}$

$V_{cil} = \pi\left(\dfrac{10}{\pi}\right)^2 \cdot 5 = \pi \cdot \dfrac{100}{\pi^2} \cdot 5 = \dfrac{500}{\pi}$ cm^3

25 (MACK-SP) Um vazamento, em um navio-tanque, provoca o aparecimento de uma mancha de óleo que tem forma circular e espessura constante de 2,5 cm, como na figura. O raio da mancha, t minutos depois do início do vazamento, é dado, em metros, pela relação $r(t) = \frac{\sqrt{t}}{5}$.



Adotando $\pi = 3$, o volume, em m³, de óleo vazado, após 4 minutos do início do vazamento, é:

a) 0,014
b) 0,016
c) 0,08
d) 0,02
x e) 0,012

Após 4 minutos do início do vazamento, o raio da mancha será:

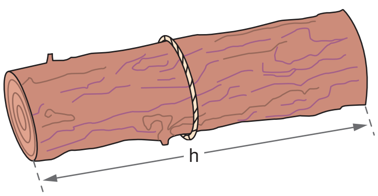
$r(4) = \frac{\sqrt{4}}{5} = 0,4$ m

Adotando $\pi = 3$, o volume de óleo vazado é o de um cilindro de raio da base 0,4 m e altura 2,5 cm = 0,025 m. Portanto:

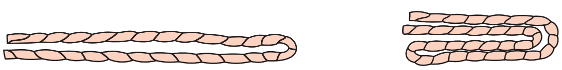
$V_{óleo} = \pi \cdot (0,4)^2 \cdot 0,025 = 0,012$ m³

26 (ENEM) Em muitas regiões do estado do Amazonas, o volume de madeira de uma árvore cortada é avaliado de acordo com uma prática dessas regiões:

I. Dá-se uma volta completa em torno do tronco com um barbante.



II. O barbante é dobrado duas vezes pela ponta e, em seguida, seu comprimento é medido com fita métrica.



III. O valor obtido com essa medida é multiplicado por ele mesmo e depois multiplicado pelo comprimento do tronco. Esse é o volume estimado de madeira.

Outra estimativa pode ser obtida pelo cálculo formal do volume do tronco, considerando-o um cilindro perfeito.

A diferença entre essas medidas é praticamente equivalente às perdas de madeira no processo de corte para comercialização.

Pode-se afirmar que essas perdas são da ordem de:

a) 30% x b) 22% c) 15% d) 12% e) 5%

Sendo *V* o volume do tronco, considerando-o um cilindro perfeito de raio *r* e V' o volume do tronco, calculado de acordo com essa prática regional, tem-se:

$V = \pi r^2 h$

$V' = \frac{2\pi r}{4} \cdot \frac{2\pi r}{4} \cdot h \rightarrow V' = \frac{\pi^2 r^2 h}{4}$

Diferença entre as medidas: $V - V' = \pi r^2 h - \frac{\pi^2 r^2 h}{4} = \frac{\pi r^2 h(4 - \pi)}{4}$

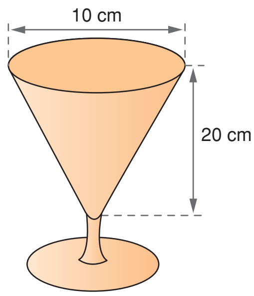
Em porcentagem:

$$\frac{V - V'}{V} = \frac{\frac{\pi r^2 h(4 - \pi)}{4}}{\pi r^2 h} = \frac{4 - \pi}{4}$$

Fazendo $\pi = 3,14$:

$\frac{4 - \pi}{4} = 0,215 = 21,5\% \simeq 22\%$

27 (UFSCar-SP) Em uma lanchonete, um casal de namorados resolve dividir uma taça de *milk shake* com as dimensões mostradas no desenho.



a) Sabendo-se que a taça estava totalmente cheia e que eles beberam todo o *milk shake*, calcule qual foi o volume, em mℓ, ingerido pelo casal. Adote $\pi = 3$.

b) Se um deles beber sozinho até a metade da altura do copo, quanto do volume total, em porcentagem, terá bebido?

a) O volume de *milk shake* ingerido pelo casal é equivalente ao volume de um cone circular reto, em que: r = 5 cm e h = 20 cm.

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 20 = 500$ cm³

500 cm³ —— 500 mℓ

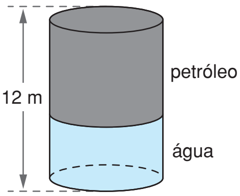
b) Sendo V' o volume que sobrou na taça:

$\frac{V'}{V} = \left(\frac{10}{20}\right)^3 \rightarrow V' = V \cdot \frac{1}{8} = \frac{V}{8}$

Portanto, bebendo até metade da altura, terá bebido $1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$ do volume total.

Como $\frac{7}{8} = 0,875$, então terá bebido 87,5% do volume total.

28 (Unesp-SP) Um tanque subterrâneo, que tem a forma de um cilindro circular reto na posição vertical, está completamente cheio com 30 m^3 de água e 42 m^3 de petróleo.



Se a altura do tanque é 12 metros, a altura, em metros, da camada de petróleo é:

a) 2π x b) 7 c) $\frac{7\pi}{3}$ d) 8 e) $\frac{8\pi}{3}$

Volume do tanque: $\pi r^2 \cdot h = 30 + 42 \rightarrow \pi r^2 \cdot 12 = 72 \rightarrow r^2 = \frac{6}{\pi}$

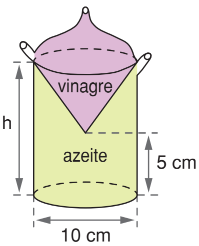
Volume do petróleo:

$\pi r^2 \cdot x = 42$

$\pi \cdot \frac{6}{\pi} \cdot x = 42 \rightarrow x = 7$ m

A altura da camada de petróleo é 7 m.

29 (UFSCar-SP) A figura representa um galheteiro para a colocação de azeite e vinagre em compartimentos diferentes, sendo um cone no interior de um cilindro.



Considerando h como a altura máxima de líquido que o galheteiro comporta e a razão entre a capacidade total de azeite e vinagre igual a 5, o valor de h é:

a) 7 cm b) 8 cm x c) 10 cm d) 12 cm e) 15 cm

Sejam V_A a capacidade total de azeite e V_V a capacidade total de vinagre, em centímetros cúbicos.

De acordo com a figura, a altura do cone é (h − 5) cm e os raios das bases do cilindro e do cone medem 5 cm. Assim, de acordo com o enunciado, temos:

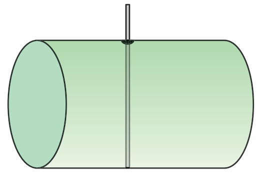
$$V_A = V_{cil} - V_{cone} = \pi 5^2 h - \frac{1}{3}\pi 5^2(h-5) = \frac{50\pi h + 125\pi}{3} = \frac{25\pi(2h+5)}{3}$$

$$V_V = \frac{1}{3}\pi 5^2(h-5) = \frac{25\pi(h-5)}{3}$$

$$\frac{V_A}{V_V} = \frac{\frac{25\pi(2h+5)}{3}}{\frac{25\pi(h-5)}{3}} = 5 \rightarrow \frac{2h+5}{h-5} = 5$$

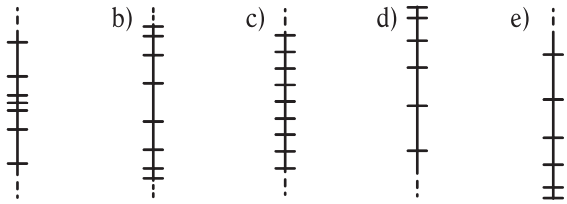
$2h + 5 = 5h - 25 \rightarrow 3h = 30 \rightarrow h = 10$ cm

30 (ENEM) Uma empresa de transporte armazena seu combustível em um reservatório cilíndrico enterrado horizontalmente. Seu conteúdo é medido com uma vara graduada em vinte intervalos, de modo que a distância entre duas graduações consecutivas representa sempre o mesmo volume.

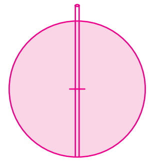


A ilustração que melhor representa a distribuição na vara é:

x a) b) c) d) e)



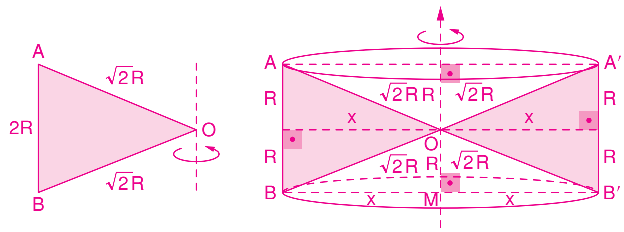
Considere um corte vertical nesse cilindro, por onde passa a vara de medição, de modo que obtenha um círculo. A vara ocupa um diâmetro. As graduações têm de ser simétricas em relação ao centro desse círculo. Considerando ainda o centro do círculo como referência, as distâncias entre as graduações vão aumentando.



31 (ITA-SP) Considere o triângulo isósceles OAB, com lados $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ de comprimento $\sqrt{2}R$ e lado $\overline{AB}$ de comprimento 2R. O volume do sólido obtido pela rotação desse triângulo em torno da reta que passa por O e é paralela ao lado $\overline{AB}$ é igual a:

a) $\frac{\pi R^3}{2}$ x c) $\frac{4\pi R^3}{3}$ e) $\sqrt{3}\pi R^3$

b) πR^3 d) $\sqrt{2}\pi R^3$



O volume V desse sólido é dado pela diferença entre o volume de um cilindro circular reto de altura 2R e raio da base x, e o volume de dois cones retos congruentes de altura R e raio da base x, em que x é a distância entre o ponto O e a reta $\overline{AB}$.

Assim:

No triângulo retângulo BOM:

$x^2 + R^2 = \left(\sqrt{2}R\right)^2 \rightarrow x^2 = 2R^2 - R^2 = R^2$

$V_{cil} = \pi x^2 2R = \pi \cdot R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3$

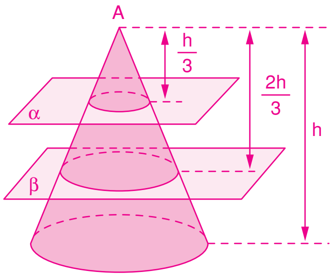
$V_{cone} = \frac{1}{3}\pi x^2 \cdot R = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot R = \frac{\pi R^3}{3}$

$V_{sólido} = V_{cil} - 2 \cdot V_{cone} = 2\pi R^3 - \frac{2\pi R^3}{3} = \frac{4\pi R^3}{3}$

32 (Fatec-SP) Divide-se a altura de um cone circular reto de volume *V* em três partes de medidas iguais. Pelos pontos de divisão são traçados planos paralelos à base.

O volume do tronco de cone compreendido entre esses planos é igual a:

a) $\frac{1}{27}$ V b) $\frac{5}{27}$ V x c) $\frac{7}{27}$ V d) $\frac{8}{27}$ V e) V



Sendo V_α o volume do cone com vértice *A* e base no plano α, V_β o volume do cone com vértice *A* e base no plano β e *h* a altura do cone de volume *V*, temos:

- $\frac{V_\alpha}{V} = \left(\frac{\frac{h}{3}}{h}\right)^3 \to \frac{V_\alpha}{V} = \frac{1}{27} \to V_\alpha = \frac{1}{27} V$
- $\frac{V_\beta}{V} = \left(\frac{\frac{2h}{3}}{h}\right)^3 \to \frac{V_\beta}{V} = \frac{8}{27} \to V_\beta = \frac{8}{27} V$

Assim, o volume do tronco de cone V_T, compreendido entre os planos α e β, é:

$V_T = V_\beta - V_\alpha = \frac{8}{27} V - \frac{1}{27} V = \frac{7}{27} V$

33 (UFBA) Um recipiente em forma de um cilindro circular reto, com dimensões internas de 20 u.c. de diâmetro e 16 u.c. de altura, está completamente cheio de argila que deverá ser toda usada para moldar 10x bolinhas com 2 u.c. de raio. Calcule *x*.

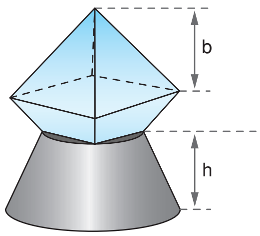
$V_{cil} = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot 10^2 \cdot 16 = 1\,600\pi$ u.v. (unidades de volume)

$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi 2^3 = \frac{32\pi}{3}$ u.v.

$1\,600\pi : \frac{32\pi}{3} = 1\,600\pi \cdot \frac{3}{32\pi} = 150$ bolinhas

Como $10x = 150 \to x = 15$.

34 (UnB-DF) A figura abaixo representa um troféu formado por um tronco de cone maciço, de estanho, de altura *h* e raios das bases *a* e *b*, $a < b$, apoiando parte de um octaedro regular de cristal. A seção de contato do octaedro com o tronco de cone é um quadrado inscrito na base superior deste, e o vértice superior do octaedro está alinhado, na vertical, com os centros das bases do tronco de cone. A distância entre os vértices opostos do octaedro é igual a 2b.



Com base nessas informações e sabendo que o volume de um tronco de cone de altura *h* e raios das bases iguais a *R* e *r* é dado por $\frac{\pi h(R^2 + Rr + r^2)}{3}$, julgue os itens abaixo:

a) Se $h = \frac{3b}{\pi}$, então o volume da parte de estanho do troféu é igual a $b(b^2 + ab + a^2)$.

b) O volume da parte de cristal que forma o troféu é igual a $\frac{2(b^3 - a^3)}{3}$.

c) Se $h = 2a$, então a altura total do troféu é igual a 2b.

a) Verdadeiro

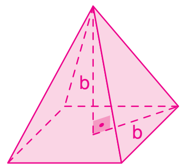
Se $h = \frac{3b}{\pi}$, então:

$V_{tronco} = \frac{\pi \cdot \frac{3b}{\pi}(b^2 + ab + a^2)}{3} = b(b^2 + ab + a^2)$

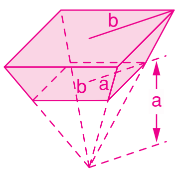
b) Falso

A parte superior do cristal corresponde à pirâmide da figura ao lado, cujo volume é:

$V = \frac{1}{3} \cdot 2b^2 \cdot b = \frac{2b^3}{3}$



Por outro lado, na parte inferior do cristal, temos a figura seguinte:



Calcula-se a altura *a* da pirâmide projetada pela semelhança de triângulos.

O volume do tronco da pirâmide do cristal será dado por $\frac{2b^3}{3} - \frac{2a^3}{3} = \frac{2(b^3 - a^3)}{3}$, e o volume total será dado por:

$V = \frac{2b^3}{3} + \frac{2(b^3 - a^3)}{3} = \frac{2(2b^3 - a^3)}{3}$

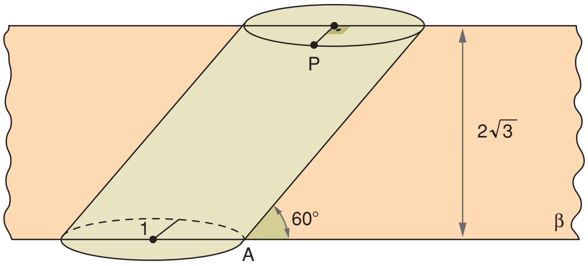
c) Falso

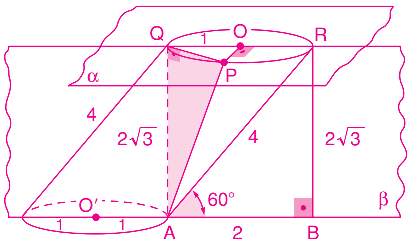
A figura anterior nos mostra que a altura do tronco da pirâmide central é $b - a$.

Então, a altura do trapézio é $h + (b - a) + b$.

Fazendo $h = 2a$, temos: $2a + b - a + b = a + 2b$.

35 (Fuvest-SP) Um cilindro oblíquo tem raio das bases igual a 1, altura $2\sqrt{3}$, e está inclinado de um ângulo de 60° (ver figura). O plano β é perpendicular às bases do cilindro, passando por seus centros. Se *P* e *A* são os pontos representados na figura, calcule PA.





No △ABR, temos:

$\text{sen } 60° = \dfrac{2\sqrt{3}}{AR} \rightarrow AR = 4$

$\text{tg } 60° = \dfrac{2\sqrt{3}}{AB} \rightarrow AB = 2$

O triângulo OPQ é retângulo em *O* e o triângulo QPA é retângulo em *Q*, pois $\overline{AQ}$ é perpendicular ao plano α que contém a base superior do cilindro.

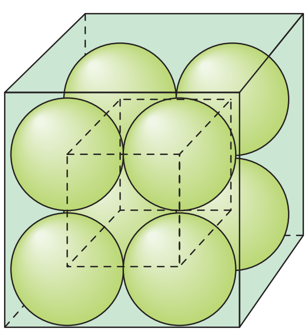
Assim:

$(QP)^2 = (QO)^2 + (OP)^2 \rightarrow (QP)^2 = 1^2 + 1^2 \rightarrow (QP)^2 = 2$

$(PA)^2 = (QA)^2 + (QP)^2$

Logo, $(PA)^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 + 2 \rightarrow (PA)^2 = 14 \rightarrow PA = \sqrt{14}$.

36 (UFMT) Na revista *Química nova na escola*, nº 9, de maio de 1999, foi publicado um artigo sobre determinação de raios atômicos. Uma partícula de sólido cristalino é representada na figura.



Essa partícula é formada por oito esferas idênticas de raio igual a 1 unidade de comprimento (que representam átomos) que se tangenciam, dispostas na forma de um cubo. O cubo menor representado na figura possui seus vértices nos centros das esferas e o maior circunscreve o bloco de esferas. A partir dessas informações, julgue os itens:

a) O volume do cubo maior é igual a 8 vezes o volume do cubo menor.
b) O volume do cubo menor é igual ao volume de uma das esferas.
c) A razão entre a diagonal do cubo maior e a do menor é $2\sqrt{3}$.

a) Verdadeiro

$$\left.\begin{array}{l} V_{maior} = 4^3 = 64 \\ V_{menor} = 2^3 = 8 \end{array}\right\} \dfrac{64}{8} = 8 \rightarrow V_{maior} = 8 \cdot V_{menor}$$

b) Falso

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi 1^3 = \frac{4}{3}\pi \simeq \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \simeq 4{,}18 < 8$$

c) Falso

$D = 4\sqrt{3}$ e $d = 2\sqrt{3}$

$$\frac{D}{d} = \frac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 2$$

37 (ESPM-SP) Assinale a alternativa que apresenta coerência entre as formas das taças e seus respectivos volumes em litros:

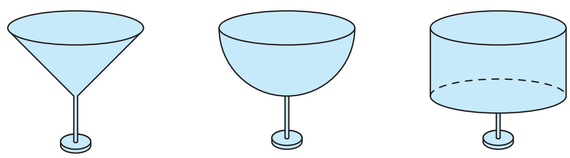


	Fig. 1	Fig. 2	Fig. 3
X a)	1 litro	2 litros	3 litros
b)	1 litro	2,5 litros	3 litros
c)	1 litro	2 litros	4 litros
d)	2 litros	3 litros	4 litros
e)	2 litros	3 litros	6 litros

Os volumes das figuras apresentadas serão:

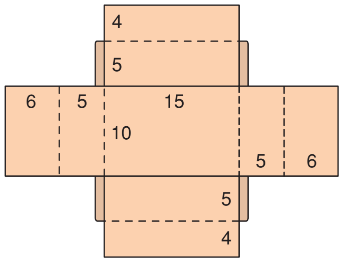
Fig. 1: Cone → $V_1 = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$

Fig. 2: Semi-esfera → $V_2 = \dfrac{\frac{4}{3}\pi r^3}{2} = \dfrac{2}{3}\pi r^3 = \dfrac{2}{3}\pi r^2 \cdot h$ (o raio é igual às alturas das outras figuras)

Fig. 3: Cilindro: $V_3 = \pi r^2 h$

Portanto: $V_3 = 3 \cdot V_1$ e $V_3 = \dfrac{2}{3} \cdot V_2 \rightarrow V_1 = 1\ \ell$; $V_2 = 2\ \ell$ e $V_3 = 3\ \ell$.

38 (ENEM) Um fabricante de brinquedos recebeu o projeto de uma caixa que deverá conter cinco pequenos sólidos, colocados na caixa por uma abertura em sua tampa. A figura representa a planificação da caixa, com as medidas dadas em centímetros.



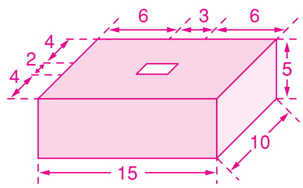
Os sólidos são fabricados nas formas de:

I. um cone reto de altura 1 cm e raio da base 1,5 cm
II. um cubo de aresta de 2 cm
III. uma esfera de raio 1,5 cm
IV. um paralelepípedo retangular reto, de dimensões 2 cm, 3 cm e 4 cm
V. um cilindro reto de altura 3 cm e raio da base 1 cm

O fabricante não aceitou o projeto, pois percebeu que, pela abertura dessa caixa, só poderia colocar os sólidos dos tipos:

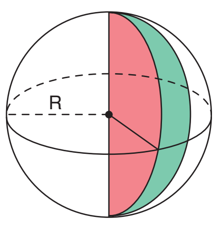
a) I, II e III
b) I, II e V
x c) I, II, IV e V
d) II, III, IV e V
e) III, IV e V

A caixa de dimensões 15 cm · 10 cm · 5 cm tem o formato de um paralelepípedo reto-retângulo. Os sólidos deverão passar pela abertura em sua tampa, que é um retângulo de dimensões 2 cm · 3 cm.



Dos sólidos que são fabricados, o único que não passa por essa abertura é a esfera de raio 1,5 cm, ou seja, de diâmetro 3 cm (sólido III).

39 (Unesp-SP) Uma quitanda vende fatias de melancia embaladas em plástico transparente. Uma melancia com forma esférica de raio de medida *R* cm foi cortada em 12 fatias iguais, em que cada fatia tem a forma de uma cunha esférica, como representado na figura.



Sabendo-se que a área de uma superfície esférica de raio *R* cm é $4\pi R^2$ cm², determine, em função de π e de *R*:

a) a área da casca de cada fatia da melancia (fuso esférico);
b) quantos cm² de plástico foram necessários para embalar cada fatia (sem nenhuma perda e sem sobrepor camadas de plástico), ou seja, qual é a área da superfície total de cada fatia.

a) Como a melancia foi dividida em 12 partes iguais, a área A_c da casca de cada fatia é:

$$A_c = \frac{4\pi R^2}{12} = \frac{\pi R^2}{3} \text{ cm}^2$$

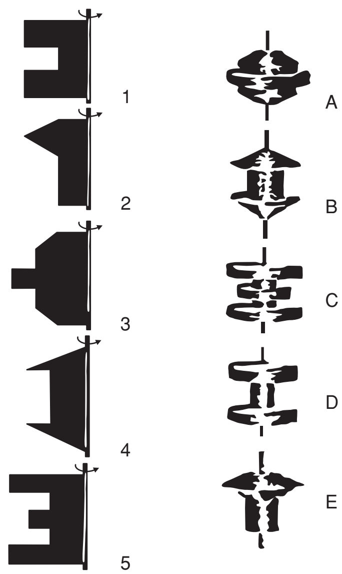
b) A área de cada fatia corresponde às áreas de dois semicírculos de raio *R*, mais a área A_c.

$$A_{fatia} = A_c + 2 \cdot \frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi R^2}{3} + \pi R^2 = \frac{4\pi R^2}{3} \text{ cm}^2$$

40 (ENEM) Assim como na relação entre o perfil de um corte de um torno e a peça torneada, sólidos de revolução resultam da rotação de figuras planas em torno de um eixo. Girando-se as figuras a seguir em torno da haste indicada, obtêm-se os sólidos de revolução que estão na coluna da direita.

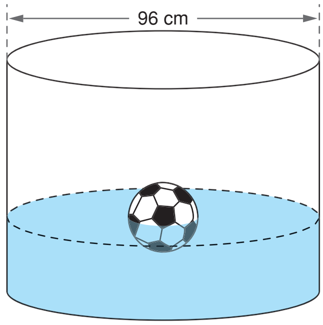
A correspondência correta entre as figuras planas e os sólidos de revolução obtidos é:

a) 1A, 2B, 3C, 4D, 5E
b) 1B, 2C, 3D, 4E, 5A
c) 1B, 2D, 3E, 4A, 5C
x d) 1D, 2E, 3A, 4B, 5C
e) 1D, 2E, 3B, 4C, 5A



41 (UFPB) Depois de desistir de retirar a pipa do poste, João foi jogar futebol no quintal da casa. Ao chutar a bola com muita força, fez com que ela caísse num reservatório de água com a forma de um cilindro circular reto, cujo diâmetro é 96 cm. Maria percebeu que exatamente a metade da bola ficou submersa, o que elevou o nível da água do reservatório em 0,5 cm (ver desenho). O raio dessa bola é:

a) 10 cm
b) 11 cm
X c) 12 cm
d) 13 cm
e) 14 cm



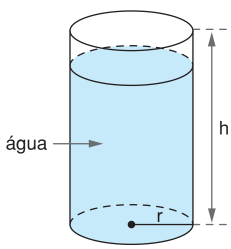
O volume de água deslocada (V_1) equivale ao volume da semi-esfera (V_2) que ficou submersa.

$V_1 = \pi r^2 h = \pi \cdot 48^2 \cdot 0,5 = 1\,152\pi \text{ cm}^3$

$$V_2 = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{2} = \frac{2}{3}\pi r^3$$

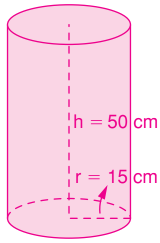
Como $V_1 = V_2 \rightarrow \frac{2}{3}\pi r^3 = 1\,152\pi \rightarrow r^3 = 1\,728 \rightarrow r = 12$ cm.

42 (Unifesp-SP) Um recipiente contendo água tem a forma de um cilindro circular reto de altura h = 50 cm e raio r = 15 cm. Esse recipiente contém 1 litro de água a menos que sua capacidade total.



a) Calcule o volume de água contido no cilindro (use $\pi = 3,14$).

b) Qual deve ser o raio *R* de uma esfera de ferro que, introduzida no cilindro e totalmente submersa, faça transbordar exatamente 2 litros de água?



a) $V_{cil} = \pi \cdot (15)^2 \cdot 50 = 3,14 \cdot 11\,250 = 35\,325 \text{ cm}^3 = 35,325 \text{ dm}^3$
Como $1 \text{ dm}^3 = 1\ \ell$:
Volume de água contido no cilindro: $35,325\ \ell - 1\ \ell = 34,325\ \ell$

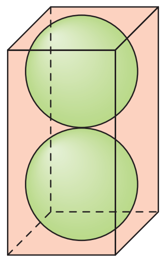
b) Para fazer transbordar exatamente 2 litros de água, o volume da esfera de raio *R* deve ser $3\ \ell$ ou 3 dm^3.
Logo:

$$\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 = 3 \rightarrow R^3 = \frac{9}{4\pi} \rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{9}{4\pi}}$$

Então, o raio *R* é igual a $\sqrt[3]{\frac{9}{4\pi}}$ dm.

43 (Fatec-SP) Duas esferas maciças iguais e tangentes entre si estão inscritas em um paralelepípedo reto-retângulo oco, como mostra a figura abaixo. Observe que cada esfera tangencia as quatro faces laterais e uma das bases do paralelepípedo.

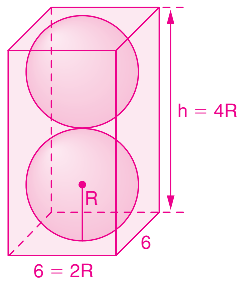
O espaço entre as esferas e o paralelepípedo está preenchido com um líquido. Se a aresta da base do paralelepípedo mede 6 cm, o volume do líquido nele contido, em litros, é aproximadamente igual a:



a) 0,144
X b) 0,206
c) 1,44
d) 2,06
e) 20,6

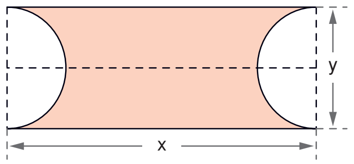
Sejam *R* e *h*, respectivamente, as medidas, em centímetros, do raio da esfera e da altura do paralelepípedo. Assim:

- $2R = 6 \rightarrow R = 3$ cm
  $h = 4R = 4 \cdot 3 = 12$ cm
- Volume do paralelepípedo:
  $V_{par} = 6 \cdot 6 \cdot 12 = 432 \text{ cm}^3$
- Volume de cada esfera:
  $V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi 3^3 = 36\pi \text{ cm}^3$



- Volume do líquido: $V_{líq} = V_{par} - 2 \cdot V_{esfera} = (432 - 72\pi) \text{ cm}^3$
  Fazendo $\pi = 3,14$: $V_{líq} = 432 - 226,08 = 205,92 \text{ cm}^3 = 0,20592 \text{ dm}^3$
  Ou ainda: $0,20592\ \ell \simeq 0,206\ \ell$.

44 (UFRJ) Considere um retângulo, de altura *y* e base *x*, com $x > y$, e dois semicírculos com centros nos lados do retângulo, como na figura abaixo.



Calcule o volume do sólido obtido pela rotação da região colorida em torno de um eixo que passa pelos centros dos semicírculos.

O sólido obtido equivale a um cilindro de onde foram retiradas duas semi-esferas:

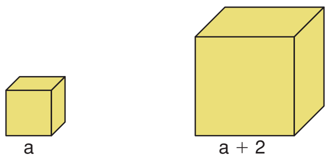
Cilindro $\begin{cases} R = \dfrac{y}{2} \\ h = x \end{cases} \rightarrow V_{cil} = \pi\left(\dfrac{y}{2}\right)^2 \cdot x = \dfrac{\pi x y^2}{4}$

Semi-esferas: $R = \dfrac{y}{2} \rightarrow V_{\text{semi-esfera}} = \dfrac{\dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{y}{2}\right)^3}{2} = \dfrac{\dfrac{4}{3}\pi \cdot \dfrac{y^3}{8}}{2} = \dfrac{\pi y^3}{12}$

$V_{\text{sólido}} = V_{cil} - 2 \cdot V_{\text{semi-esfera}} = \dfrac{\pi x y^2}{4} - 2 \cdot \dfrac{\pi y^3}{12} = \dfrac{\pi x y^2}{4} - \dfrac{\pi y^3}{6}$

$\dfrac{3\pi x y^2 - 2\pi y^3}{12} = V_{\text{sólido}} = \dfrac{\pi y^2(3x - 2y)}{12}$

45 (Unesp-SP) Aumentando em 2 cm a aresta *a* de um cubo C_1, obtemos um cubo C_2, cuja área da superfície total aumenta em 216 cm², em relação à do cubo C_1.



Determine:

a) a medida da aresta do cubo C_1;

b) o volume do cubo C_2.

a) $S_{C_2} = S_{C_1} + 216 \rightarrow 6 \cdot (a + 2)^2 = 6a^2 + 216$

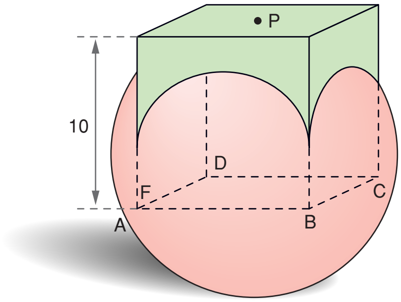
$6(a^2 + 4a + 4) = 6a^2 + 216 \rightarrow 6a^2 + 24a + 24 = 6a^2 + 216$

$24a = 192 \rightarrow a = 8$ cm

b) $a + 2 = 10$ cm

$V_2 = 10^3 = 1\,000$ cm³

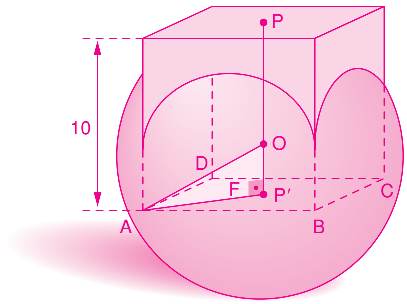
46 (UFRJ) Um cubo de aresta 10 cm tem os quatro vértices *A*, *B*, *C* e *D* de uma de suas faces, *F*, sobre a superfície de uma esfera *S* de raio *r*. Sabendo que a face oposta a *F* é tangente à esfera *S* no ponto *P*, calcule o raio *r*.



Seja *O* o centro da esfera e P′ a projeção ortogonal de *P* sobre a face *F*.

No $\triangle AOP'$ retângulo:

$AO = r$; $OP = x$; $AP = \dfrac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$ (diagonal do quadrado *F*)



Usando o teorema de Pitágoras:

$r^2 = x^2 + \left(5\sqrt{2}\right)^2 \rightarrow r^2 = x^2 + 50$ ①

Como $PP' = r + x = 10 \rightarrow x = 10 - r$.

Substituindo em ①:

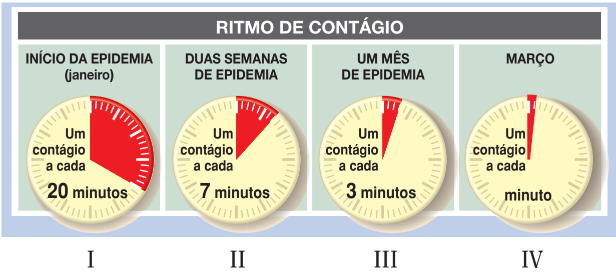
$r^2 = (10 - r)^2 + 50$

$r^2 = 100 - 20r + r^2 + 50$

$20r = 150 \rightarrow r = 7{,}5$

Noções de Estatística

1 (UENF-RJ) Observe os gráficos I, II, III e IV, reproduzidos abaixo, que demonstram o ritmo de contágio da epidemia de dengue no Rio de Janeiro, entre os meses de janeiro e março de 2002.



Adaptado de *Veja*, 13/3/2002.

Baseando-se nos dados fornecidos pelos gráficos I e IV, determine o número de pessoas contagiadas em um dia, em cada situação, e calcule o percentual de aumento verificado entre essas duas situações.

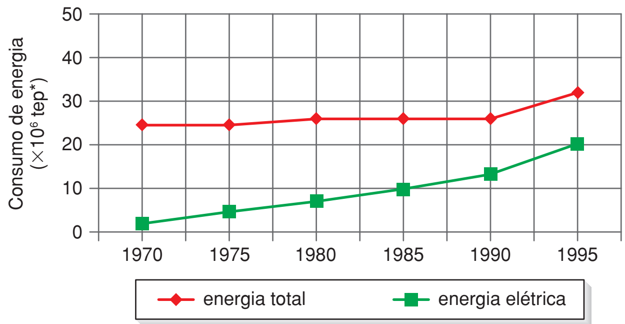
I. 20 min — 1 contágio
60 min (1 h) — 3 contágios } → 24 horas: $24 \cdot 3 = 72$ contágios por dia
II. 7 min — 1 contágio
$24 \cdot 60 = 1\,440$ minutos por dia
$1\,440 : 7 = 205{,}7 \simeq 206$ contágios por dia
III. 3 min — 1 contágio
$1\,440 : 3 = 480$ contágios por dia
IV. 1 min — 1 contágio
$24 \cdot 60 = 1\,440$ contágios por dia
Aumento percentual verificado:
$\frac{1\,440}{72} = 20 \rightarrow 1\,900\%$ de aumento

2 (UFC) A média aritmética das notas dos alunos de uma turma formada por 25 meninas e 5 meninos é igual a 7. Se a média aritmética das notas dos meninos é igual a 6, a média aritmética das notas das meninas é igual a:

a) 6,5   x b) 7,2   c) 7,4   d) 7,8   e) 8,0

Como a média aritmética dos meninos é 6 e o número de meninos é 5, a soma das notas dos meninos é $5 \cdot 6 = 30$. Como a média da turma é 7 e o número de alunos da turma é 30 (25 meninas e 5 meninos), a soma das notas da turma é $30 \cdot 7 = 210$. Portanto, a soma das notas das meninas é $210 - 30 = 180$. Conseqüentemente, a média das notas das meninas é $\frac{180}{25} = 7{,}2$.

3 (ENEM) O consumo total de energia nas residências brasileiras envolve diversas fontes, como eletricidade, gás de cozinha, lenha etc. O gráfico mostra a evolução do consumo de energia elétrica residencial, comparada com o consumo total de energia residencial, de 1970 a 1995.



* tep = toneladas equivalentes de petróleo

Fonte: valores calculados por meio dos dados obtidos de: http://infoener.iee.usp.br/1999

Verifica-se que a participação percentual da energia elétrica no total de energia gasto nas residências brasileiras cresceu entre 1970 e 1995, passando, aproximadamente, de:

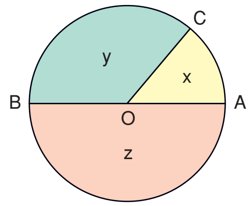
a) 10% para 40%
x b) 10% para 60%
c) 20% para 60%
d) 25% para 35%
e) 40% para 80%

Verifica-se, no gráfico, que em 1970 o consumo de energia elétrica era aproximadamente $2{,}5 \cdot 10^6$ tep, em um total de $25 \cdot 10^6$ tep, o que implica uma participação percentual de $\frac{2{,}5 \cdot 10^6\ \text{tep}}{25 \cdot 10^6\ \text{tep}} = 0{,}1 = 10\%$.

Em 1995, o consumo de energia elétrica era $20 \cdot 10^6$ tep, em um total de $34 \cdot 10^6$ tep, aproximadamente, o que implica uma participação percentual de $\frac{20 \cdot 10^6\ \text{tep}}{34 \cdot 10^6\ \text{tep}} \simeq 0{,}59 \simeq 60\%$.

4 (UFSCar-SP) O gráfico de setores do círculo de centro O representa a distribuição das idades entre os eleitores de uma cidade. O diâmetro $\overline{AB}$ mede 10 cm e o comprimento do menor arco $\overset{\frown}{AC}$ é $\frac{5\pi}{3}$ cm.

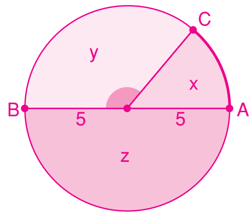
O setor x representa todos os 8 000 eleitores com menos de 18 anos, e o setor y representa os eleitores com idade entre 18 e 30 anos, cujo número é:



a) 12 000
b) 14 800
x c) 16 000
d) 18 000
e) 20 800

O arco $\overset{\frown}{AB}$ (semicircunferência) mede $\frac{2 \cdot \pi \cdot 5}{2} = 5\pi$ cm.

Como $\overset{\frown}{AC}$ mede $\frac{5\pi}{3}$ cm, temos:

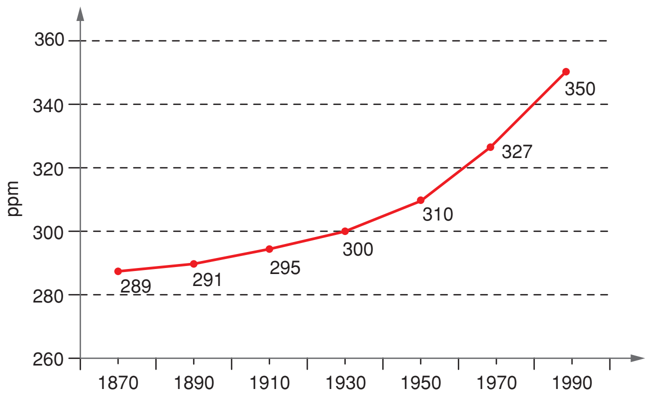


med $(\overset{\frown}{BC})$ = med $(\overset{\frown}{AB})$ − med$(\overset{\frown}{AC})$

$5\pi - \frac{5\pi}{3} = \frac{10\pi}{3}$ cm.

Como med $(\overset{\frown}{BC}) = 2 \cdot$ med $(\overset{\frown}{AC})$ e a área do setor y é o dobro da área do setor x, então o número de eleitores representados por y é o dobro do número de eleitores do setor x, ou seja, 16 000 eleitores.

5 (Unicamp-SP) O gráfico abaixo fornece a concentração de CO_2 na atmosfera, em "partes por milhão" (ppm), ao longo dos anos.



a) Qual foi a porcentagem de crescimento da concentração de CO_2 no período de 1870 a 1930?

b) Considerando o crescimento da concentração de CO_2 nas últimas décadas, é possível estimar uma taxa de crescimento de 8,6% para o período 1990-2010. Com essa taxa, qual será a concentração de CO_2 em 2010?

a) 1870: 289 ppm e 1930: 300 ppm
300 : 289 = 1,038 = 103,8%
Portanto, a porcentagem de crescimento foi aproximadamente 3,8%.

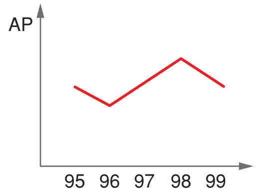
b) Em 1990: 350 ppm.
Em 2010: 350 · 1,086 = 380,1 ppm.

6 (ENEM) O quadro apresenta a produção de algodão de uma cooperativa de agricultores entre 1995 e 1999.

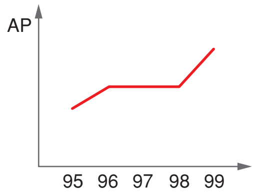
	Safra				
	1995	1996	1997	1998	1999
Produção (em mil toneladas)	30	40	50	60	80
Produtividade (em kg/hectare)	1 500	2 500	2 500	2 500	4 000

O gráfico que melhor representa a área plantada (AP) no período considerado é:

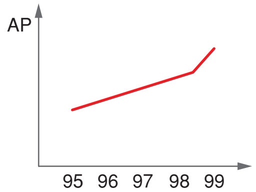
x a)



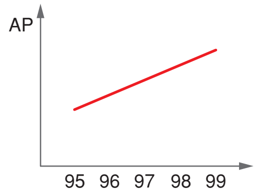
b)



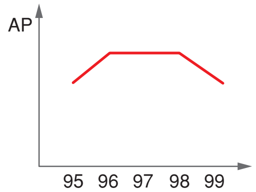
c)



d)



e)



$\text{produtividade} = \frac{\text{produção}}{\text{área plantada}}$ $\qquad$ $\text{área plantada} = \frac{\text{produção}}{\text{produtividade}}$

Calculando a área plantada (AP) para cada ano, temos:

1995: $AP = \frac{30 \cdot 10^6}{1\,500} = 20\,000$ hectares

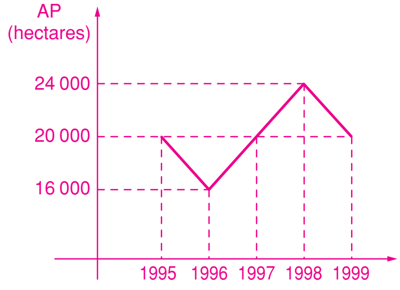
1996: $AP = \frac{40 \cdot 10^6}{2\,500} = 16\,000$ hectares

1997: $AP = \frac{50 \cdot 10^6}{2\,500} = 20\,000$ hectares

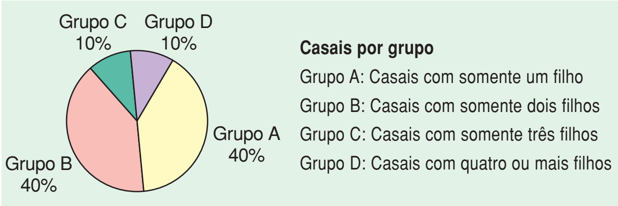
1998: $AP = \frac{60 \cdot 10^6}{2\,500} = 24\,000$ hectares

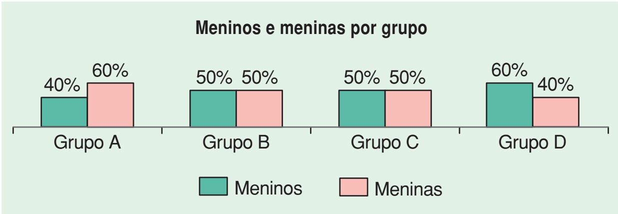
1999: $AP = \frac{80 \cdot 10^6}{4\,000} = 20\,000$ hectares

Portanto, o gráfico que melhor representa a área plantada (AP), no período, é:



7 (UFMG) Fez-se uma pesquisa com um certo número de casais de uma comunidade. Esses casais foram divididos em quatro grupos, de acordo com a quantidade de filhos de cada um. Os resultados dessa pesquisa estão representados nestes gráficos:





Com base nas informações contidas nesses gráficos, é incorreto afirmar que:

a) o total de filhos dos casais do Grupo *B* é maior do que o total de filhos dos casais dos grupos *A* e *C*.

b) pelo menos 40% do total de filhos dos casais dos grupos *A*, *B* e *C* é constituído de meninos.

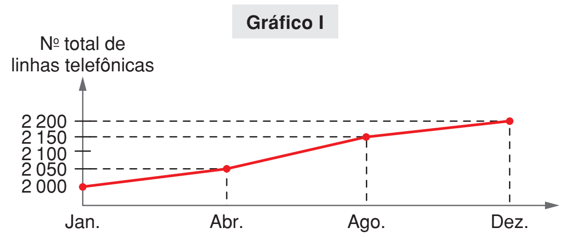
x c) pelo menos a metade do total de filhos dos casais pesquisados é constituída de meninas.

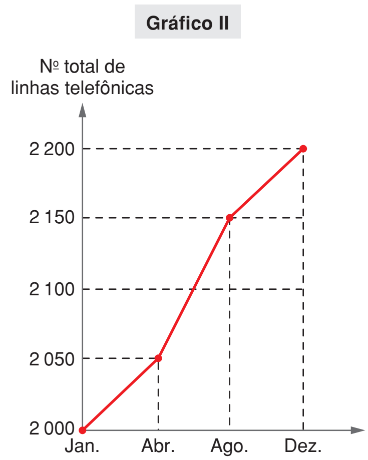
d) mais da metade do total de filhos dos casais dos grupos *A* e *B* é constituída de meninas.

As alternativas *a*, *b* e *d* estão corretas. Uma sugestão para verificar isso é considerar que foram entrevistados 100 casais, e calcular os totais indicados nos gráficos.

No item *c*, a afirmação nem sempre é verdadeira, pois os casais do Grupo *D* podem ter 4 ou mais filhos. Quanto mais filhos tiverem os casais desse grupo, menor será a porcentagem de meninas em relação ao total.

8 (ENEM) Para convencer a população local da ineficiência da Companhia Telefônica Vilatel na expansão da oferta de linhas, um político publicou no jornal local o gráfico I, abaixo representado. A Companhia Vilatel respondeu publicando dias depois o gráfico II, em que pretendeu justificar um grande aumento na oferta de linhas. O fato é que, no período considerado, foram instaladas, efetivamente, 200 novas linhas telefônicas.





Analisando os gráficos, pode-se concluir que:

a) o gráfico II representa um crescimento real maior do que o do gráfico I.

b) o gráfico I apresenta o crescimento real, sendo o II incorreto.

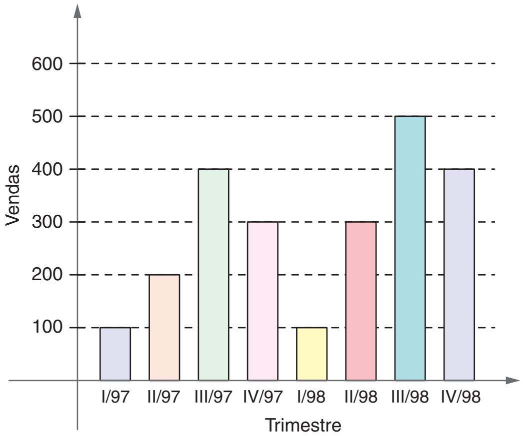
c) o gráfico II apresenta o crescimento real, sendo o gráfico I incorreto.

x d) a aparente diferença de crescimento nos dois gráficos decorre da escolha das diferentes escalas.

e) os dois gráficos são incomparáveis, pois usam escalas diferentes.

Os dois gráficos representam o mesmo crescimento, mas como foram utilizadas diferentes escalas, há uma aparente diferença de crescimento entre eles.

9 (FGV-SP) O gráfico abaixo fornece o número de unidades vendidas de um produto em função do tempo (dados trimestrais).



a) Qual o aumento percentual de unidades vendidas do quarto trimestre de 1998 (IV/98) em relação ao mesmo período do ano anterior (IV/97)?

b) Qual o aumento percentual de unidades vendidas no ano de 1998 em relação às do ano de 1997?

a) IV/98 ——— 400 unidades
IV/97 ——— 300 unidades

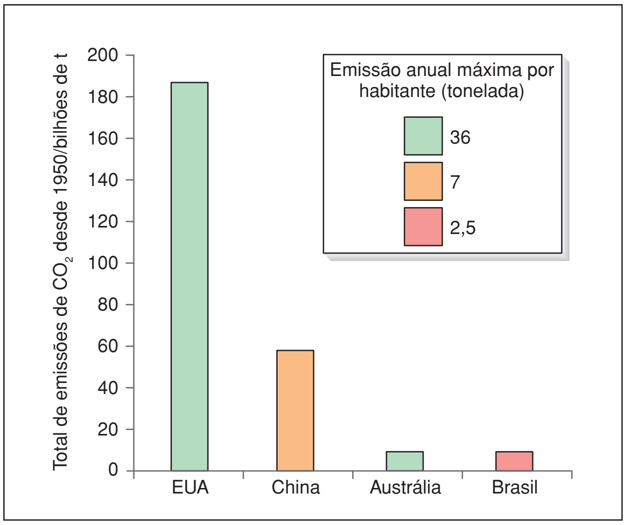
aumento percentual $= \dfrac{400 - 300}{300} = 0{,}333... \simeq 33{,}33\%$

b) Produção anual
$98 \rightarrow 100 + 300 + 500 + 400 = 1\,300$
$97 \rightarrow 100 + 200 + 400 + 300 = 1\,000$

aumento percentual $= \dfrac{1\,300 - 1\,000}{1\,000} = 0{,}30 = 30\%$

10 (ENEM) Em março de 2001, o presidente dos Estados Unidos da América, George W. Bush, causou polêmica ao contestar o pacto de Kyoto, dizendo que o acordo é prejudicial à economia norte-americana em um momento em que o país passa por uma crise de energia [...] O protocolo de Kyoto prevê que os países industrializados reduzam suas emissões de CO_2 até 2012 em 5,2%, em relação aos níveis de 1990.

Adaptado da *Folha de S.Paulo*, 11/4/2001.



Adaptado de *Veja*, 18/4/2001.

O gráfico mostra o total de CO_2 emitido nos últimos 50 anos por alguns países, juntamente com os valores de emissão máxima de CO_2 por habitante no ano de 1999.
Dados populacionais aproximados (nº de habitantes):
— EUA: 240 milhões
— Brasil: 160 milhões
Se o Brasil mantivesse constante a sua população e o seu índice anual máximo de emissão de CO_2, o tempo necessário para o Brasil atingir o acumulado atual dos EUA seria, aproximadamente, igual a:

a) 60 anos
b) 230 anos
X c) 460 anos
d) 850 anos
e) 1 340 anos

No gráfico, observa-se que a diferença entre o total de CO_2 emitido pelos EUA e pelo Brasil é cerca de 180 bilhões de toneladas.
Se o Brasil mantiver constante a sua população e seu índice anual máximo de emissão de CO_2, o tempo necessário para o Brasil atingir o acumulado atual dos EUA é aproximadamente 460 anos, pois:

- Emissão de CO_2 por ano:
  2,5 toneladas/habitante · 160 milhões de habitantes = 0,4 bilhão de toneladas
- Tempo necessário em anos é cerca de:
  $\dfrac{180 \text{ bilhões}}{0{,}4 \text{ bilhão}} = 450 \text{ anos}$

Em questões como a 11, as alternativas verdadeiras devem ser marcadas na coluna I e as falsas, na II.

11 (Unicap-PE) O consumo de energia de uma residência, em kWh, nos meses de janeiro a junho de um certo ano, encontra-se no quadro a seguir:

Mês	Jan.	Fev.	Mar.	Abr.	Maio	Jun.
kWh	140	160	180	130	200	150

Por conta de um racionamento, o consumidor foi obrigado a gastar, em cada um dos meses de julho a dezembro do mesmo ano, no máximo, 80% da média dos consumos dos 6 meses indicados no quadro. Dessa forma, tem-se:

I – II
0 – ~~0~~ A cota mensal do consumidor será de 121 kWh.
1 – ~~1~~ A cota mensal será de 112 kWh.
~~2~~ – 2 A cota mensal será de 128 kWh.
~~3~~ – 3 No mês de agosto, o consumidor ultrapassou em 25% a sua cota mensal, sendo o seu consumo, naquele mês, de 160 kWh.
~~4~~ – 4 Na situação da proposição acima (3 – 3), o consumidor tem de pagar uma multa de R$ 2,50 por kWh que excedeu a sua cota mensal. Assim, a multa a pagar será de R$ 80,00.

0 0 Falsa

$$\bar{x} = \frac{140 + 160 + 180 + 130 + 200 + 150}{6} = \frac{960}{6} = 160 \text{ kWh}$$

80% de $\bar{x} = 0{,}8 \cdot \bar{x} = 0{,}8 \cdot 160 = 128$ kWh $\rightarrow$ máximo que o consumidor poderia gastar

1 1 Falsa
2 2 Verdadeira (ver resolução acima)
3 3 Verdadeira
Consumo de 125% da cota: $1{,}25 \cdot 128 = 160$ kWh
4 4 Verdadeira
$160 - 128 = 32$ kWh de excesso
$2{,}50 \cdot 32 =$ R$ 80,00

Resposta:

I	II
0	~~0~~
1	~~1~~
~~2~~	2
~~3~~	3
~~4~~	4

12 (Unicamp-SP) O Índice de Desenvolvimento Humano [IDH], divulgado pela ONU, é um número entre 0 e 1 usado para comparar o nível de desenvolvimento dos países e resulta da média aritmética de três outros índices: o índice de expectativa de vida [IEV], o índice de escolaridade [IES] e o índice do produto interno bruto *per capita* [IPIB]. Os últimos relatórios fornecem os seguintes dados a respeito do Brasil:

Ano	Posição	IEV	IES	IPIB	IDH
1998	74	0,700	0,843	0,700	0,747
2000	73	0,712	0,835	0,723	0,757

a) O índice de expectativa de vida [IEV] é calculado pela fórmula: $\text{IEV} = \frac{(E - 25)}{60}$, em que *E* representa a expectativa de vida, em anos. Calcule a expectativa de vida [E] no Brasil, em 2000.

b) Supondo que os outros dois índices [IES e IPIB] não fossem alterados, qual deveria ter sido o IEV do Brasil, em 2000, para que o IDH brasileiro naquele ano tivesse sido igual ao IDH médio da América Latina, que foi de 0,767?

a) Em 2000, IEV = 0,712.

$$\text{IEV} = \frac{E - 25}{60} = 0{,}712 \rightarrow E - 25 = 42{,}72 \rightarrow E = 67{,}72 \text{ anos}$$

b) Admitindo-se que o IDH brasileiro, em 2000, tivesse sido 0,767, teríamos:

$$\text{IDH} = \frac{\text{IEV} + 0{,}835 + 0{,}723}{3} = 0{,}767 \rightarrow \text{IEV} + 1{,}558 = 2{,}301$$

IEV = 0,743

Obs.: Se o IDH brasileiro, em 2000, tivesse sido 0,767, o IDH médio da América Latina teria sido outro.

Em questões como a 13, a resposta é dada pela soma dos números que identificam as alternativas corretas.

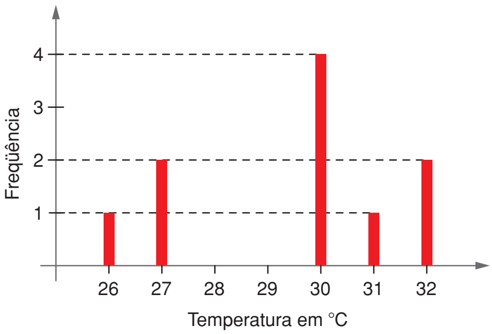
13 (UFBA) De acordo com o Boletim do Serviço de Meteorologia de 7 de junho de 2000, o quadro abaixo apresenta a temperatura máxima, em graus Celsius, registrada em Fernando de Noronha e nas capitais da região Nordeste do Brasil.

Aracaju	Fernando de Noronha	Fortaleza	João Pessoa	Maceió
27 °C	30 °C	31 °C	30 °C	27 °C

Natal	Recife	Salvador	São Luís	Teresina
30 °C	30 °C	26 °C	32 °C	32 °C

Com base nessas informações, pode-se afirmar:

(01) O gráfico abaixo representa a distribuição de freqüência das temperaturas.



(02) A freqüência relativa da temperatura de 31 °C é igual a 10%.

(04) Representando-se a freqüência relativa por meio de um gráfico de setores, a região correspondente à temperatura de 27 °C tem ângulo de 36°.

(08) A média aritmética das temperaturas indicadas no quadro corresponde a 29,5 °C.

(16) A mediana das temperaturas registradas é igual à temperatura modal.

(32) A amplitude das temperaturas é de 32 °C.

01. Correta

02. Correta
31 °C aparece uma vez em 10 soluções, portanto a freqüência relativa é $\frac{1}{10} = 10\%$.

04. Incorreta
27 °C aparece duas vezes, com freqüência relativa $\frac{2}{10} = 20\%$.
20% de 360° = 72°

08. Correta
$$\bar{x} = \frac{26° + 2 \cdot 27° + 4 \cdot 30° + 31° + 2 \cdot 32°}{10} = \frac{295°}{10} = 29{,}5 °C$$

16. Correta
Mo = 30 °C
A mediana será a média entre o 5º e 6º termos: Md = 30°.

32. Incorreta
Amplitude = 32° − 26° = 6 °C

Portanto: 1 + 2 + 8 + 16 = 27

14 (UnB-DF) Utilizando dois instrumentos distintos, *A* e *B*, foi feita, com cada um deles, uma série de vinte medições de um mesmo ângulo, e os resultados obtidos estão listados na tabela abaixo, em que a freqüência *A* e a freqüência *B* indicam a quantidade de vezes que o resultado foi encontrado com os instrumentos *A* e *B*, respectivamente.

Resultado das medições

Freq.	67° 30′ 10″	67° 30′ 12″	67° 30′ 13″	67° 30′ 14″	67° 30′ 15″	67° 30′ 16″	67° 30′ 17″	67° 30′ 18″
A	1	1	2	4	4	3	2	3
B	1	1	2	3	6	2	2	3

Com base nessas informações, julgue os itens que se seguem:

a) A média da série dos resultados das medições feitas com o instrumento *A* é menor que 67°30′14″.

b) As séries dos resultados das medições feitas com os instrumentos *A* e *B* têm o mesmo desvio padrão.

c) A moda e a média da série dos resultados das medições feitas com o instrumento *B* são iguais.

d) A mediana da série dos resultados das medições feitas com o instrumento *B* é maior que a da série dos resultados das medições feitas com o instrumento *A*.

a) Falso
Como todas as medidas apresentam 67°30′, variando nos segundos, vamos calcular a média desses segundos:
$$\frac{10'' + 12'' + 2 \cdot 13'' + 4 \cdot 14'' + 4 \cdot 15'' + 3 \cdot 16'' + 2 \cdot 17'' + 3 \cdot 18''}{20}$$
$$\frac{300''}{20} = 15''$$
$\bar{x}_A = 67°30'15''$

b) Falso
Os desvios são diferentes, pois a série *B* tem maior concentração em 67°30′15″ e a série *A* apresenta uma dispersão maior com as freqüências dos valores 67°30′14″ e 67°30′16″ maiores do que as respectivas freqüências da série *B*.

c) Verdadeiro
Mo = 67°30′15″
A mediana será a média entre o 10º e o 11º termos, que são iguais a 67°30′15″ → Md = 67°30′15″

d) Falso
Em *A*: Md = 67°30′15″, que é igual à mediana em *B*.

15 (Fuvest-SP) Para que fosse feito um levantamento sobre o número de infrações de trânsito, foram escolhidos 50 motoristas. O número de infrações cometidas por esses motoristas, nos últimos cinco anos, produziu a seguinte tabela:

Nº de infrações	Nº de motoristas
de 1 a 3	7
de 4 a 6	10
de 7 a 9	15
de 10 a 12	13
de 13 a 15	5
maior ou igual a 16	0

Pode-se então afirmar que a média do número de infrações, por motorista, nos últimos cinco anos, para esse grupo, está entre:

X a) 6,9 e 9,0
b) 7,2 e 9,3
c) 7,5 e 9,6
d) 7,8 e 9,9
e) 8,1 e 10,2

O mínimo valor da média é:

$$\frac{1 \cdot 7 + 4 \cdot 10 + 7 \cdot 15 + 10 \cdot 13 + 13 \cdot 5}{50} = 6{,}94$$

O máximo valor da média é:

$$\frac{3 \cdot 7 + 6 \cdot 10 + 9 \cdot 15 + 12 \cdot 13 + 15 \cdot 5}{50} = 8{,}94$$

O valor da média do número de infrações, por motorista, nos últimos cinco anos, para esse grupo, está entre 6,9 e 9.

16 (Fuvest-SP) Em uma equipe de basquete, a distribuição de idades dos seus jogadores é a seguinte:

Idade	Nº de jogadores
22	1
25	3
26	4
29	1
31	2
32	1

Será sorteada, aleatoriamente, uma comissão de dois jogadores que representará a equipe diante dos dirigentes.

a) Quantas possibilidades distintas existem para formar essa comissão?

b) Qual a probabilidade de a média de idade dos dois jogadores da comissão sorteada ser estritamente menor que a média de idade de todos os jogadores?

a) O número de possibilidades distintas de se formar a comissão de dois jogadores escolhidos entre os 12 é $C_{12,\,2} = \frac{12 \cdot 11}{2 \cdot 1} = 66$.

b) A idade média dos jogadores é:

$$\frac{22 \cdot 1 + 25 \cdot 3 + 26 \cdot 4 + 29 \cdot 1 + 31 \cdot 2 + 32 \cdot 1}{1 + 3 + 4 + 1 + 2 + 1} = 27$$

Para que a idade média dos dois jogadores da comissão sorteada seja estritamente menor que a média de idade de todos os jogadores (27), devem-se escolher duplas com idades: (22 e 25) ou (22 e 26) ou (22 e 29) ou (22 e 31) ou (25 e 25) ou (25 e 26) ou (26 e 26) anos.

O número de possibilidades dessa escolha é

$1 \cdot C_{3,\,1} + 1 \cdot C_{4,\,1} + 1 \cdot 1 + 1 \cdot C_{2,\,1} + C_{3,\,2} + C_{3,\,1} \cdot C_{4,\,1} + C_{4,\,2}$

$3 + 4 + 1 + 2 + 3 + 12 + 6 = 31$

A probabilidade de a média de idade dos dois jogadores da comissão sorteada ser estritamente menor que a média de idade de todos os jogadores é $\frac{31}{66}$.

17 (FGV-SP) Numa pequena ilha, há 100 pessoas que trabalham na única empresa ali existente. Seus salários (em moeda local) têm a seguinte distribuição de freqüências:

Salários	Freqüência
50,00	30
100,00	60
150,00	10

a) Qual a média dos salários das 100 pessoas?

b) Qual a variância dos salários? Qual o desvio padrão dos salários?

a) A média dos salários das 100 pessoas que trabalham nessa empresa, em moeda local, é:

$$\bar{x} = \frac{50{,}00 \cdot 30 + 100{,}00 \cdot 60 + 150{,}00 \cdot 10}{30 + 60 + 10} = 90{,}00$$

b) Os salários, as freqüências, os desvios e os quadrados dos desvios estão apresentados na tabela abaixo:

Salários	Freqüências	Desvios	Quadrados dos desvios
50,00	30	−40,00	1 600,00
100,00	60	10,00	100,00
150,00	10	60,00	3 600,00

A variância (média dos quadrados dos desvios) dos salários é:

$$Va = \frac{1\,600{,}00 \cdot 30 + 100{,}00 \cdot 60 + 3\,600{,}00 \cdot 10}{30 + 60 + 10} = 900{,}00$$

O desvio padrão (raiz quadrada da variância) dos salários é, em moeda local, igual a $s = \sqrt{900{,}00} = 30{,}00$.

18 (ENEM) Em reportagem sobre crescimento da população brasileira, uma revista de divulgação científica publicou tabela com a participação relativa de grupos etários na população brasileira, no período de 1970 a 2050 (projeção), em três faixas de idade: abaixo de 15 anos, entre 15 e 65 anos e acima de 65 anos.

Admitindo-se que o título da reportagem se refira ao grupo etário cuja população cresceu sempre, ao longo do período registrado, um título adequado poderia ser:

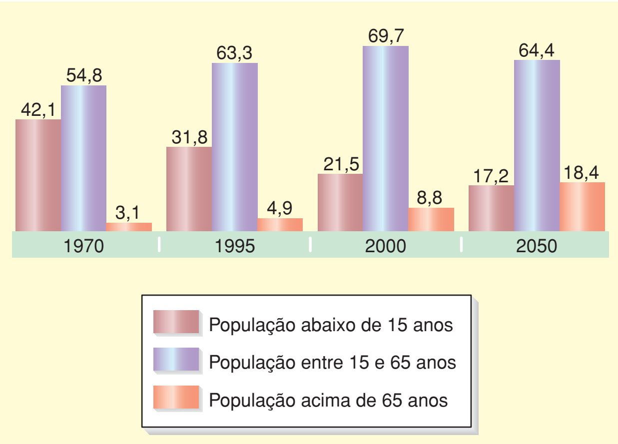
a) "O Brasil de fraldas"

b) "Brasil: ainda um país de adolescentes"

c) "O Brasil chega à idade adulta"

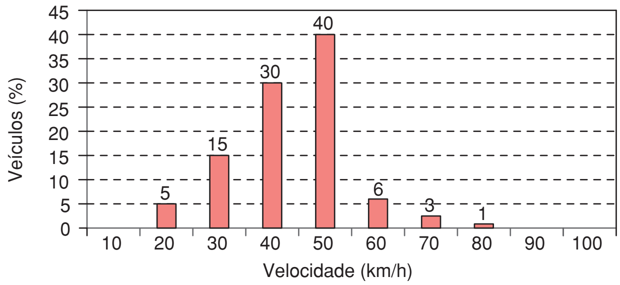
d) "O Brasil troca a escola pela fábrica"

x e) "O Brasil de cabelos brancos"



Houve no período de 1970-2000 um aumento contínuo da população com idade entre 15 e 65 anos e acima de 65 anos. A projeção para 2050 indica uma redução percentual no número de adultos e o contínuo aumento do número de idosos.

19 (ENEM) Um sistema de radar é programado para registrar automaticamente a velocidade de todos os veículos trafegando por uma avenida, onde passam em média 300 veículos por hora, sendo 55 km/h a máxima velocidade permitida. Um levantamento estatístico dos registros do radar permitiu a elaboração da distribuição percentual de veículos de acordo com sua velocidade aproximada.



A velocidade média dos veículos que trafegam nessa avenida é:

a) 35 km/h

x b) 44 km/h

c) 55 km/h

d) 76 km/h

e) 85 km/h

A velocidade média é dada por:

$$V_m = \frac{20 \cdot 5 + 30 \cdot 15 + 40 \cdot 30 + 50 \cdot 40 + 60 \cdot 6 + 70 \cdot 3 + 80 \cdot 1}{100}$$

$$\frac{4\,400}{100} = 44$$

Portanto, $V_m = 44$ km/h.