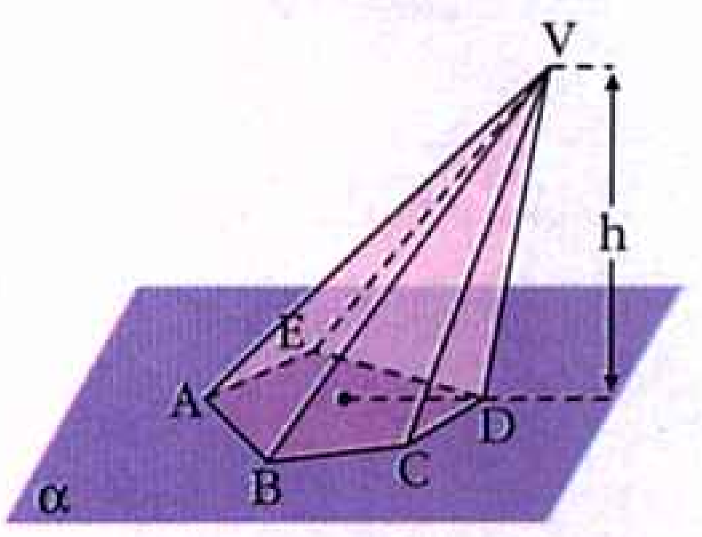
3. Pirâmides

Consideremos um polígono convexo qualquer ABCDE, contido num plano α, e um ponto, fora de α (V ∉ α). Pirâmide pentagonal é o conjunto dos pontos de todos os segmentos que têm uma extremidade em *V* e a outra extremidade num ponto desse polígono.

Elementos da pirâmide



Vértice: *V*

Base: polígono ABCDE

Faces laterais: VAB, VBC, VCD, VDE, VEA (são triângulos)

Arestas da base: $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{DE}$, $\overleftrightarrow{EA}$

Aresta laterais: $\overleftrightarrow{VA}$, $\overleftrightarrow{VB}$, $\overleftrightarrow{VC}$, $\overleftrightarrow{VD}$, $\overleftrightarrow{VE}$

Altura (*h*): distância entre o vértice *V* e o plano que contém a base ABCDE

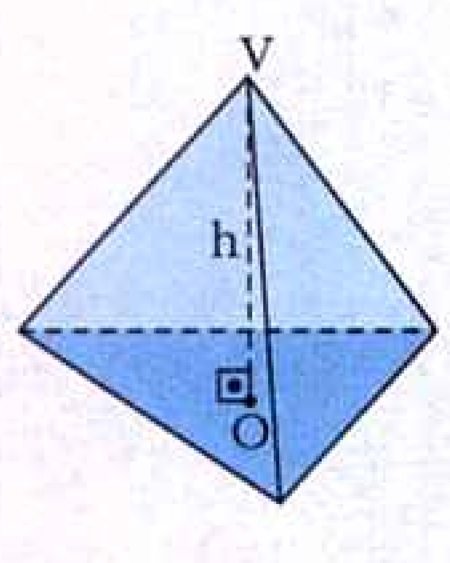
Se no lugar do pentágono considerarmos qualquer outro polígono (triângulo, quadrilátero, hexágono etc.), a pirâmide receberá o nome relativo a esse polígono. Aqui estudaremos aquelas de base convexa.

Pirâmides são exemplos de sólidos geométricos.

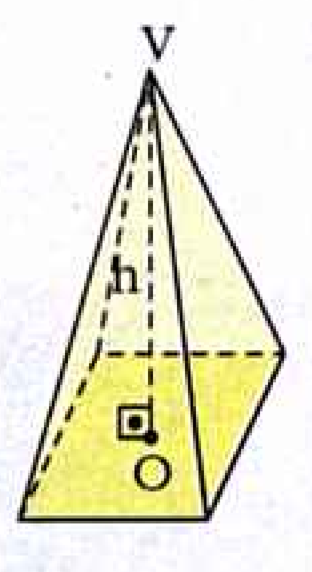
Classificação

Uma pirâmide é regular quando a sua base é um polígono regular e a projeção ortogonal do vértice sobre o plano de base coincide com o centro *O* da base (centro das circunferências inscrita e circunscrita).

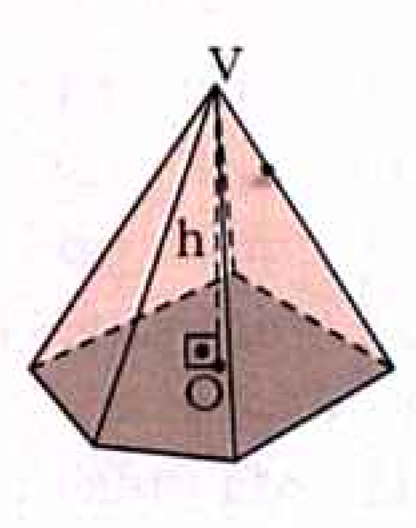
Além disso, as pirâmides podem ser classificadas pelo número de arestas da base:



Pirâmide triangular regular (a base é um triângulo eqüilátero).



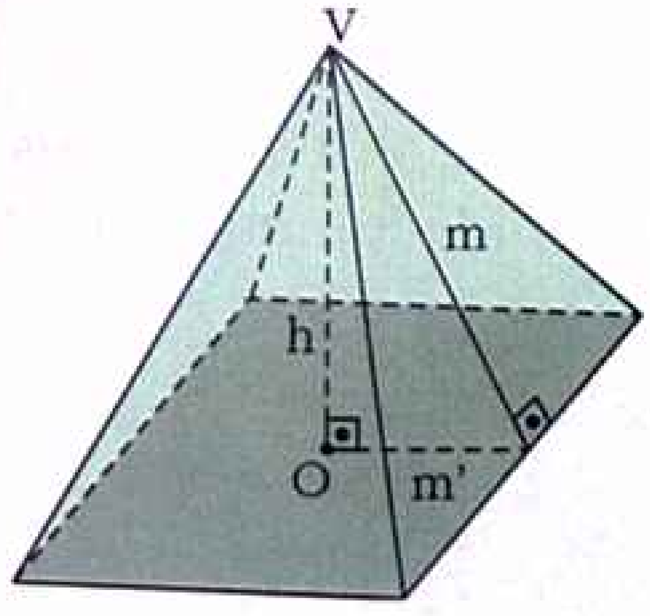
Pirâmide quadrangular regular (a base é um quadrado).



Pirâmide pentagonal regular (a base é um pentágono regular).

Uma pirâmide de base triangular, portanto com quatro faces triangulares, é chamada *tetraedro*. Esse tetraedro é considerado regular quando as quatro faces são triângulos eqüiláteros.

Área da superfície total da pirâmide regular



m': medida do apótema da base (segmento com extremos no centro da base e no ponto médio de uma das arestas da base)

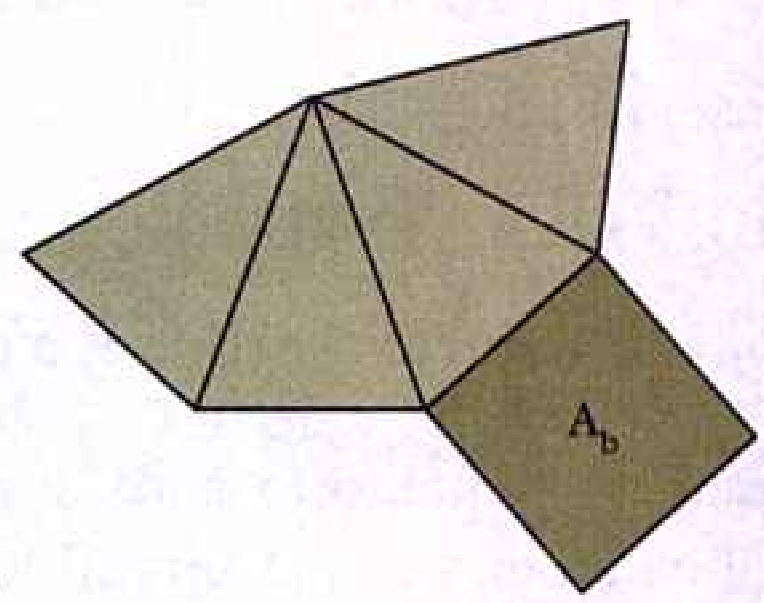
m: medida do apótema da pirâmide regular (segmento que liga o vértice ao ponto médio de uma aresta da base)

A_L: área da superfície lateral

A_b: área da superfície da base

A área da superfície total da pirâmide é calculada pela soma da área da superfície da base com a área da superfície lateral:

$$\boxed{A_T = A_b + A_L}$$

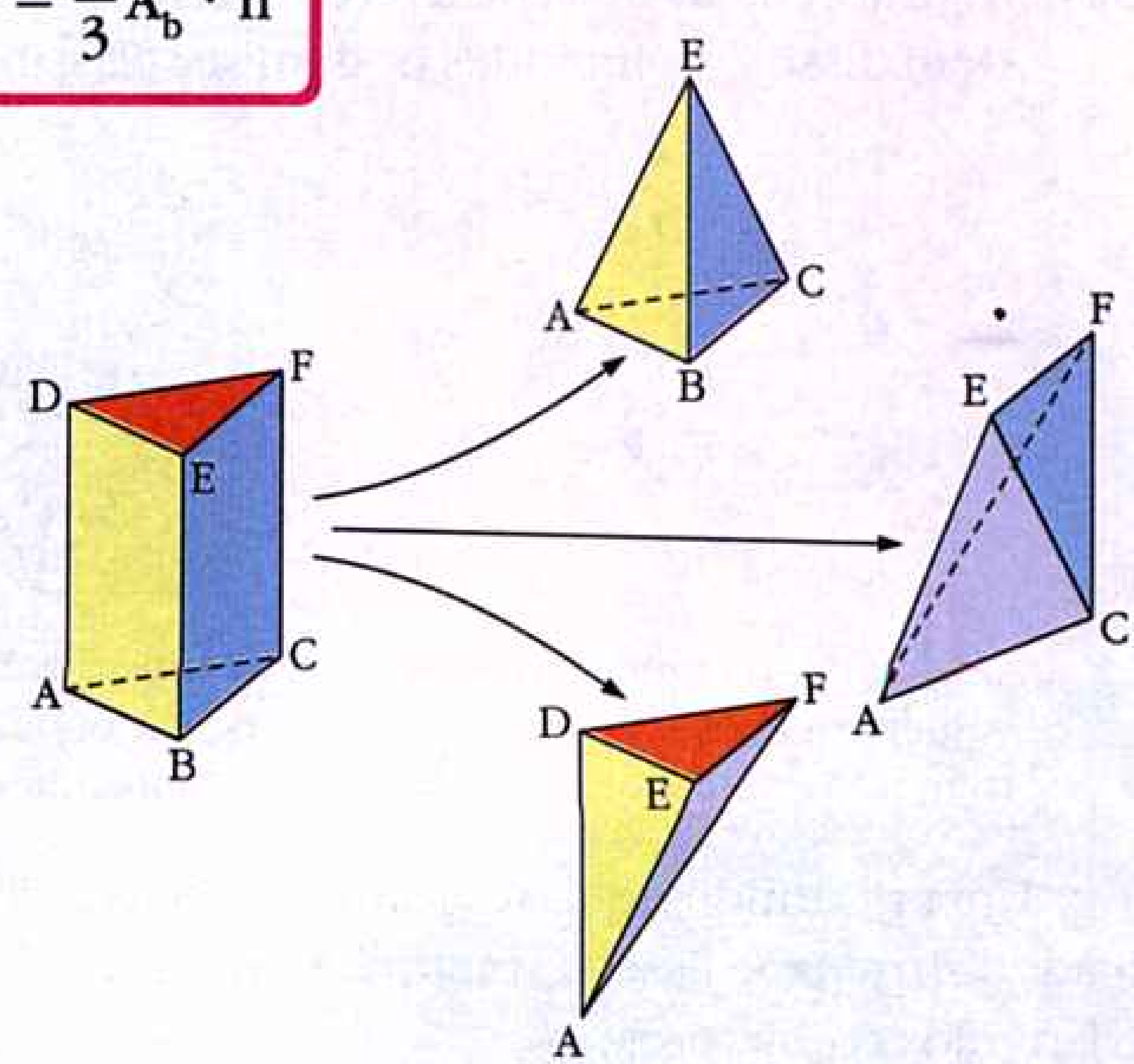


Volume da pirâmide

O volume da pirâmide corresponde a $\frac{1}{3}$ do produto da área da base pela altura:

$$\boxed{V = \frac{1}{3}A_b \cdot h}$$

Para compreender melhor essa fórmula, observe que um prisma triangular pode se decompor em três pirâmides triangulares de mesmo volume. Portanto, o volume de cada uma dessas pirâmides é igual à terça parte do volume do prisma triangular. (Pode-se fazer uma experiência cortando um pedaço de sabão.)

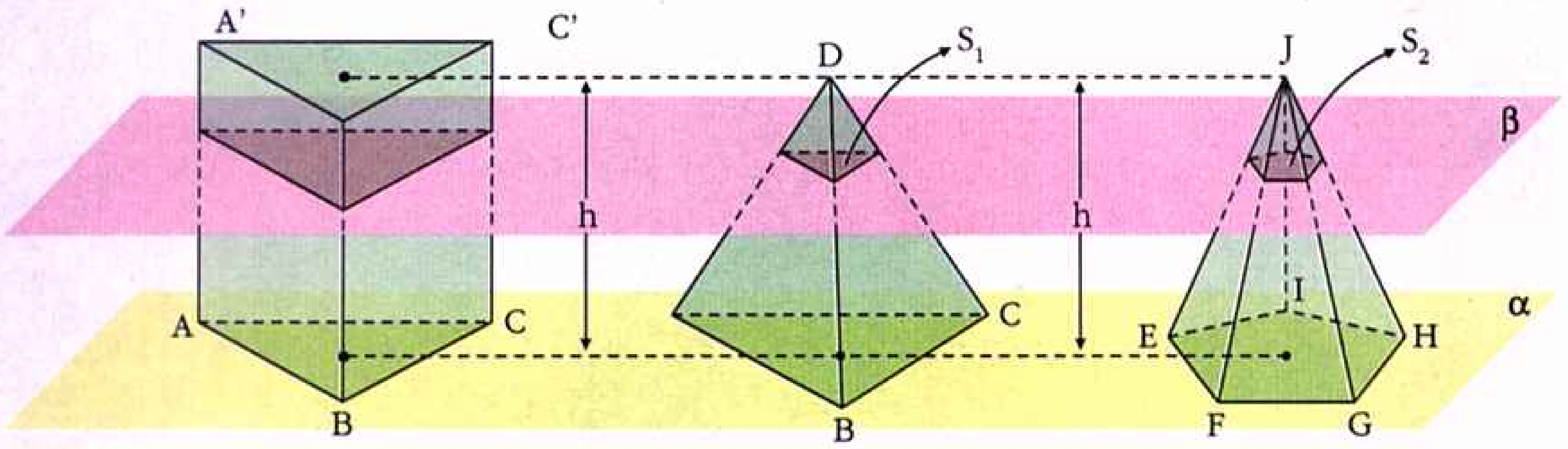


Logo:

$$V_{\text{pirâmide triangular}} = \frac{1}{3} V_{\text{prisma triangular}}$$

$$V_{\text{pirâmide triangular}} = \frac{1}{3} \cdot (\text{área da base} \times \text{altura})$$

Consideremos uma pirâmide qualquer com a mesma altura h e a mesma área da base de uma pirâmide triangular que, quando seccionadas por qualquer plano β paralelo ao plano α das suas bases, determinam secções S_1 e S_2, com áreas iguais.



Pelo Princípio de Cavalieri, isso nos permite dizer que o volume dessa pirâmide qualquer é igual ao dessa pirâmide triangular.

$$V_{\text{pirâmide qualquer}} = V_{\text{pirâmide triangular}}$$

$$\boxed{V_{\text{pirâmide qualquer}} = \frac{1}{3} (\text{área da base} \times \text{altura})}$$

Exercícios

Resolvidos

1 Um tetraedro regular tem todas as arestas de medida ℓ iguais a 6 cm e altura $h = \frac{\ell\sqrt{6}}{3}$. Calcular:

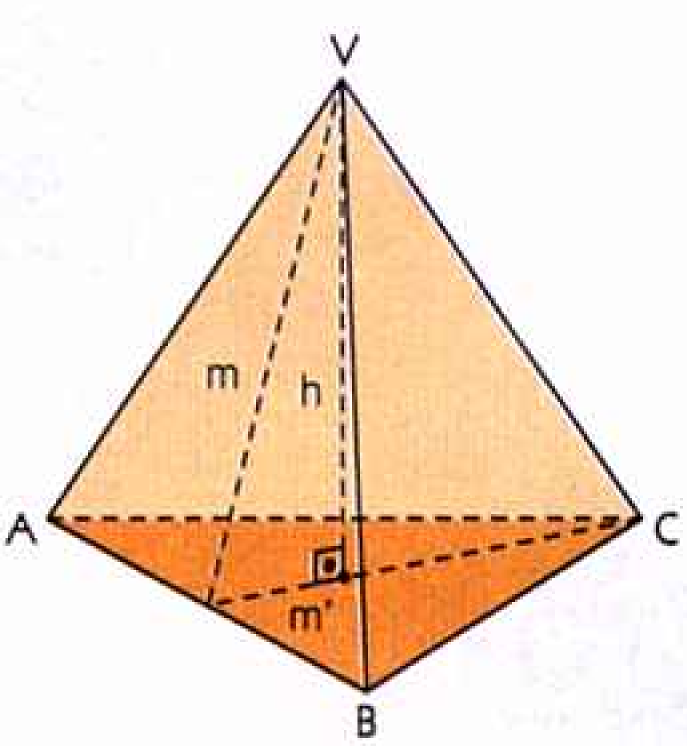
a) medida do apótema da base (m')

b) medida do apótema da pirâmide (m)

c) área da superfície da base

d) área da superfície total

e) volume



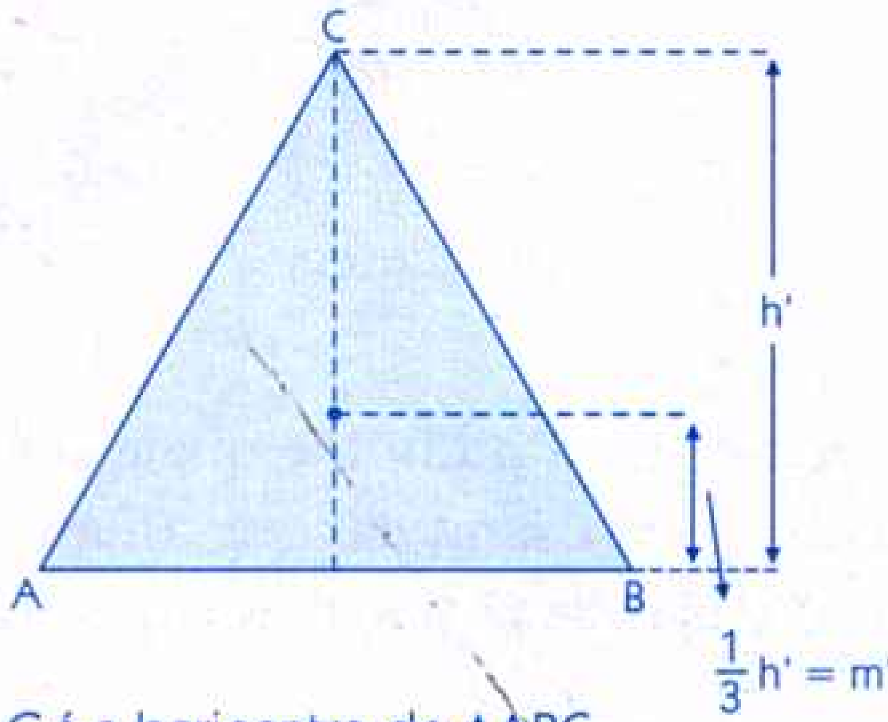
a) A base é um triângulo eqüilátero de altura $\frac{\ell\sqrt{3}}{2}$. A medida m' é $\frac{1}{3}$ da medida da altura da base:

$$m' = \frac{1}{3} \cdot \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

$$m' = \frac{\ell\sqrt{3}}{6}$$

$$m' = \frac{6\sqrt{3}}{6}$$

$$m' = \sqrt{3}$$



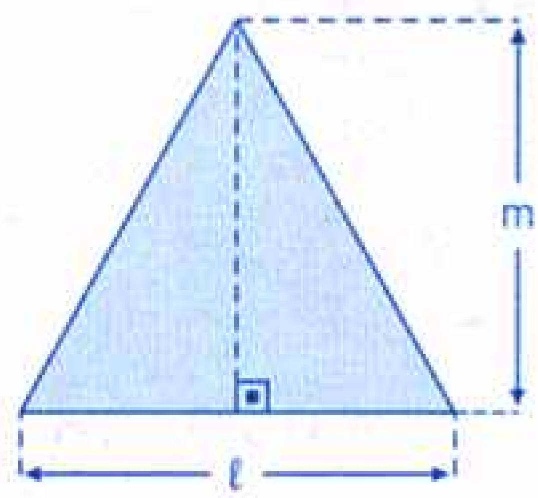
G é o baricentro do ΔABC

apótema da base de um tetraedro regular: $m' = \frac{\ell\sqrt{3}}{6}$

b) No caso do tetraedro regular, *m* corresponde à medida da altura de cada triângulo eqüilátero que forma a superfície lateral:

$$m = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

$$m = 3\sqrt{3} \text{ cm}$$



apótema de um tetraedro regular: $m = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$

c) A base de um tetraedro regular é um triângulo eqüilátero:

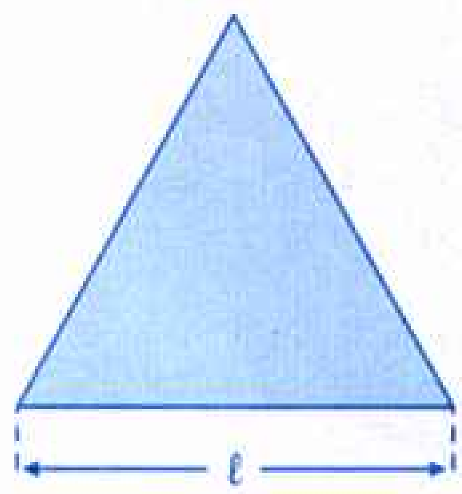
$$A_b = \frac{1}{2}(\ell \cdot \text{altura})$$

$$A_b = \frac{1}{2}\left(\ell \cdot \frac{\ell \cdot \sqrt{3}}{2}\right)$$

$$A_b = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$$

$$A_b = \frac{6^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{36\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$A_b = 9\sqrt{3} \text{ cm}^2$$



área da base de um tetraedro regular: $A_b = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$

d) O tetraedro regular tem 4 triângulos eqüiláteros como faces:

$A_T = 4 \times$ área do triângulo eqüilátero

$$A_T = 4 \cdot \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$$

$$A_T = \ell^2\sqrt{3}$$

$$A_T = 6^2\sqrt{3}$$

$$A_T = 36\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

área da superfície total de um tetraedro regular: $A_T = \ell^2\sqrt{3}$

e) O volume é dado por:

$$V = \frac{1}{3} A_b \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\ell\sqrt{6}}{3}$$

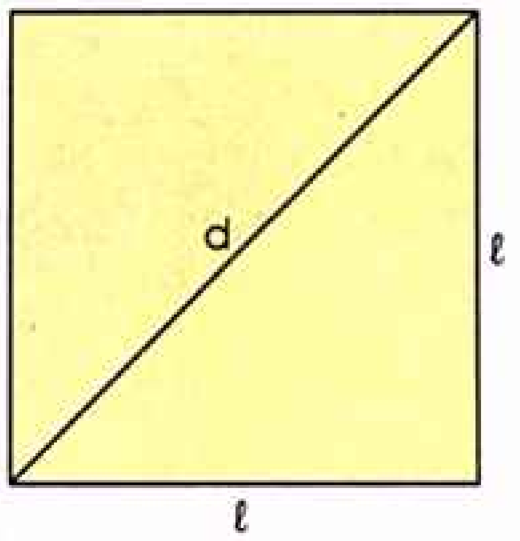
$$V = \frac{\ell^3\sqrt{2}}{12} = \frac{216\sqrt{2}}{12}$$

$$V = 18\sqrt{2}\ \text{cm}^3$$

volume de um tetraedro regular:

$$V = \frac{\ell^3\sqrt{2}}{12}$$

2 (UFPA) Uma pirâmide regular, cuja base é um quadrado de diagonal $6\sqrt{6}$ cm e cuja altura é igual a $\frac{2}{3}$ do lado da base, tem área total igual a:



a) $96\sqrt{3}$ cm²
b) 252 cm²
x c) 288 cm²
d) $84\sqrt{3}$ cm²
e) 576 cm²

diagonal do quadrado: $d = \ell\sqrt{2} \Rightarrow 6\sqrt{6} = \ell \cdot \sqrt{2} \Rightarrow \ell = 6\sqrt{3}$ cm

área da base: $A_b = \ell^2 \Rightarrow A_b = (6\sqrt{3})^2 = 108\ \text{cm}^2$

altura: $h = \frac{2}{3}\ell \Rightarrow h = \frac{2}{3} \cdot 6\sqrt{3} \Rightarrow h = 4\sqrt{3}$ cm

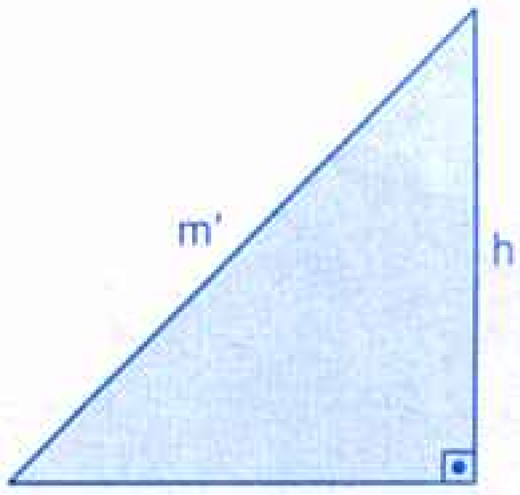
apótema: $m^2 = (m')^2 + h^2 \Rightarrow m^2 = (3\sqrt{3})^2 + (4\sqrt{3})^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow m = 5\sqrt{3}$ cm

área total: $A_T = A_b + A_L \Rightarrow$

$\Rightarrow A_T = 108 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} \cdot 5\sqrt{3}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow A_T = 108 + 180 = 288\ \text{cm}^2$



$$m' = \frac{\ell}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

Propostos

1138 Uma pirâmide triangular regular tem todas as arestas iguais a 12 cm. Determine:

a) medida do apótema da base
b) medida do apótema da pirâmide
c) área da base
d) área total
e) volume

1139 Uma pirâmide quadrangular regular tem 8 m de altura e 12 m de aresta da base. Determine:

a) medida do apótema da base
b) medida do apótema da pirâmide
c) área lateral
d) área da base
e) área total
f) volume

1140 Uma pirâmide triangular regular tem aresta da base a = 3 cm e altura h = 5 cm. Determine o volume e a área da base.

1141 Um tetraedro regular tem aresta a = 4 cm. Calcule a medida do apótema da pirâmide e a área total.

1142 Um tetraedro regular tem 15 cm de perímetro na base. Determine a medida do apótema e a área total do tetraedro.

1143 Determine a área da base, a área total e o volume de uma pirâmide quadrangular regular, com aresta da base a = 6 m e altura h = 4 m.

1144 (UFRS) A área total de um tetraedro regular é $\sqrt{12}$. A sua aresta vale:

a) 1 c) $\sqrt{2}$

b) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ d) 2

1145 (Fuvest-SP) Qual a altura de uma pirâmide quadrangular que tem as 8 arestas iguais a $\sqrt{2}$?

a) $\sqrt{1}$ d) $\sqrt{3}$

b) $\sqrt{2,5}$ e) $\sqrt{2}$

c) $\sqrt{1,5}$

1146 (UFPA) A altura de um tetraedro regular é $4\sqrt{2}$ cm. O apótema do tetraedro mede:

a) 4 cm d) 6 cm

b) $3\sqrt{2}$ cm e) $6\sqrt{2}$ cm

c) $4\sqrt{3}$ cm

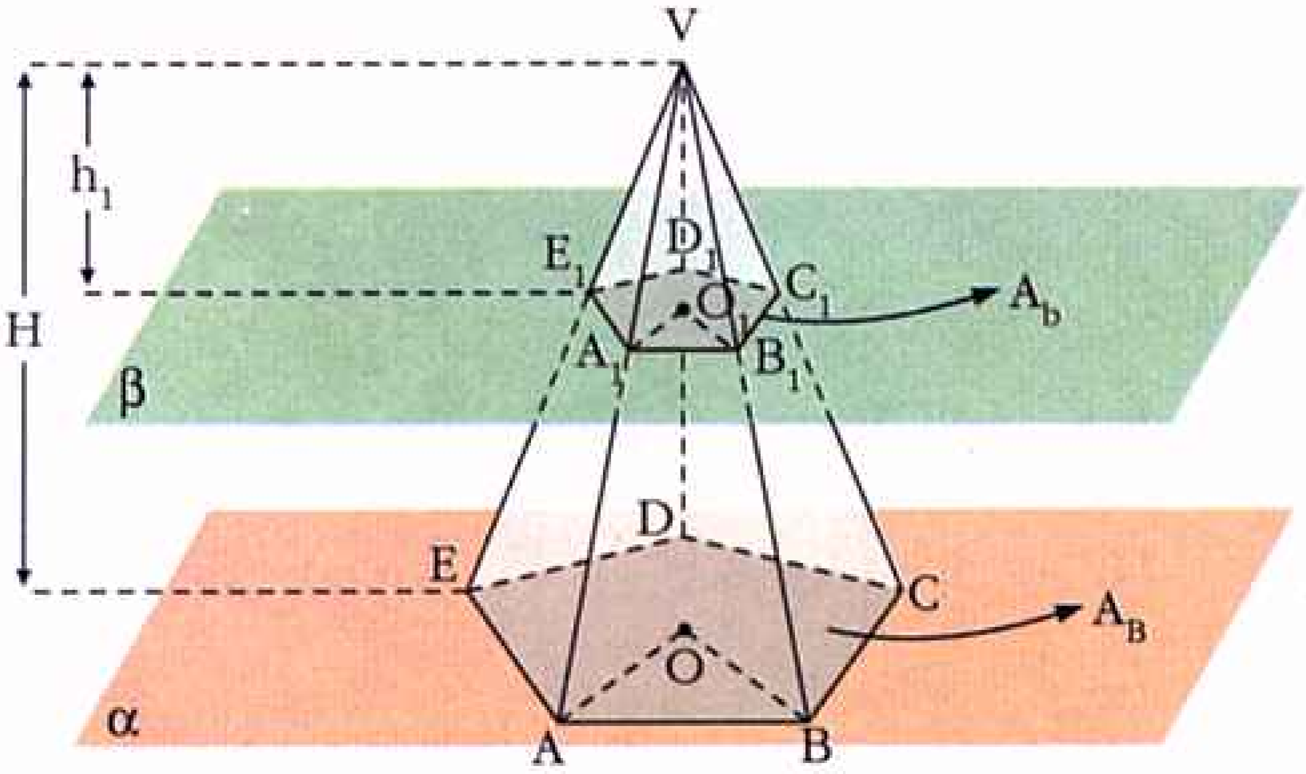
1147 (Fuvest-SP) É dado um tetraedro regular ABCD de aresta 1. Na aresta $\overline{BC}$, toma-se um ponto *P* de modo que PA + PD tenha o menor valor possível.

a) Qual o valor da razão $\frac{PB}{CB}$?

b) Calcule PA + PD.

Secção transversal da pirâmide

O polígono determinado pela intersecção da pirâmide com um plano paralelo à sua base é chamado de *secção transversal da pirâmide*. Observe que os polígonos ABCDE e $A_1B_1C_1D_1E_1$ são semelhantes:



Considerando os planos α e β paralelos e as pirâmides VABCDE e $VA_1B_1C_1D_1E_1$, podemos dizer que os vários triângulos que se formam são semelhantes entre si:

$$\Delta AOB \sim \Delta A_1O_1B_1$$

$$\Delta AVB \sim \Delta A_1VB_1$$

$$\Delta AOV \sim \Delta A_1O_1V$$

Logo, há uma razão de semelhança entre eles:

$$\frac{AO}{A_1O_1} = \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AV}{A_1V} = \frac{OV}{O_1V} = \frac{H}{h_1}$$

Considerando que os polígonos ABCDE e $A_1B_1C_1D_1E_1$ são semelhantes, podemos dizer que a razão entre as áreas desses polígonos é igual ao quadrado da razão de semelhança entre eles:

$$\frac{\text{Área}_{ABCDE}}{\text{Área}_{A_1B_1C_1D_1E_1}} = \frac{A_B}{A_b} = \left(\frac{H}{h_1}\right)^2$$

As faces laterais das duas pirâmides são formadas por triângulos ordenadamente semelhantes, sendo essa razão de semelhança igual a $\frac{H}{h_1}$. Portanto, a razão entre as suas áreas é:

$$\frac{\text{Área}_{\text{Lateral } ABCDE}}{\text{Área}_{\text{Lateral } A_1B_1C_1D_1E_1}} = \frac{A_L}{A_\ell} = \left(\frac{H}{h_1}\right)$$

A razão entre os volumes das duas pirâmides é igual ao cubo da razão de semelhança entre elas:

$$\frac{\text{Volume}_{VABCDE}}{\text{Volume}_{VA_1B_1C_1D_1E_1}} = \frac{V_P}{V_p} = \left(\frac{H}{h_1}\right)^3$$

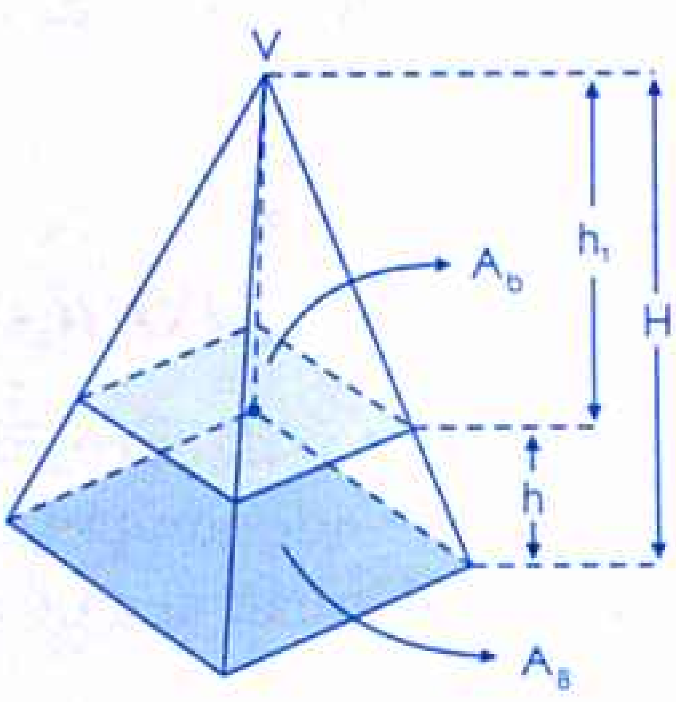
Exercícios

Resolvidos

1 Determinar a altura de uma pirâmide cuja área da base quadrangular é 64 cm^2. Sabe-se que a área da secção transversal obtida, a 6 cm da base, vale 16 cm^2.

Considerando a figura, temos:

$A_B = 64\ cm^2$; $A_b = 16\ cm^2$; $h_1 = H - 6$



Portanto:

$$\frac{A_B}{A_b} = \left(\frac{H}{h_1}\right)^2$$

$$\frac{64}{16} = \frac{H^2}{(H-6)^2}$$

$$4(H-6)^2 = H^2$$

$2H - 12 = H$ ou $2H - 12 = -H$

$H = 12$ cm $\quad$ $H = 4$ cm (Não convém, pois $h_1 > 0$.)

A altura da pirâmide é 12 cm.

2 Qual o volume de uma pirâmide de 6 cm de altura? Considere que essa pirâmide foi seccionada por um plano paralelo à base, a 3 cm do vértice, originando uma área seccional de 45 cm².

A razão de semelhança é:

$$\frac{V_p}{V_p} = \left(\frac{H}{h_1}\right)^3 \quad \text{onde} \quad \begin{cases} V_p\text{: volume da pirâmide maior} \\ H\text{: altura da pirâmide maior} \\ h_1\text{: altura da pirâmide menor} \\ V_p\text{: volume da pirâmide menor} \end{cases}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h_1$$

$$\frac{V_p}{45} = \left(\frac{6}{3}\right)^3$$

$$V_p = \frac{1}{3} \cdot 45 \cdot 3 = 45 \text{ cm}^3$$

$$V = 45 \cdot 8 = 360 \text{ cm}^3$$

Propostos

1148 Uma pirâmide tem 7,5 cm de altura e 225 cm² de área da base. A que distância do vértice uma secção transversal dessa pirâmide deve ser desenhada para que a sua área seja 36 cm²?

1149 Determine a altura de uma pirâmide cuja área da base é B dm². Sabe-se que a secção transversal dessa pirâmide está a 8 dm da base e sua área é $\frac{1}{4}$ da área da base.

1150 (PUC-RS) Uma secção paralela à base feita a 3 cm do vértice de uma pirâmide tem área igual a $\frac{1}{3}$ da área da base. A altura da pirâmide é, em centímetros, igual a:

a) $3\sqrt{3}$
b) 5
c) $2\sqrt{6}$
d) $2\sqrt{3}$
e) $\sqrt{3}$

1151 (Vunesp) Queremos seccionar uma pirâmide quadrangular regular por um plano paralelo à base de modo a obter uma outra com $\frac{1}{3}$ do volume da maior. Se a altura da menor é *h* e da maior *H*, então *h* é igual a:

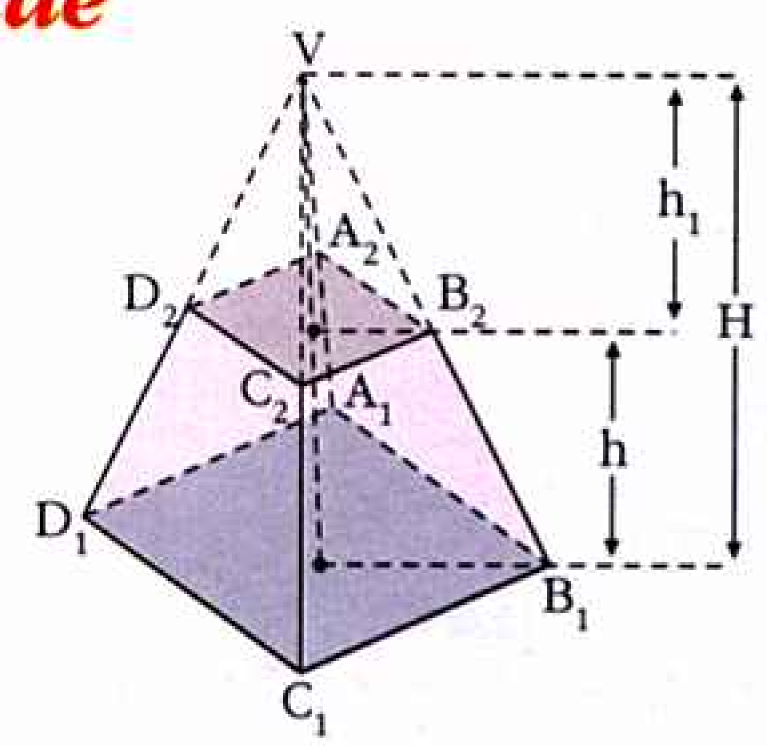
a) $\frac{H}{3}$
b) $\frac{H^3\sqrt{3}}{3}$
c) $\frac{H(\sqrt[3]{3})^2}{3}$
d) $\frac{2H\sqrt[3]{3}}{3}$
e) $\frac{2H\sqrt[3]{3}}{9}$

1152 (PUC-SP) Uma pirâmide tem 10 dm² de base e 2 m de altura. A distância da base a que se deve traçar um plano paralelo para que a secção seja $\frac{1}{5}$ da base é, aproximadamente:

a) 1,041 m
b) 1,106 m
c) 1,021 m
d) 1,341 m
e) 1,204 m

Tronco de pirâmide

Denominamos *tronco de pirâmide de bases paralelas* a parte da pirâmide limitada pela base e por uma secção transversal, qualquer, dessa pirâmide.



Elementos do tronco de pirâmide

Base maior do tronco, de área *B*.

Base menor do tronco, de área *b*.

No tronco de pirâmide regular as bases são polígonos regulares e semelhantes.

As faces laterais são trapézios isósceles e congruentes.

a: apótema do tronco (é a altura de uma das faces trapezoidais)

Altura do tronco (*h*): distância entre as bases.

Volume do tronco de pirâmide

O volume V_T do tronco de pirâmide é obtido pela diferença entre os volumes $V_{A_1B_1C_1D_1}$ e $V_{A_2B_2C_2D_2}$ das pirâmides:

$$V_T = V_{A_1B_1C_1D_1} - V_{A_2B_2C_2D_2}$$

$$V_T = \frac{1}{3} B \cdot H - \frac{1}{3} b \cdot (H - h) \Rightarrow V_T = \frac{1}{3}\left[B \cdot H - b\,(H - h)\right]$$

$$V_T = \frac{1}{3}\,[B \cdot H - bH + bh] \Rightarrow V_T = \frac{1}{3}\left[(B - b)\,H + bh\right] \qquad \text{(I)}$$

Usando a propriedade da secção transversal, podemos determinar o valor da altura *H* em função dos parâmetros pedidos:

$$\frac{B}{b} = \frac{H^2}{(H - h)^2} \Rightarrow b \cdot H^2 = B \cdot (H - h)^2 \Rightarrow H = \frac{\sqrt{B(H - h)^2}}{\sqrt{b}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H = \frac{\sqrt{B} \cdot (H - h)}{\sqrt{b}} \Rightarrow H \cdot \sqrt{b} = H \cdot \sqrt{B} - h\sqrt{B} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H\left(\sqrt{B} - \sqrt{b}\right) = h\sqrt{B} \Rightarrow H = \frac{h\sqrt{B}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}} \qquad \text{(II)}$$

Substituindo a equação (II) na equação (I), temos:

$$V_T = \frac{1}{3}\left[(B - b)\,H + b \cdot h\right] \Rightarrow V_T = \frac{1}{3}\left[(B - b)\,\frac{h\sqrt{B}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}} + b \cdot h\right]$$

$$V_T = \frac{1}{3}\left[\frac{B - b}{\sqrt{B} - \sqrt{b}} \cdot h\sqrt{B} + b \cdot h\right] \Rightarrow V_T = \frac{1}{3}\left[\left(\sqrt{B} + \sqrt{b}\right) \cdot h\sqrt{B} + b \cdot h\right]$$

$$\boxed{V_T = \frac{1}{3}\,h\left(B + \sqrt{B \cdot b} + b\right)}$$

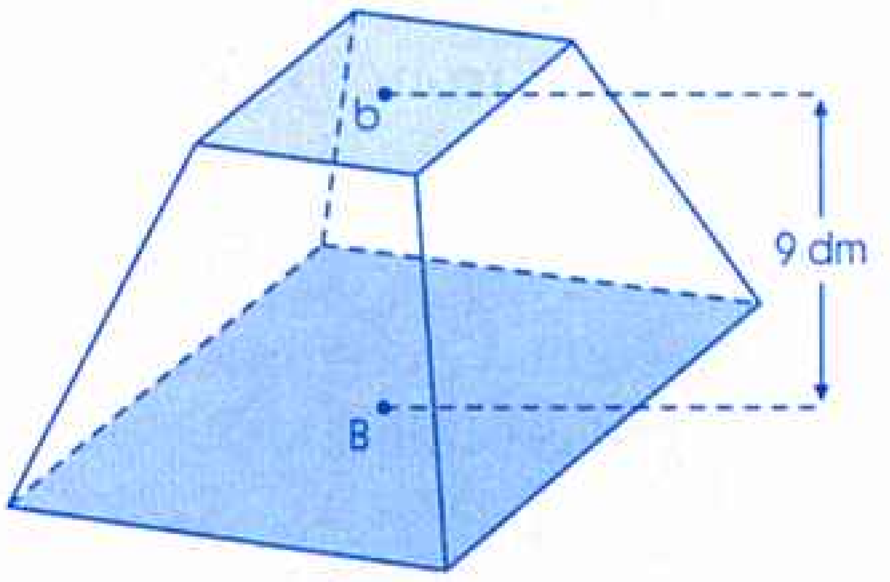
Considerando:

$$\frac{B - b}{\sqrt{B} - \sqrt{b}} = \frac{(B - b) \cdot \left(\sqrt{B} + \sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{B} - \sqrt{b}\right) \cdot \left(\sqrt{B} + \sqrt{b}\right)} \Rightarrow \frac{B - b}{\sqrt{B} - \sqrt{b}} = \left(\sqrt{B} + \sqrt{b}\right)$$

Exercícios

Resolvidos

1 Determinar o volume de um tronco de pirâmide que tem 9 dm de altura e bases quadradas de lados 4 dm e 3 dm.



Área da base maior:

$B = 4\ \text{dm} \cdot 4\ \text{dm} = 16\ \text{dm}^2$

Área da base menor:

$b = 3\ \text{dm} \cdot 3\ \text{dm}$

$b = 9\ \text{dm}^2$

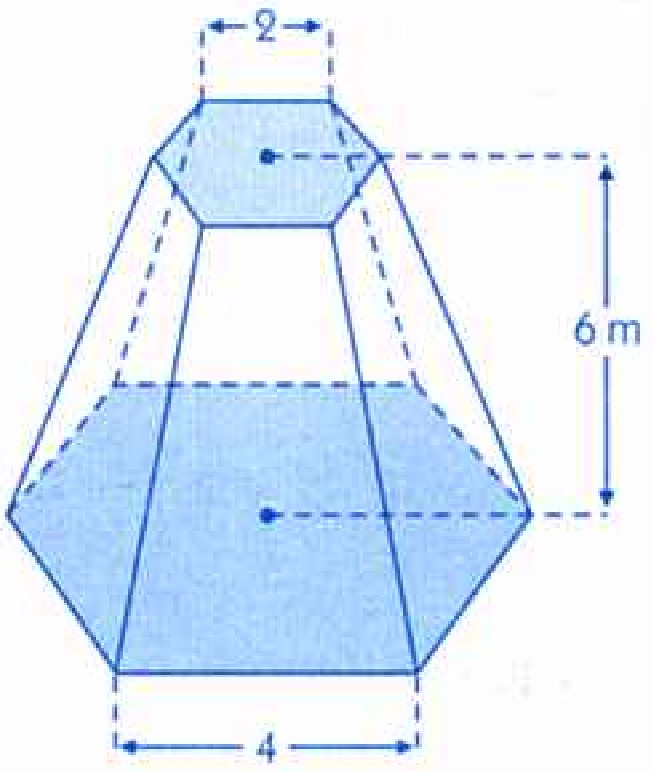
O volume do tronco de pirâmide é dado por:

$$V = \frac{1}{3}h\left(B + \sqrt{B \cdot b} + b\right)$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 9\left(16 + \sqrt{16 \cdot 9} + 9\right)$$

$$V = 111\ \text{dm}^3$$

2 Um reservatório tem a forma de um tronco de pirâmide hexagonal regular. Sabendo que a altura do tronco vale 6 m e as arestas das bases medem 2 m e 4 m, determinar o seu volume.



Área da base maior:

$$B = \frac{3 \cdot \ell^2\sqrt{3}}{2} \quad \text{(hexágono regular)}$$

$$B = \frac{3 \cdot 4^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$$

$$B = 24\sqrt{3}\ \text{m}^2$$

Área da base menor:

$$b = \frac{3\ell^2\sqrt{3}}{2} \quad \text{(hexágono regular)}$$

$$b = \frac{3 \cdot 2^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$$

$$b = 6\sqrt{3}\ \text{m}^2$$

O volume do tronco da pirâmide é dado por:

$$V = \frac{1}{3}h\left(B + \sqrt{B \cdot b} + b\right)$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 6\left(24\sqrt{3} + \sqrt{24\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3}} + 6\sqrt{3}\right)$$

$$V = 2\left(24\sqrt{3} + 12\sqrt{3} + 6\sqrt{3}\right)$$

$$V = 84\sqrt{3}\ \text{m}^3$$

Propostos

1153 Determine a altura de um tronco de pirâmide de bases quadradas, sabendo que as bases têm arestas 1 dm e 2 dm, e o volume do tronco é de 15 dm^3.

1154 Um tronco de pirâmide hexagonal regular tem aresta da base maior com 4 cm e altura 5 cm. Determine o volume desse tronco, sabendo que a pirâmide que o originou tem 10 cm de altura.

1155 (Mack-SP) Qual o volume de um tronco de pirâmide quadrangular regular, se os lados das bases medem 10 cm e 4 cm e a altura mede 4 cm?

a) 205 cm^3
b) 206 cm^3
c) 207 cm^3
d) 208 cm^3
e) 209 cm^3

1156 Um reservatório é construído para receber 208 m^3 de determinado produto. Para facilitar o escoamento, o formato do reservatório é de um tronco de pirâmide.
Determine a altura do reservatório, sabendo que as bases quadradas têm perímetros 16 m e 48 m.

1157 (PUC-SP) Um tronco de pirâmide de bases quadradas tem 21 dm^3 de volume, 30 cm de altura, 40 cm no lado do quadrado da base maior. Então, o lado do quadrado de base menor mede:

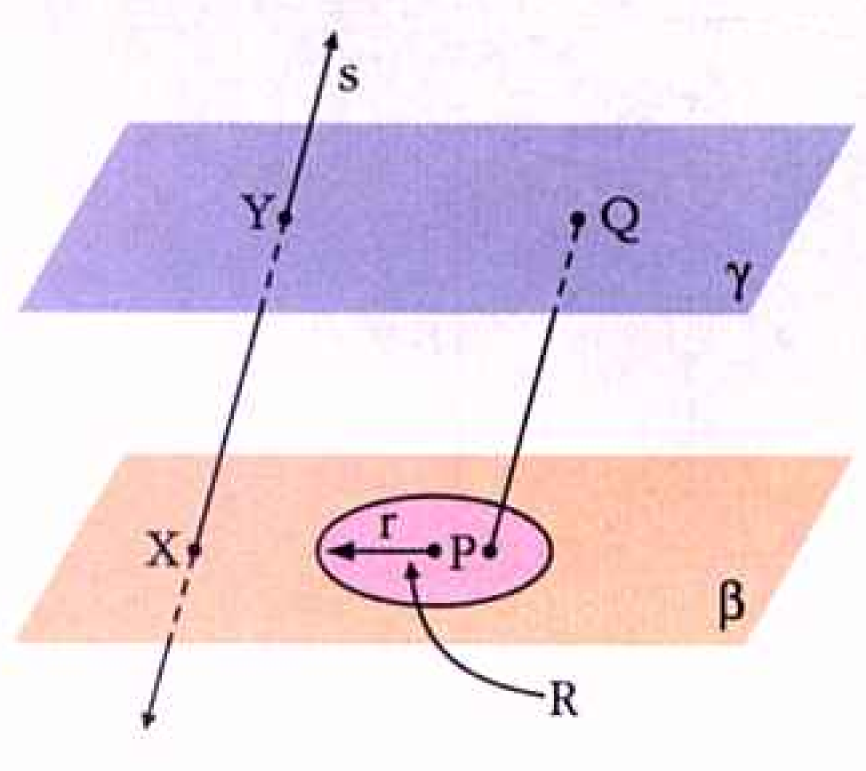
a) 8 cm
b) 6 cm
c) 10 cm
d) 12 cm
e) 14 cm

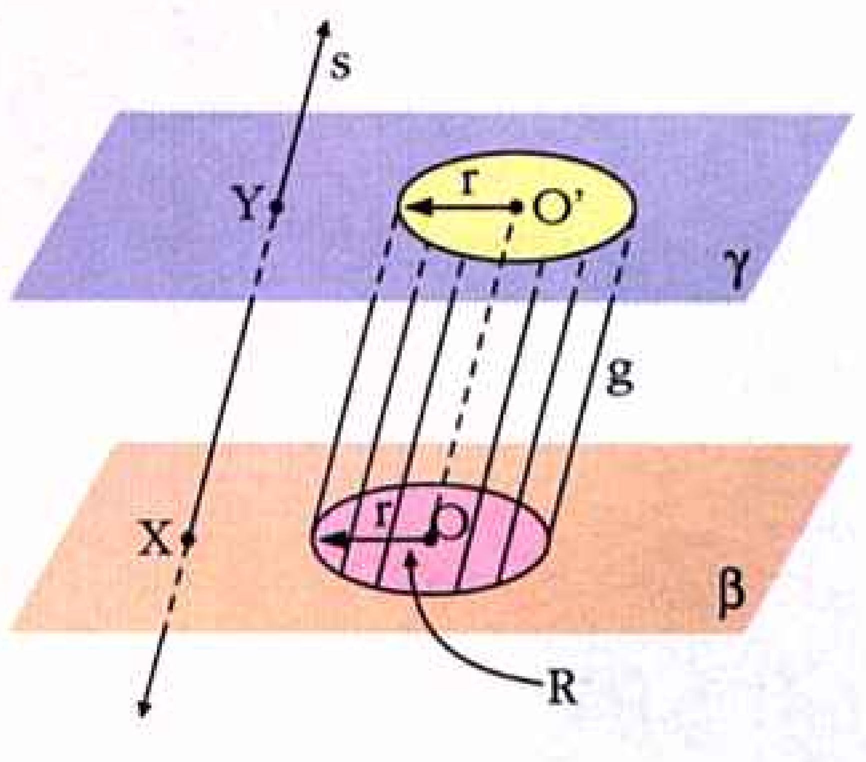
1158 (ITA-SP) Dentro de um tronco de pirâmide quadrangular regular, considera-se uma pirâmide regular cuja base é a base maior do tronco e cujo vértice é o centro da base menor do tronco. As arestas das bases medem *a* centímetros e 2a centímetros. As áreas laterais do tronco e da pirâmide são iguais. A altura (em centímetros) do tronco mede:

a) $\dfrac{a\sqrt{3}}{5}$
b) $\dfrac{a\sqrt{35}}{10}$
c) $\dfrac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$
d) $\dfrac{a\sqrt{35}}{\sqrt{10}}$
e) $\dfrac{a\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$

4. Cilindros

Sejam *R* um círculo contido num plano β e $\overleftrightarrow{XY}$ um segmento de uma reta *s* concorrente com β. Denominamos cilindro o conjunto dos pontos dos segmentos paralelos e congruentes a $\overleftrightarrow{XY}$ que têm uma extremidade em *R* e que estão num mesmo semi-espaço determinado por β.





Elementos do cilindro

Bases: são os círculos de centros O e O' e raios de medida r.

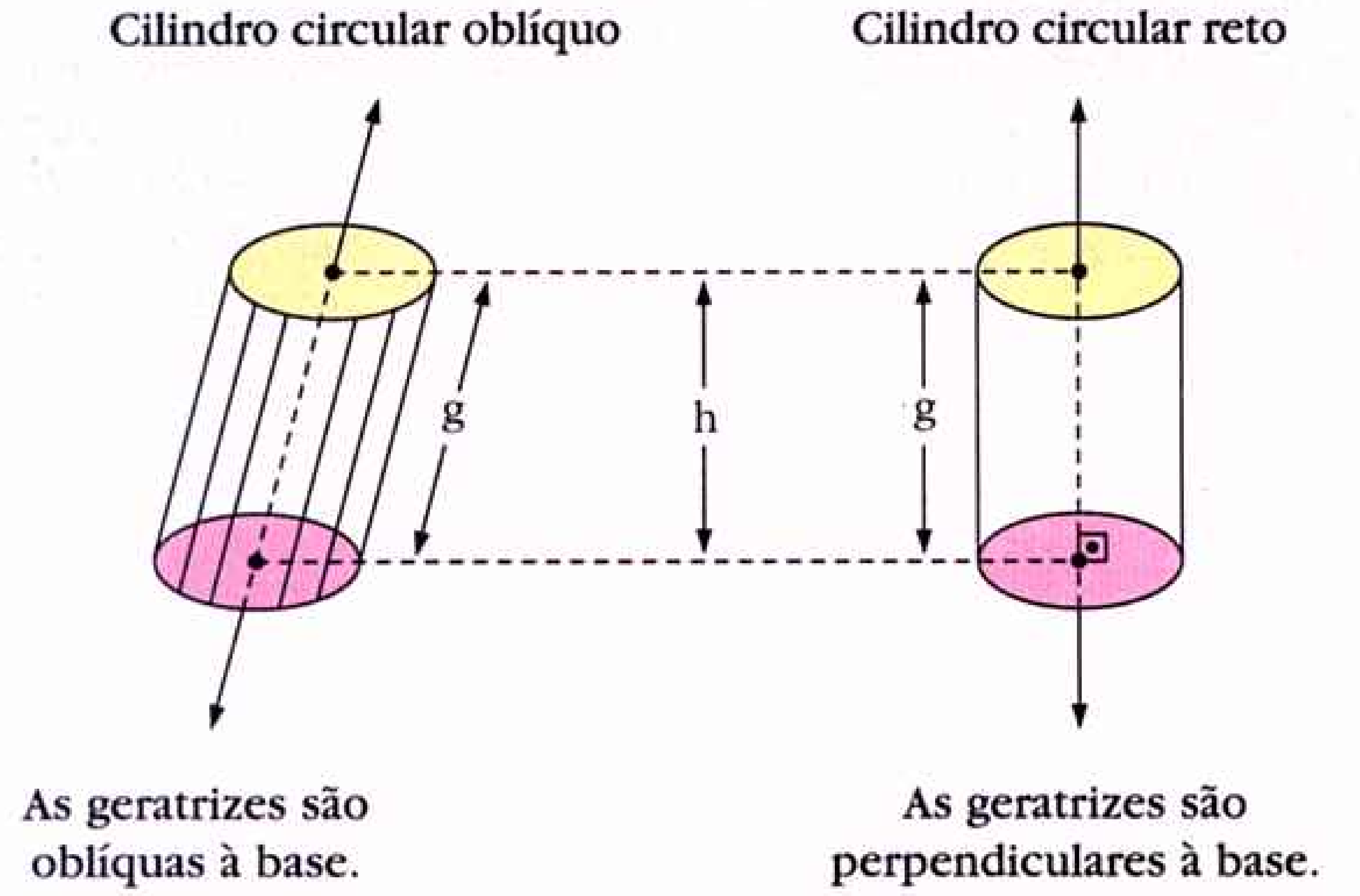
Geratriz: é todo segmento paralelo a $\overleftrightarrow{OO'}$ e com extremos nas circunferências das bases; indicaremos sua medida por g.

Altura (h): distância entre os planos das bases.

Cilindros são exemplos de sólidos geométricos.

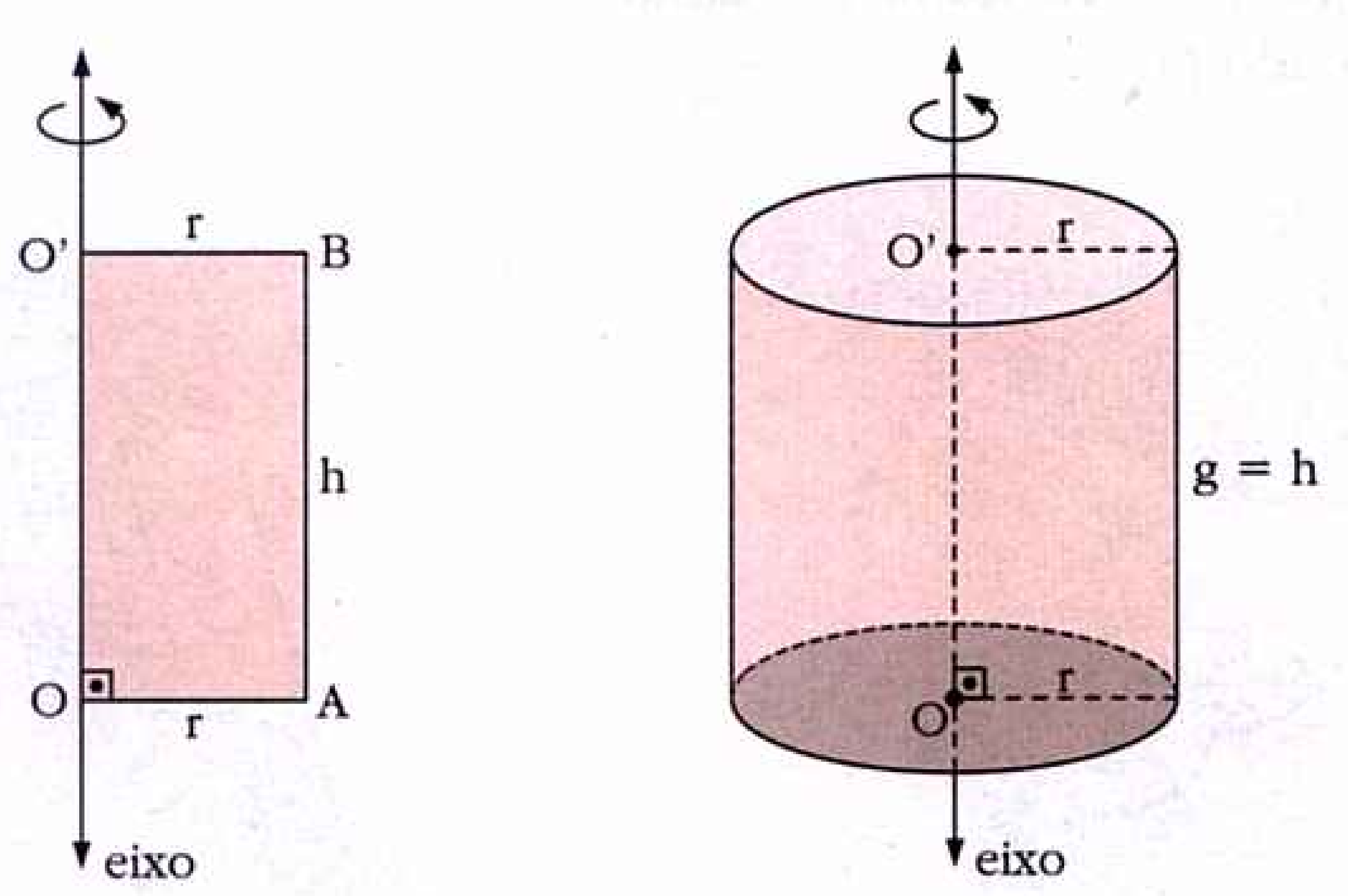
Classificação

O cilindro circular pode ser classificado como *oblíquo* ou *reto*, conforme a posição de uma geratriz em relação aos planos das bases.

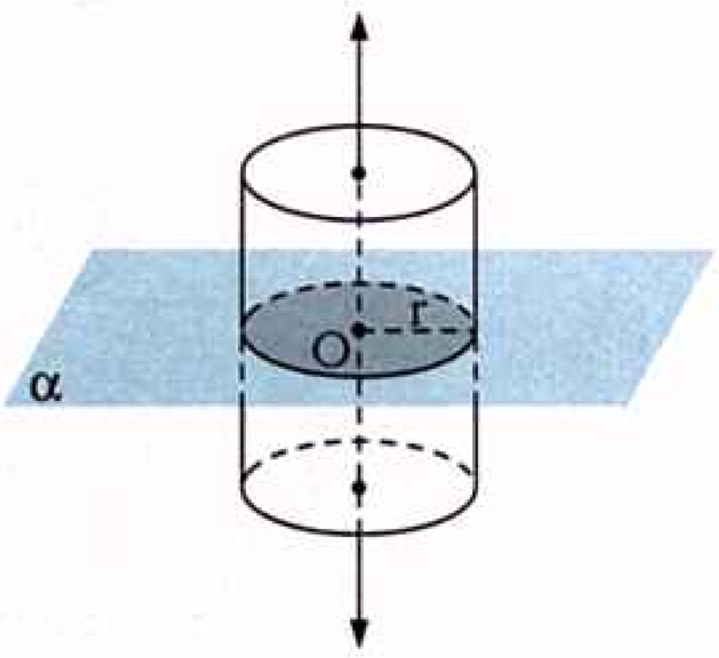


Cilindro circular reto

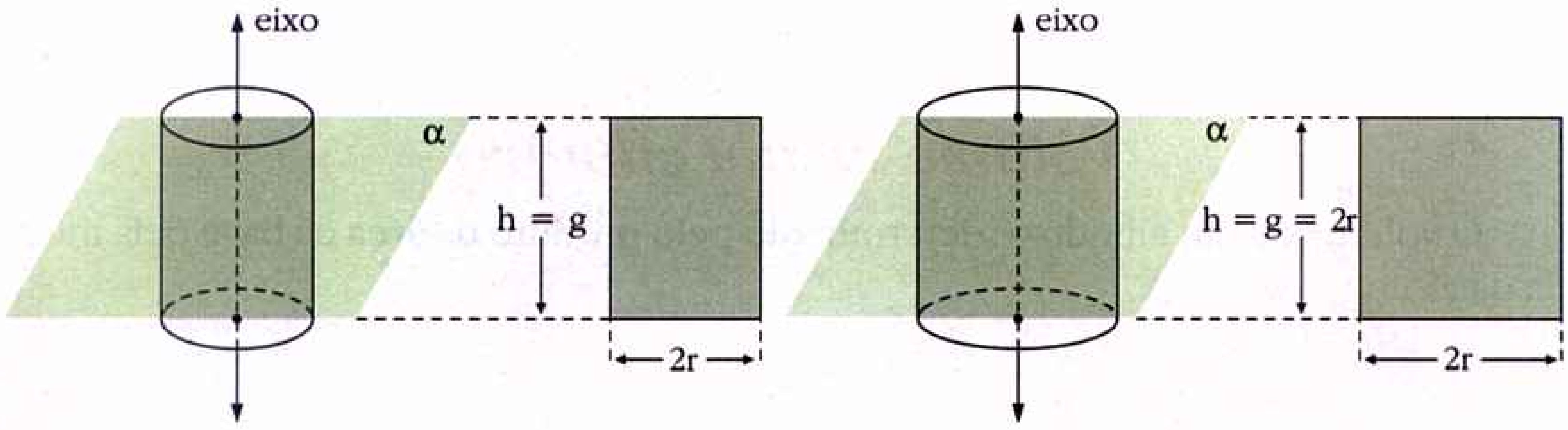
Cilindro circular reto ou *de revolução* é um sólido gerado pela rotação de 360° de um retângulo OABO' em torno de um eixo que contém um de seus lados.



- No cilindro circular reto a medida da geratriz é igual à altura.
- A *secção transversal*, produzida pela intersecção de um cilindro com um plano paralelo às bases, é circular.



- A *secção meridiana*, produzida pela intersecção de um cilindro circular reto com um plano que contém o eixo, é um retângulo.



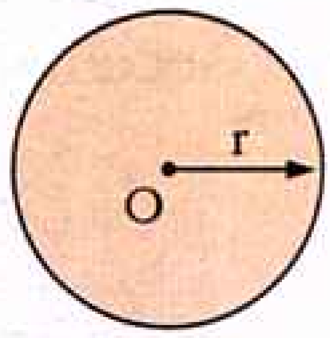
No cilindro reto, a secção meridiana é um *retângulo*.

No cilindro reto eqüilátero, a secção meridiana é um *quadrado*.

Área da base de um cilindro reto

As bases são circulares. Portanto:

$$\boxed{A_b = \pi r^2}$$



Área da superfície lateral de um cilindro reto

Neste caso, a área da superfície lateral é igual à área de um retângulo. Assim:

$$\boxed{A_L = 2\pi r \cdot h}$$

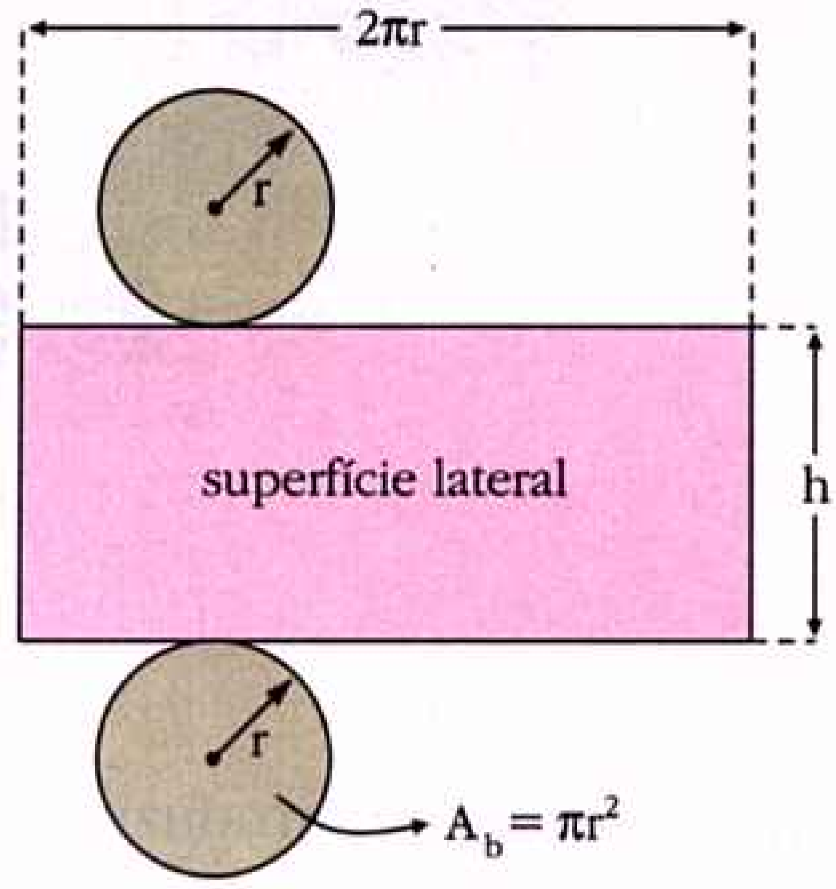
Área da superfície total

A superfície total compreende a superfície da base e a superfície lateral. Logo:

$$A_T = 2 \cdot A_b + A_L$$

$$A_T = 2 \cdot (\pi r^2) + (2\pi rh)$$

$$\boxed{A_T = 2\pi r (h + r)}$$



Volume de um cilindro

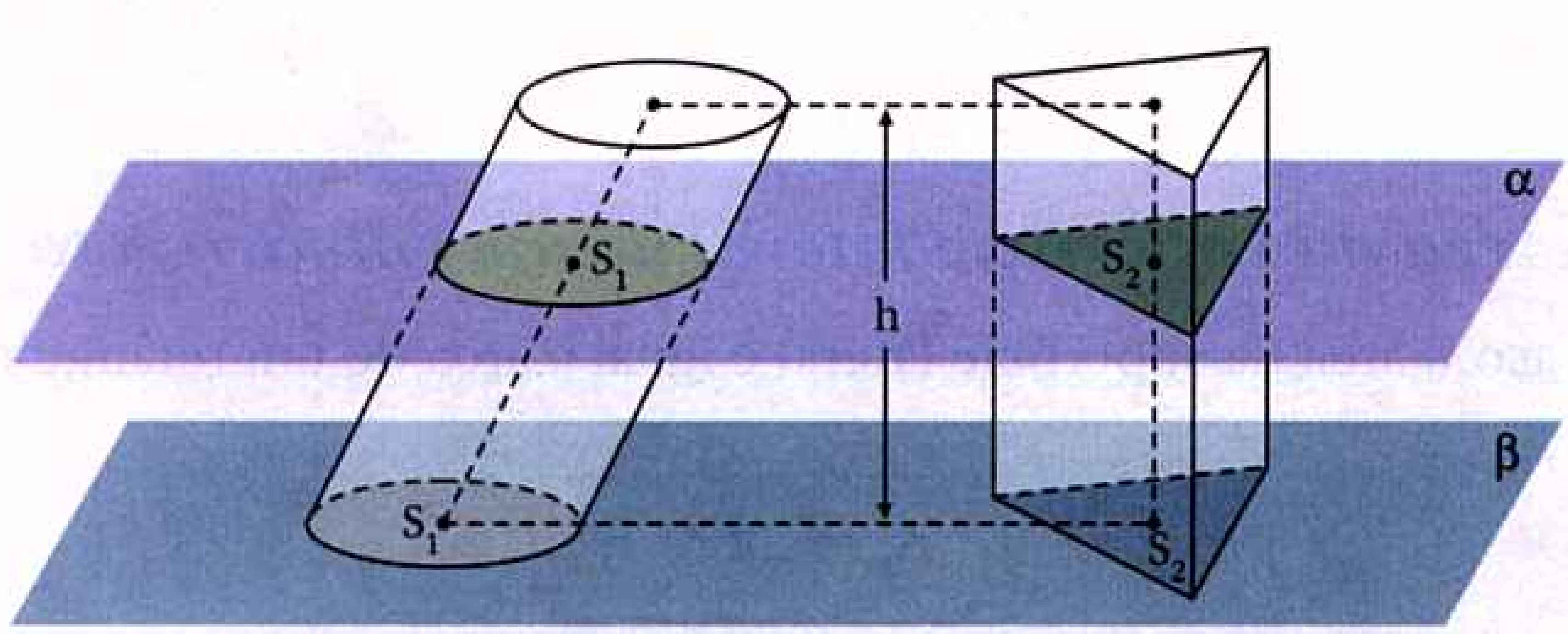
O volume de um cilindro é determinado pelo produto da área da base pela medida da altura:

$$V = A_b \cdot h$$

$$\boxed{V = \pi r^2 \cdot h}$$

Essa fórmula pode ser melhor compreendida se calculamos o volume de um cilindro circular que tem altura *h* e raio da base *r*.

Considere um plano α qualquer, traçado paralelamente ao plano β, que determina, no cilindro e no prisma, secções transversais S_1 e S_2 com áreas respectivamente iguais às de suas bases:



Se o cilindro e o prisma têm secções transversais S_1 e S_2 com áreas iguais, podemos usar o Princípio de Cavalieri e afirmar que o volume do cilindro é igual ao volume do prisma.

$$V_{cilindro} = V_{prisma}$$

$$V_{cilindro} = \text{área da base} \cdot \text{altura}$$

Como a base do cilindro é um círculo de área πr^2, temos:

$$V_{cilindro} = \pi r^2 h$$

Exemplo:

Conhecendo a altura de um cilindro reto h = 13 cm e a medida do raio da base r = 5 cm, podemos calcular a sua área total e o seu volume, substituindo esses valores na respectiva fórmula:

$$A_T = 2\pi r (h + r) \qquad V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$A_T = 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot (13 + 5) \qquad V = \pi \cdot 5^2 \cdot 13$$

$$A_T = 180\pi \text{ cm}^2 \qquad V = 325\pi \text{ cm}^3$$

Exercícios

Resolvidos

1 Num cilindro reto, o raio da base mede 4 cm e a altura, 10 cm. Calcular:

a) área da base
b) área lateral
c) área total
d) volume

a) A área da base corresponde à área do círculo:

$A_b = \pi r^2 \Rightarrow A_b = \pi \cdot 4^2 \Rightarrow A_b = 16\pi \text{ cm}^2$

b) A área lateral é dada por:

$A_L = 2\pi r \cdot h \Rightarrow A_L = 2\pi 4 \cdot 10 \Rightarrow A_L = 80\pi \text{ cm}^2$

c) A área total é dada por:

$A_T = 2 \cdot A_b + A_L \Rightarrow A_T = 2 \cdot 16\pi + 80\pi \Rightarrow A_T = 112\pi \text{ cm}^2$

d) O volume é dado por:

$V = \pi \cdot r^2 \cdot h \Rightarrow V = \pi \cdot 4^2 \cdot 10 \Rightarrow V = 160\pi \text{ cm}^3$

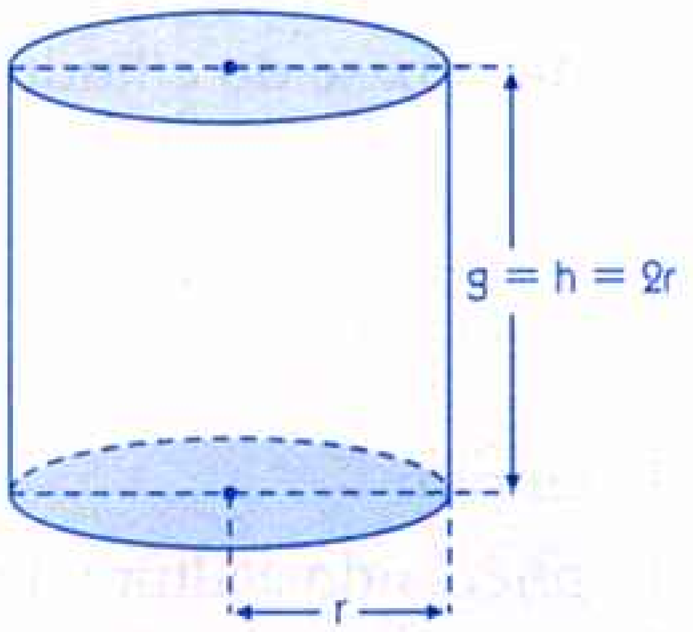
2 Se num cilindro eqüilátero o volume é $16\pi\ cm^3$, determinar:

a) a medida do raio da base

b) a altura

c) a área total

- A secção meridiana do cilindro eqüilátero corresponde a um quadrado.
- Num cilindro eqüilátero, a medida da geratriz é igual ao diâmetro das bases, ou seja: $g = h = 2r$.



a) a medida do raio pode ser obtida por:

$$V = \pi r^2 \cdot h \Rightarrow V = \pi r^2 \cdot 2r \Rightarrow V = 2\pi r^3$$

$$16\pi = 2\pi r^3 \Rightarrow r^3 = \frac{16\pi}{2\pi} \Rightarrow r = 2\ cm$$

b) A altura é o dobro do raio:

$$h = 2r \Rightarrow h = 2 \cdot 2 \Rightarrow h = 4\ cm$$

c) A área total é dada por:

$$A_T = 2\pi r (h + r)$$

$$A_T = 2\pi r (2r + r)$$

$$A_T = 6\pi r^2 \Rightarrow A_T = 6\pi\, 2^2 \Rightarrow A_T = 24\pi\ cm^2$$

Volume do cilindro eqüilátero:

$V = 2\pi r^3$

Área total do cilindro eqüilátero:

$A_T = 6\pi r^2$

Propostos

1159 A altura h de um cilindro reto é 6 m e o raio r da base mede 2 m. Determine:

a) área da base

b) área lateral

c) área total

d) volume

1160 O raio da base de um cilindro reto mede 3 cm e a altura, 9 cm. Determine:

a) área total b) volume

1161 Se um cilindro eqüilátero tem volume $V = 54\pi\ dm^3$, dê o valor de:

a) medida do raio da base

b) altura

c) área total

1162 O raio da base de um cilindro eqüilátero mede 6 cm. Determine:

a) altura

b) área total

c) volume

1163 Determine a área total e o volume de um cilindro cujo raio da base mede 2 cm e cuja altura mede 7 cm.

1164 Para projetar um reservatório cilíndrico de volume $81\pi\ m^3$, dispõe-se de uma área circular de 6 m de diâmetro. Qual deve ser sua altura, considerando $\pi = 3{,}14$?

1165 (UFV-MG) Para se construir uma lata cilíndrica de base circular, sem tampa, com 20 cm de diâmetro na base e 25 cm de altura, são gastos $x\ cm^2$ de material. O valor de x é:

a) 400π d) 700π

b) 600π e) 500π

c) 300π

1166 (PUC-RS) Dois cilindros, um de altura 4 e outro de altura 6, têm para perímetro de suas bases 6 e 4, respectivamente. Se V_1 é o volume do primeiro e V_2 o volume do segundo, então:

a) $V_1 = V_2$ d) $2\,V_1 = 3\,V_2$

b) $V_1 = 2\,V_2$ e) $2\,V_1 = V_2$

c) $V_1 = 3\,V_2$

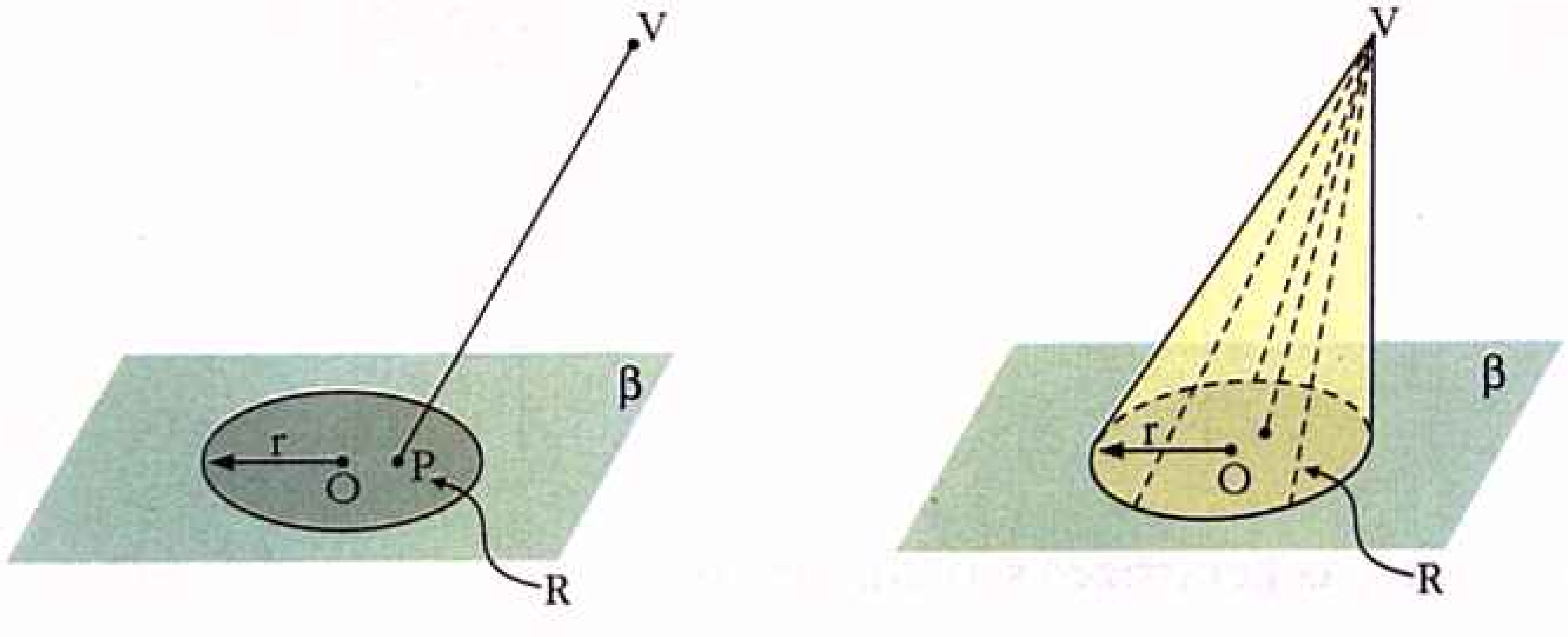
1167 (UFSC) Uma panela caseira tem a forma de um cilindro; sua altura é 15 cm e o diâmetro, 20 cm. Deve-se enchê-la com cubos de gelo de 2 cm de aresta, de tal forma que não transborde ao derreter o gelo. A quantidade máxima de cubos de gelo necessária é aproximadamente:
a) 985
b) 859
c) 589
d) 598
e) 895

1168 (Unicamp-SP) Um copo cilíndrico tem altura h e base de raio r. A quantidade de água necessária para encher esse copo deixaria incompleto, encheria sem transbordar ou faria transbordar outro copo cilíndrico de altura $2h$ e base de raio $\frac{r}{2}$? Explique por quê.

1169 (FGV) Um produto é embalado em recipientes com formato de cilindros retos. O cilindro *A* tem altura 20 cm e raio da base 5 cm. O cilindro *B* tem altura 10 cm e raio da base 10 cm.
a) Em qual das duas embalagens gasta-se menos material?
b) O produto embalado no cilindro *A* é vendido a R$ 4,00 a unidade; o cilindro *B*, a R$ 7,00 a unidade. Para o consumidor, qual a embalagem mais vantajosa?

5. Cones

Se R é um círculo contido num plano β e V é um ponto fora de β ($V \notin \beta$), denominamos *cone* o conjunto dos pontos de todos os segmentos que têm uma extremidade em V e a outra extremidade num ponto de R.



Elementos do cone

Vértice: V

Base: região circular de raio de medida r e centro O.

Geratrizes: os segmentos com extremidades no vértice e na circunferência da base; indicaremos sua medida por g.

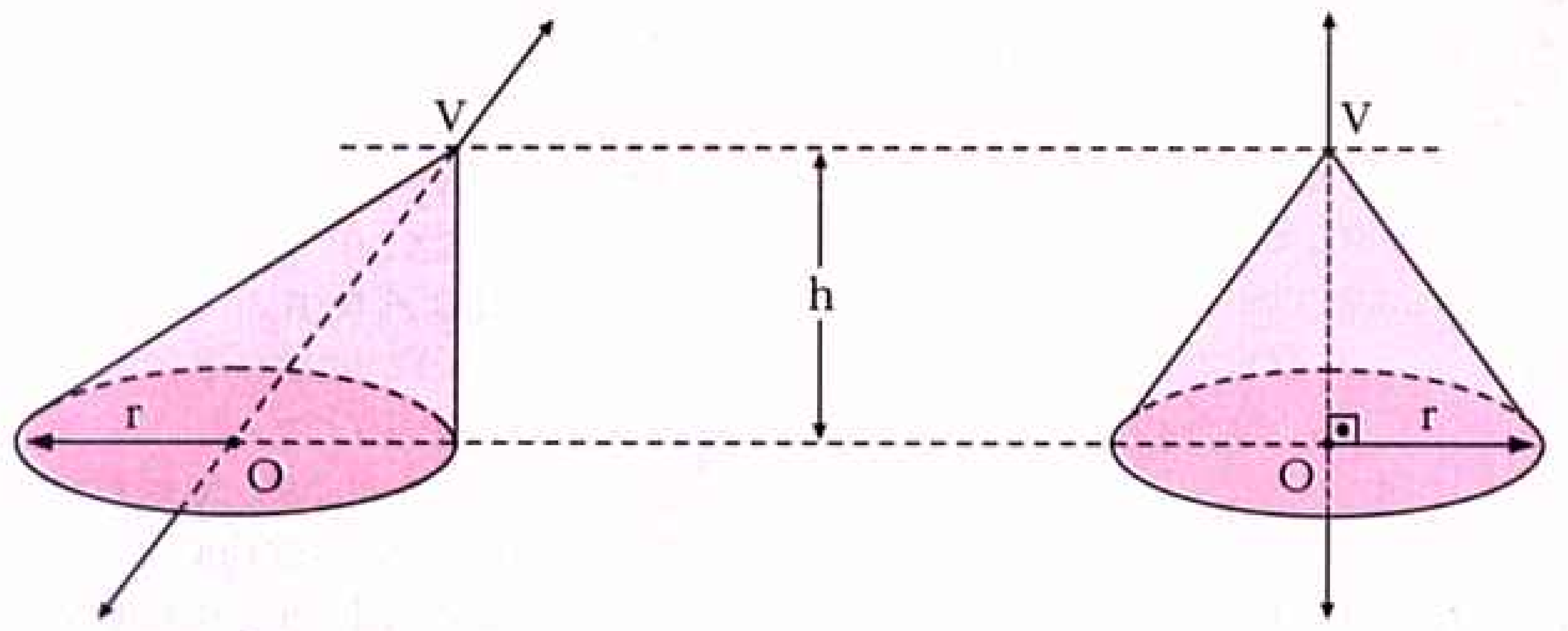
Altura (h): distância entre o vértice e o plano da base.

Cones são exemplos de sólidos geométricos.

O cone circular pode ser classificado como *oblíquo* ou *reto*, conforme a posição da reta $\overleftrightarrow{VO}$ que une o vértice ao centro da base.

Cone circular oblíquo

Cone circular reto

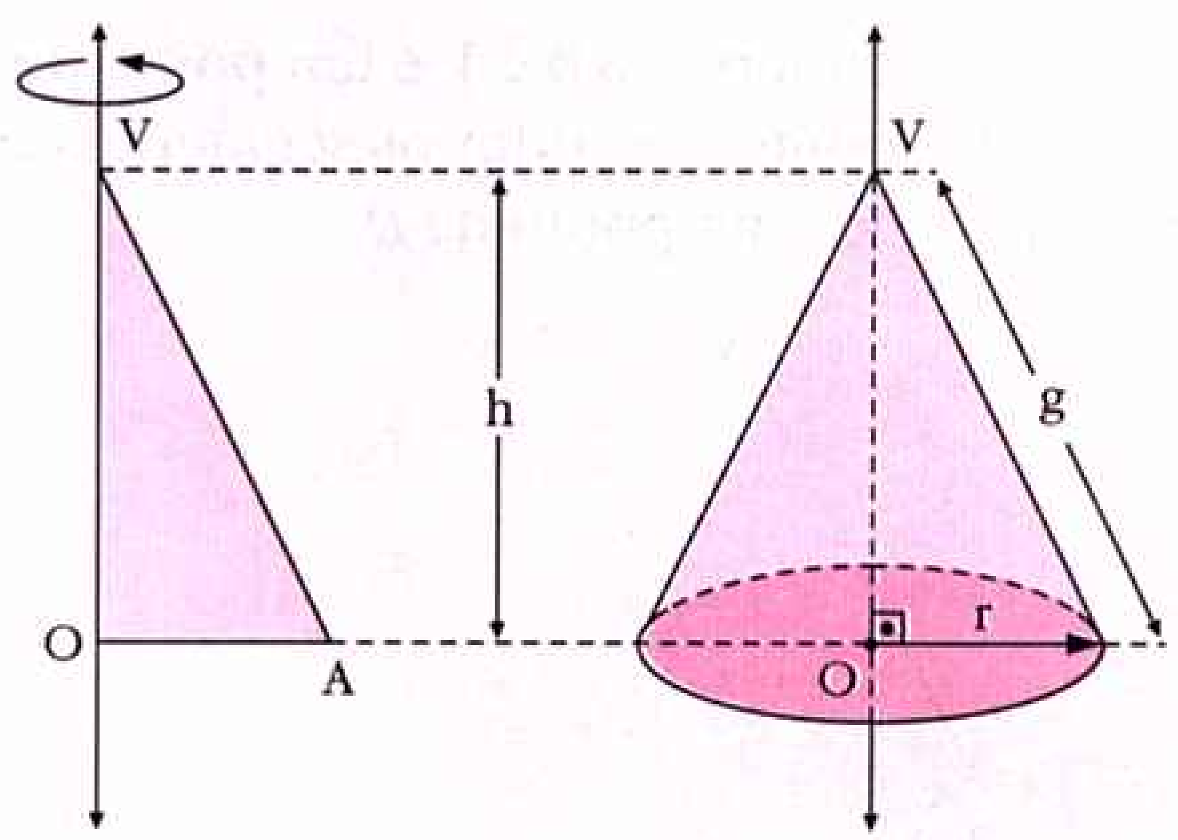


$\overleftrightarrow{VO}$ é oblíqua à base.

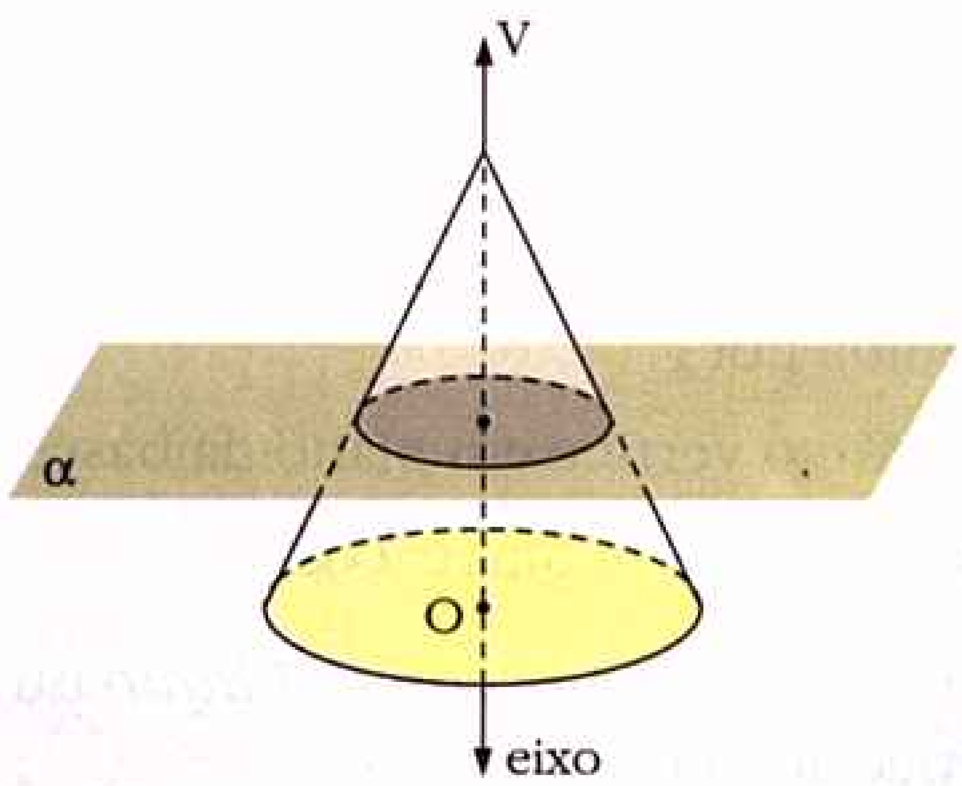
$\overleftrightarrow{VO}$ é perpendicular à base.

Cone circular reto

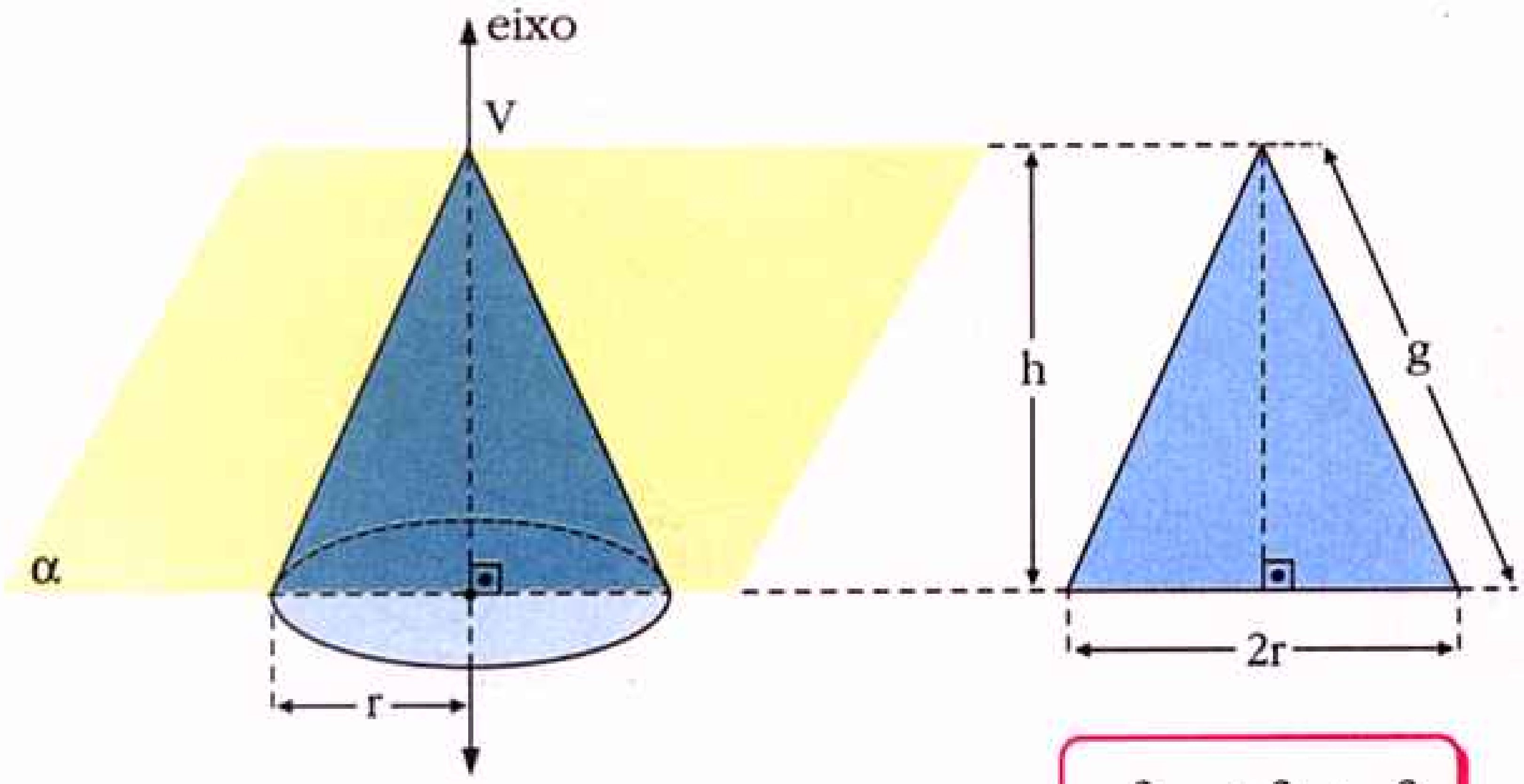
Cone circular *reto* ou *de revolução* é um sólido gerado pela rotação de 360° de um triângulo retângulo VOA, em torno de um eixo que contém um de seus catetos.



- No cone reto, as geratrizes são congruentes.
- A *secção transversal*, produzida pela intersecção de um cone com um plano paralelo à base, é circular.

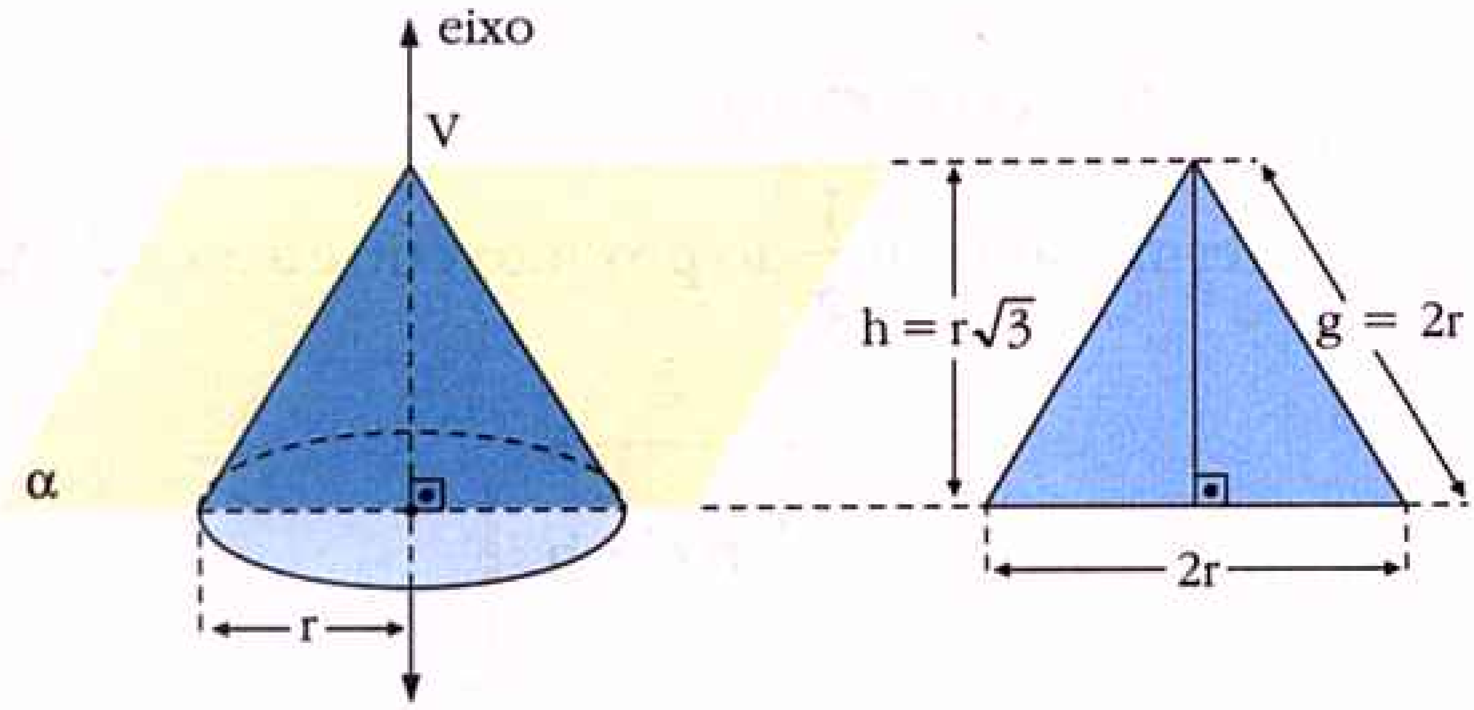


▶ A *secção meridiana*, produzida pela intersecção de um cone circular com um plano que contém o eixo, é um triângulo.



No cone reto, a secção meridiana é um triângulo isósceles.

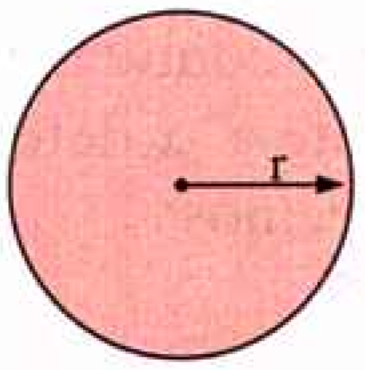
$$\boxed{g^2 = h^2 + r^2}$$



No cone eqüilátero, a secção meridiana é um triângulo eqüilátero.

Área da base de um cone reto

A base é circular. Portanto: $A_b = \pi r^2$.



Área da superfície lateral de um cone reto

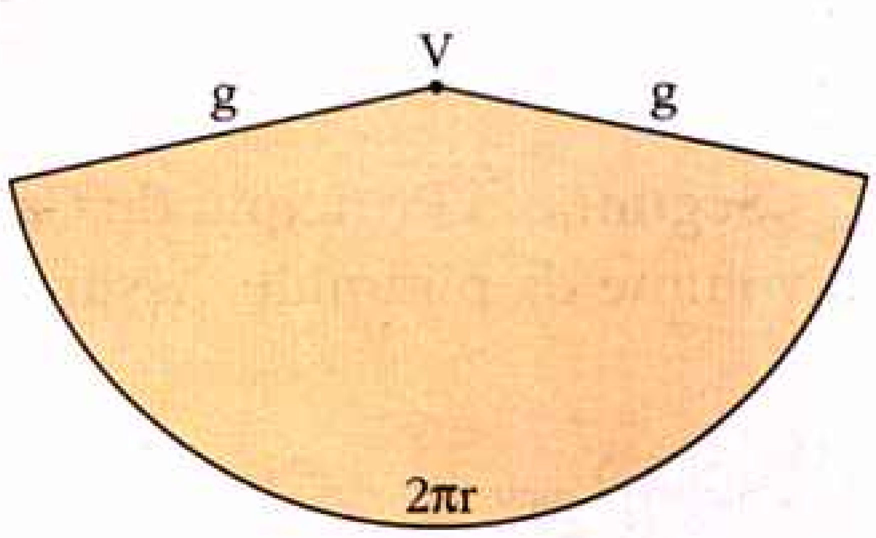
Nesse caso, a área da superfície lateral é igual à área de um setor circular:

A_L = área de um setor circular

$$A_L = \frac{\text{comprimento do arco} \times \text{raio}}{2}$$

$$A_L = \frac{2\pi r g}{2}$$

$$\boxed{A_L = \pi rg}$$



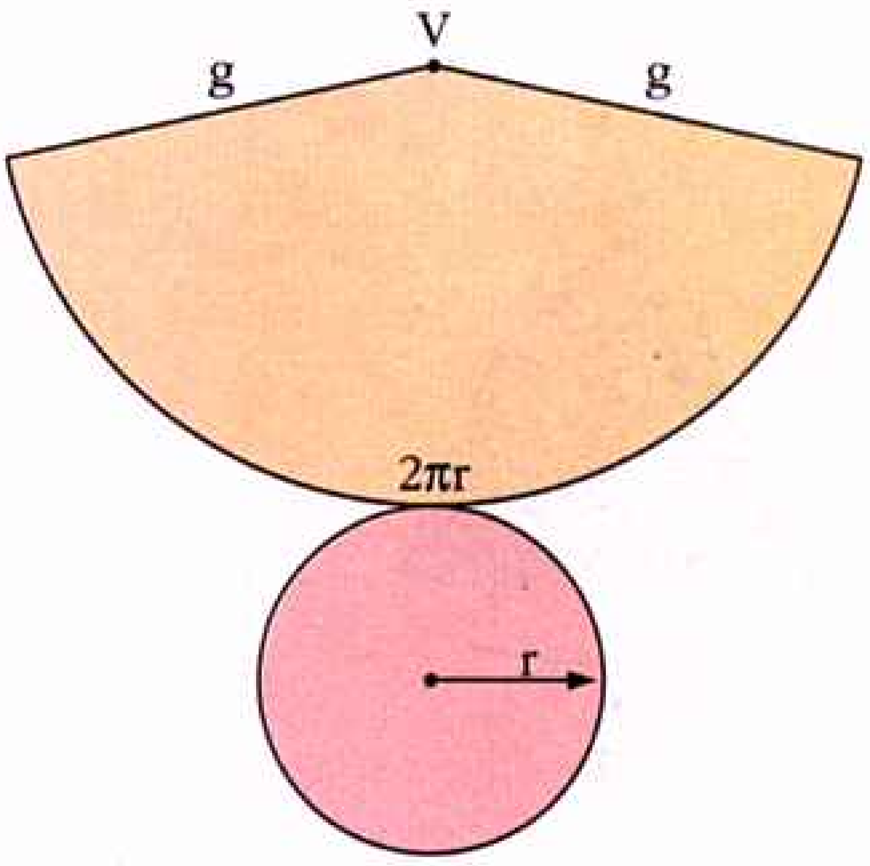
Área da superfície total

A superfície total compreende a base e a superfície lateral. Assim:

$$A_T = A_b + A_L$$

$$A_T = \pi r^2 + \pi rg$$

$$\boxed{A_T = \pi r (r + g)}$$



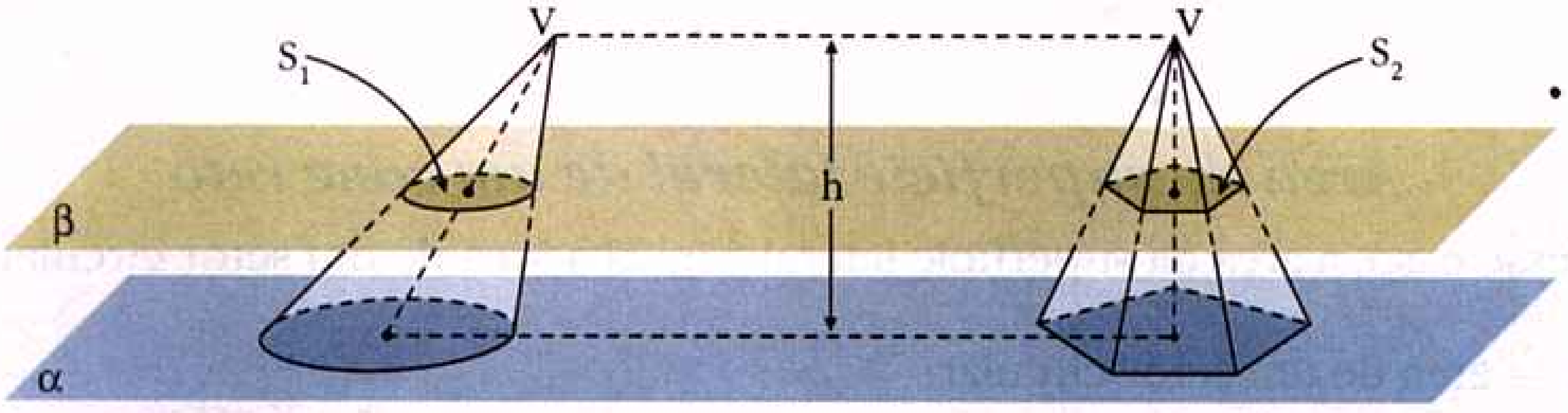
Volume de um cone

O volume do cone circular é determinado por $\frac{1}{3}$ do produto entre a área da base e a altura.

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h \qquad \boxed{V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h}$$

Para compreender melhor essa fórmula, basta observar o cálculo do volume de um cone circular de altura *h* e raio da base *r*.

Se considerarmos dois sólidos (um cone e uma pirâmide) com mesma altura e bases de áreas iguais, contidas no plano α, de tal forma que um plano β qualquer traçado paralelamente a α determine nos dois sólidos secções transversais S_1 e S_2 com áreas iguais, teremos:



Segundo o Princípio de Cavalieri, podemos dizer que o volume do cone é igual ao volume da pirâmide. Assim:

$$V_{cone} = V_{pirâmide} \Rightarrow V_{cone} = \frac{1}{3} \text{ área da base} \times \text{altura} \Rightarrow V_{cone} = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$$

Exercícios

Resolvidos

1 Para um cone reto que tem geratriz g com 5 cm e raio r da base com 3 cm, calcular:

a) área lateral
b) área da base
c) área total
d) altura
e) volume

a) A área lateral é calculada assim:

$A_L = \pi rg \Rightarrow A_L = \pi 3 \cdot 5 \Rightarrow A_L = 15\pi \text{ cm}^2$

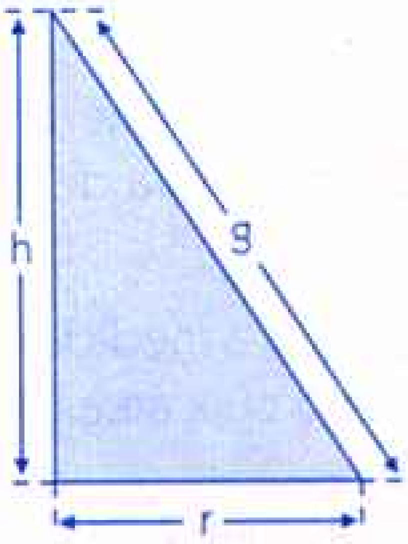
b) A área da base é:

$A_b = \pi r^2 \Rightarrow A_b = \pi 3^2 \Rightarrow A_b = 9\pi \text{ cm}^2$

c) A área total é obtida por:

$$A_T = A_b + A_L \qquad\qquad A_T = \pi r (r + g)$$
$$A_T = 9\pi + 15\pi \xrightarrow{\text{ou}} A_T = \pi 3 (3 + 5)$$
$$A_T = 24\pi \text{ cm}^2 \qquad\qquad A_T = 24\pi \text{ cm}^2$$

d) A altura pode ser obtida do triângulo retângulo formado por:



$g^2 = h^2 + r^2$

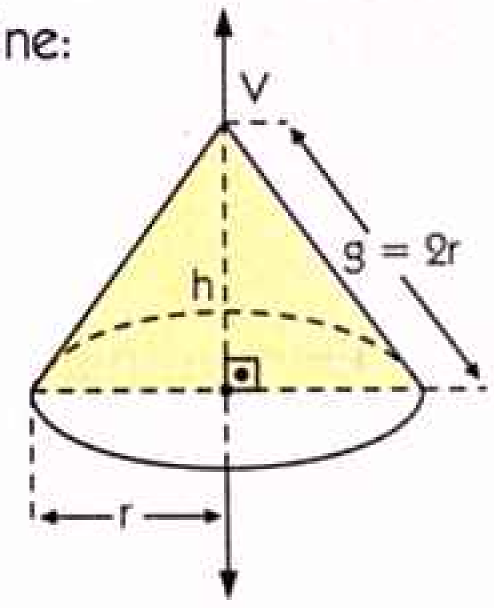
$h = \sqrt{g^2 - r^2} \Rightarrow h = \sqrt{5^2 - 3^2} \Rightarrow h = 4 \text{ cm}$

e) O volume é dado por:

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi 3^2 \cdot 4 \Rightarrow V = 12\pi \text{ cm}^3$

2 Sabendo que num cone eqüilátero o raio da base mede $\sqrt{3}$ cm, determine:

a) área total
b) altura
c) volume



- A secção meridiana de um cone eqüilátero é um triângulo eqüilátero.
- Num cone eqüilátero, o diâmetro da base é igual à geratriz, ou $g = 2r$.

a) A área total é dada por:

$A_T = \pi r (r + g)$

$A_T = \pi r (r + 2r)$

$A_T = 3\pi r^2 \longrightarrow$ Área total do cone eqüilátero

$A_T = 3\pi(\sqrt{3})^2 \Rightarrow A_T = 9\pi \text{ cm}^2$

b) A altura do cone eqüilátero é a de um triângulo eqüilátero. Portanto:

$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$

$h = \frac{2r \cdot \sqrt{3}}{2}$

$h = r\sqrt{3} \longrightarrow$ Altura do cone eqüilátero

$h = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \Rightarrow h = 3 \text{ cm}$

c) O volume do cone eqüilátero é obtido assim:

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi(\sqrt{3})^2 \cdot 3 \Rightarrow V = 3\pi \text{ cm}^3$

Propostos

1170 Para um cone reto com $g = 10$ cm e $r = 6$ cm, calcule:
a) área lateral
b) área da base
c) área total
d) altura
e) volume

1171 Conhecendo a medida do raio $r = 6$ dm de um cone eqüilátero, obtenha:
a) área total
b) altura
c) volume

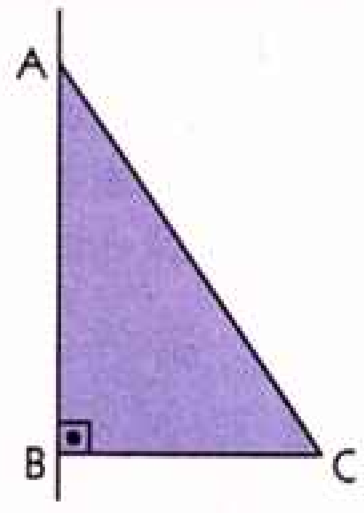
1172 Calcule a área total e o volume de um cone reto cujo raio da base mede 8 m e que tem 10 m de geratriz.

1173 Determine a área total e o volume de um cone reto que possui raio da base com 3 cm e altura de 4 cm.

1174 Calcule a medida da geratriz do cone eqüilátero cuja área lateral é 8π dm^2.

1175 Determine o volume e a área total de um cone que tem 8 cm de altura e 6 cm de raio da base.

1176 (UFSC) No triângulo ABC, med $(\overleftrightarrow{AC}) = 3\sqrt{3}$ e med $(A\hat{C}B) = \frac{\pi}{3}$ rad. Calcule o volume gerado pela rotação do triângulo ABC em torno do eixo $\overleftrightarrow{AB}$.



a) $\frac{9\pi}{8}$
b) $\frac{81\pi}{4}$
c) $\frac{9\pi}{4}$
d) $\frac{81\pi}{8}$
e) $\frac{81\pi}{2}$

1177 (Fatec) A altura de um cone circular reto mede o triplo da medida do raio da base. Se o comprimento da circunferência dessa base é 8π cm, então o volume do cone, em centímetros cúbicos, é:
a) 64π b) 48π c) 32π d) 16π e) 8π

1178 (Fuvest-SP) O diâmetro da base de um cone é igual à geratriz. A razão da área total para a área lateral do cone é:
a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{3}{4}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

1179 (PUC-RS) Num cone de revolução, a área da base é 36π m^2 e a área total é 96π m^2. A altura do cone, em metros, é igual a:
a) 4 b) 6 c) 8 d) 10 e) 12

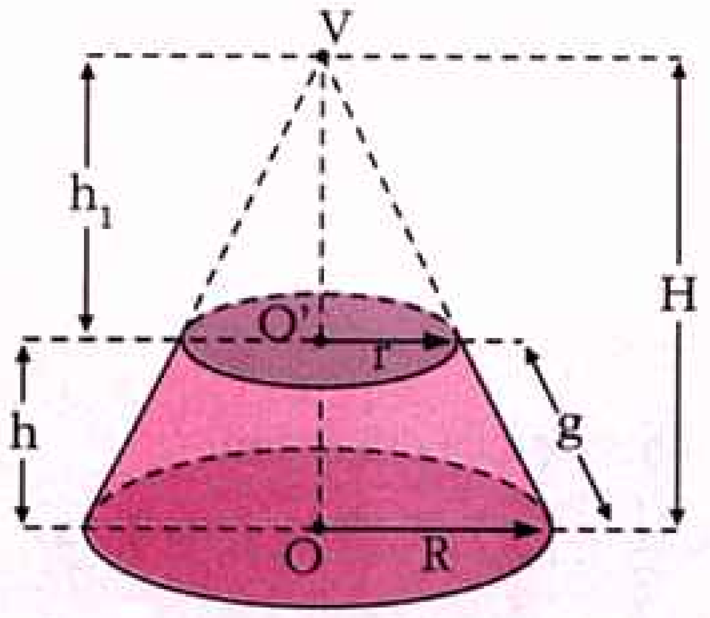
Tronco de cone

Denominamos *tronco de cone de bases paralelas* a parte do cone circular reto limitada pela base e por uma secção transversal qualquer desse cone.

Elementos do tronco de cone

Base do cone que deu origem ao tronco com raio de medida *R*.

Base originada pela secção transversal do cone, com raio de medida *r*.

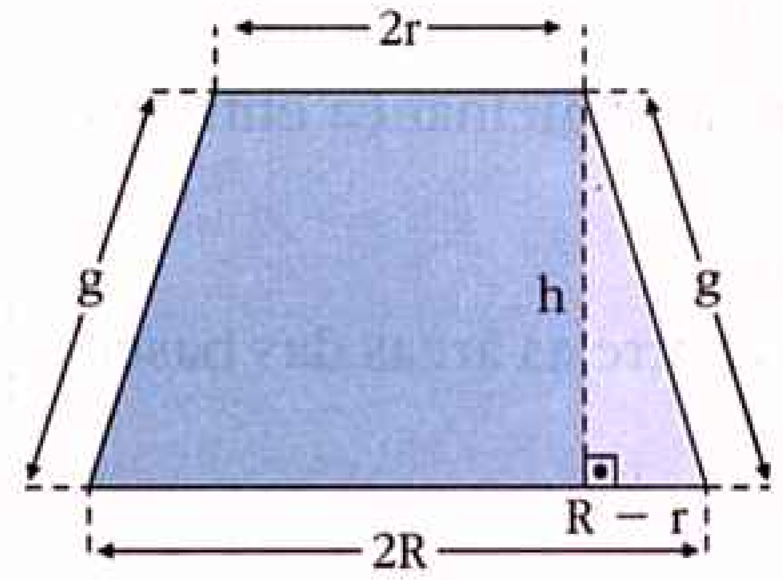


Geratriz do tronco: todo segmento com uma extremidade em cada base contido numa geratriz do cone que deu origem ao tronco; indicaremos sua medida por *g*.

A secção meridiana é determinada pela intersecção do cone com um plano que contenha a reta $\overleftrightarrow{OO'}$.

Essa secção meridiana é um trapézio de lados *g* e bases 2r e 2R.

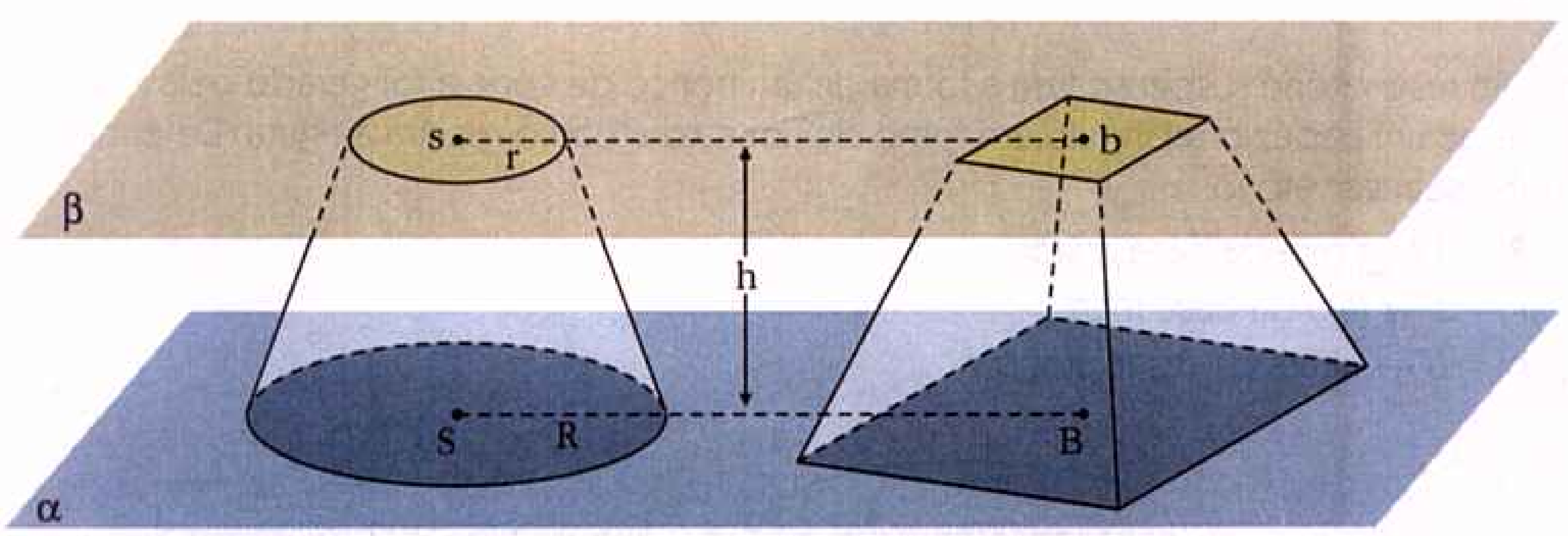
$$g^2 = h^2 + (R - r)^2$$



Altura do tronco (*h*): distância entre as bases

Volume do tronco de cone circular reto

Consideremos um tronco de pirâmide de altura *h* e bases com áreas *B* e *b* e um tronco de cone de altura *h* e bases com áreas *S* e *s*, de tal forma que B = S e b = s. Assim, temos:



Logo, podemos dizer que o volume do tronco de cone é igual ao volume do tronco de pirâmide.

$$V_{\text{tronco de cone}} = V_{\text{tronco de pirâmide}}$$

$$V_{\text{tronco de cone}} = \frac{h}{3}\left[B + \sqrt{B \cdot b} + b\right] \Rightarrow V_{\text{tronco de cone}} = \frac{h}{3}\left[S + \sqrt{S \cdot s} + s\right]$$

Ou:

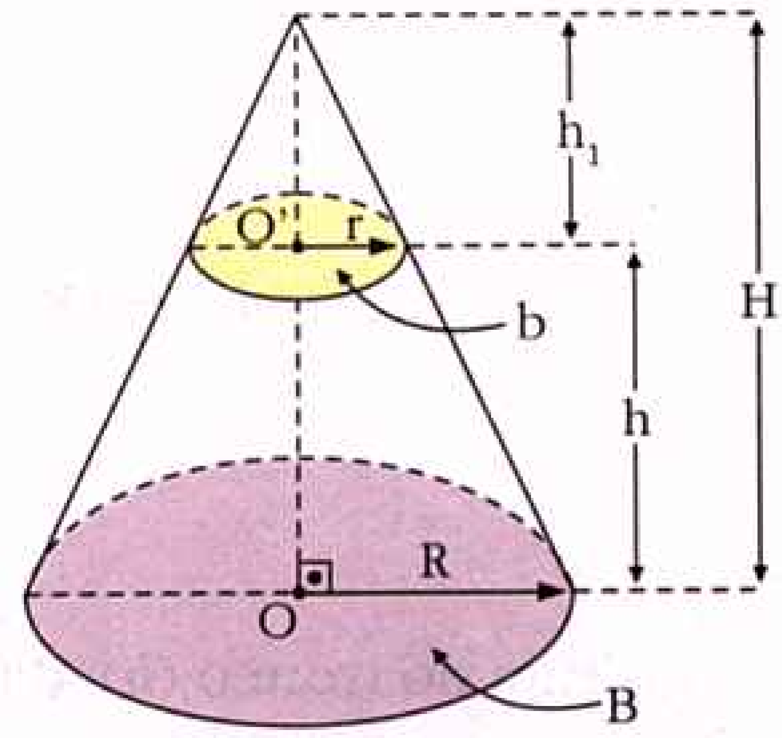
$$V_T = \frac{h}{3}\left[\pi R^2 + \sqrt{\pi R^2 \cdot \pi r^2} + \pi r^2\right] \Rightarrow V_T = \frac{h}{3}\left[\pi R^2 + \pi Rr + \pi r^2\right]$$

$$\boxed{V_T = \pi \frac{h}{3}\left[R^2 + Rr + r^2\right]}$$

Razão de semelhança

Ao seccionarmos um cone de volume V_C com um plano paralelo à base, obtemos também um cone de volume V_c, limitado pelo vértice e pela área de secção. Esses cones são semelhantes e:

- a razão de semelhança entre eles é $\dfrac{H}{h_1} = \dfrac{R}{r}$
- a razão entre as áreas das bases é $\dfrac{B}{b} = \left(\dfrac{H}{h_1}\right)^2$
- a razão entre os volumes é $\dfrac{V_C}{V_c} = \left(\dfrac{H}{h_1}\right)^3$



Exercícios

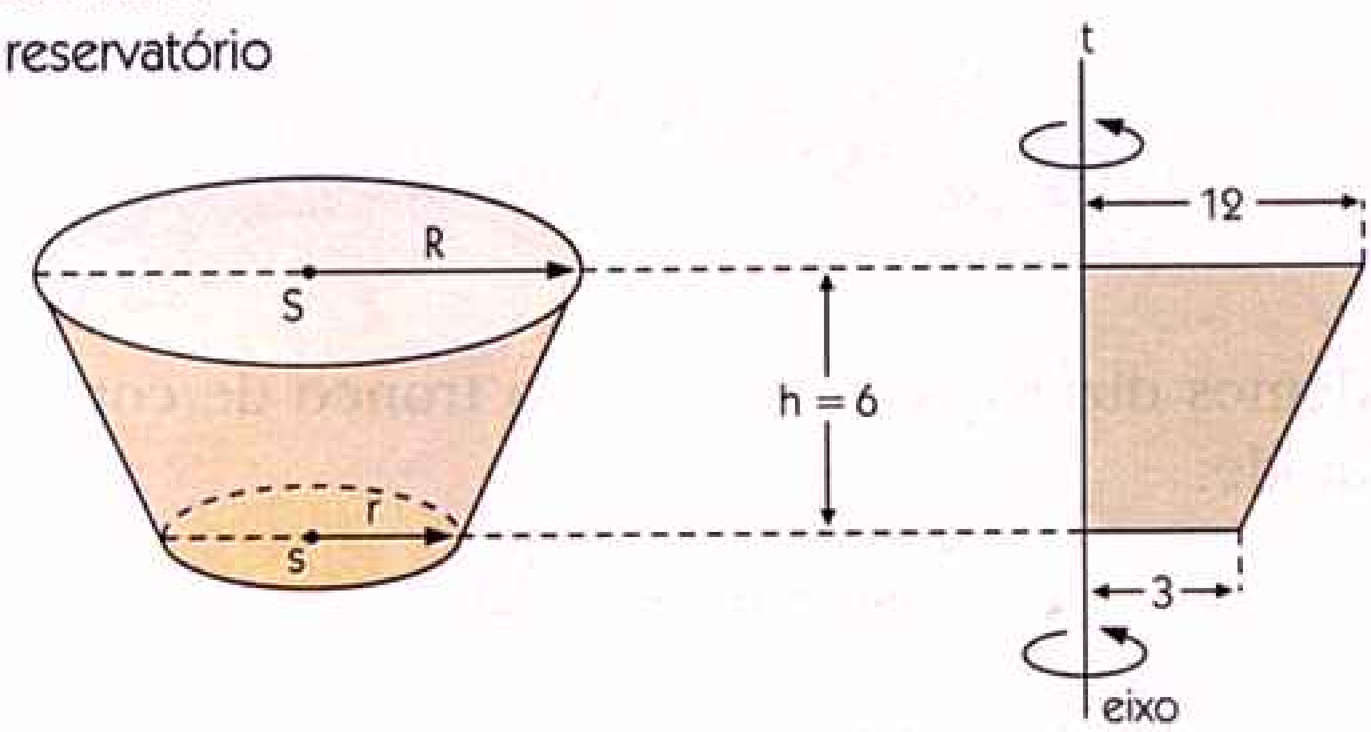
Resolvidos

1 Um reservatório suspenso tem a forma de um tronco de cone e foi gerado pela rotação completa de um trapézio retângulo em torno de um eixo *t*, como mostra a figura. Determinar o volume desse reservatório.

R = 12 → raio da base maior

r = 3 → raio da base menor

h = 6 → altura do reservatório



Cálculo das áreas das superfícies das bases:

Base maior	*Base menor*
$S = \pi R^2$	$s = \pi r^2$
$S = \pi\, 12^2$	$s = \pi\, 3^2$
$S = 144\pi \text{ m}^2$	$s = 9\pi \text{ m}^2$

Cálculo do volume do tronco de cone:

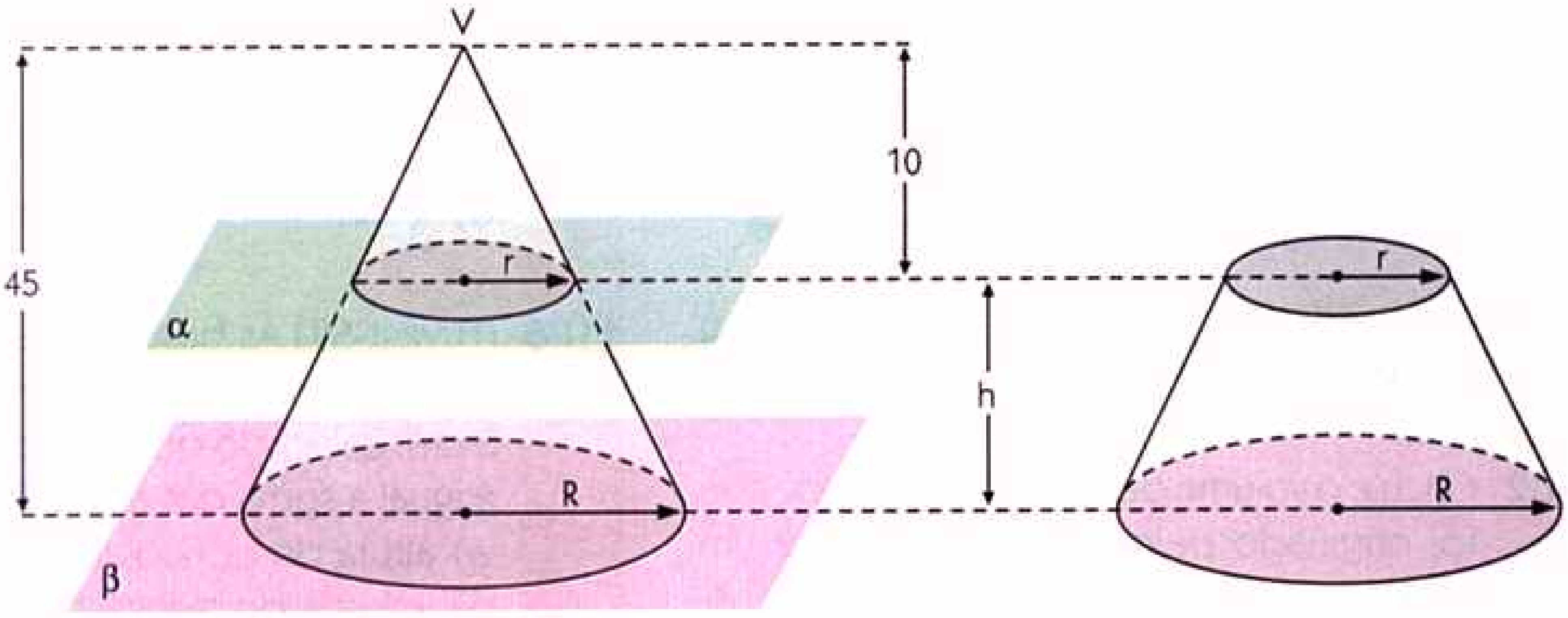
$$V_{\text{tronco}} = \frac{h}{3}\left[S + \sqrt{S \cdot s} + s\right]$$

$$V_{\text{tronco}} = \frac{6}{3}\left[144\pi + \sqrt{144\pi \cdot 9\pi} + 9\pi\right]$$

$$V_{\text{tronco}} = 2\left[144\pi + 36\pi + 9\pi\right]$$

$$V_{\text{tronco}} = 378\pi \text{ m}^3$$

2 Um recipiente metálico tinha a forma de um cone circular reto de altura 45 cm. Foi cortado de tal forma, que a secção resultante tem raio medindo *r* e ficou paralela à base de raio *R* medindo 9 cm. Determinar o volume do tronco de cone resultante, sabendo que a parte do cone retirada tem 10 cm de altura.



O cone menor (parte subtraída) é semelhante ao cone maior (cone original). Portanto, podemos estabelecer a seguinte razão de semelhança:

$$\frac{r}{R} = \frac{h_{menor}}{h_{maior}} \Rightarrow \frac{r}{9} = \frac{10}{45} \Rightarrow r = 2$$

Como o volume do tronco de cone pode ser obtido pela diferença entre o volume do cone maior e o volume do cone menor, temos:

$$V_{tronco} = V_{cone\ maior} - V_{cone\ menor}$$

$$V_{tronco} = \frac{h}{3}\pi R^2 - \frac{h}{3}\pi r^2$$

$$V_{tronco} = \frac{45}{3}\pi 9^2 - \frac{10}{3}\pi 2^2$$

$$V_{tronco} = \frac{3\,645\pi}{3} - \frac{40\pi}{3} \Rightarrow V_{tronco} = \frac{3\,605\pi}{3}\text{cm}^3$$

O volume do tronco também pode ser calculado assim:

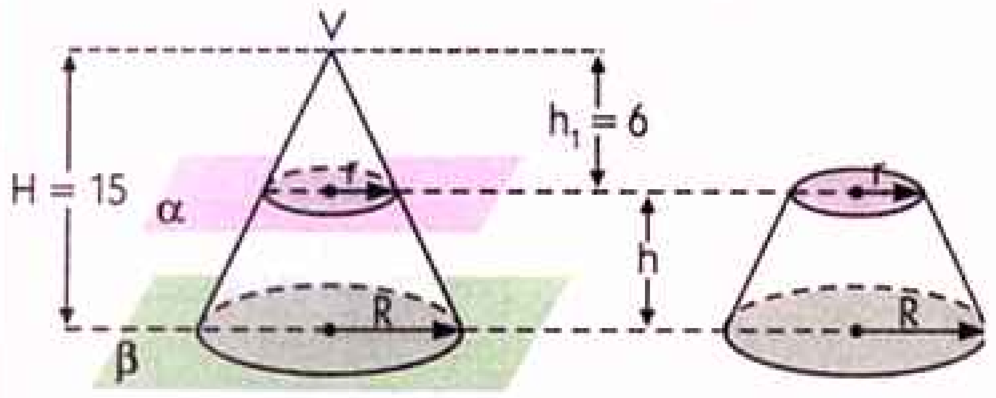
$$V = \frac{1}{3}h\pi(R^2 + Rr + r^2)$$

$$V = \frac{1}{3}35\pi(9^2 + 9 \cdot 2 + 2^2) \Rightarrow V = \frac{3\,605\pi}{3}\text{cm}^3$$

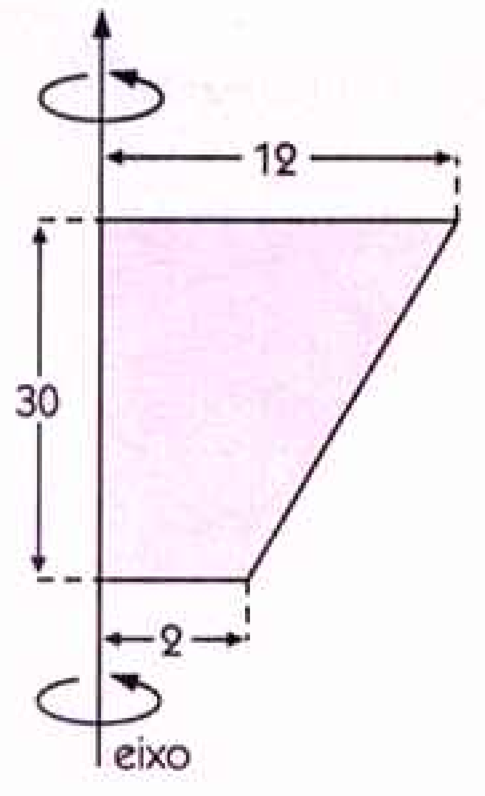
Propostos

1180 Um reservatório cônico de eixo vertical foi construído com o vértice para baixo. Por medida de segurança, foi abastecido até a metade de sua altura com 150 ℓ de líquido. Quantos litros seriam necessários para completar o reservatório?

1181 Um cone circular reto de altura 15 m é cortado, de tal forma que a secção transversal resultante é paralela à base e tem raio *r*. Sabendo que a base do cone tem raio R = 10 m, determine o volume do tronco de cone.



1182 Calcule o volume de um tronco de cone que foi originado pelo giro completo de um trapézio em torno de um eixo, como mostra a figura:



1183 (UCMG) A área lateral de um tronco de cone circular reto de altura 4 cm, raio maior 8 cm e raio menor 5 cm é, em centímetros quadrados, igual a:

a) 45π
b) 55π
c) 65π
d) 75π
e) 85π

1184 (PUC-SP) Um cone reto cuja geratriz mede 15 cm e o raio da base mede 9 cm, é interceptado por um plano paralelo à base, distando 4 cm de seu vértice. O volume do tronco de cone obtido dessa intersecção é, em centímetros cúbicos:

a) 246π
b) 312π
c) 324π
d) 348π
e) 421π

1185 (Vunesp) Cortando um cone reto com um plano paralelo à base e distante $\frac{h}{2}$ da base, onde *h* é a altura do cone, obtemos um círculo de área *A*. O volume *V* do cone é igual a:

a) $\frac{1}{3}$Ah c) Ah e) $\frac{5}{3}$Ah
b) $\frac{2}{3}$Ah d) $\frac{4}{3}$Ah

1186 (Fuvest-SP) As bases de um tronco de cone circular reto são círculos de raios 6 cm e 3 cm. Sabendo que a área lateral do tronco é igual à soma das áreas das bases, calcule:

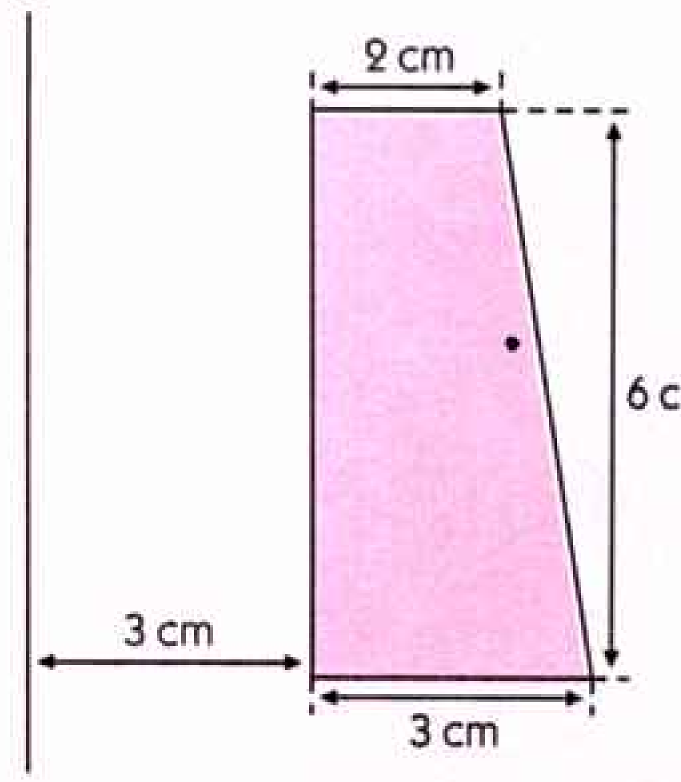
a) altura do tronco de cone
b) volume do tronco de cone

1187 (UFBA) O cone representado tem 16 cm de altura e base com 12 cm de raio, sendo *d* a distância do vértice a um plano α paralelo à base. Para que as duas partes do cone separadas pelo plano α tenham volumes iguais, *d* deve ser igual a:

a) $8\sqrt[3]{4}$ cm d) 10 cm
b) $8\sqrt[3]{2}$ cm e) 12 cm
c) 8 cm

1188 (Fuvest-SP) A altura de um cone circular reto é *H*. Seja α um plano que é paralelo à base e que divide o cone em dois sólidos de mesmo volume. Calcule a distância entre α e o plano da base do cone.

1189 (Unirio-RJ)



O volume do sólido gerado pela rotação completa da figura acima, em torno do eixo *e*, é, em cm^3:

a) 38π c) 92π e) 128π
b) 54π d) 112π