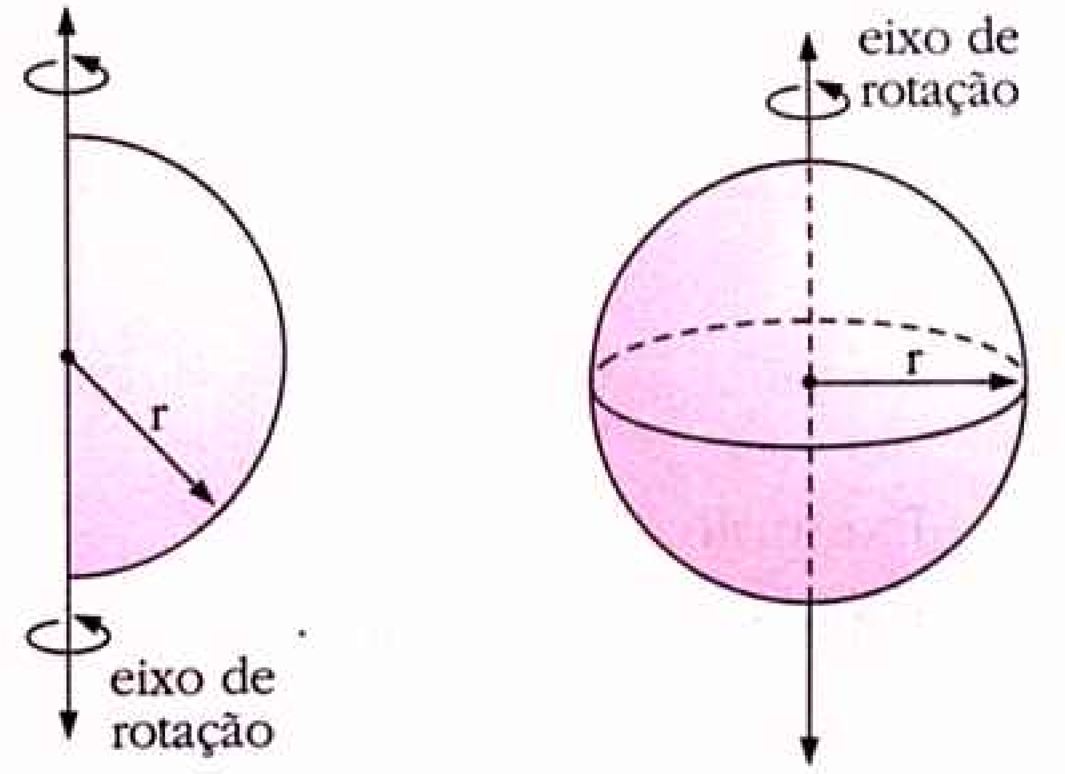
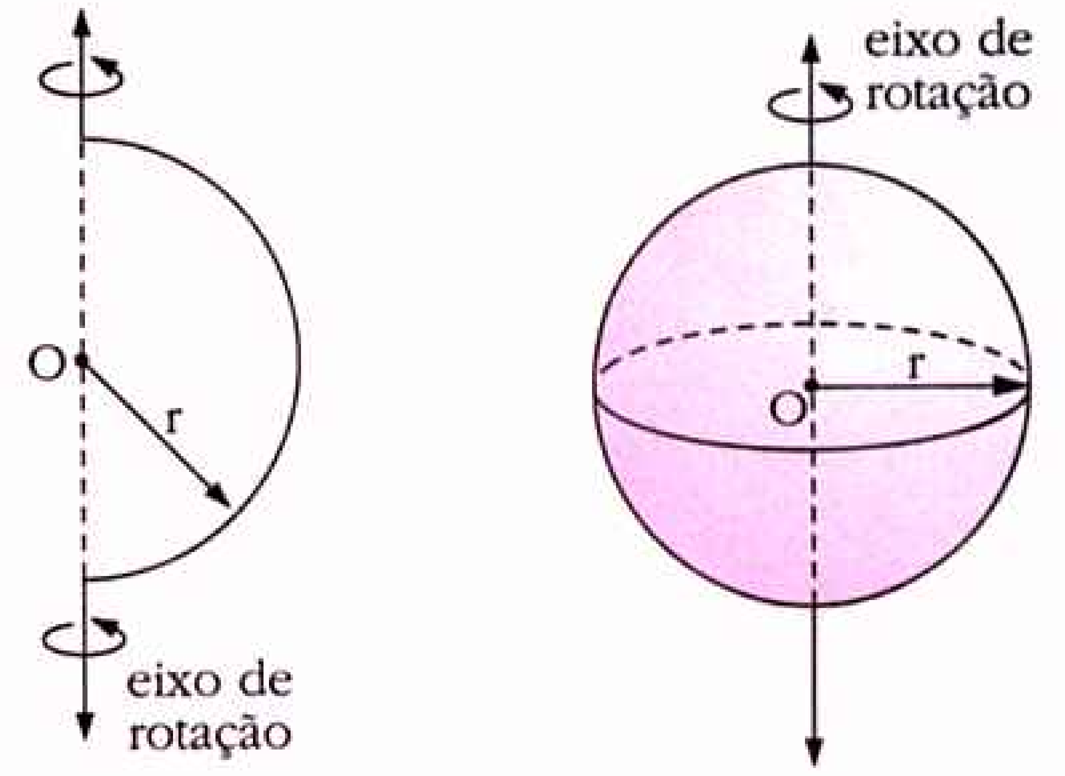
# 6. Esferas

Esfera é um sólido gerado pela rotação de 360° de um semicírculo em torno de um eixo que contém o seu diâmetro.



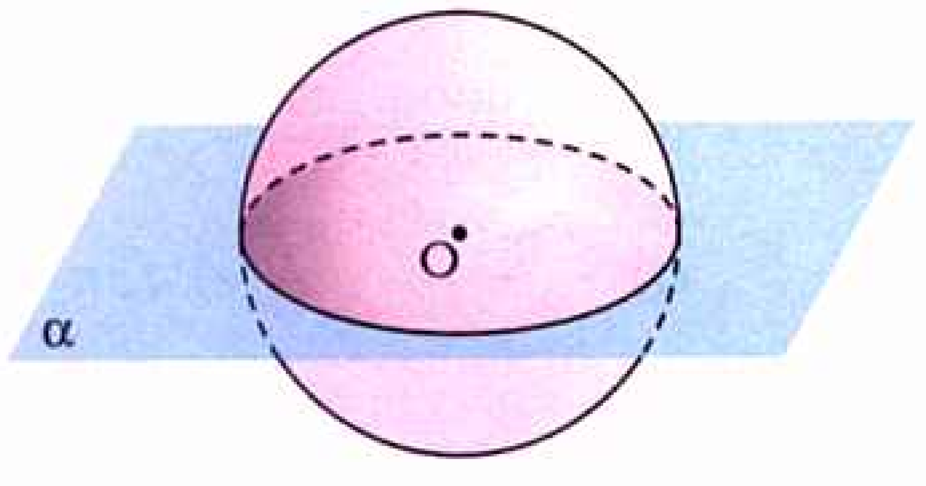

Superfície esférica é uma figura gerada pela rotação de 360° de uma semicircunferência em torno de um eixo que contém o seu diâmetro.



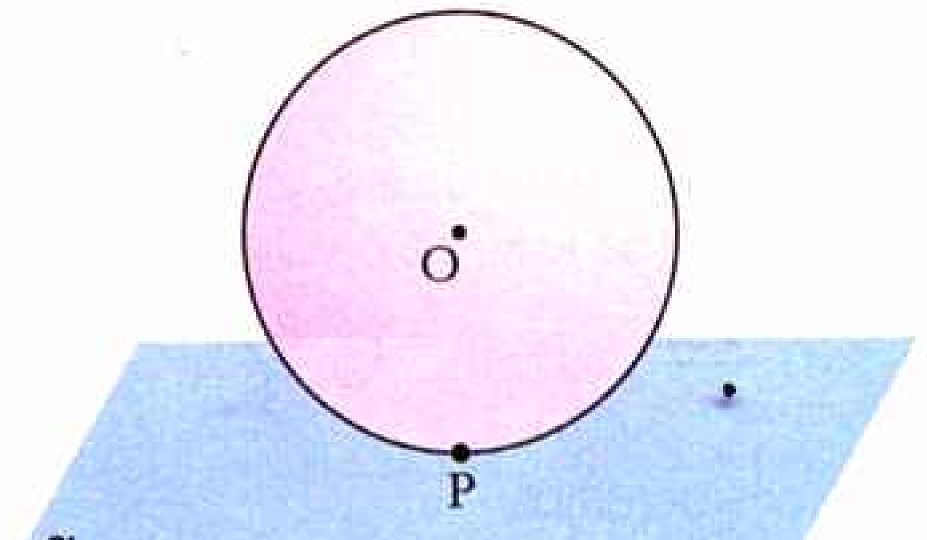

## *Secção plana*

A *secção plana*, produzida pela intersecção de um plano com uma esfera, é um círculo.

Quando esse plano intercepta a esfera no centro, temos uma ***secção circular*** de raio máximo. No caso de a intersecção acontecer num ponto, temos a tangência da esfera com o plano.




Secção de raio máximo.




Tangência do plano com a esfera.

## *Área da superfície esférica*

A área da superfície esférica de raio *r* é definida por:

$$\boxed{A_e = 4\pi\, r^2}$$

## *Volume da esfera*

O volume da esfera de raio *r* é definido por:

$$\boxed{V_e = \frac{4}{3}\pi r^3}$$

Exemplo:

Uma esfera apresenta raio r = 5 cm.

a) A área da superfície esférica é dada por:

$A_e = 4\pi r^2$

$A_e = 4\pi 5^2$

$A_e = 100\pi \text{ cm}^2$

b) O volume da esfera é obtido assim:

$V_e = \frac{4}{3}\pi r^3$

$V_e = \frac{4}{3}\pi 5^3$

$V_e = \frac{500}{3}\pi \text{ cm}^3$

# Exercícios

## Resolvidos

**1** O volume de uma esfera é 32 dm³. Considerando $\pi \cong 3$, determinar a área da superfície esférica.

Inicialmente vamos encontrar o valor do raio:

$V_e = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow 32 = \frac{4}{3} \cdot 3 \cdot r^3$

$r^3 = 8$

$r = 2$ dm

A área da superfície esférica é dada por:

$A_e = 4\pi r^2$

$A_e = 48 \text{ dm}^2$

**2** (Mack-SP) Seja $36\pi$ o volume de uma esfera circunscrita a um cubo. Então, a razão entre o volume da esfera e o volume do cubo é:

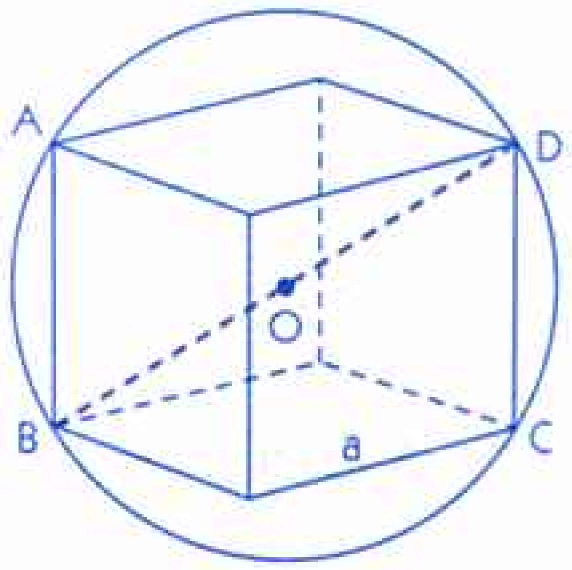
x a) $\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$ b) $\frac{8\pi}{3}$ c) $\frac{2\pi}{3}$ d) $\frac{\sqrt{3}\pi}{4}$ e) $\sqrt{3}\pi$

Consideremos:

- a = aresta do cubo
- diagonal do cubo = diâmetro da esfera circunscrita ao cubo
- raio da esfera $r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Portanto, a razão entre os volumes da esfera ($V_e$) e do cubo ($V_c$) é:

$$\frac{V_e}{V_c} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{a^3} = \frac{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^3}{a^3} = \frac{\sqrt{3}\cdot\pi}{2}$$




$BD = a\sqrt{3}$

$r = \frac{BD}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

**3** (Vunesp) Um copinho de sorvete, em forma de cone, possui 10 cm de profundidade, e 4 cm de diâmetro no topo, tendo aí colocadas duas conchas semi-esféricas de sorvete, também de 4 cm de diâmetro. Se o sorvete derreter para dentro do copinho, podemos afirmar que:

x a) não transbordará
b) transbordará
c) os dados são insuficientes
d) os dados são incompatíveis
e) as informações anteriores são falsas

O volume do cone (copinho) = $V_{cone} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$

$$V_{cone} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot 10 \Rightarrow V_{cone} = \frac{40}{3}\pi$$

O volume das duas conchas = $V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi \cdot 2^3 \Rightarrow V_{esfera} = \frac{32}{3}\pi$$

O volume do cone é maior do que o da esfera. Portanto, não transbordará.

## Propostos

**1190** Uma esfera apresenta raio r = 4 dm. Determine:
a) área da superfície esférica
b) volume

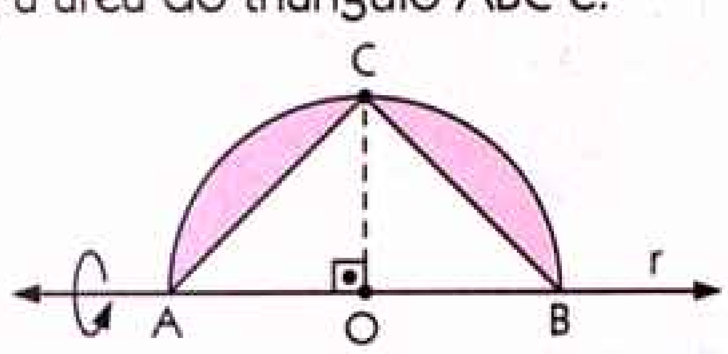
**1191** O volume de uma esfera é 108 cm$^3$. Considere $\pi \cong 3$ e determine a área da superfície esférica.

**1192** Calcule o volume de uma esfera cuja área da superfície esférica é 48 cm$^2$. Considere $\pi \cong 3$.

**1193** Obtenha o volume de uma esfera que apresenta $4\pi$ cm como comprimento de circunferência para o seu maior círculo.

**1194** A área lateral de um cilindro eqüilátero é $36\pi$ cm$^2$. Determine o volume da esfera inscrita nesse cilindro.

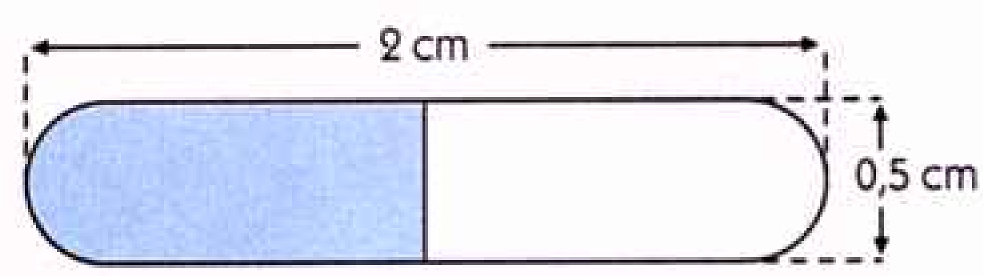
**1195** (Mack-SP) Na figura, *O* é o centro de um círculo, e o volume gerado pela rotação da região assinalada em torno da reta *r* é $18\pi$. Então, a área do triângulo ABC é:

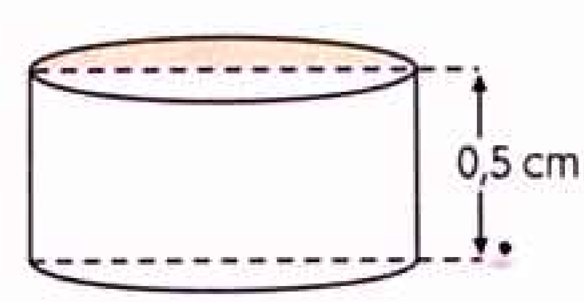



a) 6  b) 9  c) $\frac{9}{2}$  d) 18  e) 27

(FAAP-SP) Considere este texto para as questões 1196, 1197, 1198 e 1199.

A razão na qual um comprimido de vitamina *C* começa a dissolver-se depende da área da superfície do comprimido. Uma marca de comprimido tem forma cilíndrica, comprimento 2 cm, com hemisférios de diâmetro 0,5 cm cada extremidade, conforme figura abaixo. Uma segunda marca de comprimido vai ser fabricada em forma cilíndrica com 0,5 cm de altura.




**1196** Determine a área da superfície do primeiro comprimido em centímetros quadrados, sabendo que: o comprimento da circunferência é $C = 2\pi R$ e a área da superfície esférica é $A = 4\pi R^2$.

a) $\frac{3\pi}{4}$
b) $3\pi$
c) $\frac{3\pi}{2}$
d) $2\pi$
e) $\pi$

1197 Determine o diâmetro do segundo comprimido de modo que a área da sua superfície seja igual à do primeiro comprimido.

a) 2,0 cm b) 1,5 cm c) 2,5 cm d) 0,5 cm e) 1,0 cm

1198 Determine o volume do primeiro comprimido em centímetros cúbicos, sabendo que o volume da esfera $V$ é igual a $\frac{4}{3}\pi R^3$ e o volume do cilindro $V$ é $\pi R^2 \cdot H$.

a) $\frac{7}{8}$ b) $\frac{7\pi}{96}$ c) $\frac{7\pi}{48}$ d) $\frac{11\pi}{96}$ e) $\frac{11\pi}{48}$

1199 Determine o diâmetro do segundo comprimido, de modo que seu volume seja igual ao do primeiro comprimido.

a) 1 b) $\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{12}}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{11}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{3}{4}$

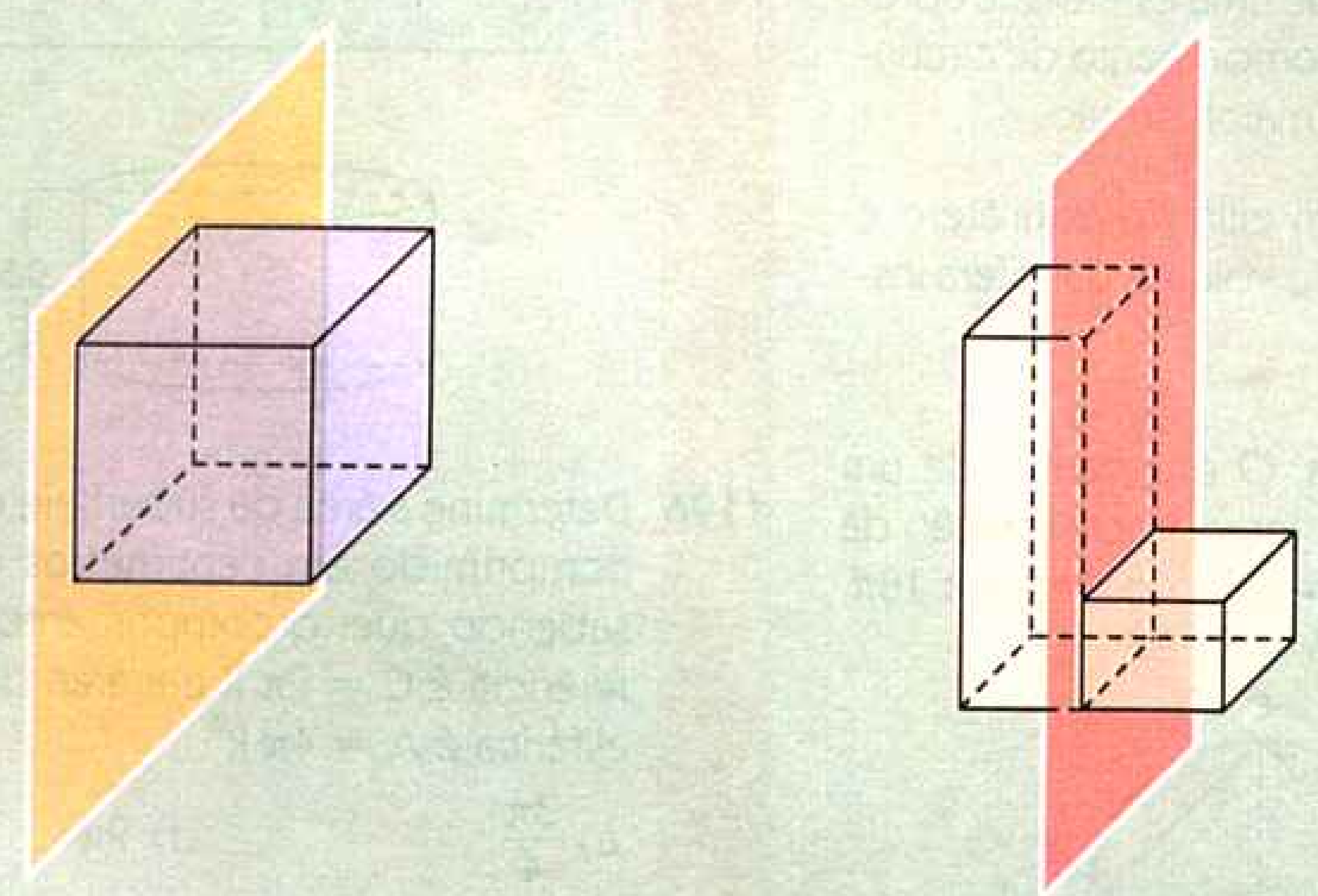
# 7. Poliedros

**Poliedros são sólidos limitados por 4 ou mais faces planas e poligonais.**

**Um poliedro é considerado convexo quando:**

- **duas a duas das suas faces poligonais não são coplanares;**
- **cada lado da face poligonal é comum a duas, e somente duas, faces poligonais;**
- **o plano que contém cada face poligonal divide o espaço de tal forma que todas as outras faces poligonais ficam num único semi-espaço.**

**Exemplo:**



Poliedro convexo Poliedro não-convexo

# *Elementos de um poliedro*

Faces: são polígonos.

Arestas: são os lados dos polígonos.

Vértices: são os vértices dos polígonos.

# *Teorema de Euler*

Consideremos um poliedro convexo com os seguintes elementos:

$F$: número de faces

$A$: número de arestas

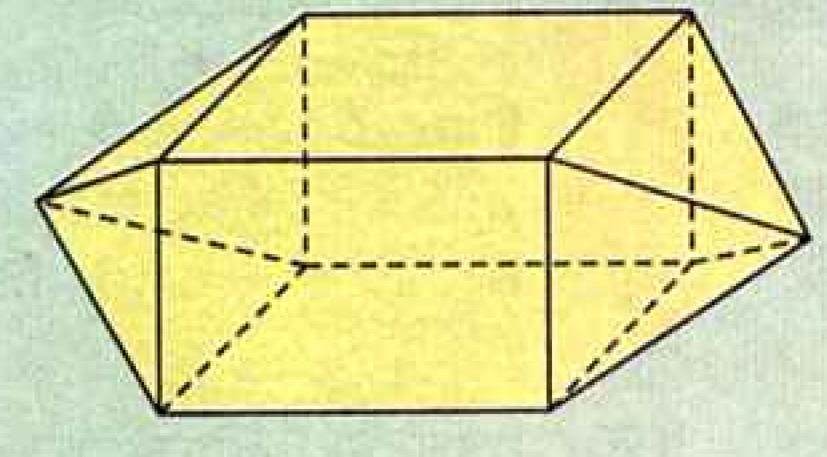
$V$: número de vértices

Adotamos como válida a seguinte relação:

$$\boxed{V - A + F = 2}$$

Exemplo:

Observe o poliedro convexo da figura que apresenta 10 vértices, 20 arestas e 12 faces:



Verificamos:

$V - A + F = 2$

$10 - 20 + 12 = 2$

# Exercícios

## Resolvidos

**1** Determinar o número de vértices de um poliedro convexo que tem 2 faces quadrangulares e 8 faces triangulares.

Cálculo do número de arestas ($A$):

As 2 faces quadrangulares têm $2 \cdot 4 = 8$ arestas.

As 8 faces triangulares têm $8 \cdot 3 = 24$ arestas.

Sendo cada aresta comum a 2 faces, certamente todas as arestas foram contadas em dobro. Logo:

$A = (8 + 24) : 2$

$A = 16$

O cálculo do número de vértices é feito por meio da Relação de Euler:

$V - A + F = 2$

$V - 16 + 10 = 2$

$V = 8$

**2** Determinar o número de faces de um poliedro convexo com 9 vértices. Sabe-se que de 4 vértices partem 3 arestas e dos outros 5 vértices partem 4 arestas.

Cálculo do número de arestas ($A$):
Os 4 vértices de 3 arestas cada um tem $4 \cdot 3 = 12$ arestas.
Os 5 vértices de 4 arestas cada um tem $5 \cdot 4 = 20$ arestas.

Como as arestas são comuns a 2 vértices, certamente todas as arestas foram contadas em dobro. Portanto:
$A = (12 + 20) : 2$
$A = 16$

O cálculo do número de faces é feito por meio da Relação de Euler:
$V - A + F = 2$
$9 - 16 + F = 2 \Rightarrow F = 9$

## Propostos

**1200** Determine o número de vértices de um poliedro convexo de 12 faces e 30 arestas.

**1201** Determine o número de faces de um poliedro convexo de 12 vértices, cujo número de arestas é o dobro do número de faces.

**1202** Determine o número de vértices e arestas de um poliedro convexo de 9 faces, das quais 4 são triangulares e 5 são quadrangulares.

**1203** Determine o número de faces de um poliedro convexo de 6 vértices. Sabe-se que de cada vértice partem 4 arestas.

**1204** Determine o número de vértices de um poliedro convexo formado por 92 faces, sendo 12 faces pentagonais e 80 faces triangulares.

**1205** (ITA-SP) Se um poliedro convexo possui 20 faces e 12 vértices, então o número de arestas desse poliedro é:
a) 12
b) 18
c) 28
d) 30
e) 32

**1206** (UFPA) Num poliedro convexo, o número de faces é 6 e o número de vértices é 8. Então, o número de arestas é:
a) 8
b) 11
c) 12
d) 13
e) 14

**1207** (Unirio-RJ) Um geólogo encontrou, numa de suas explorações, um cristal de rocha no formato de um poliedro, que satisfaz a relação de Euler, de 60 faces triangulares. O número de vértices deste cristal é igual a:
a) 35
b) 34
c) 33
d) 32
e) 31

# *Soma dos ângulos das faces de um poliedro convexo*

Considerando um poliedro convexo com número $V$ de vértices, é valida a relação:

$$\boxed{S = (V - 2) \cdot 360^\circ}$$

# Exercícios

## Resolvido

Um poliedro convexo tem 14 arestas e 6 faces. Determinar:
a) o número de vértices desse poliedro
b) a soma das medidas dos ângulos das faces desse poliedro

a) $V - A + F = 2 \Rightarrow V - 14 + 6 = 2 \Rightarrow V = 10$

b) $S = (V - 2) \cdot 360° \Rightarrow S = (10 - 2) \cdot 360° \Rightarrow S = 8 \cdot 360° \Rightarrow S = 2\,880°$

## Propostos

**1208** Determine a soma das medidas dos ângulos das faces de um poliedro convexo com 30 arestas e 12 faces.

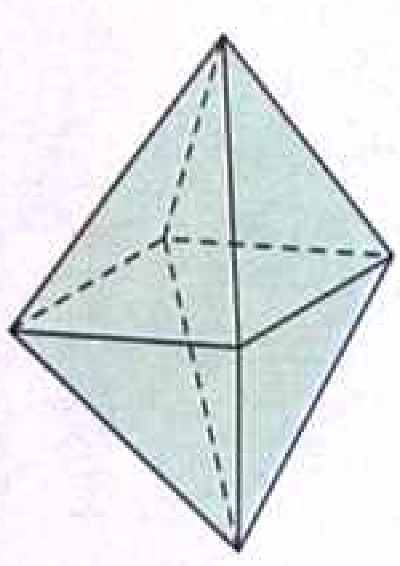
**1209** Num poliedro convexo a soma das medidas dos ângulos das faces é 1 800°. Calcule o número de vértices desse poliedro.

**1210** Obtenha o número de faces de um poliedro convexo cujo número de arestas é o dobro do número de faces e a medida da soma dos ângulos das faces é 2160°.

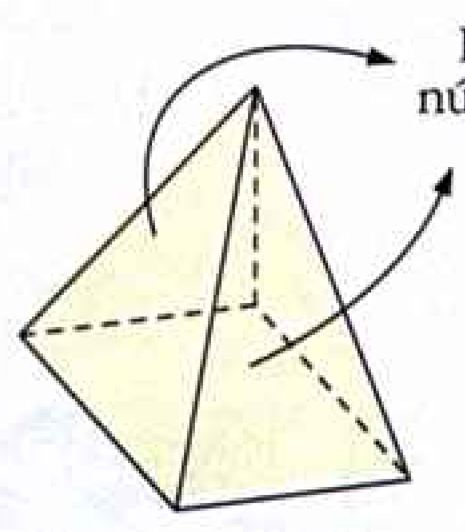
## *Poliedros de Platão*

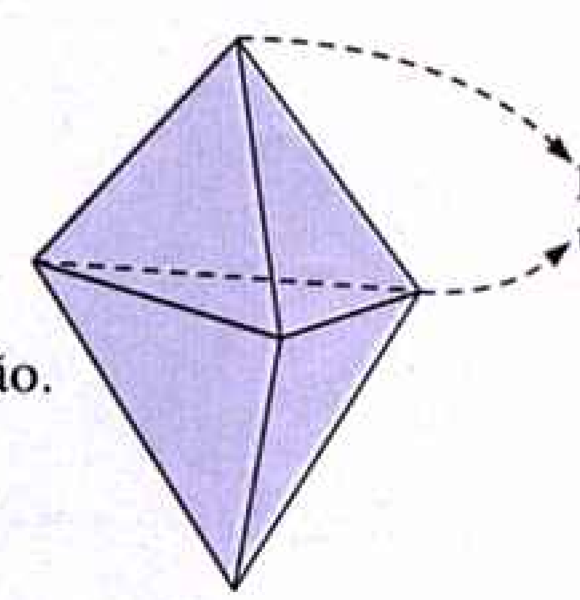
**Para que um poliedro seja considerado poliedro de Platão, é necessário que:**

- **todas as suas faces tenham o mesmo número (*n*) de arestas;**
- **dos vértices parta o mesmo número (*m*) de arestas.**



Poliedro de Platão.




Não são poliedros de Platão.

**Existem 5 classes de poliedros de Platão:**

- **Tetraedros → possui 4 faces triangulares**
- **Hexaedro → possui 6 faces quadrangulares**
- **Octaedro → possui 8 faces triangulares**
- **Dodecaedro → possui 12 faces pentagonais**
- **Icosaedro → possui 20 faces triangulares**

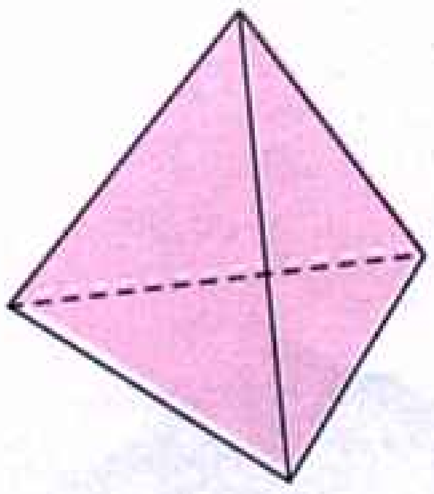
## *Poliedros regulares*

Um poliedro é considerado regular se:

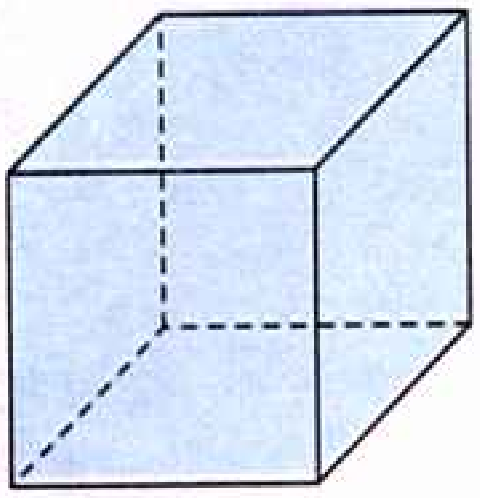
- as suas faces são polígonos regulares e congruentes;
- os seus ângulos poliédricos são congruentes.

Observe que todo poliedro convexo regular é um poliedro de Platão, mas nem todo poliedro de Platão é convexo regular.

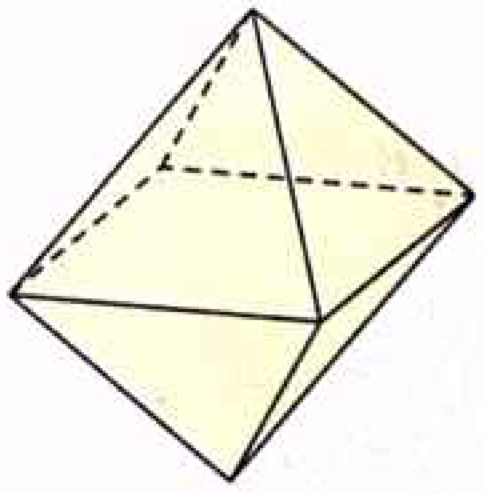
Existem apenas 5 tipos de poliedros regulares



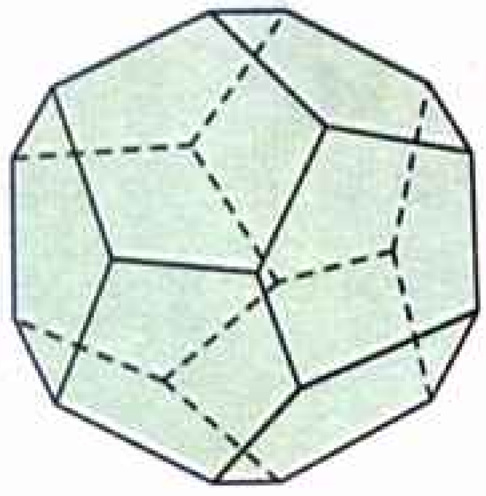
Tetraedro regular (limitado por 4 triângulos eqüiláteros).



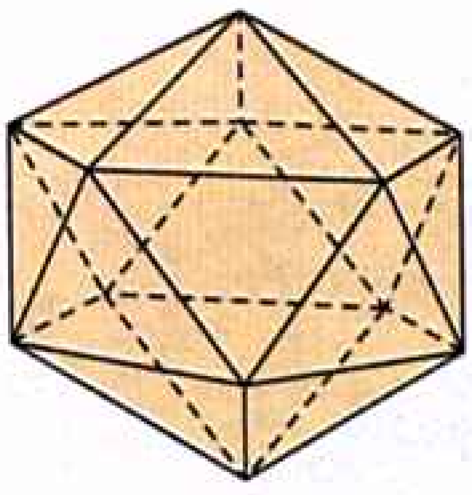
Hexaedro regular (limitado por 6 quadrados).



Octaedro regular (limitado por 8 triângulos eqüiláteros).



Dodecaedro regular (limitado por 12 pentágonos regulares).



Icosaedro regular (limitado por 20 triângulos eqüiláteros).

# Exercícios

## Resolvidos

**1** Qual é a área da superfície de um icosaedro regular cuja aresta mede 5 cm?

A superfície de um icosaedro regular é formada por 20 triângulos eqüiláteros congruentes. Portanto:

$$\text{Área}_{\text{icosaedro}} = 20 \cdot \text{Área}_{\text{triângulo eqüilátero}}$$

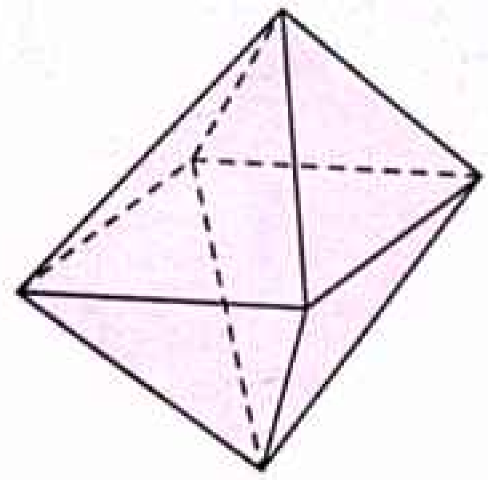
$$A_{\text{icosaedro}} = 20 \cdot \frac{5^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

$$A_{\text{icosaedro}} = 125\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

**2** Num octaedro regular de aresta 6 m, determinar:

a) área da superfície

b) volume



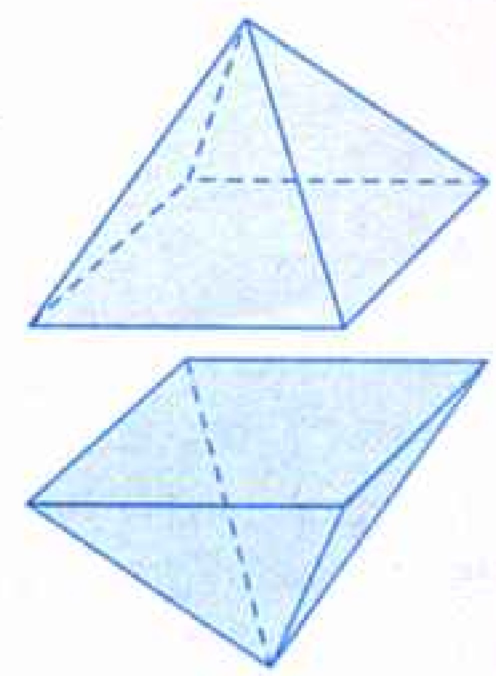
a) A superfície de um octaedro regular é formada por 8 triângulos eqüiláteros congruentes. Desse modo:

$\text{Área}_{\text{octaedro}} = 8 \cdot \text{Área}_{\text{triângulo eqüilátero}}$

$A_{\text{octaedro}} = 8 \cdot 6^2 \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

$A_{\text{octaedro}} = 72\sqrt{2}\ \text{m}^3$

b) O volume corresponde ao dobro do volume de uma pirâmide quadrangular regular.



$V = 2 \cdot a^3 \dfrac{\sqrt{2}}{6}$

$V = 2 \cdot 6^3 \dfrac{\sqrt{2}}{6}$

$V = 72\sqrt{2}\ \text{m}^3$

## Propostos

**1211** Determine a área da superfície de um tetraedro regular de 8 cm de aresta.

**1212** Qual a área da superfície de um octaedro regular cuja aresta mede *a*?

**1213** (Cesesp-PE) Considere os seguintes poliedros regulares:

$A_1$: tetraedro

$A_2$: dodecaedro

$A_3$: icosaedro

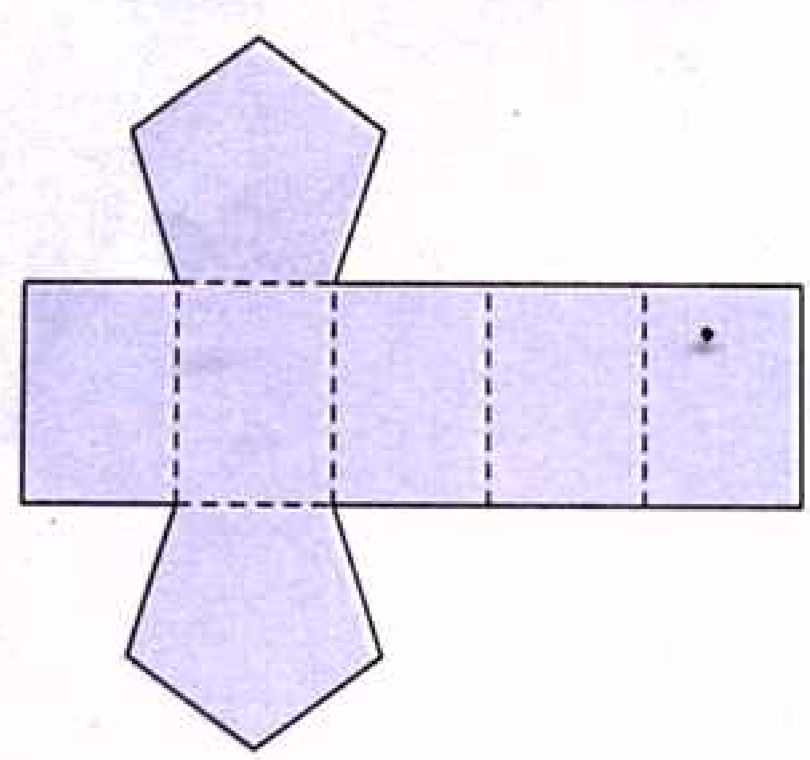
Assinale, entre as seguintes alternativas, a falsa:

a) O poliedro $A_1$ tem as faces triangulares.
b) O poliedro $A_2$ tem 12 faces.
c) O poliedro $A_3$ tem as faces triangulares.
d) O poliedro $A_2$ tem as faces em forma de dodecágono.
e) O poliedro $A_3$ tem 20 faces.

**1214** (PUC-SP) O poliedro que contém 20 vértices, 30 arestas e 12 faces denomina-se:

a) tetraedro
b) icosaedro
c) hexaedro
d) dodecaedro
e) octaedro

**1215** (Unesp) Se dobrarmos convenientemente as linhas tracejadas da figura, obteremos uma figura espacial cujo nome é:



a) pirâmide de base pentagonal
b) paralelepípedo
c) octaedro
d) tetraedro
e) prisma

**1216** (PUC-SP) O número de vértices de um poliedro convexo que possui 12 faces triangulares é:

a) 4
b) 12
c) 10
d) 6
e) 8

**1217** (ITA-SP) Se um poliedro convexo possui 20 faces e 12 vértices, então o número de arestas deste poliedro é:

a) 12
b) 18
c) 28
d) 30
e) 32

**1218** Qual das seguintes alternativas é verdadeira?

a) Num poliedro convexo com 8 vértices triédricos encontramos 10 arestas.
b) Num poliedro convexo com 15 arestas e 7 faces encontramos 10 vértices.
c) Num poliedro convexo com 8 faces triangulares encontramos 10 arestas.
d) Num poliedro convexo com 10 vértices, sendo 4 pentaédricos e 6 triédricos, encontramos 9 faces.
e) n.d.a.

**1219** (Mack-SP) Um poliedro convexo tem 3 faces triangulares, 4 quadrangulares e 5 pentagonais. O número de vértices desse poliedro é:

a) 25
b) 12
c) 15
d) 9
e) 13

**1220** (Cesesp-PE) Sabendo que num poliedro convexo o número de arestas é igual ao número de vértices somado com 12, assinale a alternativa que nos dá o número de faces deste poliedro.

a) 12
b) 11
c) 14
d) 13
e) 10

**1221** (Mack-SP) Sabe-se que um poliedro convexo tem 8 faces e que o número de vértices é maior que 6 e menor que 14. Então, o número *A* de arestas é tal que:

a) $14 \leqslant A \leqslant 20$
b) $14 < A < 20$
c) $13 < A < 19$
d) $13 \leqslant A \leqslant 19$
e) $12 \leqslant A \leqslant 20$

**1222** (Mack-SP) Determine o número de vértices de um poliedro que tem 3 faces triangulares, 1 face quadrangular, 1 pentagonal e 2 hexagonais.

**1223** (Fuvest-SP) O número de faces triangulares de uma pirâmide é 11. Pode-se, então, afirmar que esta pirâmide possui:

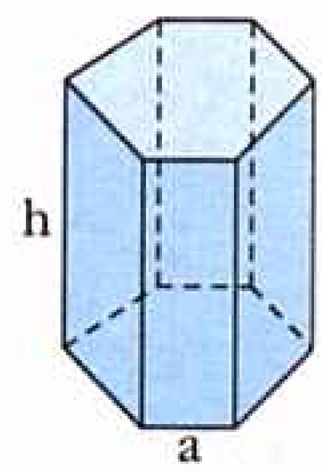
a) 33 vértices e 22 arestas
b) 12 vértices e 11 arestas
c) 22 vértices e 11 arestas
d) 11 vértices e 22 arestas
e) 12 vértices e 22 arestas

# Ficha-resumo

## *Prismas*

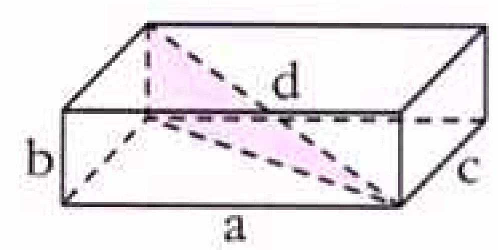
**Prisma reto:**

$$A_T = 2A_b + A_L$$
$$V = A_b \cdot h$$




**Paralelepípedo retângulo:**

$$V = a \cdot b \cdot c$$
$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$



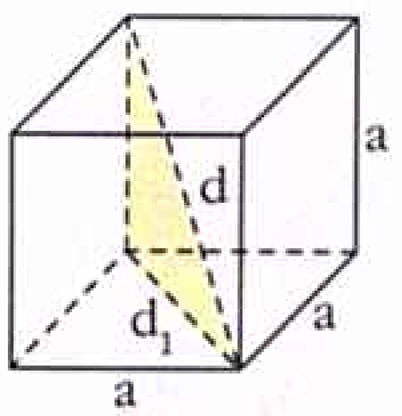

**Prisma triangular regular:**

$$A_b = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

**Cubo:**

$$d_1 = a\sqrt{2}$$

$$d = a\sqrt{3}$$
$$A_T = 6a^2$$
$$V = a^3$$



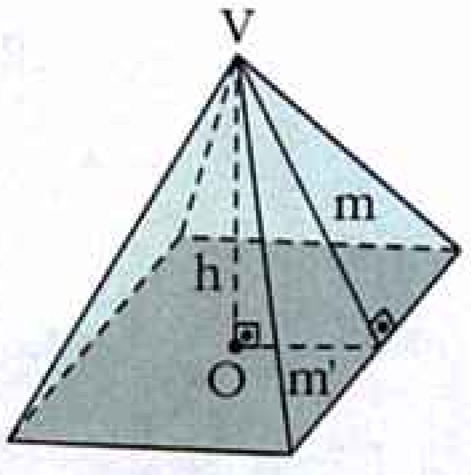

**Prisma hexagonal regular:**

$$A_b = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$

## *Pirâmides*

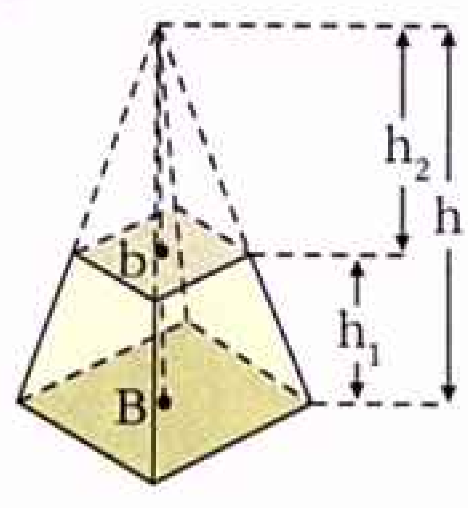
**Pirâmide regular:**

$$A_T = A_b + A_L$$
$$V = \frac{1}{3}A_b \cdot h$$




**Tronco de pirâmide:**

$$V = \frac{1}{3}h_1\left(B + \sqrt{B \cdot b} + b\right)$$




**Tetraedro regular:**

$$m' = \frac{a\sqrt{3}}{6} \qquad m = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

**Pirâmide quadrangular regular:**

$$m' = \frac{a_b}{2}$$

## *Cilindros*

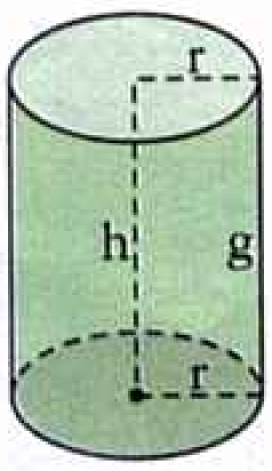
**Cilindro circular reto:**

$A_L = 2\pi rh$

$A_T = 2\pi r\,(r + h)$

$V = \pi\, r^2h$

$h = g$

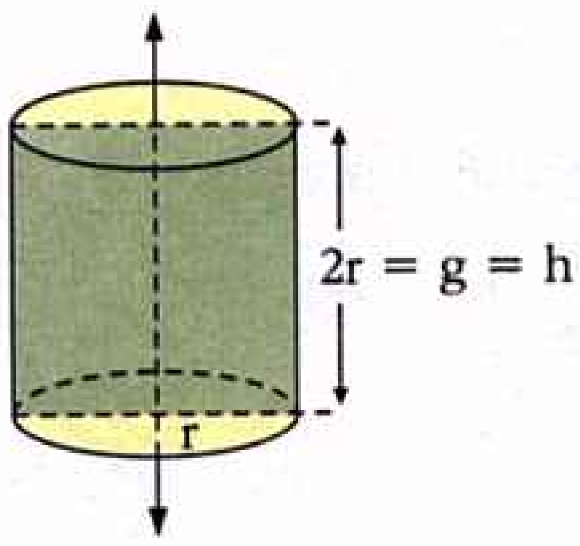



**Cilindro eqüilátero:**

$A_L = 4\pi r^2$

$A_T = 6\pi r^2$

$V = 2\pi r^3$




## *Cones*

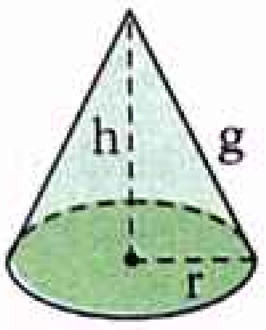
**Cone circular reto:**

$A_L = \pi rg$

$A_T = \pi r\,(g + r)$

$V = \pi r^2\,\dfrac{h}{3}$

$g^2 = h^2 + r^2$




**Cone eqüilátero:**

$g = 2 \cdot r$

$h = r\sqrt{3}$

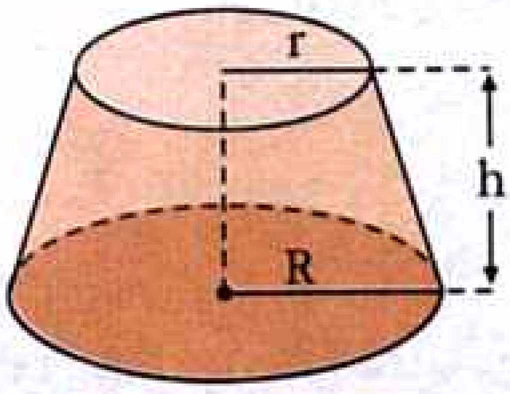
$A_T = 3\pi r^2$

**Tronco de cone:**

$A_L = \pi\,(R + r)\,g$

$A_T = A_L + S + s$

$V_T = \dfrac{\pi h}{3}\,[R^2 + Rr + r^2]$

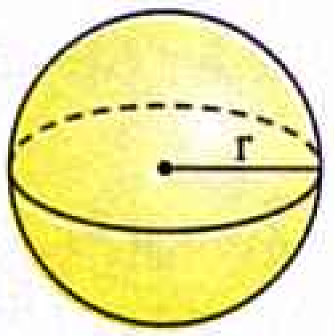


## *Esferas*

**Esfera:**

$$A_T = 4\pi r^2$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$




## *Poliedros*

**Poliedros:**

$$V - A + F = 2$$

(Teorema de Euler)

$$S = (V - 2) \cdot 360^\circ$$

(Soma dos ângulos das faces)

**Poliedros de Platão:**

| Poliedro | Face | V | A | F |
|---|---|---|---|---|
| Tetraedro | triangular | 4 | 6 | 4 |
| Hexaedro | quadrangular | 8 | 12 | 6 |
| Octaedro | triangular | 6 | 12 | 8 |
| Dodecaedro | pentagonal | 20 | 30 | 12 |
| Icosaedro | triangular | 12 | 30 | 20 |

# Exercícios

## Complementares

**1224** Determine a medida da diagonal de um cubo de 5 cm de aresta.

**1225** Determine a medida da diagonal de um paralelepípedo retângulo cujas arestas medem 2 cm, 7 cm e 3 cm.

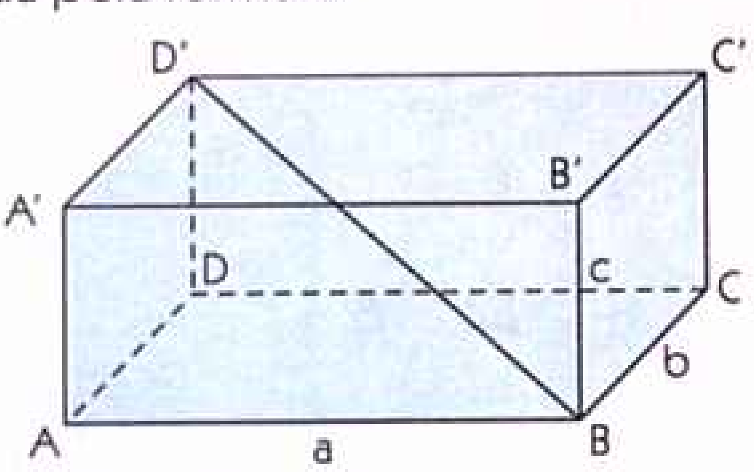
**1226** Determine o volume de um cubo que tem 96 $m^2$ de área total.

**1227** Um prisma quadrangular regular tem aresta da base $a = 5$ dm e altura $h = 10$ dm. Determine o seu volume.

**1228** Para um prisma hexagonal regular com perímetro da base 30 m e altura 10 m, qual deve ser o volume?

**1229** Qual deve ser a altura de um prisma triangular regular cuja aresta da base mede *a*, para que o seu volume seja igual ao volume de um cubo de aresta *a*?

**1230** (PUC-SP) No paralelepípedo reto-retângulo de dimensões *a*, *b* e *c*, a diagonal $\overleftrightarrow{BD'}$, é dada pela fórmula:




a) $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

b) $\sqrt{a_2^2 - b^2 - c^2}$

c) $\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$

d) $\sqrt{a^2 - b^2 + c^2}$

e) $\sqrt{2a^2 - 2b^2 + 2c^2}$

**1231** (UE-Ponta Grossa) As medidas internas de uma caixa d'água em forma de paralelepípedo retângulo são: 1,2 m; 1,0 m; e 0,7 m. Sua capacidade é de:

a) 8 400 litros
b) 84 litros
c) 840 litros
d) 8,4 litros
e) n.d.a.

**1232** Uma pirâmide regular de base quadrada possui aresta da base $a = 6$ cm e aresta lateral $a_L = \sqrt{34}$ cm. Determine sua área total e seu volume.

**1233** Qual o volume de uma pirâmide regular de altura igual a $2\sqrt{3}$ dm e base triangular de perímetro 6 dm?

**1234** Determine a área total de um tetraedro regular que possui aresta de 16 m.

**1235** A aresta da base de uma pirâmide regular quadrangular mede 6 cm e a altura, 4 cm. Determine sua área total.

**1236** (UFPA) Uma pirâmide regular, cuja base é um quadrado de diagonal $6\sqrt{6}$ cm e a altura é igual a $\frac{2}{3}$ do lado da base, tem área total igual a:

a) $96\sqrt{3}$ $cm^2$
b) 252 $cm^2$
c) 288 $cm^2$
d) $84\sqrt{3}$ $cm^2$
e) 576 $cm^2$

**1237** (Cesgranrio-RJ) O volume da pirâmide de base quadrada, cujas 8 arestas têm o mesmo comprimento $\ell$, é:

a) $\frac{\ell^3\sqrt{2}}{2}$

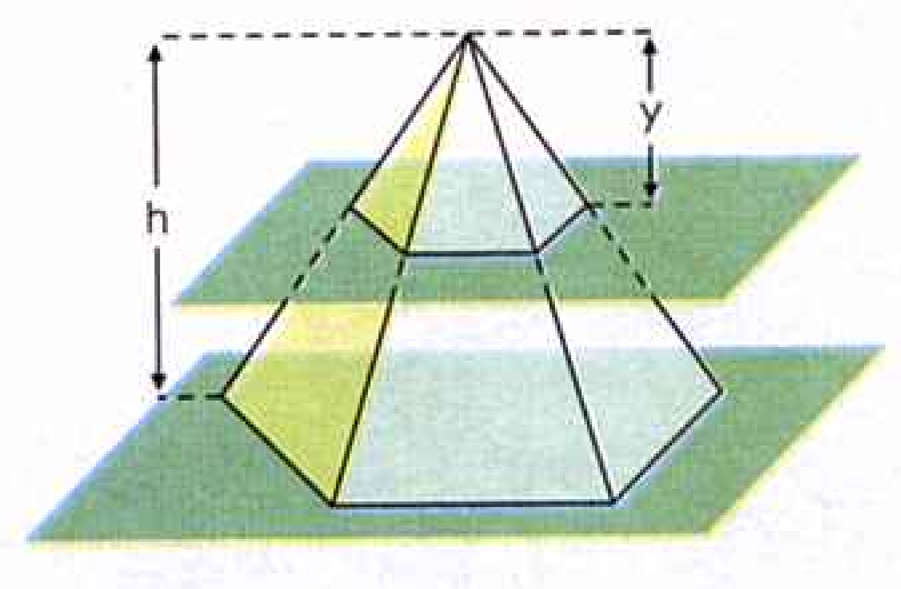
b) $\frac{\ell^3\sqrt{2}}{6}$

c) $\frac{\ell^3}{3}$

d) $\frac{\ell^3\sqrt{3}}{4}$

e) $\frac{\ell^3\sqrt{3}}{8}$

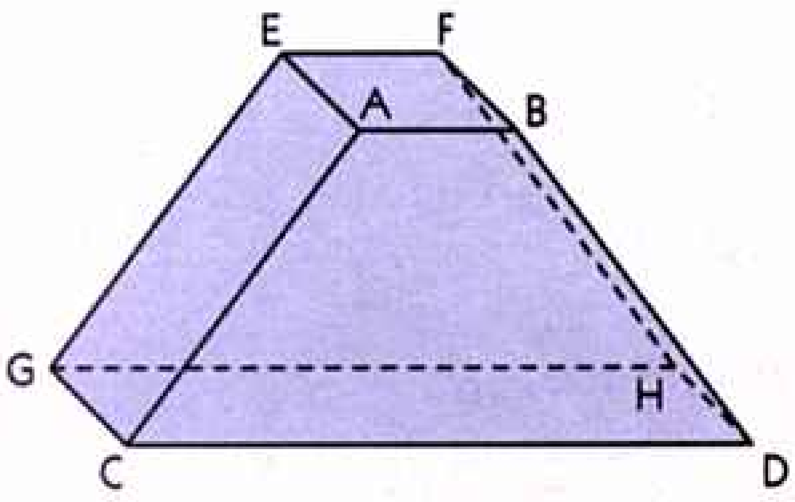
**1238** (FEI-SP) Dada a pirâmide de altura *h*, a que distância *y* do vértice devemos traçar um plano secante paralelo à base, de modo que o volume do tronco seja $\frac{19}{27}$ do volume da pirâmide?



**1239** (Fatec-SP) Sejam $A_1$ e $A_2$ duas pirâmides semelhantes. Sabe-se que a área da base de $A_1$ é 12 vezes maior que a área da base de $A_2$. Se o volume de $A_2$ é *V*, então o volume de $A_1$ é:

a) $9\sqrt{2}$ V  c) $12\sqrt{2}$ V  e) $6\sqrt{6}$ V
b) $24\sqrt{3}$ V  d) $12\sqrt{3}$ V

**1240** (Fuvest-SP) Na figura:




a) ABCD e EFGH são trapézios de lados 2, 8, 5 e 5.
b) Os trapézios estão em planos paralelos cuja distância é 3.
c) As retas $\overleftrightarrow{AE}$, $\overleftrightarrow{BF}$, $\overleftrightarrow{CG}$ e $\overleftrightarrow{DH}$ são paralelas.

Calcule o volume do sólido.

**1241** Calcule a área total e o volume de um cilindro que tem raio da base r = 1 cm e altura h = 2 cm.

**1242** Determine a área total de um cilindro eqüilátero que possui volume igual a $128\pi$ cm³.

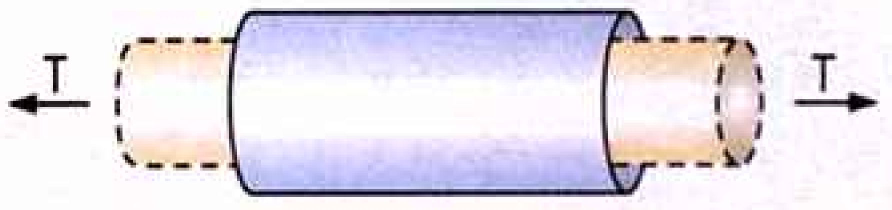
**1243** Um retângulo, quando girado em torno de um de seus lados, descreve um cilindro reto, cujo volume tem $128\pi$ cm³. Determine o perímetro do retângulo, sabendo que a altura é o dobro da base.

**1244** Um suco de fruta é vendido em dois tipos de latas cilíndricas: uma de raio *r*, cheia até a altura *h*, e outra de raio $\frac{r}{2}$, cheia até a altura 2h. A primeira é vendida por R$ 3,00 e a segunda, por R$ 1,60. Qual a embalagem mais vantajosa para o comprador?

**1245** (UFMG) Um cilindro circular reto, de ouro maciço, tem o raio da base igual a 2 cm e altura igual a 10 cm. Sendo a densidade do ouro 19 g/cm³, a massa total do cilindro, em gramas, é

a) $950\pi$  d) $380\pi$
b) $760\pi$  e) $190\pi$
c) $570\pi$

**1246** (Cesgranrio-RJ) Um bloco cilíndrico de volume *V* deforma-se quando submetido a uma tração *T*, conforme indicado esquematicamente na figura. O bloco deformado, ainda cilíndrico, está indicado por linhas tracejadas. Nesse processo, a área da secção reta diminui em 10% e o comprimento aumenta em 20%. O volume do bloco deformado é:




a) 0,90 V  d) 1,20 V
b) V  e) 1,80 V
c) 1,08 V

**1247** (PUC-SP) As projeções ortogonais de um cilindro sobre dois planos perpendiculares são, respectivamente, um círculo e um quadrado. Se o lado do quadrado é 10, qual é o volume do cilindro?

a) $1\,000\pi$  d) $250\pi$
b) $750\pi$  e) $100\pi$
c) $500\pi$

**1248** Determine a área total de um cone eqüilátero que tem 6 cm de raio.

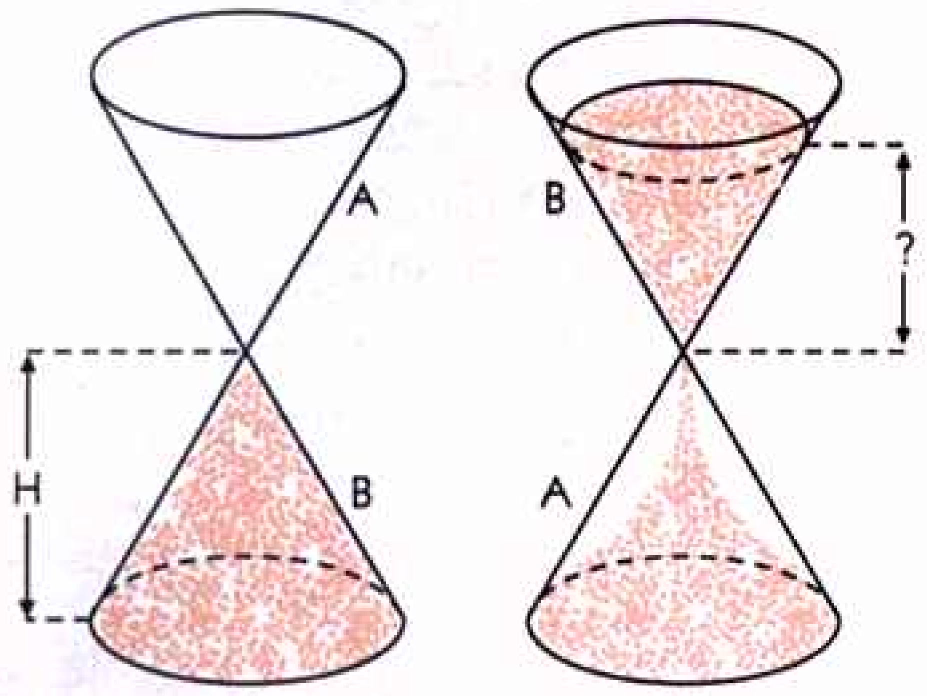
**1249** Determine o volume de um cone reto, cujo raio da base mede 3 dm e a geratriz, $3\sqrt{10}$ dm.

**1250** Um cone reto tem $24\pi$ cm² de área total. Calcule seu volume, de tal forma que a geratriz meça 5 cm.

**1251** (UFES) Com um setor circular, cujo ângulo central mede 120°, constrói-se um cone circular reto de raio igual a 3 cm. O volume do cone, assim construído, mede:

a) $36\pi\sqrt{2}$ cm³  d) $18\sqrt{2}$ cm³
b) $18\pi$ cm³  e) $9\pi\sqrt{2}$ cm³
c) $18\pi\sqrt{2}$ cm³

**1252** (Cesgranrio-RJ) Uma ampulheta repousa numa mesa, como mostra a figura I (o cone *B* completamente cheio de areia). A posição da ampulheta é invertida. A figura II mostra o instante em que cada cone mantém metade da areia. Nesse instante, a areia no cone *B* forma um cone de altura:




a) $\dfrac{H}{\sqrt{3}}$

b) $\dfrac{H}{2}$

c) $\dfrac{H}{\sqrt[3]{2}}$

d) $\dfrac{H}{\sqrt[3]{3}}$

e) $\dfrac{H}{4}$

**1253** (UAM) Consideremos um cone reto de altura *H*. Queremos cortá-lo por um plano paralelo à base, à distância *h* do vértice, tal que o cone obtido e o tronco de cone tenham o mesmo volume. Então, $\dfrac{h}{H}$ vale:

a) $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

b) $\dfrac{2}{\sqrt{2}}$

c) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

d) $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{2}$

**1254** (ITA-SP) O ângulo da geratriz com o eixo de um cone de revolução mede 30°. Se *S* é área de sua secção reta a uma distância *h* do vértice, qual a relação entre *S* e *h*?

a) $S = \dfrac{\pi h^2}{2}$

b) $S = \dfrac{3\pi}{2}h^2$

c) $S = \dfrac{\pi h^2}{3}$

d) $S = \dfrac{2\pi}{3}h^2$

e) n.d.a.

**1255** (PUC-RJ) Um tanque subterrâneo tem a forma de um cone circular reto invertido, de eixo vertical, e está cheio até a boca (nível do solo) com 27 000 litros de água e 37 000 litros de petróleo (o qual é menos denso que a água). Sabendo que a profundidade total do tanque é 8 metros e que os dois líquidos não são miscíveis, podemos afirmar que a altura da camada de petróleo é:

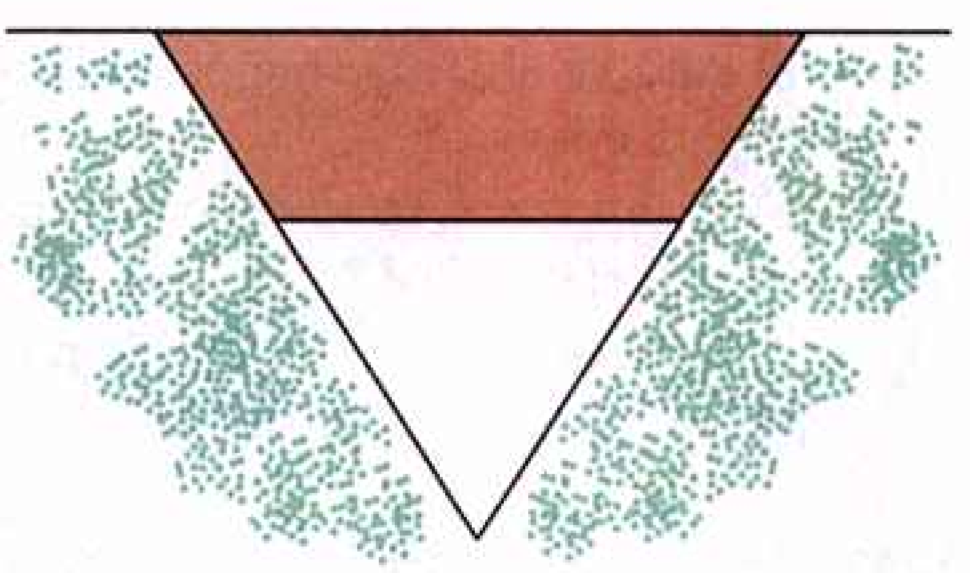
a) 6 m

b) 2 m

c) $\dfrac{3\sqrt{37}}{\pi}$ m

d) $\dfrac{27}{16}$ m

e) $\dfrac{37}{16}$ m



**1256** Uma esfera apresenta como área superficial $36\pi$ cm². Determine o seu volume.

**1257** Determine o volume de uma esfera inscrita num cubo de aresta igual a 6 dm.

**1258** Para uma esfera de 5 m de raio, qual deve ser sua área superficial e seu volume?

**1259** (ITA-SP) Considere um cone circular reto circunscrito a uma esfera de raio 2 cm. Sabendo que a área do círculo, limitado pela circunferência formada por pontos de tangência entre as duas superfícies, é $2\pi$ cm², calcule a altura desse cone.

**1260** (FEI-SP) A área da superfície de uma esfera e a área total de um cone reto são iguais. Determine o raio da esfera, sabendo que o volume do cone é $12\pi$ cm³ e o raio da base, 3 cm.

# Saiba um pouco mais

# Fractais

*O artista digita uma equação. A partir daí, o computador faz literalmente milhões de cálculos e vai desenhando os fractais, imagens cuja riqueza de detalhes só perde para a própria realidade*

## A matemática do delírio


Gregory Sams/SPL/Stock Photo

***Plutonia*** **é o nome desta imagem, criada a partir de uma equação pelo matemático francês Gaston Julia.**

Segundo o velho Euclides, matemático grego que viveu cerca de 2 200 anos atrás, existem figuras que não têm dimensão. É o caso dos pontos, como este ponto final (.). Uma reta, por sua vez, é algo com uma única dimensão. Já a capa de uma revista, tem duas dimensões. Para saber qual a sua área, é necessário multiplicar as medidas do comprimento e da largura. Do mesmo modo, um bloco possui três dimensões, porque precisamos multiplicar três medidas (comprimento, largura e altura) para saber qual o seu volume. Euclides estava certo. Mas não resolveu todo o problema.

Existe uma infinidade de fenômenos na natureza que, graças à sua irregularidade, não podem ser descritos por essa geometria toda certinha. É preciso apelar para complicados cálculos que resultam nas chamadas dimensões fracionárias — como a dimensão 0,5, por exemplo, típica de um objeto que é mais do que um simples ponto com "dimensão zero", porém menos do que uma reta com dimensão 1. Só a chamada geometria dos fractais consegue descrevê-lo.

Essa nova área das ciências matemáticas vem tendo uma enorme aplicação. Para os biólogos, ajuda a compreender o crescimento das plantas. Para os físicos, possibilita o estudo de superfícies intrincadas. Para os médicos, dá uma nova visão da anatomia interna do corpo. Enfim, não faltam exemplos. Um dos mais belos é o uso dos fractais na arte.

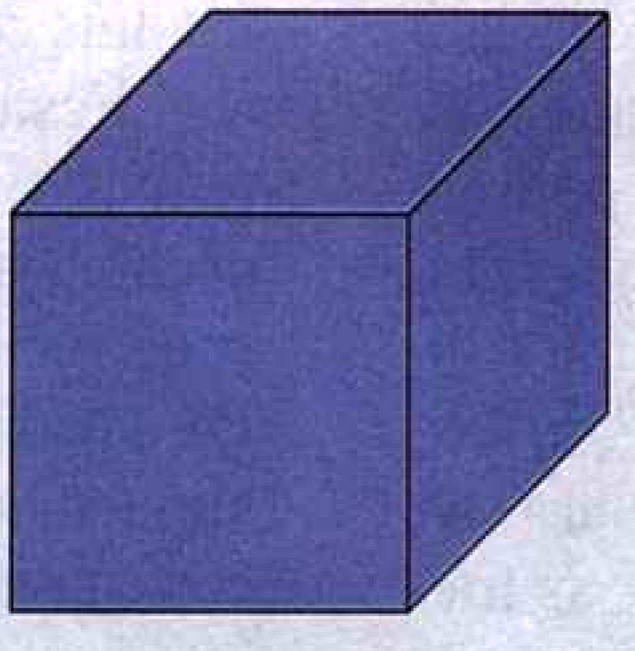
# Duas maneiras possíveis de descrever o mundo

## A geometria euclidiana...

**Um ponto** tem “dimensão 0”.
Ele não tem comprimento ou largura. É impossível medi-lo.

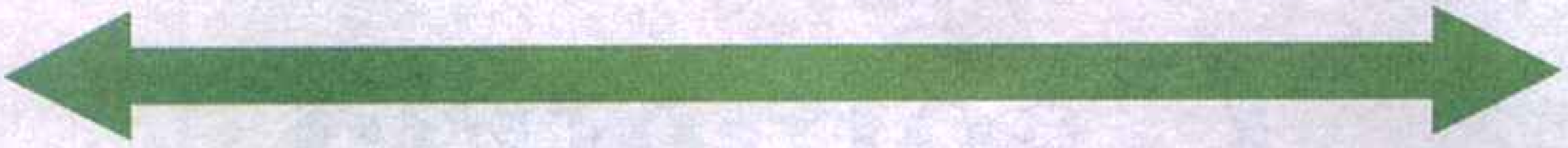
**Uma reta** tem uma única dimensão. Um segmento de reta só pode ser medido pelo seu comprimento.

**Um plano** tem duas dimensões. A superfície do tampo retangular de uma mesa. A sua área é o produto das medidas do comprimento pela largura.

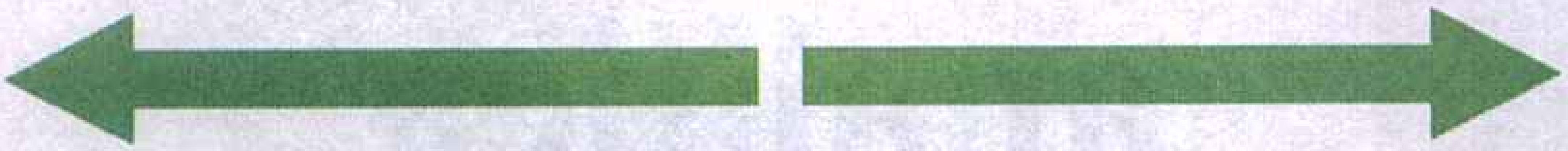


Já **um cubo** é uma figura espacial, possui três dimensões: largura, comprimento e altura cujas medidas multiplicadas, resultam em seu volume.

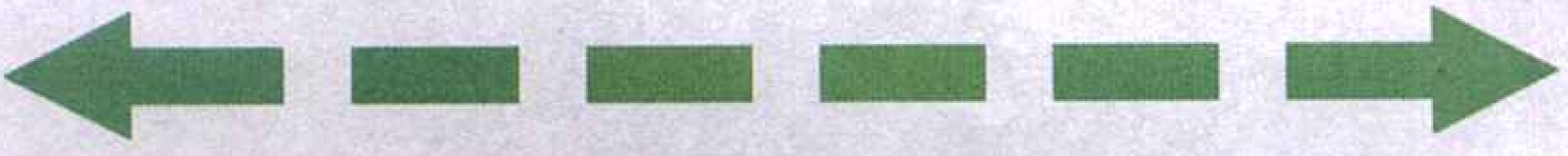
# ...e a dos fractais



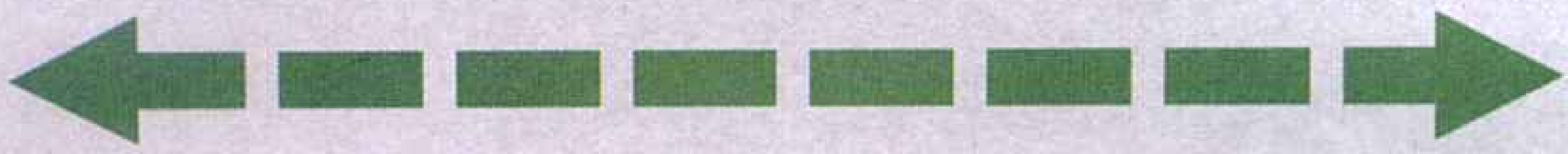
Existem objetos que não podem ser descritos por retas, como esta acima.



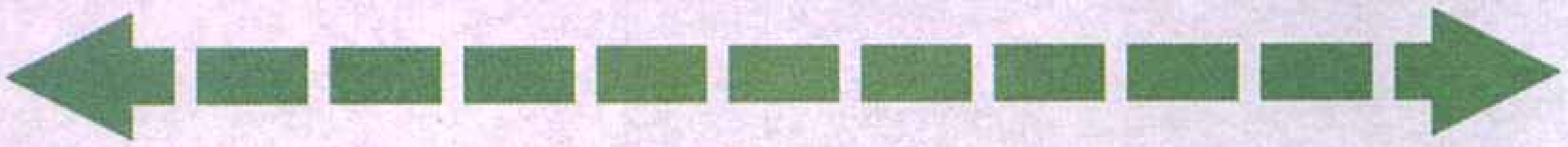
Então, é como se fosse retirado um pedaço da reta



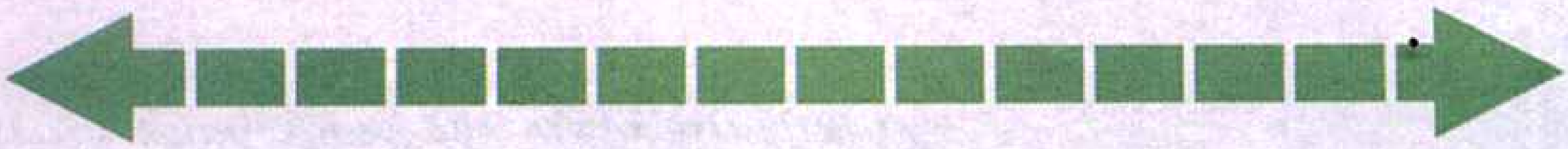
E depois mais outros pedaços



A operação de esburacar a reta seria repetida inúmeras vezes...



...até se ter uma idéia do que aconteceria se fosse quebrada infinitas vezes.



Sobraria, então, o que se chama "Poeira de Cantor", idealizada pelo matemático alemão Georg Cantor. Seria mais do que um único ponto (dimensão 0) e menos do que uma reta (dimensão 1): uma dimensão 0,5, por exemplo. Existem, ainda, objetos entre a reta e o plano. E objetos entre o plano e o cubo. Basta imaginar essas figuras esburacadas, como a reta que virou poeira.

(Adaptado de: *Superinteressante*. São Paulo, n. 10, ano 8, p. 26.)