Geometria analítica

A primeira idéia que uma criança precisa ter é a da diferença entre o bem e o mal. E a principal função do educador é cuidar para que ela não confunda o bem com a passividade e o mal com a atividade.

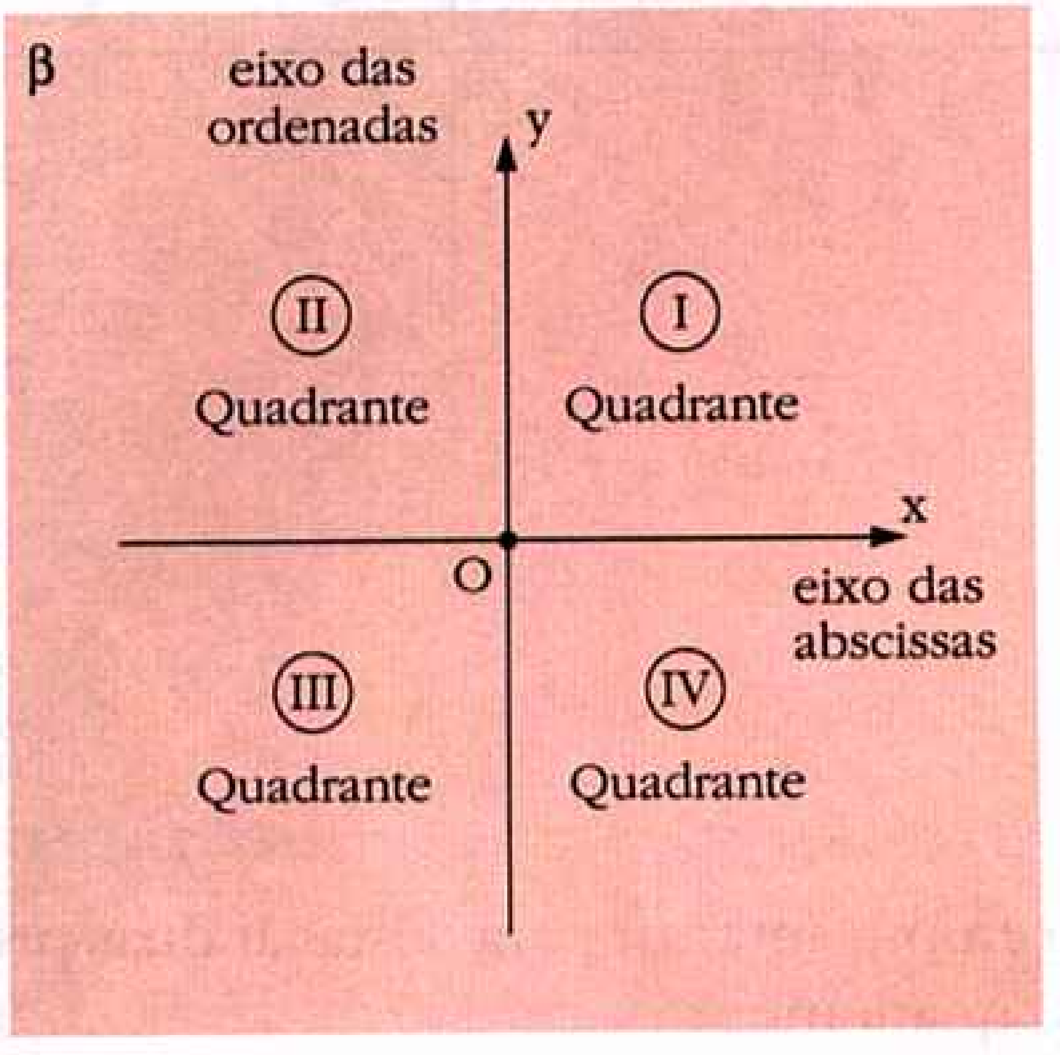
Maria Montessori (1870-1952), pedagoga italiana

1. Ponto

No estudo da geometria analítica veremos que as figuras geométricas podem ser analisadas através de elementos e processos algébricos. É o que faremos aqui com o ponto e, a seguir, com a reta e a circunferência.

Plano cartesiano

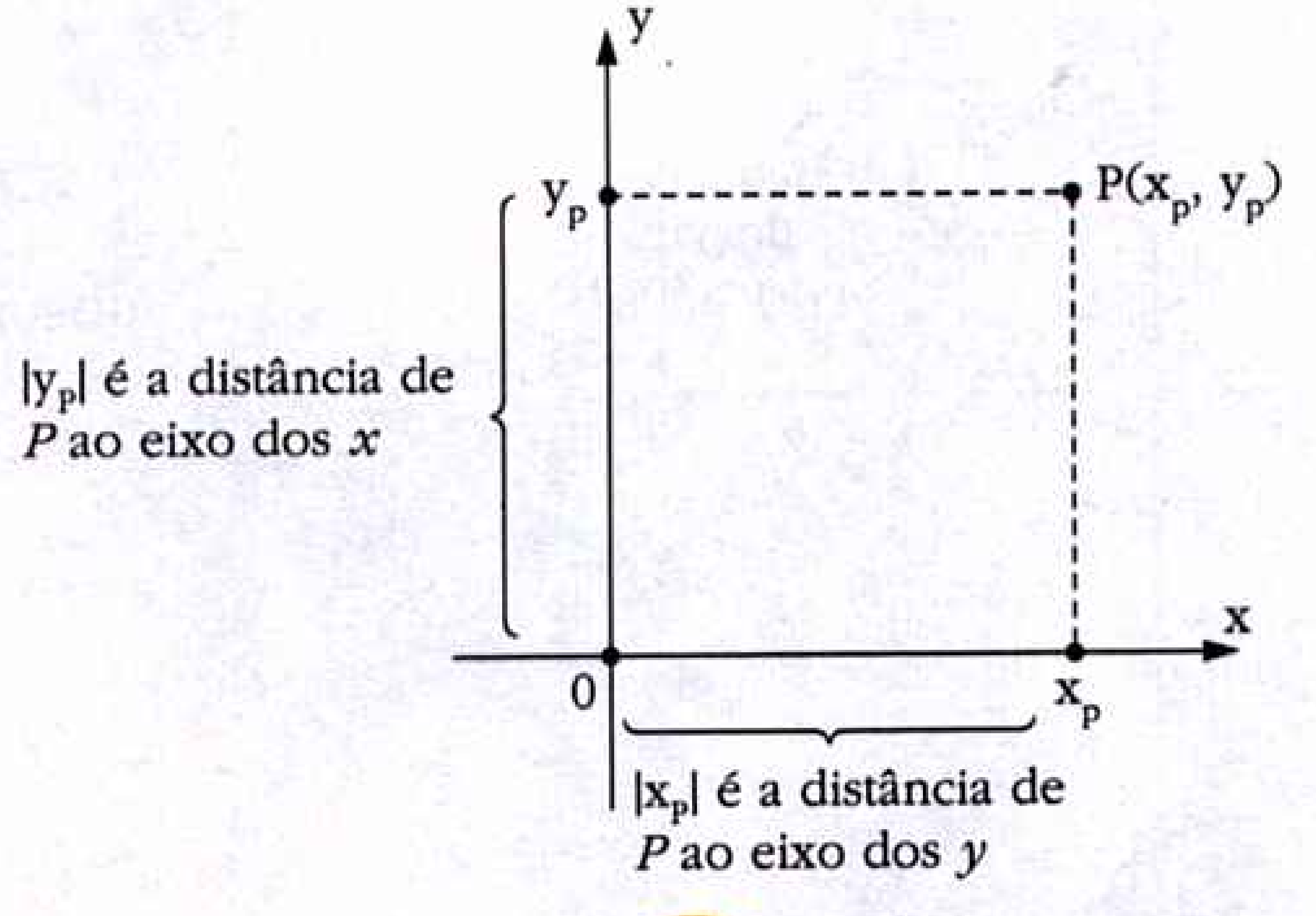
O plano cartesiano contém dois eixos perpendiculares entre si, tendo a origem comum no ponto O. Chamamos de eixo das abscissas ao eixo horizontal (eixo dos x). Chamamos de eixo das ordenadas ao eixo vertical (eixo dos y). Esses eixos dividem o plano em quatro regiões que chamamos de quadrantes.



A localização de um ponto $P(x_p, y_p)$ no plano cartesiano é feita pelas suas coordenadas (abscissa e ordenada).

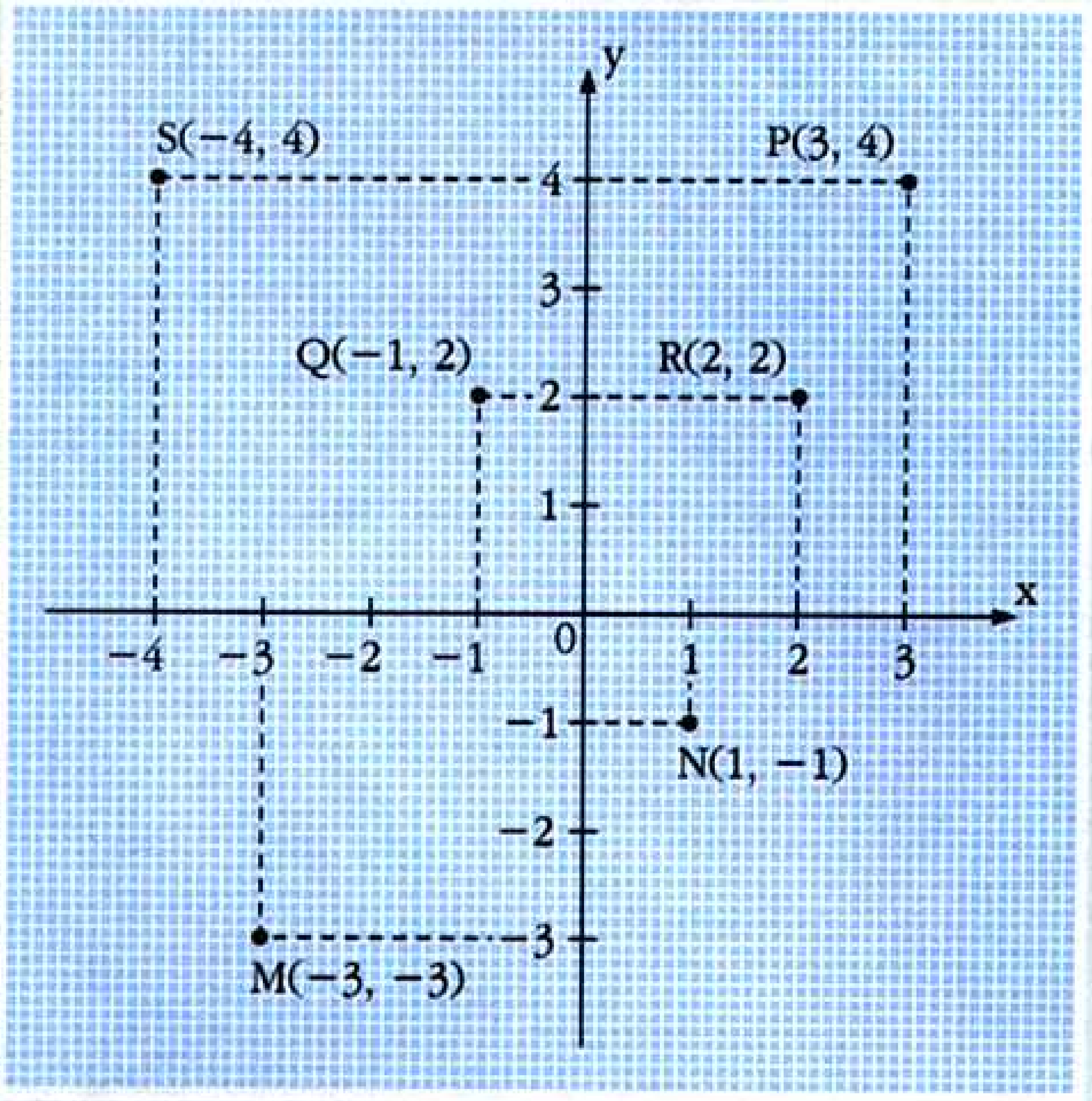
$$P(x_p, y_p)$$

abscissa — ordenada



Exemplo:

Localizar os pontos seguintes no plano cartesiano: M(−3, −3), P(3, 4), R(2, 2), N(1, −1), Q(−1, 2) e S(−4, 4).



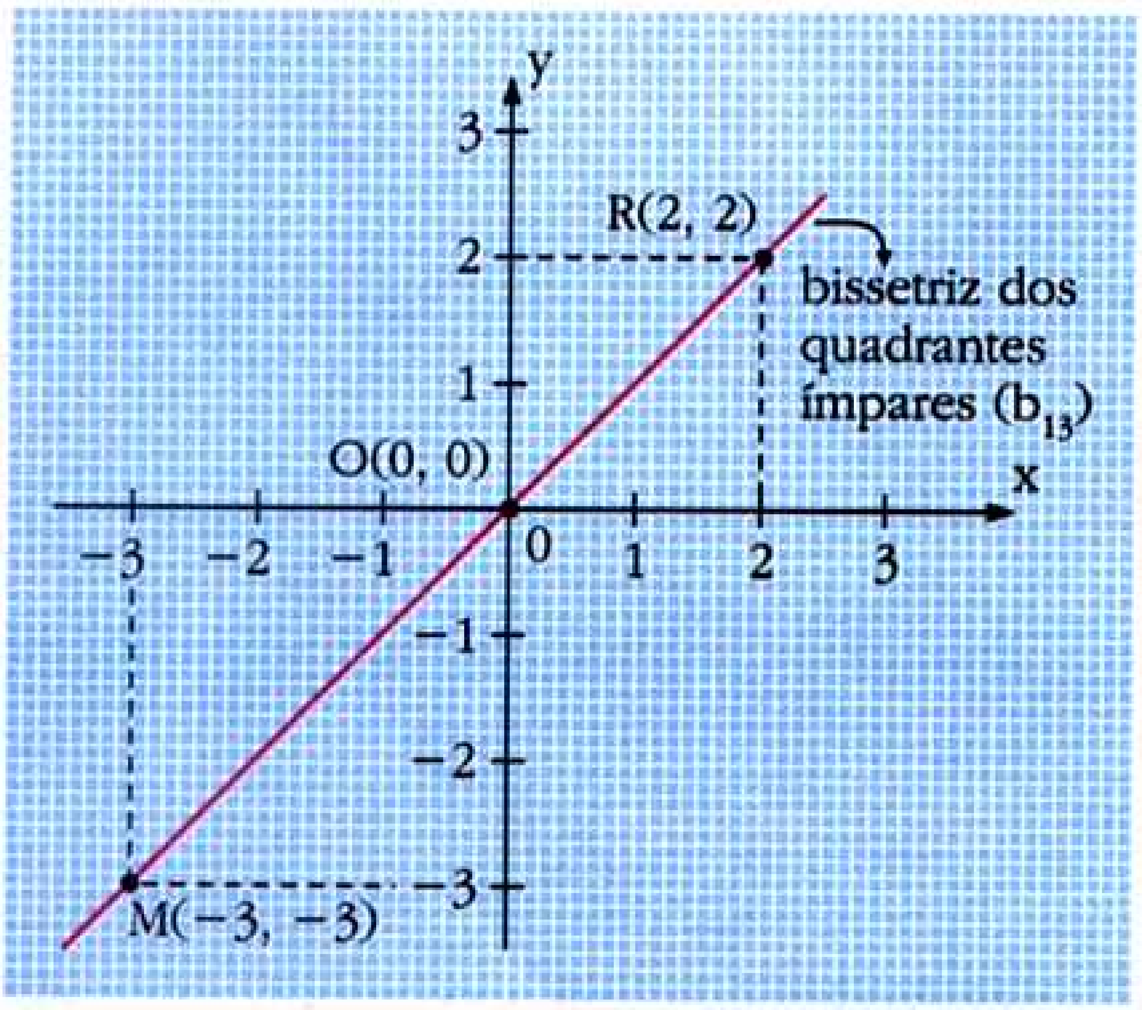
Bissetrizes dos quadrantes

Vamos utilizar o exemplo anterior para destacar duas propriedades importantes sobre as bissetrizes dos quadrantes:

1ª propriedade

Todo ponto que pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares (1º e 3º quadrantes) apresenta abscissa igual à ordenada.

Observe os pontos M(−3, −3), O(0, 0) e R(2, 2).

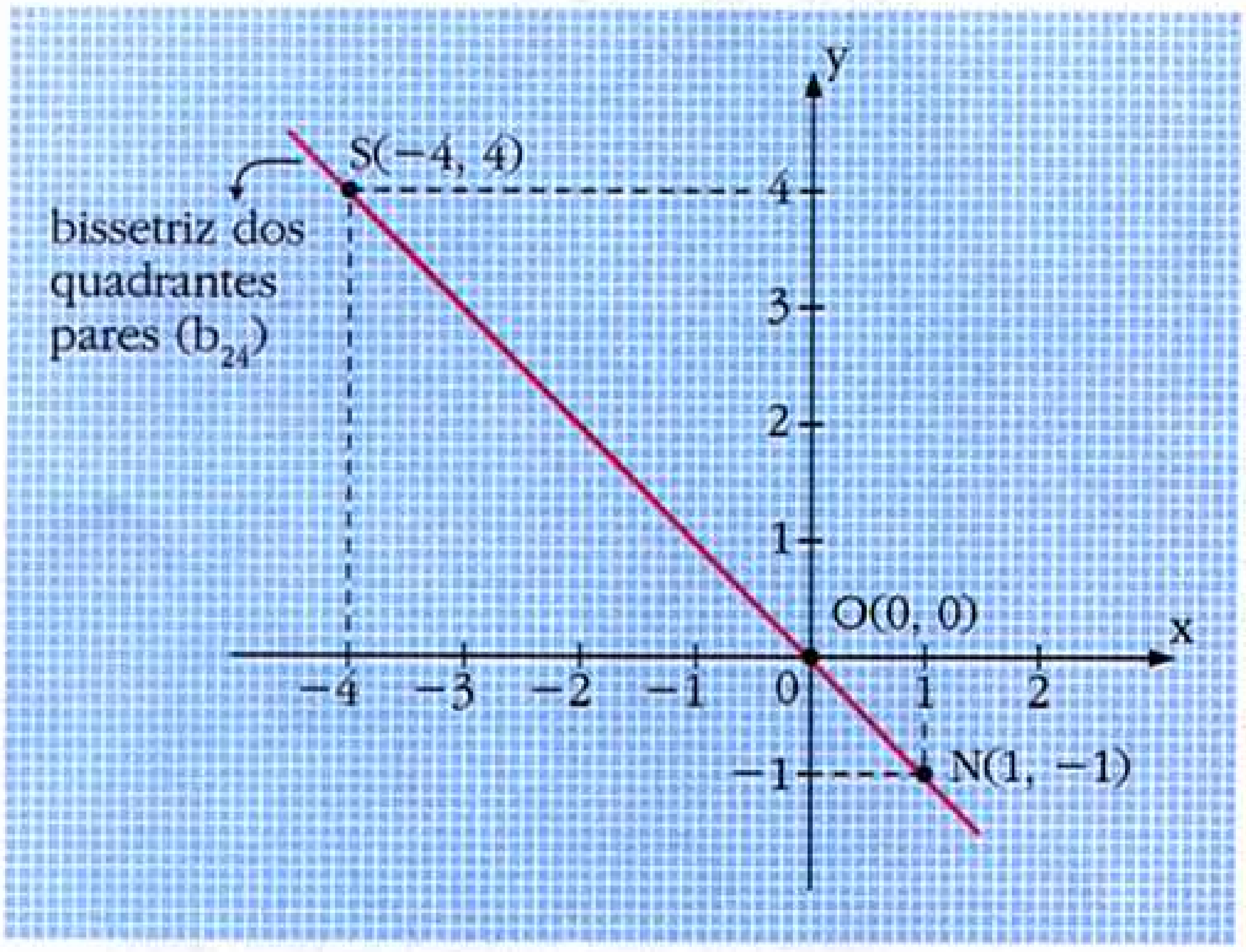


abscissa = ordenada

2ª propriedade

Todo ponto que pertence à bissetriz dos quadrantes pares (2º e 4º quadrantes) apresenta abscissa igual ao oposto da ordenada.

Observe os pontos N(1, −1), O(0, 0) e S(−4, 4).

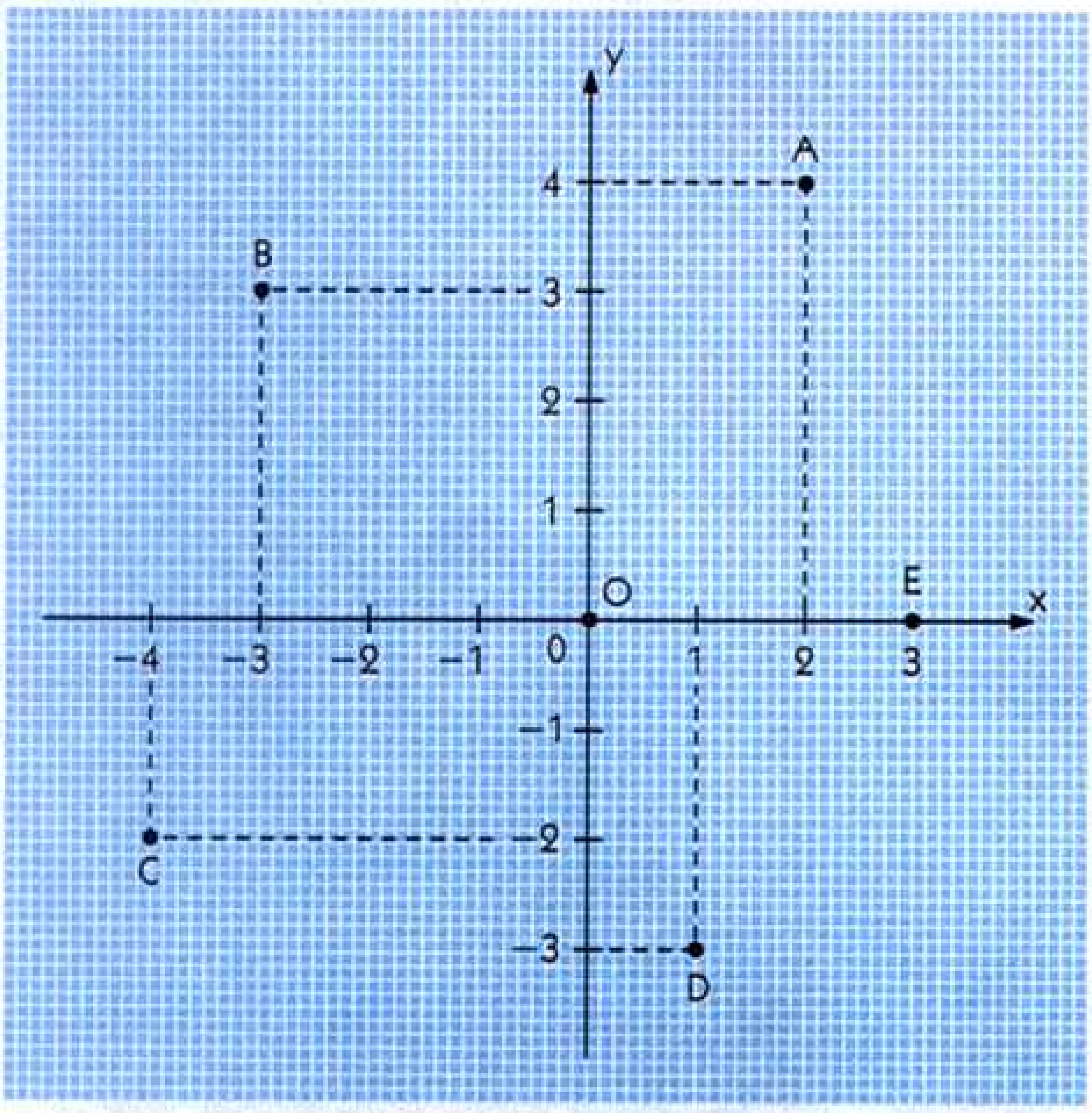


abscissa = −ordenada

Exercícios

Resolvidos

1 Determinar as coordenadas dos pontos *A*, *B*, *C*, *D*, *E* e *O*.

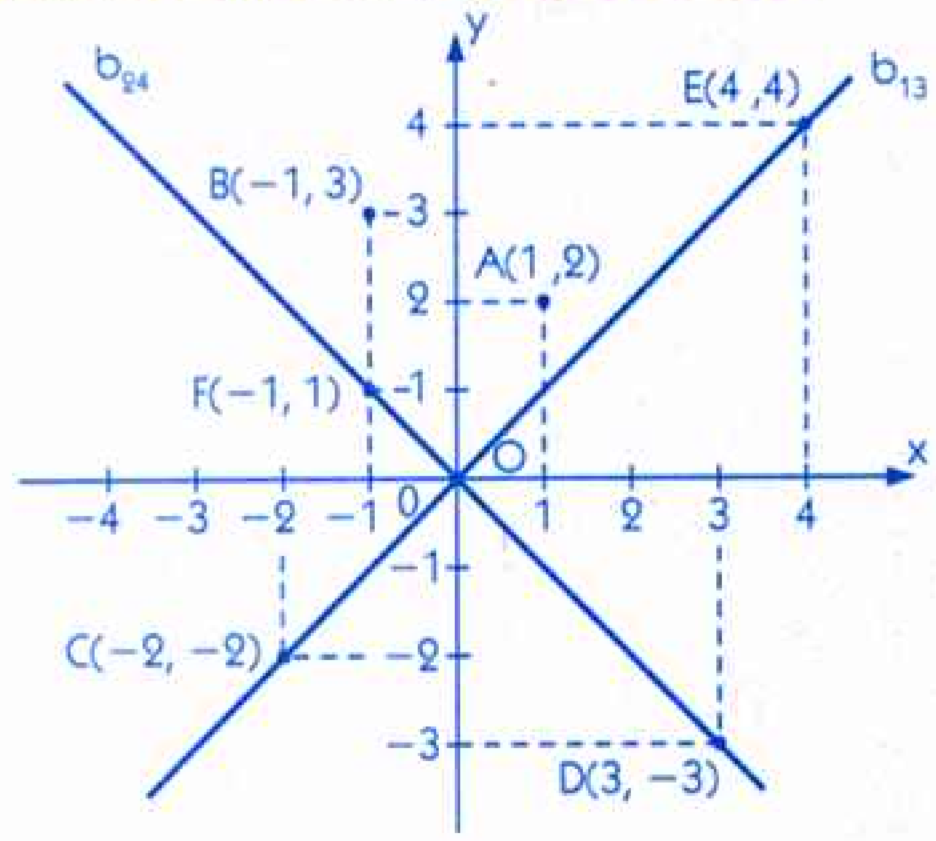


Basta identificar a abscissa e ordenada de cada ponto:

A(2, 4)	C(−4, −2)	E(3, 0)
B(−3, 3)	D(1, −3)	O(0, 0)

2 Localizar os pontos no plano cartesiano:
A(1, 2), B(−1, 3), C(−2, −2), D(3, −3), E(4, 4), F(−1, 1)
Quais desses pontos pertencem à bissetriz dos quadrantes ímpares? E dos quadrantes pares?

Basta traçar os eixos cartesianos e determinar as coordenadas.

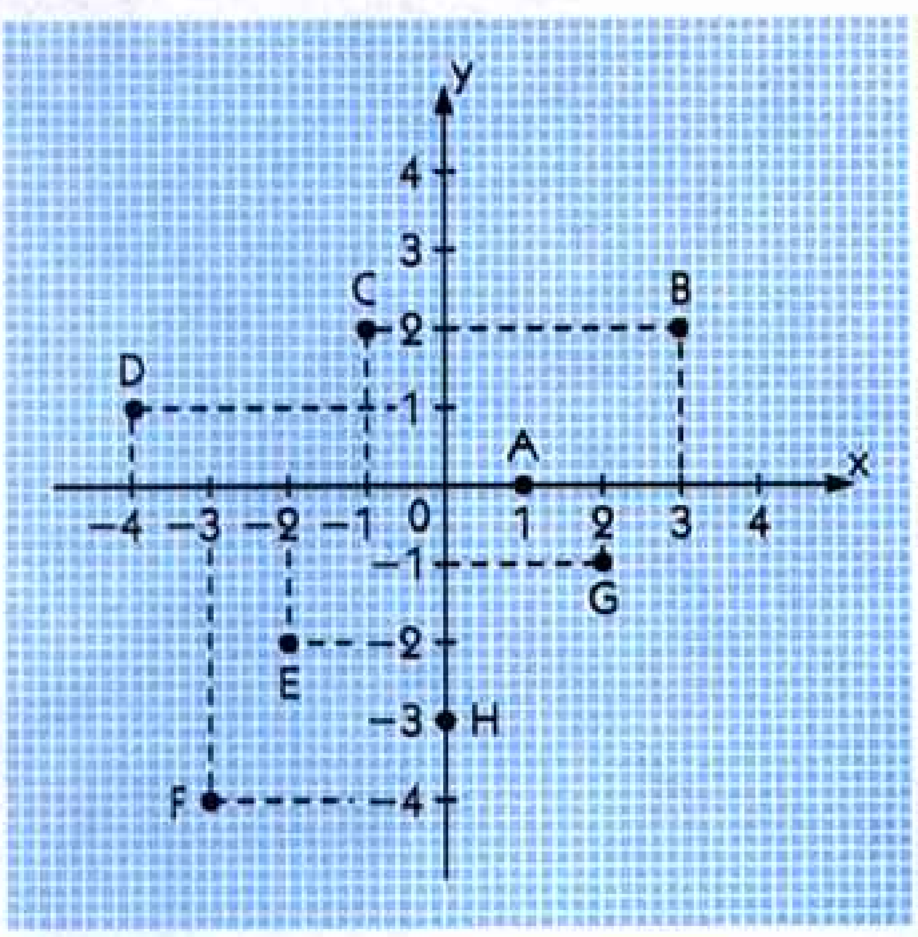


Os pontos C(−2, −2), O(0, 0) e E(4, 4) apresentam ordenada igual à abscissa, então, pertencem à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Os pontos D(3, −3), F(−1, 1) e O(0, 0) apresentam ordenada igual ao oposto da abscissa, portanto, pertencem à bissetriz dos quadrantes pares.

Propostos

1261 Determine as coordenadas dos pontos:



1262 Localize no plano cartesiano os seguintes pontos:

A(1, 2) D(−1, 0) G(0, −2)
B(2, −2) E(3, −2) H(1, −3)
C(−3, −1) F(−2, 1)

1263 Responda às questões depois de localizar os pontos seguintes no plano cartesiano:

A(−2, 4) E(0, 0) I(3, 1)
B(−1, 3) F(−1, −1) J(2, 0)
C(0, 2) G(1, 3) L(1, −1)
D(1, 1) H(2, 2) M(0, −2)

a) Quais desses pontos pertencem à b_{13}? Por quê?

b) Quais desses pontos pertencem à b_{24}? Por quê?

c) Quais desses pontos pertencem ao eixo dos *y*? Por quê?

d) Qual é a soma das coordenadas para cada um dos pontos *A*, *B*, *C* e *D*?

Acontece a mesma particularidade com as coordenadas de outros pontos da reta que passa por eles?

1264 Determine o valor de *n*, de forma que os pontos dados por suas coordenadas pertençam à bissetriz dos quadrantes ímpares.

a) (2n, 4)
b) (3n, 0)
c) (8, n + 2)
d) (10, 2n − 4)

1265 Obtenha o valor de *p*, de tal forma que os pontos dados por suas coordenadas pertençam à bissetriz dos quadrantes pares.

a) (4p + 2, 6) b) $\left(8, 3 + \frac{p}{2}\right)$

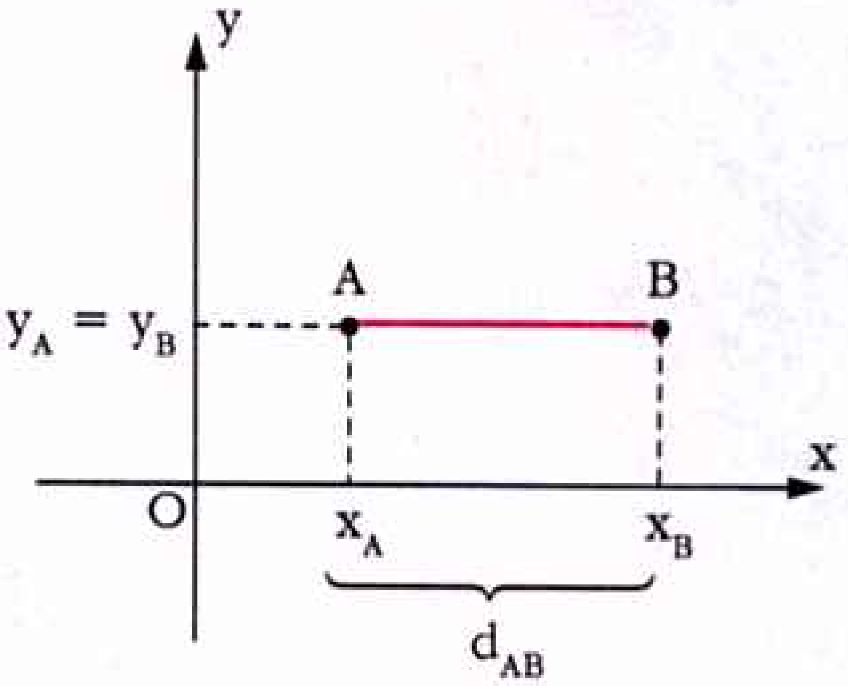
Distância entre dois pontos

A distância entre dois pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, situados num plano cartesiano, pode ser determinada em função das suas coordenadas. Vejamos:

1º caso

O segmento AB é paralelo ao eixo Ox, onde a distância d_{AB} é o módulo da diferença entre abscissas.

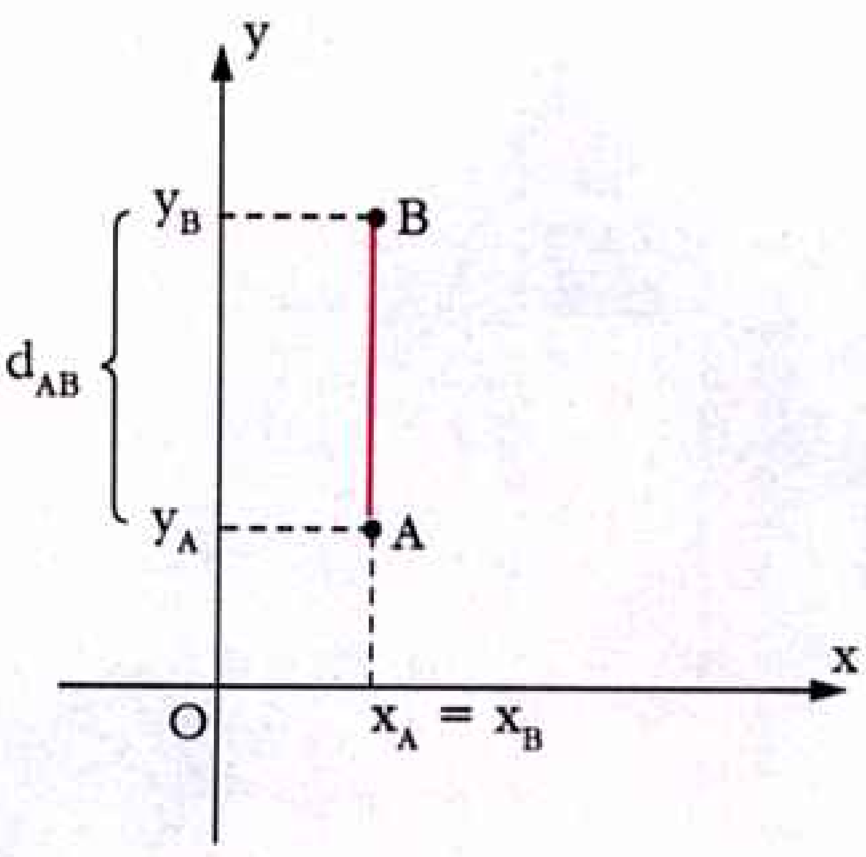
$$\boxed{d_{AB} = |x_B - x_A|}$$



2º caso

O segmento AB é paralelo ao eixo Oy, onde a distância d_{AB} é o módulo da diferença entre ordenadas.

$$\boxed{d_{AB} = |y_B - y_A|}$$



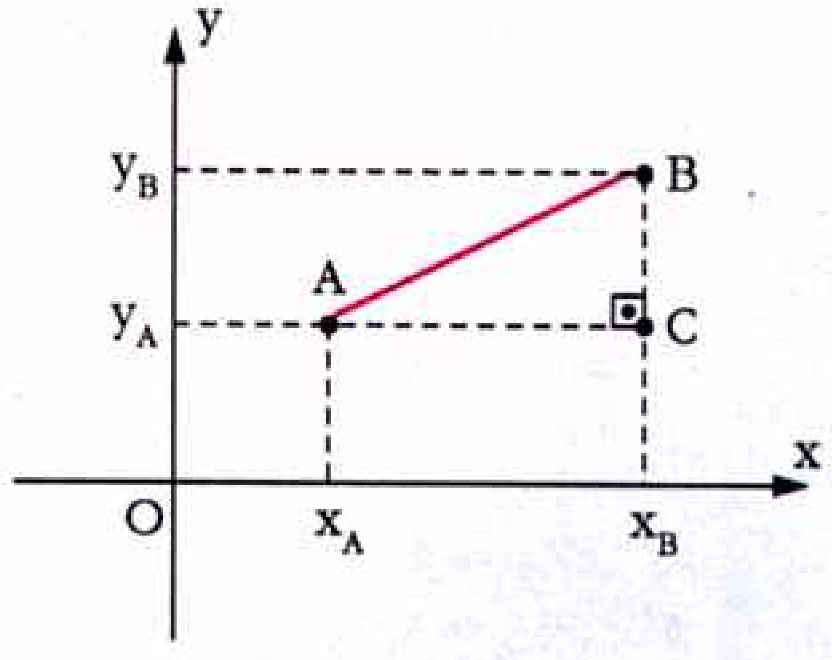
3º caso

O segmento AB não é paralelo a nenhum eixo. A distância d_{AB} depende das diferenças entre abscissas e ordenadas, de tal forma que, ao aplicarmos o teorema de Pitágoras no ΔABC, temos:

$$d_{AB}^2 = d_{AC}^2 + d_{BC}^2$$

$$d_{AB}^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

$$\boxed{d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$$



Exercícios

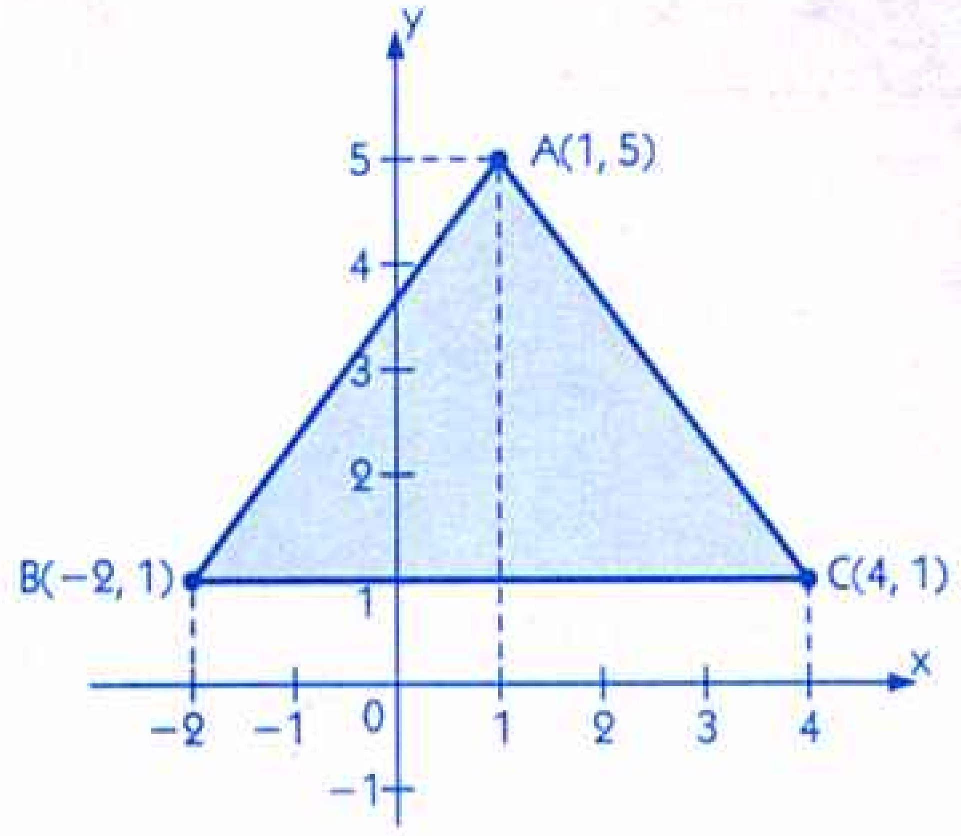
Resolvidos

1 Determinar a distância entre os pontos A(8, 3) e B(−4, 8).

$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \Rightarrow d_{AB} = \sqrt{(-4 - 8)^2 + (8 - 3)^2}$$

$$d_{AB} = \sqrt{(-12)^2 + 5^2} \Rightarrow d_{AB} = \sqrt{169} \Rightarrow d_{AB} = 13$$

2 Determinar o perímetro do triângulo cujos vértices *A*, *B* e *C* têm as seguintes coordenadas: A(1, 5), B(−2, 1) e C(4, 1).



Cálculo da distância d_{AB}:

$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$d_{AB} = \sqrt{(-2 - 1)^2 + (1 - 5)^2}$$

$$d_{AB} = \sqrt{25} \Rightarrow d_{AB} = 5$$

Cálculo da distância d_{BC}:

$$d_{BC} = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$$

$$d_{BC} = \sqrt{(4 - (-2))^2 + (1 - 1)^2}$$

$$d_{BC} = \sqrt{36} \Rightarrow d_{BC} = 6$$

Cálculo da distância d_{AC}:

$$d_{AC} = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$$

$$d_{AC} = \sqrt{(4 - 1)^2 + (1 - 5)^2}$$

$$d_{AC} = \sqrt{25} \Rightarrow d_{AC} = 5$$

O perímetro do ΔABC é determinado por:

Perímetro = $d_{AB} + d_{BC} + d_{AC}$

Perímetro = 5 + 6 + 5

Perímetro = 16 unidades de medida

3 Sabendo que o ponto *P* pertence ao eixo das abscissas (Ox) e está eqüidistante dos pontos A(4, 2) e B(8, −2), determinar suas coordenadas.

$P \in Ox$, logo, suas coordenadas são P(x, O).

Estando eqüidistante de *A* e *B*, temos:

$d_{PA} = d_{PB}$ ou $d_{PA}^2 = d_{PB}^2$

$(4 - x)^2 + (2 - 0)^2 = (8 - x)^2 + (-2 - 0)^2$

$16 - 8x + x^2 + 2^2 = 64 - 16x + x^2 + (-2)^2$

$8x = 48 \Rightarrow x = 6$

Portanto, P(6, 0).

Propostos

1266 Determine a distância entre os seguintes pares de pontos:

a) A(0, −2) e B(−6, −10)
b) C(−3, −1) e D(9, 4)
c) E(−3, 7) e F(5, 1)
d) G(−2, 5) e H(4, −3)

1267 Obtenha o valor de *m* sabendo que a distância entre os pares de pontos seguintes é *d*.

a) A(6, m), B(1, −2) e d = 13
b) C(1, −2), D(m, −2) e d = 5

1268 Calcule o perímetro do triângulo, cujos vértices são:

a) A(6, 8), B(1, −4) e C(6, −4)
b) D(0, 0), E(6, 8) e I(8, 6)

1269 Determine as coordenadas do ponto *P*, sabendo que ele pertence ao eixo das abscissas e é eqüidistante aos pontos A(2, 3) e B(−2, 0).

1270 Classifique quanto aos lados, o triângulo formado pelos vértices A(8, 2), B(4, 2) e C(8, −2).

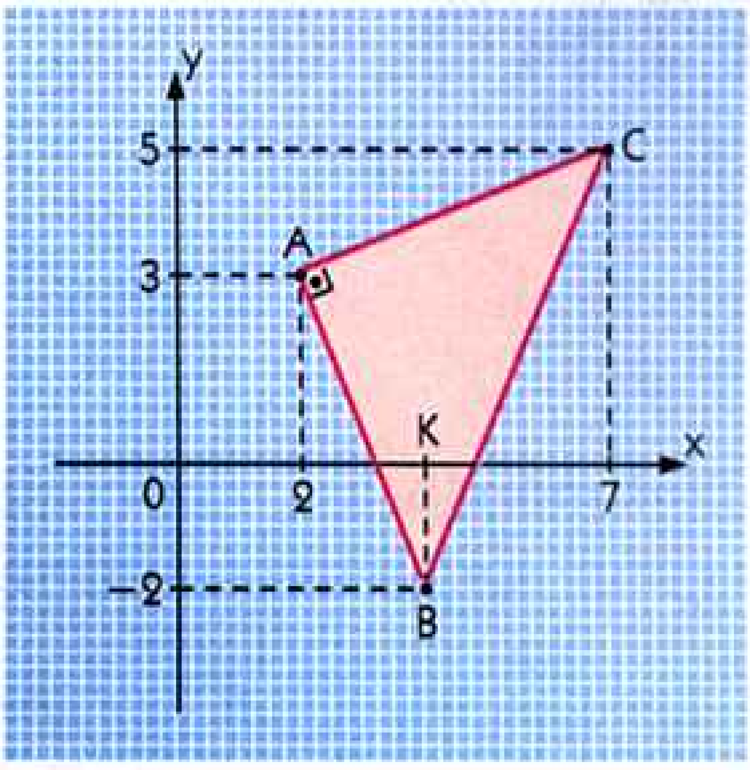
1271 (FEEQ-CE) A distância entre os pontos A(cos a, sen a) e B(sen a, −cos a) é:

a) 1 b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt{3}$ d) 2

1272 (Fuvest-SP) O ponto do eixo das abscissas, eqüidistante aos pontos P(−2, 2) e Q(2, 6) é:

a) A(2, 0)
b) B(5, 0)
c) C(3, 0)
d) D(0, 2)
e) E(4, 0)

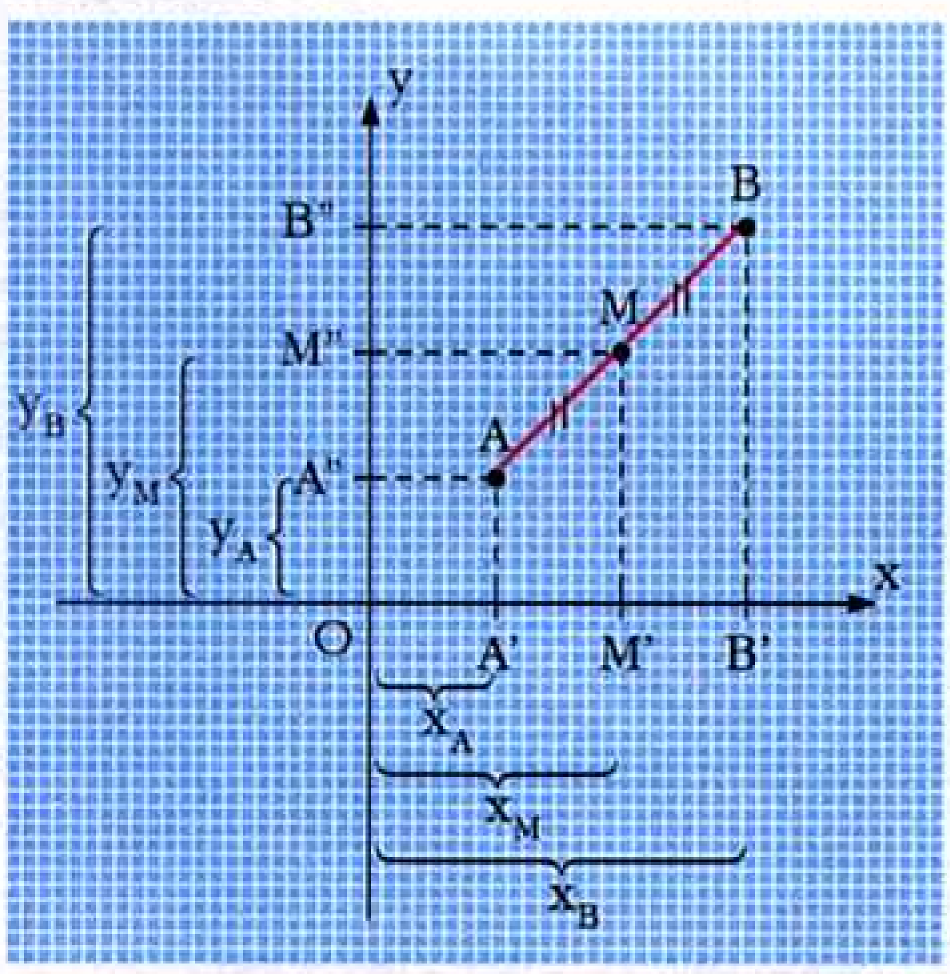
1273 (FGV-SP) Sabendo que o triângulo ABC da figura é retângulo em *A*, calcule o valor de *k*.



1274 Obtenha o valor de *m* para que o triângulo ABC seja retângulo em *B*. Considere: A(m, −4), B(−2, 0) e C(7, 1).

Ponto médio de um segmento

Observe que o ponto *M* divide $\overline{AB}$ em dois segmentos congruentes: $\overline{AM}$ e $\overline{MB}$. As projeções de *A*, *M* e *B* nos eixos Ox e Oy formam segmentos que mantêm as mesmas relações.



$\overline{A'M'} = \overline{M'B'}$ e $\overline{A''M''} = \overline{M''B''}$

Determinando a abscissa x_M do ponto médio *M*, temos:

$\overline{A'M'} = \overline{M'B'}$

$x_M - x_A = x_B - x_M$

$x_M + x_M = x_A + x_B$

$2x_M = x_A + x_B$

$$\boxed{x_M = \frac{x_A + x_B}{2}}$$

Da mesma forma, obtemos a ordenada y_M do ponto médio *M*, a partir de $\overline{A''M''} = \overline{M''B''}$.

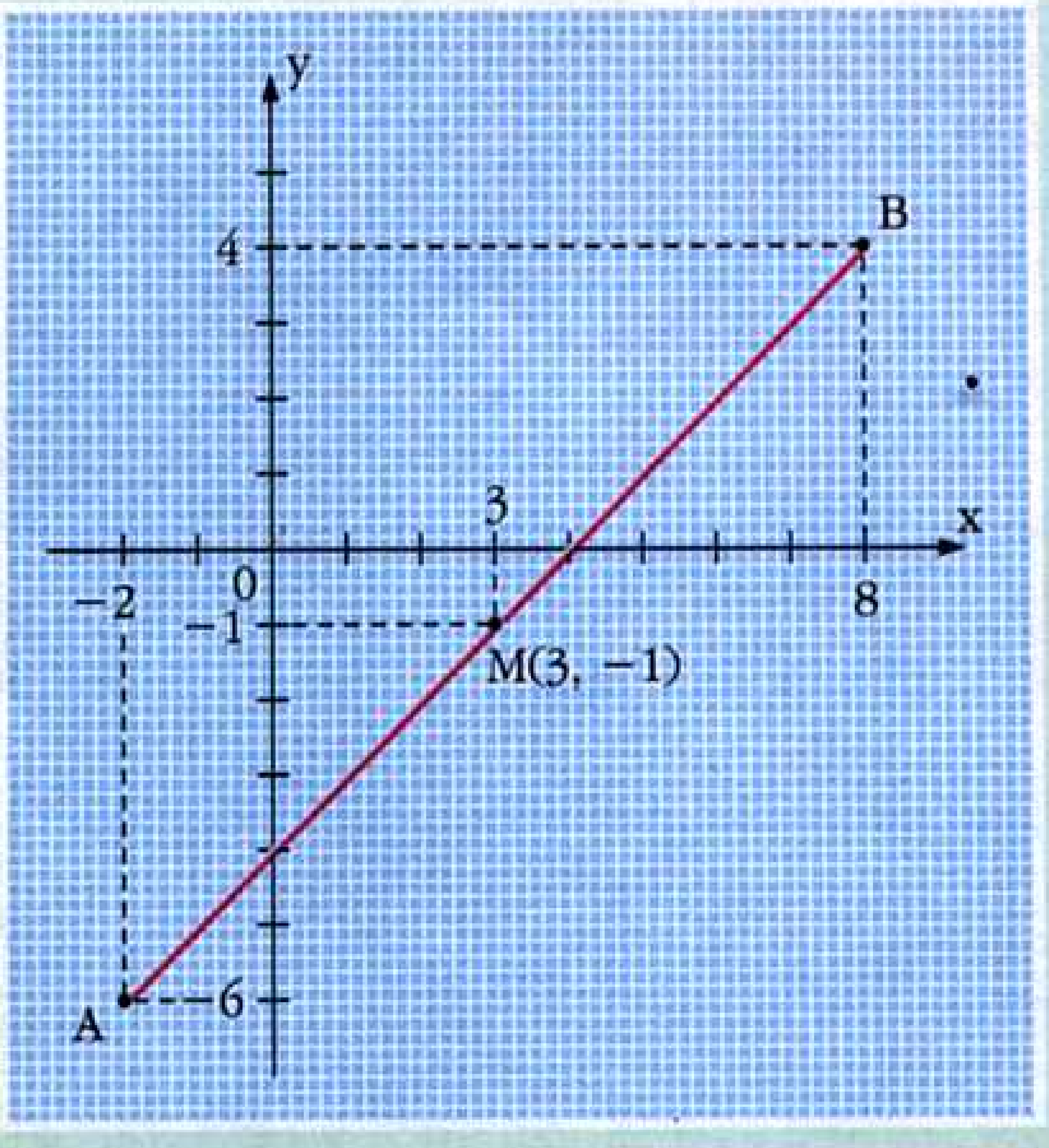
$$\boxed{y_M = \frac{y_A + y_B}{2}}$$

Resumindo, as coordenadas do ponto médio *M* de um segmento AB são dadas pelas semi-somas das coordenadas de *A* e de *B*.

$$\boxed{M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)}$$

Exemplo:

As coordenadas do ponto médio *M* do segmento AB de extremidades A(−2, −6) e B(8, 4) são:



$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

$$x_M = \frac{-2 + 8}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

$$y_M = \frac{-6 + 4}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Então, M(3, −1)

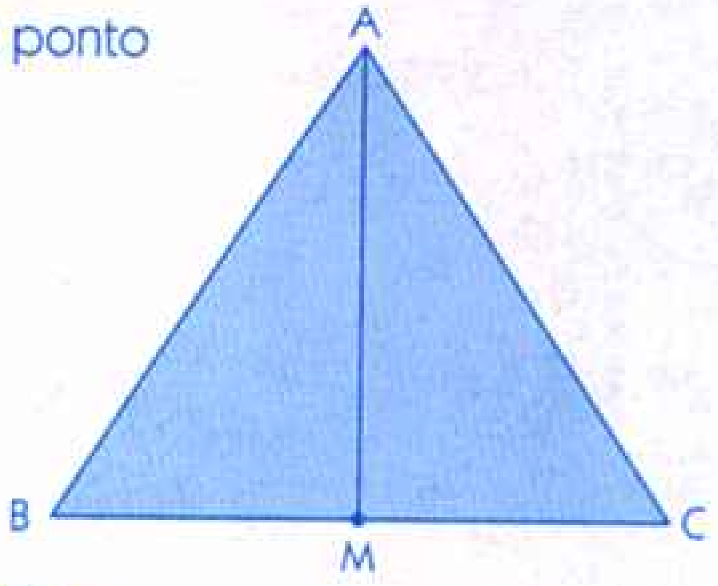
Exercícios

Resolvidos

1 Sabendo-se que os vértices de um triângulo ABC são A(2, −3), B(−2, 1) e C(5, 3), determinar a medida da mediana $\overline{AM}$.

A mediana $\overline{AM}$ é o segmento com extremos no vértice *A* e no ponto médio *M* do lado $\overline{BC}$.

Calculando as coordenadas de *M*, temos:



$$\left.\begin{array}{l} x_M = \dfrac{x_B + x_C}{2} = \dfrac{-2+5}{2} = \dfrac{3}{2} \\ y_M = \dfrac{y_B + y_C}{2} = \dfrac{1+3}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 \end{array}\right\} M\left(\dfrac{3}{2}, 2\right)$$

A medida de $\overline{AM}$ é dada pela distância entre os pontos *A* e *M*. Então:

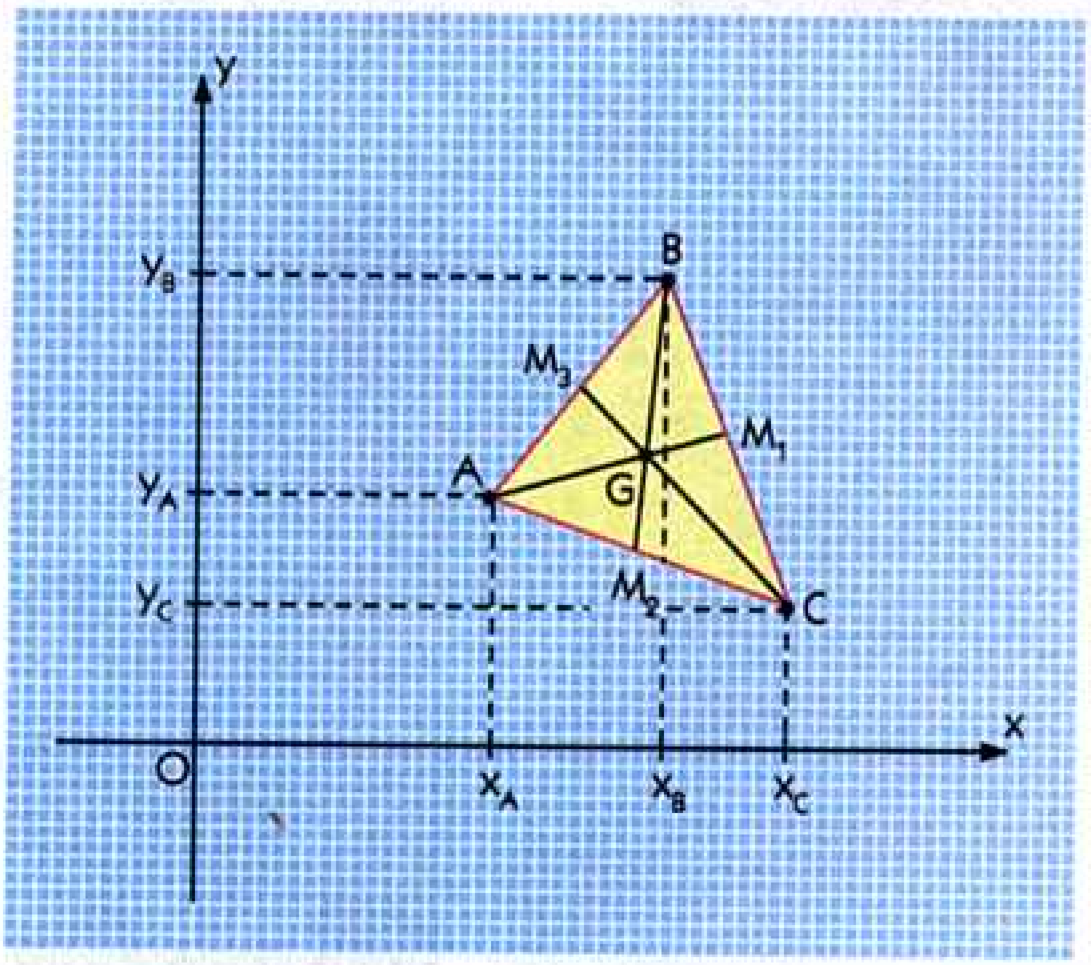
$$d_{AM} = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2}$$

$$d_{AM} = \sqrt{\left(\frac{3}{2} - 2\right)^2 + (2 - (-3))^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 25} = \sqrt{\frac{101}{4}}$$

$$d_{AM} = \frac{\sqrt{101}}{2}$$

2 No triângulo ABC representado a seguir, o ponto *G* é o seu baricentro. Determinar as coordenadas x_G e y_G.

▶ O baricentro de um triângulo é o ponto de intersecção das medianas. Esse ponto divide cada uma das medianas na razão de 2 para 1, a partir do vértice.



Considerando que o baricentro divide a mediana $\overline{AM_1}$ na razão de 2 para 1, temos:

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{GM_1}} = \frac{2}{1} \text{ ou } \overline{AG} = 2 \cdot \overline{GM_1}$$

Então: $x_G - x_A = 2(x_{M_1} - x_G)$

$x_G - x_A = 2x_{M_1} - 2x_G$

$x_G + 2x_G = x_A + 2x_{M_1}$

M_1 é o ponto médio do lado $\overleftrightarrow{BC}$, portanto, $x_{M_1} = \frac{x_B + x_C}{2}$. Substituindo esse valor na expressão acima, temos:

$$3x_G = x_A + \cancel{2} \cdot \frac{x_B + x_C}{\cancel{2}}$$

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$$

De maneira análoga podemos determinar y_G a partir de $\frac{\overline{AG}}{\overline{GM_1}} = \frac{2}{1}$ e aplicando $y_{M_1} = \frac{y_B + y_C}{2}$.

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

3 Determinar as coordenadas do baricentro de um triângulo ABC, considerando A(7, −4), B(−1, 8) e C(3, −10).

No exercício anterior deduzimos que:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \text{ então:}$$

$$x_G = \frac{7 + (-1) + 3}{3}$$

$$x_G = 3$$

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

$$y_G = \frac{-4 + 8 - 10}{3}$$

$$y_G = -2$$

Concluindo, G = (3, −2).

Propostos

1275 Determine as coordenadas do ponto médio do segmento AB, conhecendo-se:

a) A(−1, 2) e B(−2, 0)
b) A(−3, 3) e B(4, 3)
c) A(4, 2) e B(2, 4)
d) A(3, 6) e B(−5, −6)
e) A(3, −2) e B(0, 1)
f) A(−2, 5) e B(−8, 7)

1276 Conhecendo-se os vértices do triângulo ABC, determine a medida da mediana $\overleftrightarrow{AM}$, nos casos:

a) A(−1, 2), B(−2, 0) e C(−1, −3)
b) A(8, 3), B(4, 7) e C(2, 1)

1277 (UFES) As coordenadas do ponto médio de um segmento AB são (−1, 2). Sabendo-se que as coordenadas do ponto *A* são (2, 5), então as coordenadas de *B* são:

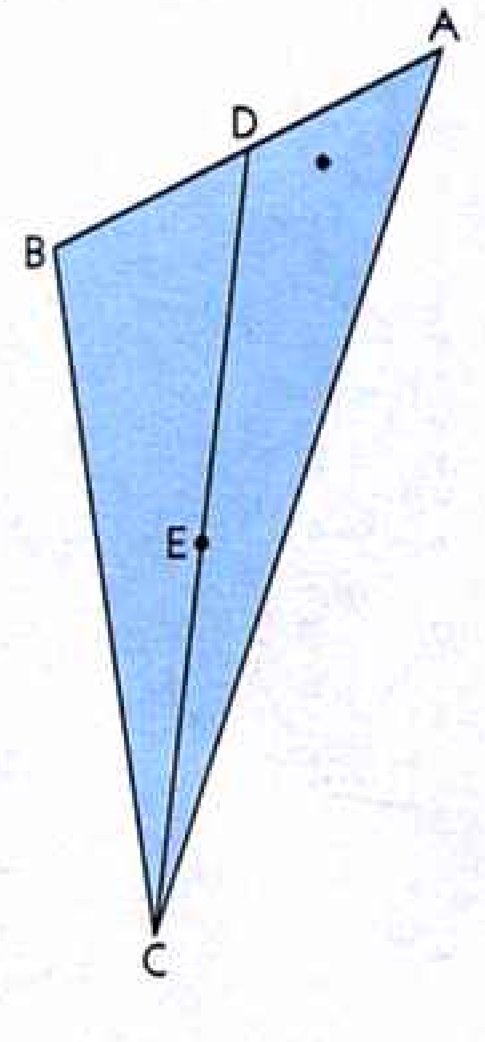
a) (4, 1)
b) (−4, 1)
c) (4, −1)
d) (−1, −4)
e) n.d.a.

1278 Determine as coordenadas do baricentro de um triângulo, cujos vértices são:

a) A(2, 4), B(6, 3) e C(7, −13)
b) A(1, −3), B(−4, 7) e C(−6, 8)
c) A(3, −10), B(−1, 8) e C(7, −4)

1279 (CTA-SP) É dado o triângulo ABC, no qual A(3, 5), B(−1, 3) e C(0, −4). Se *E* é o ponto médio da mediana $\overleftrightarrow{CD}$, então as coordenadas de *E* são:

a) $\left(0, \frac{1}{2}\right)$
b) $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$
c) $\left(0, \frac{1}{2}\right)$
d) $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$
e) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$



1280 (UFES) As coordenadas dos pontos que dividem em três partes iguais o segmento de extremos $(-2, -1)$ e $(3, 2)$ são:

a) $(-1, 0)$ e $(-1, 1)$

b) $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ e $\left(-\frac{4}{3}, 1\right)$

c) $(-1, 0)$ e $(1, 1)$

d) $\left(-\frac{3}{3}, 0\right)$ e $\left(\frac{4}{3}, 1\right)$

e) $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$ e $\left(\frac{4}{3}, 1\right)$

1281 (Cesgranrio-RJ) Os pontos *M*, *N*, *P* e *Q* do $\mathbb{R}^2$ são os vértices de um paralelogramo situado no primeiro quadrante. Se $M = (3, 5)$, $N = (1, 2)$ e $P = (5, 1)$ então o vértice *Q* é:

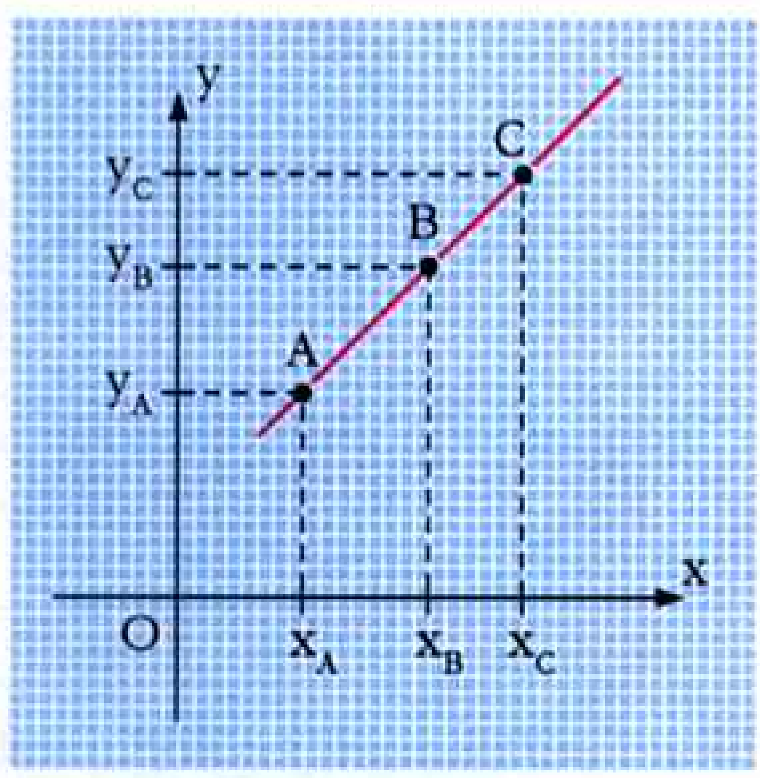
a) $(7, 4)$ c) $(9, 8)$ e) $(6, 3)$
b) $(6, 5)$ d) $(8, 6)$

1282 O ponto médio do segmento PQ é $M(-2, 4)$. Se $P(2, -2)$ as coordenadas de *Q* são:

a) $(0, 1)$ c) $(6, -6)$ e) $(-6, 10)$
b) $(-6, 6)$ d) $(-2, 6)$

Condição de alinhamento de três pontos

Três pontos $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ estarão alinhados, ou seja, pertencerão à mesma reta *r* se, e somente se, o determinante da matriz formada pelas coordenadas dos pontos for nulo.



$$D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$\underbrace{x_A, x_B, x_C}$ abscissas dos pontos

$\underbrace{y_A, y_B, y_C}$ ordenadas dos pontos

Desenvolvendo o determinante, teremos a seguinte expressão:

$$\begin{array}{ccccc} x_A & y_A & 1 & x_A & y_A \\ x_B & y_B & 1 & x_B & y_B \\ x_C & y_C & 1 & x_C & y_C \end{array}$$

$$-x_Cy_B \quad -x_Ay_C \quad -x_By_A \qquad\qquad x_Ay_B \quad x_Cy_A \quad x_By_C$$

$$\boxed{x_Ay_B + x_Cy_A + x_By_C - x_Cy_B - x_Ay_C - x_By_A = 0}$$

Exemplo:

Dados os pontos A(3, 1), B(0, 3) e C(−3, 5), vamos verificar se pertencem à mesma reta, calculando o valor do determinante $D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -3 & 5 & 1 \end{vmatrix}$.

$$D = \left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ -3 & 5 & 1 & -3 & 5 \end{array}\right| \Rightarrow D = 0$$

$$9 \quad -15 \quad 0 \qquad 9 \quad -3 \quad 0$$

O determinante é nulo, logo, os pontos *A*, *B* e *C* pertencem à mesma reta.

Exercícios

Resolvidos

1 Determinar a abscissa x_B do ponto *B*, de tal forma que A(4, 2), B(x_B, 4) e C(1, 5) pertencem à mesma reta.

Para que os três pontos estejam alinhados, basta impor a condição:

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ x_B & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow D = \left|\begin{array}{ccc|cc} 4 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ x_B & 4 & 1 & x_B & 4 \\ 1 & 5 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right| \Rightarrow 3x_B - 6 = 0 \Rightarrow x_B = \frac{6}{3} \Rightarrow x_B = 2$$

$$-4 \quad -20 \quad -2x_B \quad 16 \quad 2 \quad 5x_B$$

2 Determinar o valor de *m*, (m ∈ $\mathbb{R}$) de tal forma que A(−3, 7), B(m, m) e C(3, −2), sejam vértices de um triângulo.

Para que os pontos *A*, *B* e *C* sejam vértices de um triângulo, é necessário que não estejam alinhados. Portanto, o determinante deve ser diferente de zero.

$$\begin{vmatrix} -3 & 7 & 1 \\ m & m & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Desenvolvendo o determinante: $-15m + 15 \neq 0 \Rightarrow m \neq 1$

3 O ponto *A* pertence à intersecção do eixo das abscissas com a reta que contém os pontos B(1, 3) e C(−3, 5). Determinar as coordenadas do ponto *A*.

Se o ponto *A* pertence ao eixo das abscissas, suas coordenadas são A(x_A, 0). Como esse ponto pertence à reta BC, devemos ter.

$$D = \begin{vmatrix} x_A & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Daí, vem: $-2x_A + 14 = 0 \Rightarrow x_A = 7 \Rightarrow A(7, 0)$

Propostos

1283 Conhecendo os pontos A, B e C, verifique, em cada item, se pertencem à mesma reta.
a) $A(3, -2)$, $B(0, 1)$ e $C(-3, 4)$
b) $A(-3, -1)$, $B(0, 5)$ e $C(1, -2)$
c) $A(-2, 5)$, $B(-5, 6)$ e $C(-8, 7)$
d) $A(1, -1)$, $B(2, 1)$ e $C(3, 2)$

1284 Determine, em cada item, a abscissa x_B do ponto B, de tal forma que A, B e C pertençam à mesma reta.
a) $A(3, 7)$, $B(x_B, 3)$ e $C(5, -1)$
b) $A(3, 5)$, $B(x_B, 1)$ e $C(1, -3)$

1285 Sabendo-se que o ponto A pertence ao eixo das abscissas e à mesma reta que os pontos $B(6, -2)$ e $C(-4, 3)$, determine a abscissa x_A.

1286 Determine a ordenada y_B do ponto B, sabendo que esse ponto também pertence ao eixo das ordenadas e à reta que contém os pontos $A(3, 2)$ e $C(7, -2)$.

1287 Calcule a ordenada y_C do ponto C, de tal forma que $A(x_A, y_A)$, $B(-3, 2)$ e $C(-1, y_C)$ pertençam à mesma reta e o ponto A pertença à origem comum dos eixos.

1288 Conhecendo-se os pontos $A(2, 0)$ e $B(0, -3)$, determine o ponto P em que a reta AB intercepta a bissetriz dos quadrantes ímpares.

1289 Determine o valor de k, ($k \in \mathbb{R}$), de tal forma que $A(8, -2)$, $B(2, 0)$ e $C(-4, k)$ sejam vértices de um triângulo.

1290 (UFPb) Se os pontos $(1, 0)$, $(0, 1)$ e (m, n) do plano xOy estão sobre uma mesma reta, então:
a) $\frac{m}{n} = 1$
b) $m + n = 1$
c) $m - n = 1$
d) $m = 2 + n$
e) $m + n = 2$

2. Reta

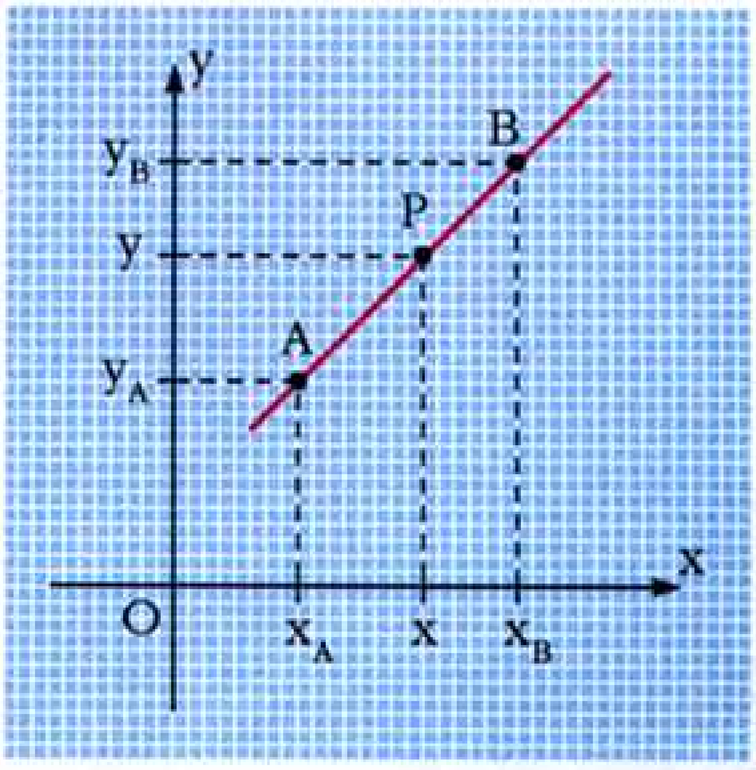
Equação geral da reta

Para chegarmos à equação geral da reta, vamos utilizar o conceito de alinhamento de três pontos, já desenvolvido anteriormente. Vejamos:

A equação geral da reta r é obtida partindo-se de uma reta que contém dois pontos distintos, $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, com coordenadas conhecidas e um terceiro ponto $P(x, y)$ genérico.

Igualamos o determinante da matriz formada pelas coordenadas dos pontos A, B e P.

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$$



Observe que se os pontos A, B e P pertencem à reta r, então o determinante deve ser nulo.

Fazendo o cálculo do determinante, temos:

$$\begin{array}{ccccc} x & y & 1 & x & y \\ x_A & y_A & 1 & x_A & y_A \\ x_B & y_B & 1 & x_B & y_B \end{array}$$

$$-x_By_A - xy_B - x_Ay \quad xy_A \quad yx_B \quad x_Ay_B$$

$$xy_A + yx_B + x_Ay_B - x_By_A - x_Ay - xy_B = 0$$

$$\underbrace{(y_A - y_B)}_{a}x + \underbrace{(x_B - x_A)}_{b}y + \underbrace{(x_Ay_B - x_By_A)}_{c} = 0$$

$$\boxed{ax + by + c = 0}$$

Como *A e B* são distintos, temos:

$y_A \neq y_B \Rightarrow y_A - y_B \neq 0 \Rightarrow a \neq 0$ ou $x_B \neq x_A \Rightarrow x_B - x_A \neq 0 \Rightarrow b \neq 0$

Toda reta *r* do plano cartesiano pode ser representada por uma equação do tipo $ax + by + c = 0$, onde:

x e *y* são coordenadas de um ponto genérico pertencente a *r* e *a*, *b* e *c* são números reais, sendo *a* e *b* não-nulos ao mesmo tempo.

Exemplo:
A equação geral da reta que contém os pontos A(1, 2) e B(2, 0) é obtida igualando a zero o determinante da matriz formada pelas coordenadas dos pontos *A* e *B*.

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$2x + 2y + 0 - 4 - 0x - y = 0$$
$$2x + y - 4 = 0$$

Podemos verificar a equação obtida substituindo as coordenadas:
de $A \rightarrow 2 \cdot 1 + 2 - 4 = 0$ (verdade); de $B \rightarrow 2 \cdot 2 + 0 - 4 = 0$ (verdade).
A equação da reta que passa por *A* e *B* é $2x + y - 4 = 0$.

Exercícios

Resolvidos

1 Encontrar o valor de *m* para que o ponto P(m, 4) pertença à reta *r*, cuja equação é $2x + y - 3 = 0$.

Para que um ponto pertença a uma reta, as suas coordenadas devem satisfazer à equação dessa reta.

Ponto P(m, 4)

reta (r) $2x + y - 3 = 0$

$$2 \cdot m + 4 - 3 = 0 \Rightarrow 2m = -1 \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$$

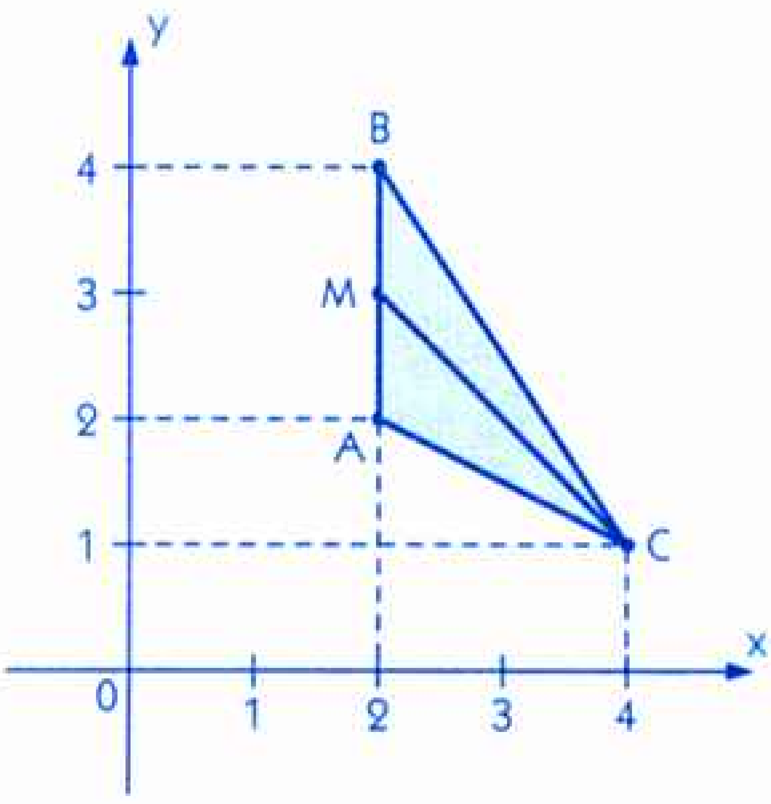
2 Considerando um triângulo com vértices A(2, 2), B(2, 4) e C(4, 1), determinar a equação geral da reta que contém o ponto médio do lado $\overleftrightarrow{AB}$ e o vértice *C*.

Inicialmente determinamos o ponto médio *M* do lado $\overleftrightarrow{AB}$.

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2 + 2}{2} = 2$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2 + 4}{2} = 3$$

M(2, 3)



Impondo a condição de alinhamento dos pontos, temos:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$2x + 2y - 10 = 0$

Portanto, a equação geral da reta que contém os pontos *M* e *C* é $2x + 2y - 10 = 0$ ou $x + y - 5 = 0$.

3 As retas (r) $x - 2y - 1 = 0$ e (s) $2x + 2y - 8 = 0$ se encontram no ponto P(x, y). Determinar as coordenadas de *P*.

O ponto *P* pertence às retas *r* e *s*. Logo, deve satisfazer às equações de ambas as retas. Para determiná-lo, basta resolver o sistema formado por essas equações.

$$\begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ 2x + 2y - 8 = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases}$$

$$3x \quad = 9 \quad \Rightarrow \quad x = 3$$

Portanto: $x - 2y = 1$

$3 - 2y = 1$

$-2y = 1 - 3 \quad \Rightarrow \quad y = 1$

As coordenadas do ponto comum a *r* e *s* são: P(3, 1).

Propostos

1291 Determine a equação geral da reta que contém os pontos:

a) A(1, 1) e B(0, 2)

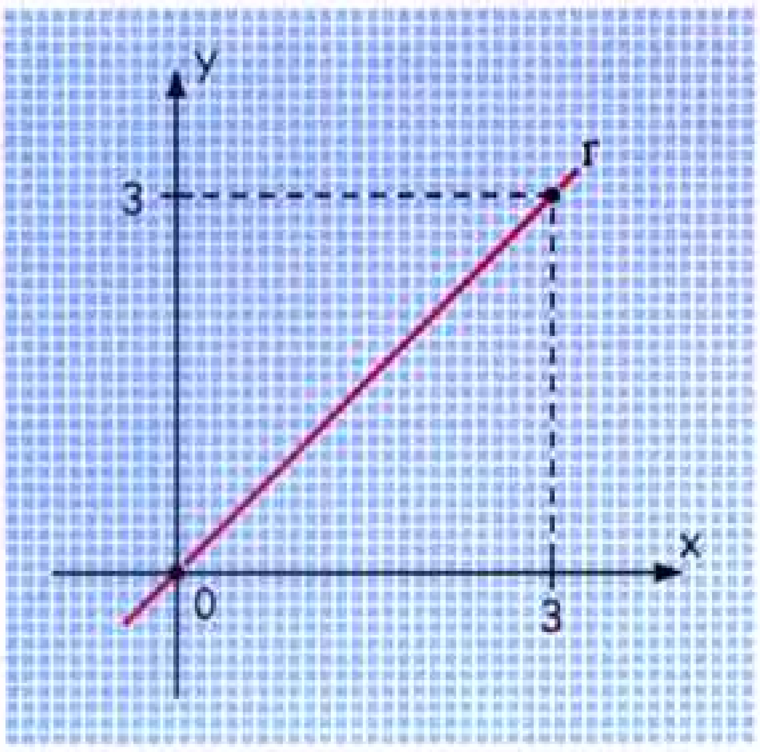
b) A(1, −2) e B(2, −5)

c) A(2, 4) e B(0, 3)

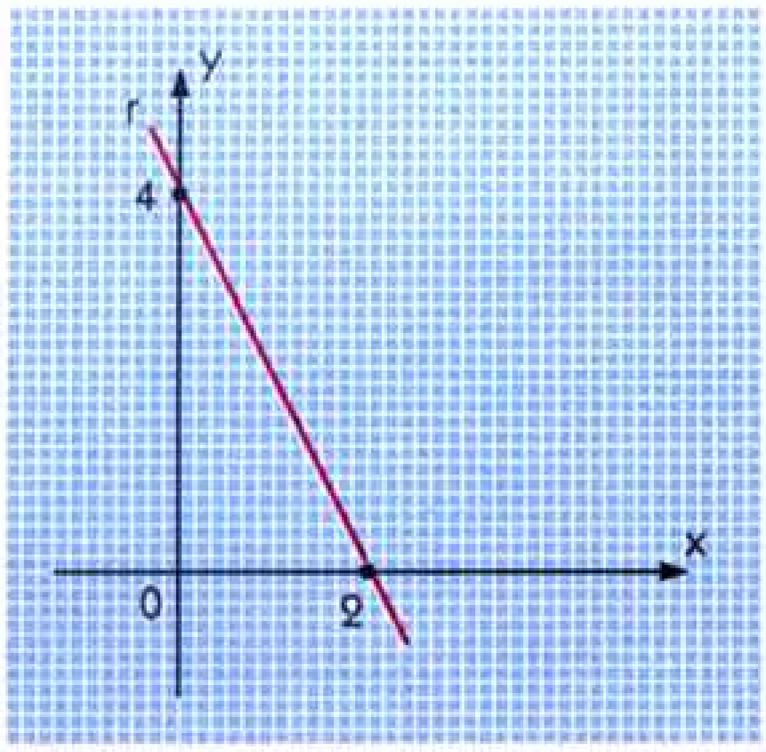
d) A(−2, 5) e B(4, −3)

1292 Escreva a equação da reta *r*, conhecendo a sua representação gráfica, nos seguintes casos:

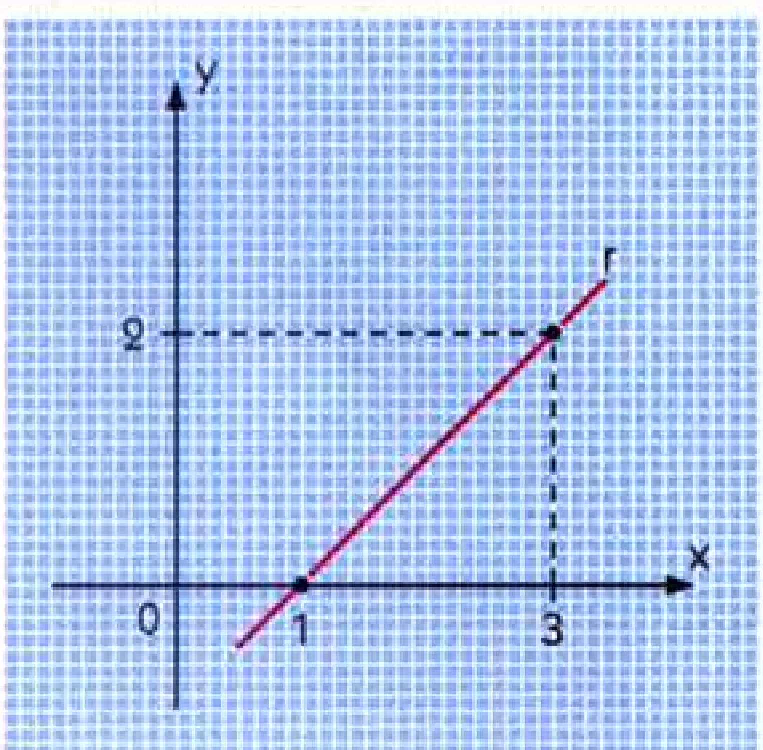
a)



b)



c)



1293 Verifique se P(2, 1) pertence à reta *r*, cuja equação é $x + 3y - 5 = 0$.

1294 Verifique se o ponto *P*, localizado na origem dos eixos cartesianos, pertence à reta *s*, representada pela equação $3x + 2y - 1 = 0$.

1295 Qual o valor de *m* para que o ponto P(m, 2) pertença à reta *r* de equação $x + 2y - 5 = 0$?

1296 Qual o valor de *n* para que o ponto Q(3, n) pertença à reta *s*, cuja equação é $5x - y - 7 = 0$?

1297 As retas *r* representadas pela equação $-2x + y + 3 = 0$, e *s*, cuja equação é $x - y - 1 = 0$ se encontram no ponto P(x, y). Determine as coordenadas de *P*.

1298 Identifique as coordenadas de P(x, y) que é um ponto comum às retas (r) $3x + y - 10 = 0$ e (s) $x + 6y + 8 = 0$.

1299 (Mack-SP) A equação da reta que passa pelos pontos A(3, 1) e B(−2, 0) é:

a) $-5y + x - 2 = 0$

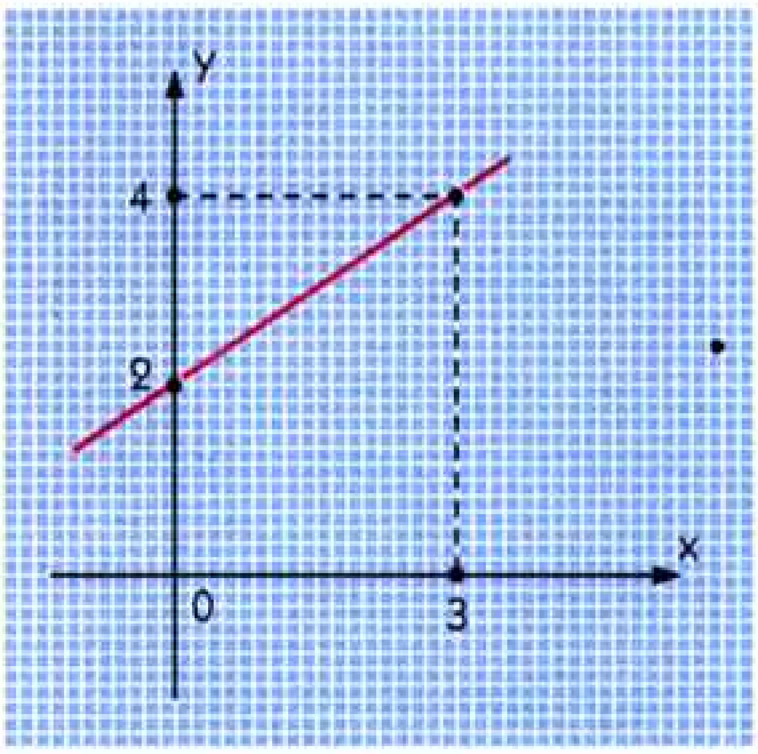
b) $5y - x - 2 = 0$

c) $-x - 5y + 2 = 0$

d) $-5y - x - 2 = 0$

e) não sei

1300 (UCS-RS) A figura contém a representação gráfica da reta:



a) $2x - 3y + 6 = 0$

b) $2x + 3y - 6 = 0$

c) $3x - 2y + 6 = 0$

d) $2x - 3y - 2 = 0$

e) $2x + 3y + 2 = 0$

1301 (UFES) O valor de k para que a equação $kx - y - 3k + 6 = 0$ represente a reta que passa pelo ponto (5, 0) é:

a) 3 b) −9 c) 9 d) −3 e) −6

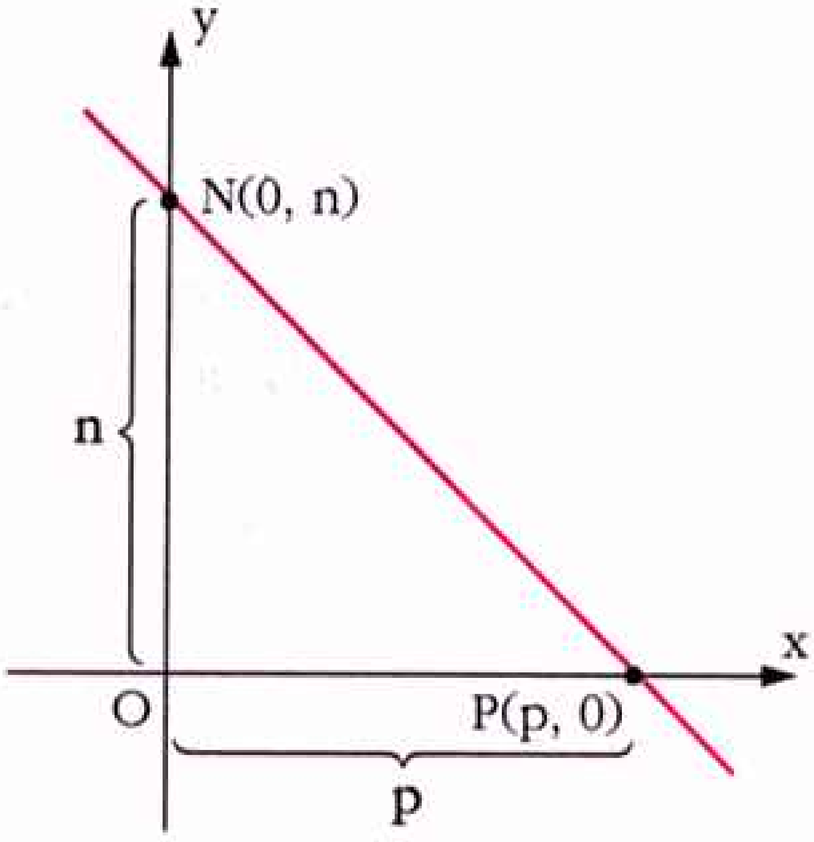
1302 (UFCE) Seja r a reta que passa pelos pontos (1, 1) e (2, 3). Então, r intercepta o eixo dos y no ponto:

a) $\left(0, -\frac{3}{2}\right)$ b) $\left(0, -\frac{2}{3}\right)$ c) (0, −1) d) (0, −2) e) n.d.a.

Equação segmentária da reta

A equação de uma reta r que intercepta os eixos nos pontos distintos da origem N(0, n) e P(p, 0), pode ser obtida da seguinte forma:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & n & 1 \\ p & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$



Fazendo o cálculo do determinante, temos:

$$\begin{array}{ccccc} x & y & 1 & x & y \\ 0 & n & 1 & 0 & n \\ p & 0 & 1 & p & 0 \end{array}$$

$-np \quad 0 \quad 0 \qquad nx \quad py \quad 0$

$$nx + py - np = 0$$

Ou, ainda, dividindo todos os termos por np:

$$\frac{nx}{np} + \frac{py}{np} - \frac{np}{np} = 0$$

$$\boxed{\frac{x}{p} + \frac{y}{n} = 1}$$

Sendo que p e n são as medidas algébricas dos segmentos OP e ON.

Se compararmos a equação geral da reta e a equação segmentária:

$$ax + by + c = 0$$

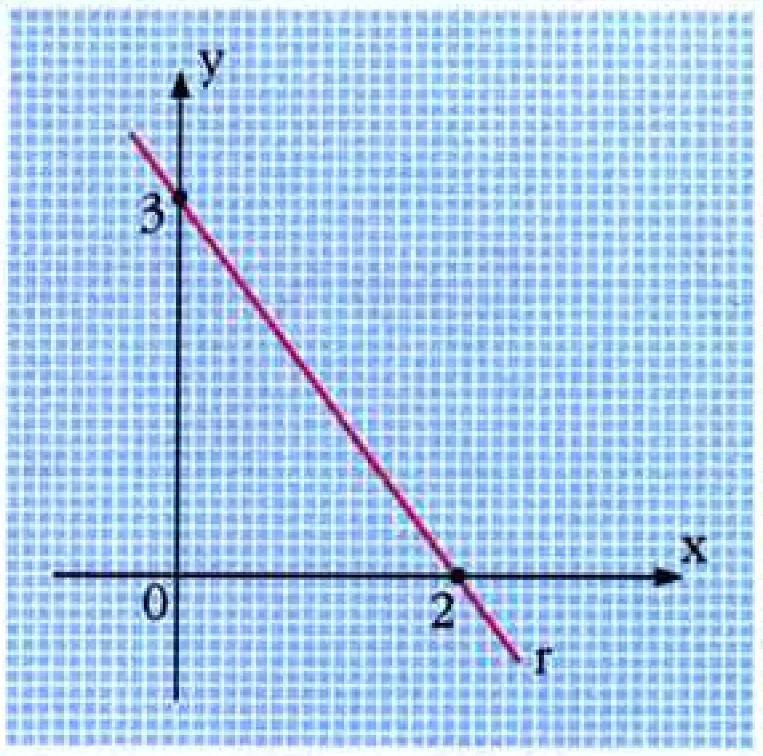
$$\frac{x}{p} + \frac{y}{n} = 1$$

concluímos $\begin{cases} p = -\dfrac{c}{a} \\ n = -\dfrac{c}{b} \end{cases}$

Exemplos:

a) Para obter a equação segmentária da reta *r*, representada graficamente, basta reconhecer p = 2 e n = 3 e substituir na fórmula da equação segmentária da reta.

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{n} = 1 \Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$$



b) Para determinar a equação segmentária da reta *r* que passa pelos pontos Q(0, 3) e P(5, 0), substituindo p = 5 e n = 3 na fórmula.

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{n} = 1 \Rightarrow \frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1$$

Exercícios

Resolvidos

1 Determinar a equação segmentária da reta *r*, conhecendo a sua equação geral (r) $3x - 4y + 12 = 0$.

A equação segmentária pode ser obtida da equação geral de uma reta, observando-se que:

$$\begin{cases} a = 3 & p = -\dfrac{c}{a} \quad e \quad n = -\dfrac{c}{b} \\ b = -4 & p = -\dfrac{12}{3} = -4 \quad e \quad n = \dfrac{-12}{-4} = 3 \\ c = 12 & \end{cases}$$

Substituindo *p* e *n* na equação $\frac{x}{p} + \frac{y}{n} = 1$, obtemos: $\frac{x}{-4} + \frac{y}{3} = 1$

2 Determinar a equação segmentária da reta que passa pelos pontos A(−4, −3) e B(2, 6).

Inicialmente obtemos a equação geral da reta.

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -4 & -3 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -9x + 6y - 18 = 0$$

A seguir, procedemos como no exercício 1 ou, então, fazemos:

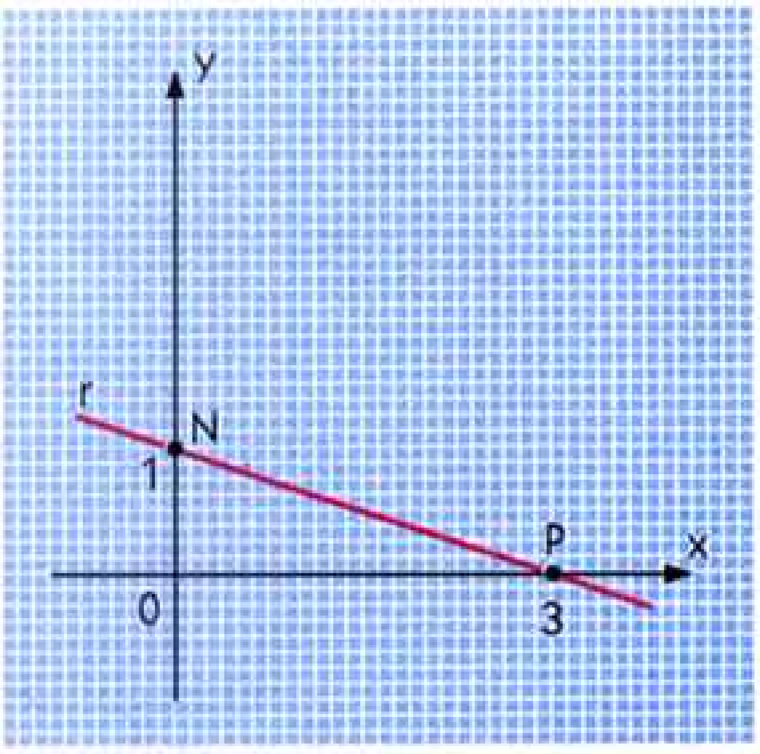
$$-9x + 6y - 18 = 0 \Rightarrow -9x + 6y = 18 \Rightarrow -\frac{9x}{18} + \frac{6y}{18} = \frac{18}{18}$$

Logo, $\frac{x}{-2} + \frac{y}{3} = 1$.

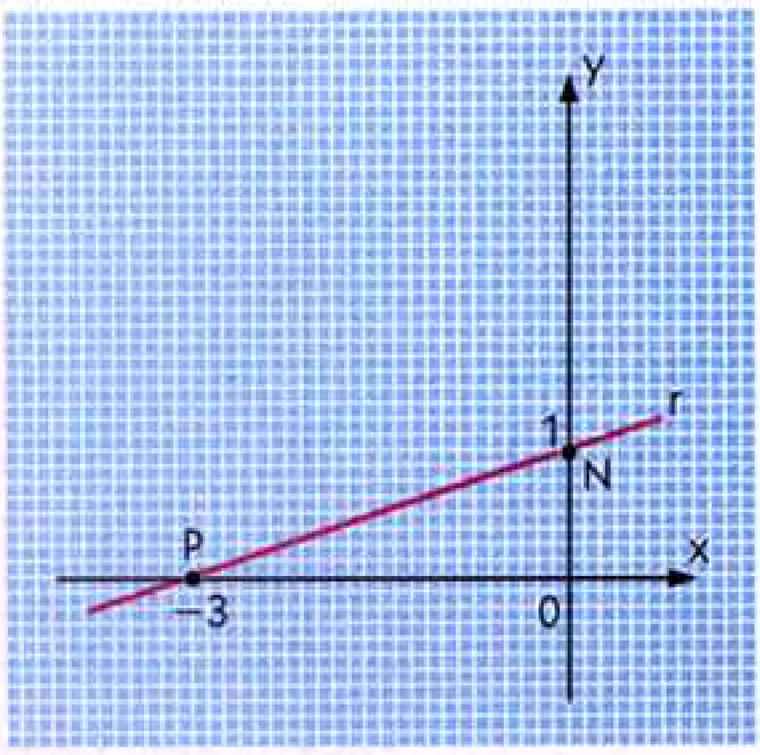
Propostos

1303 Obtenha a equação segmentária da reta *r*, representada graficamente em cada caso:

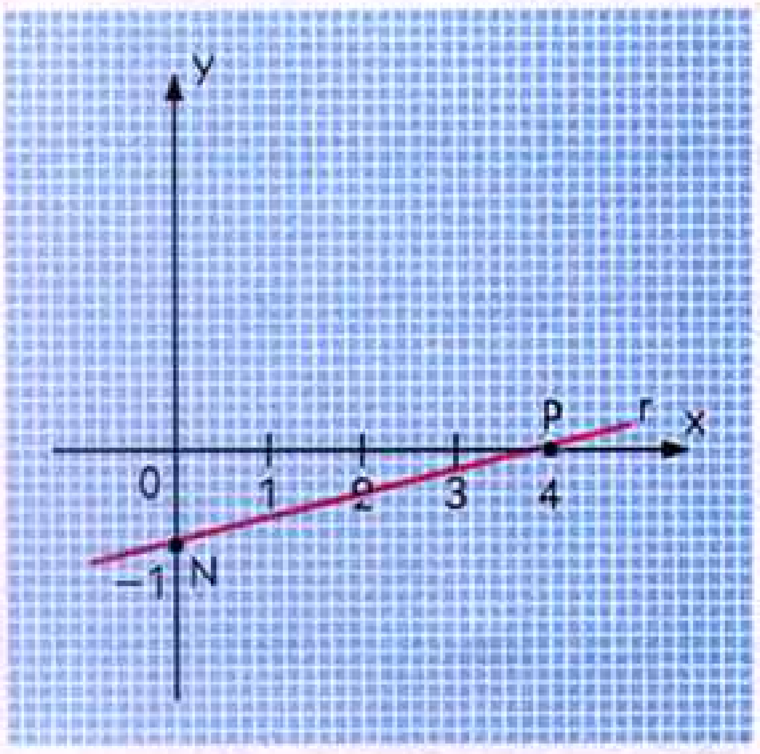
a)



b)



c)



1304 Escreva a equação segmentária da reta *r* em cada item, conhecendo-se as respectivas equações gerais:

a) (r) $x + y + 9 = 0$

b) (r) $3x + 2y - 5 = 0$

c) (r) $2x + 3y - 12 = 0$

1305 Em cada caso, determine a equação segmentária da reta *r* que passa pelos pontos *N* e *P*:

a) N(0, 2) e P(9, 0)

b) N(0, −5) e P(−3, 0)

c) N(3, 2) e P(−1, −6)

1306 (UFRGS) As retas *r* e *s* da figura interceptam-se no ponto de ordenada:

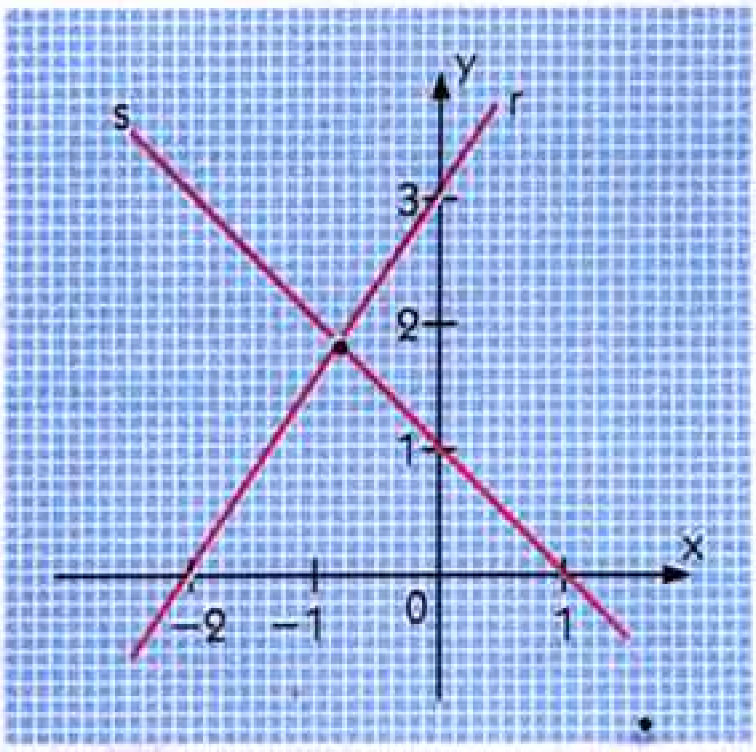
a) $\frac{3}{2}$

b) $\frac{5}{3}$

c) $\frac{7}{4}$

d) $\frac{9}{5}$

e) $\frac{11}{6}$



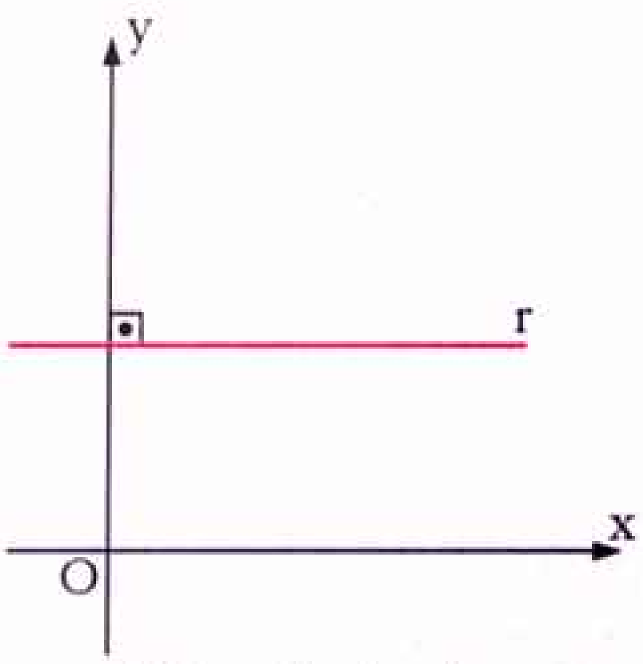
Coeficiente angular de uma reta

Num sistema cartesiano ortogonal, a reta *r*, não vertical, forma com Ox um ângulo de medida α. Essa reta *r* tem como coeficiente angular (ou declive) um número real *m* dado por tg α.

$$\boxed{m = \text{tg}\ \alpha}$$

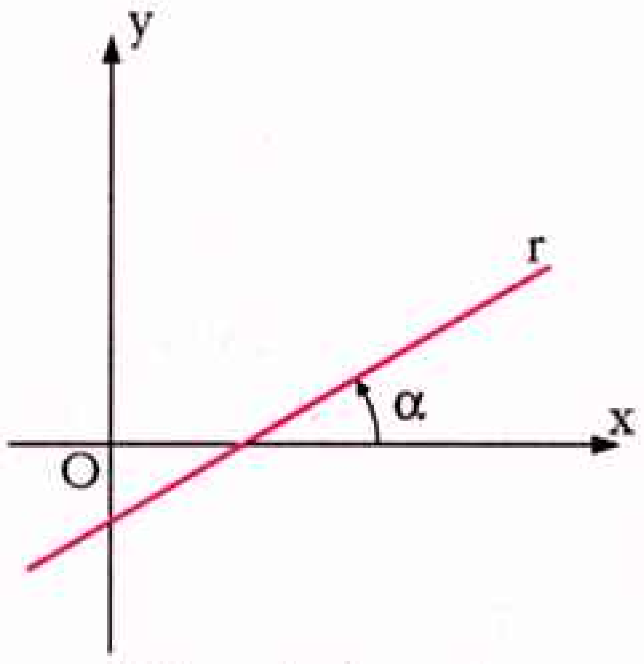
Observe as figuras abaixo. O ângulo referido, de medida α, é convexo e forma-se no sentido anti-horário. No caso em que *r* é paralela a Ox, consideraremos $\alpha = 0°$.

$\alpha = 0°$



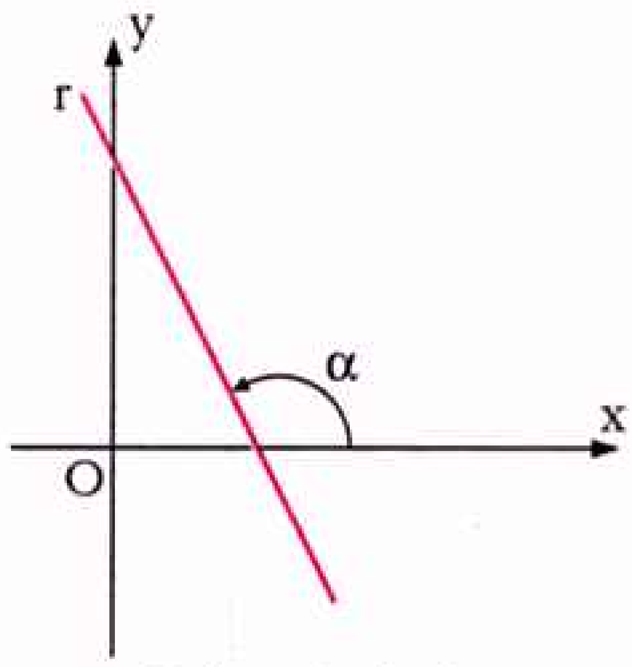
O ângulo é nulo, então *m* é zero.

$0° < \alpha < 90°$



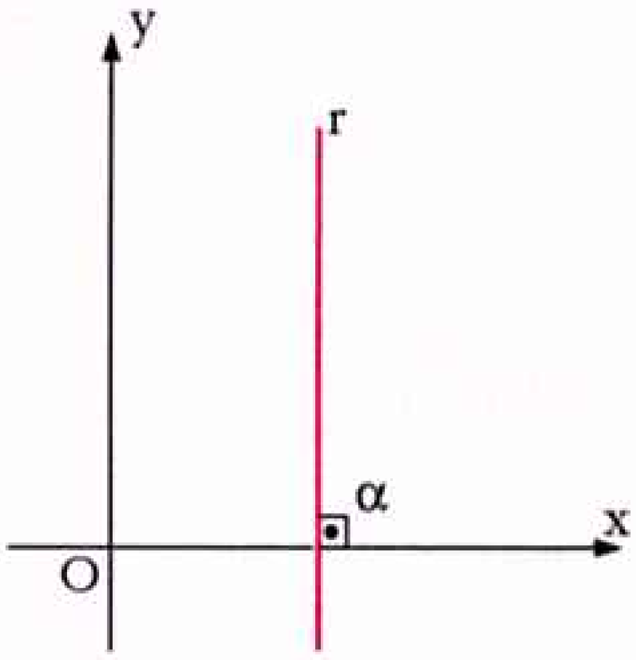
O ângulo é agudo, então *m* é positivo.

$90° < \alpha < 180°$



O ângulo é obtuso, então *m* é negativo.

Se $\alpha = 90°$, então *r* é uma reta vertical e, como não existe tg 90°, *r* não tem coeficiente angular, isto é, *m* não está definido para esse caso.



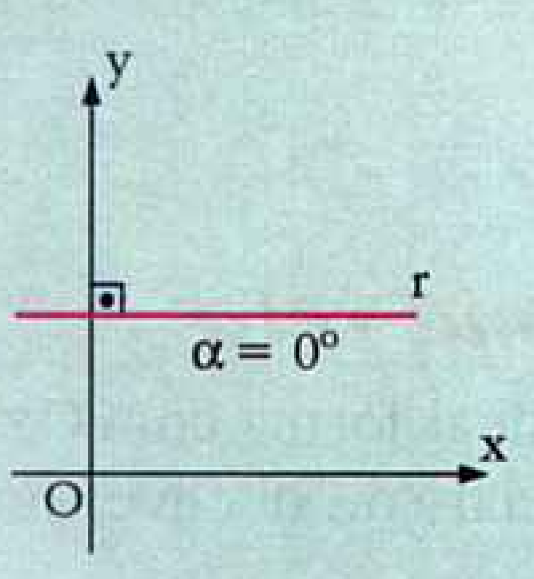
O ângulo é reto.

Existem três casos que o coeficiente angular de uma reta *r* pode ser calculado.

1º caso Quando conhecemos a direção da reta *r*, dada por α.
Basta calcular a tangente de α.

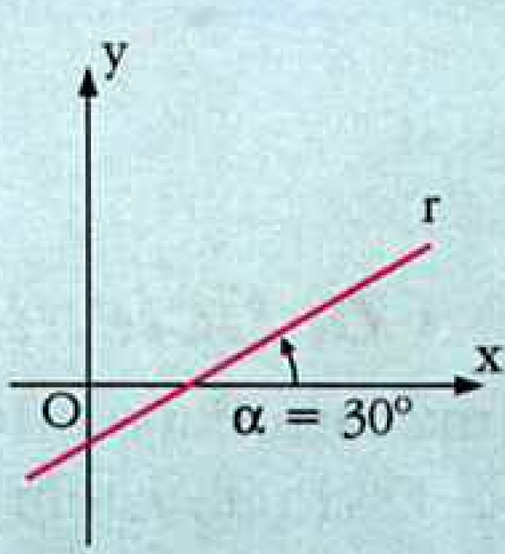
Exemplo:
O coeficiente angular de uma reta *r*, nos casos seguintes, é dado por:

a)



$$m = \text{tg}\,\alpha$$
$$m = \text{tg}\,0° \Rightarrow m = 0$$

b)



$$m = \text{tg}\,\alpha$$
$$m = \text{tg}\,30° \Rightarrow m = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

2º caso Quando conhecemos dois pontos distintos da reta *r*, $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$.

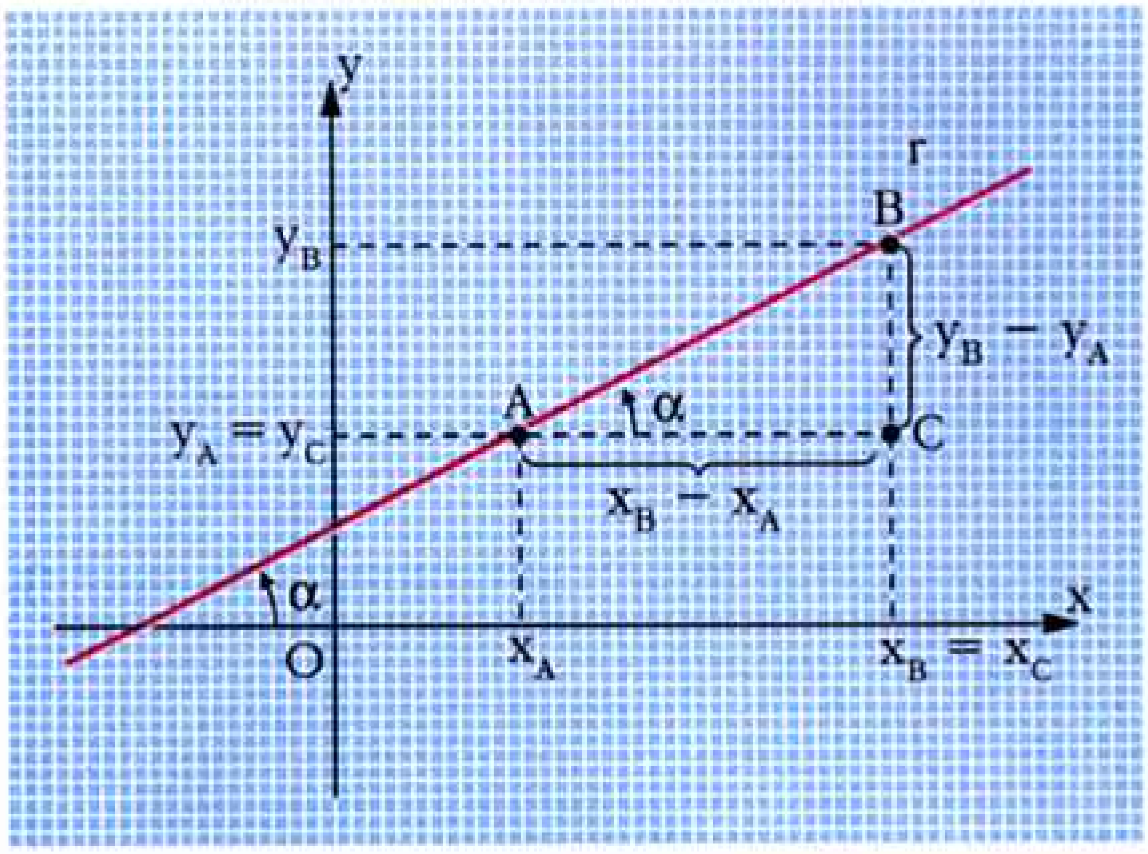
A reta *r* não perpendicular a Ox, tem o mesmo coeficiente angular de qualquer um de seus segmentos. Portanto, vamos examinar o segmento AB.

No triângulo formado pelos pontos *A*, *B* e *C*, a tg α é determinada por:

$$\boxed{m = \operatorname{tg}\alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}} \quad (x_B \neq x_A)$$

ou

$$\boxed{m = \operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$



Exemplo:

O coeficiente angular da reta que contém os pontos A(1, 3) e B(5, 7) é:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{7 - 3}{5 - 1} = \frac{4}{4} = 1 \Rightarrow m = 1$$

3º caso Quando conhecemos a equação geral da reta ax + by + c = 0.

Chegamos a essa equação utilizando a condição de alinhamento de três pontos:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\underbrace{(y_A - y_B)x}_{ax} + \underbrace{(x_B - x_A)y}_{by} + \underbrace{(x_A y_B - x_B y_A)}_{c} = 0$$

portanto, se $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_A - y_B}{x_B - x_A}$ e $a = y_A - y_B$; $b = x_B - x_A$

então, $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -\dfrac{(y_A - y_B)}{(x_B - x_A)} = -\dfrac{a}{b}$

Concluindo, $\boxed{m = -\dfrac{a}{b}}$

Exemplo:

O coeficiente angular da reta *s* de equação geral $4x - 6y - 5 = 0$ é:

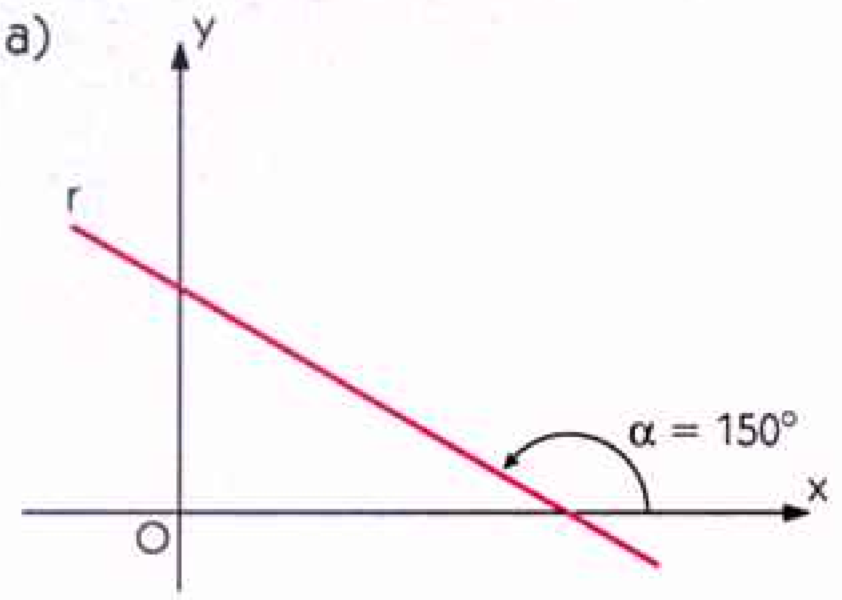
$$m = -\frac{a}{b} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3}, \text{ isto é, } m = \frac{2}{3}$$

Exercícios

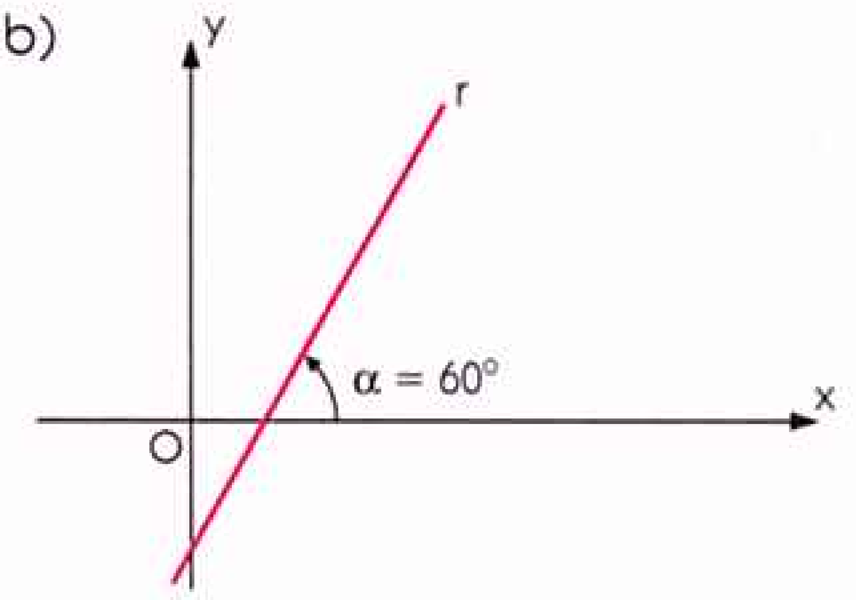
Resolvidos

1 Determinar o coeficiente angular da reta *r*, nos seguintes casos:

a)



b)



O valor de *m* é determinado pela tg α, portanto:

a) $m = \text{tg } \alpha$

$m = \text{tg } 150°$

$m = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $m = \text{tg } \alpha$

$m = \text{tg } 60°$

$m = \sqrt{3}$

2 Identificar o coeficiente angular de uma reta que contém os pontos A(1, −2) e B(−4, 1).

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1 - (-2)}{-4 - 1} = \frac{3}{-5} = -\frac{3}{5}$$

$$m = -\frac{3}{5}$$

3 Calcular o coeficiente angular da reta *r* que tem a equação geral (r) $3x - 4y + 3 = 0$.

Comparando a equação

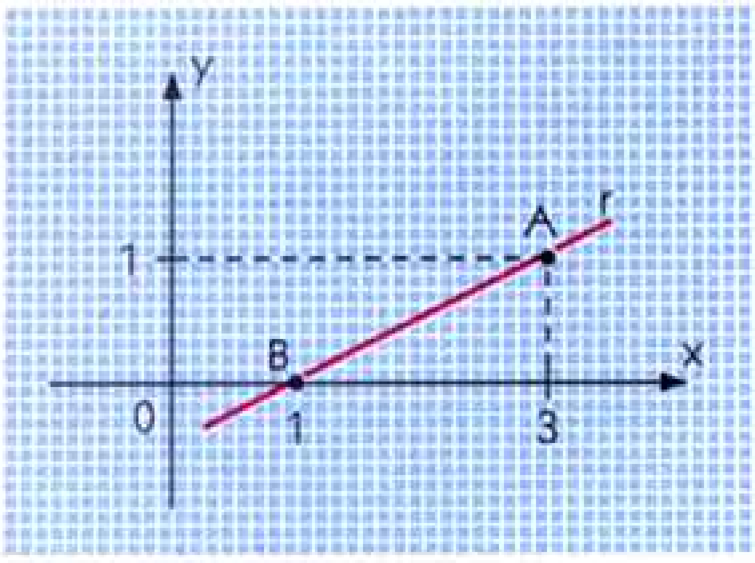
$$\begin{matrix} ax + by + c = 0 \\ 3x - 4y + 3 = 0 \end{matrix}, \text{ temos: } \begin{cases} a = 3 \\ b = -4 \end{cases}$$

Portanto:

$$m = -\frac{a}{b} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$$

$$m = \frac{3}{4}$$

4 A representação gráfica da reta *r* é dada abaixo. Identificar seu coeficiente angular.



Sendo A(3, 1) e B(1, 0)

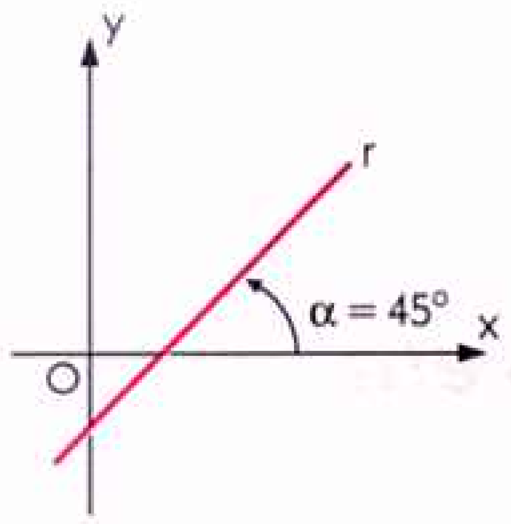
$$m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{0 - 1}{1 - 3} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

$$m = \frac{1}{2}$$

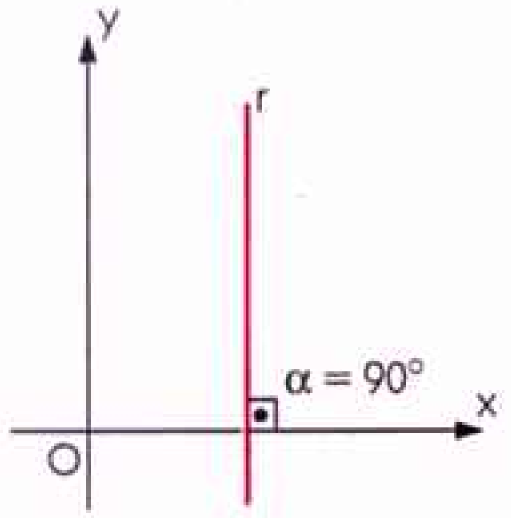
Propostos

1307 Determine o coeficiente angular da reta *r* nos casos a seguir:

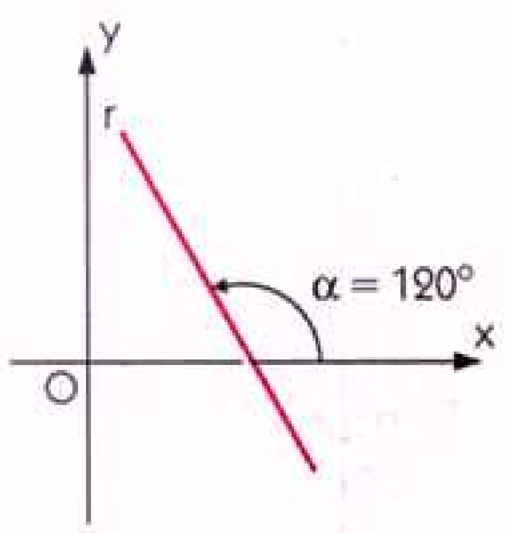
a)



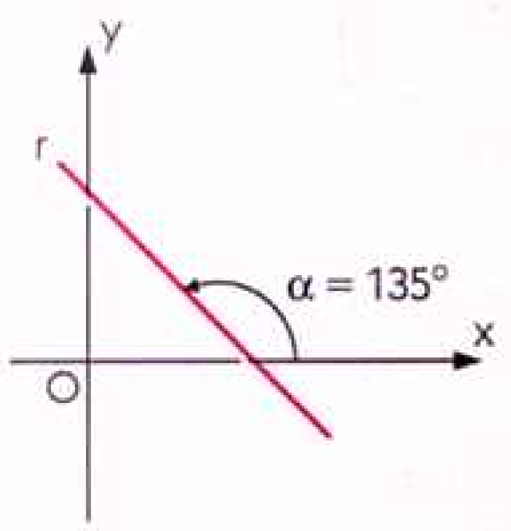
b)



c)



d)



1308 Determine o coeficiente angular da reta *r*, que contém os pontos *A* e *B*, nos casos:

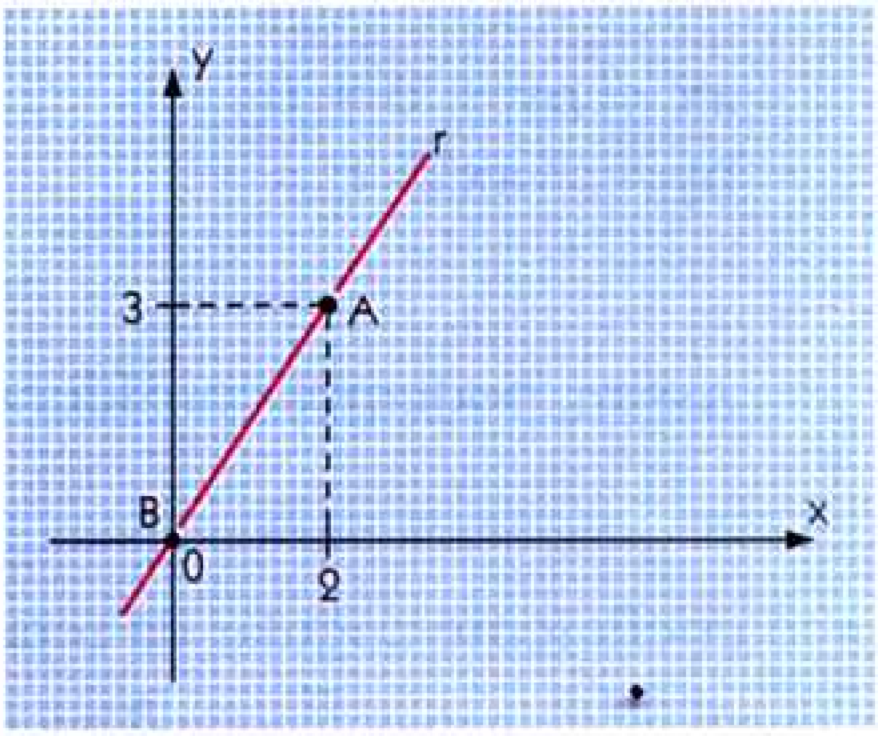
a) A(2, 2) e B(4, 3)
b) A(−1, −2) e B(2, 4)
c) A(−5, 4) e B(0, 9)
d) A(3, 2) e B(1, 4)

1309 Considerando a equação geral da reta, em cada caso, calcule o coeficiente angular da reta *r*:

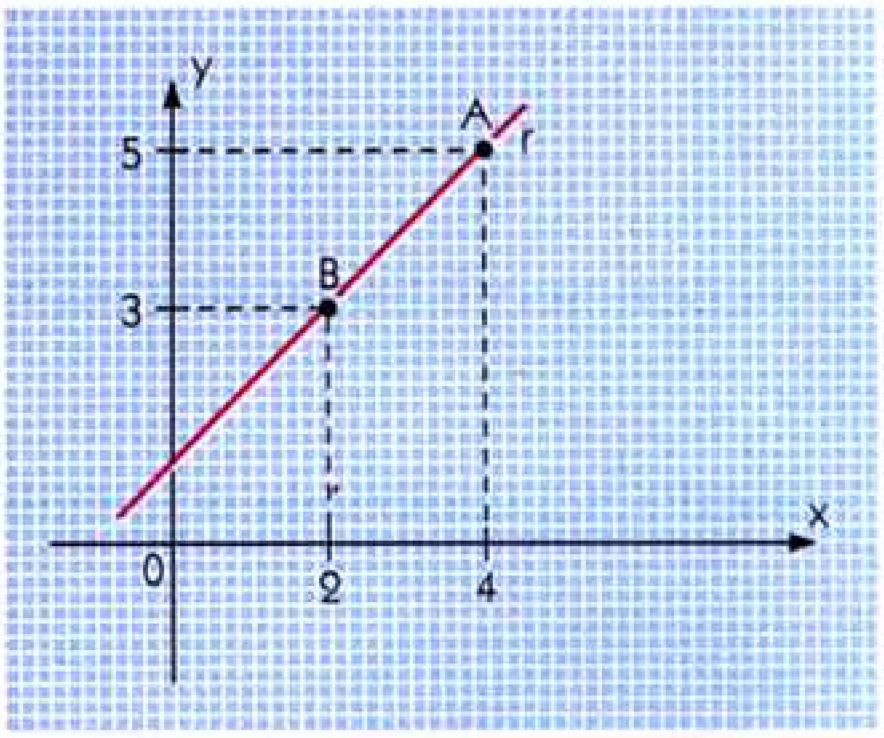
a) (r) $2x + 3y - 6 = 0$
b) (r) $5x - 7y = 0$
c) (r) $x - y + 1 = 0$
d) (r) $2x - 3y - 13 = 0$

1310 Identifique o coeficiente angular da reta *r*:

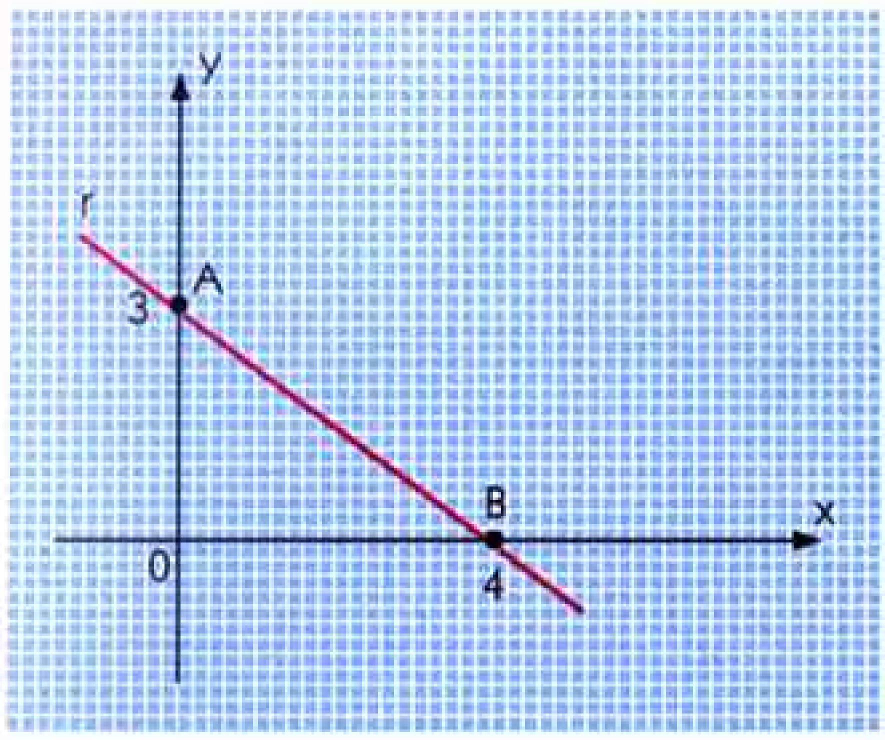
a)



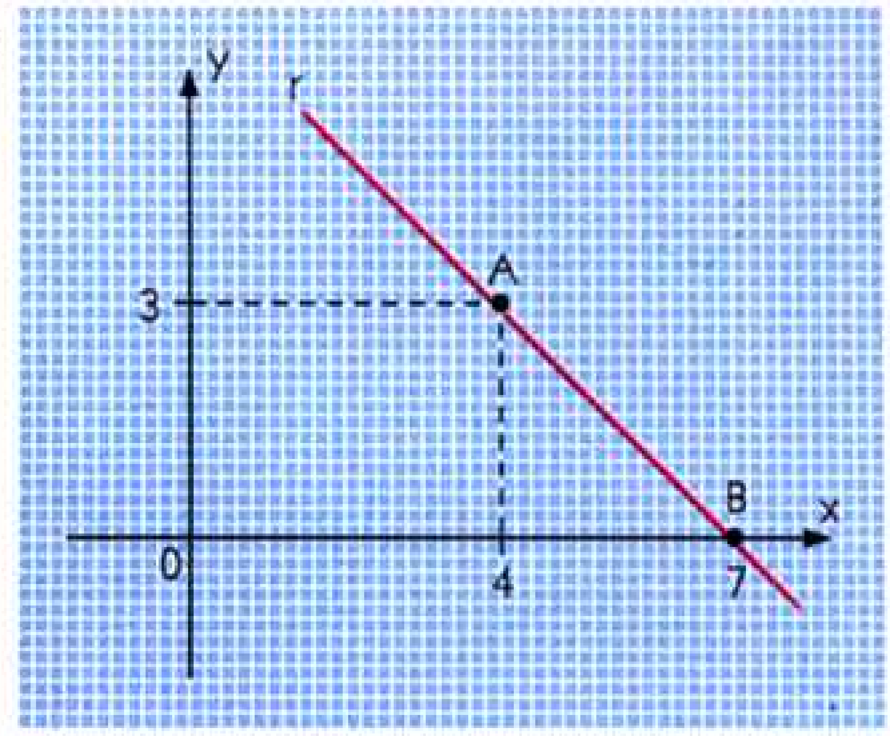
b)



c)



d)



1311 (PUC-SP) A equação da reta com coeficiente angular igual a $\left(-\frac{4}{5}\right)$ e que passa pelo ponto P(2, −5) é:

a) $4x + 5y + 12 = 0$
b) $4x + 5y + 14 = 0$
c) $4x + 5y + 17 = 0$
d) $4x + 5y + 16 = 0$
e) $4x + 5y + 15 = 0$

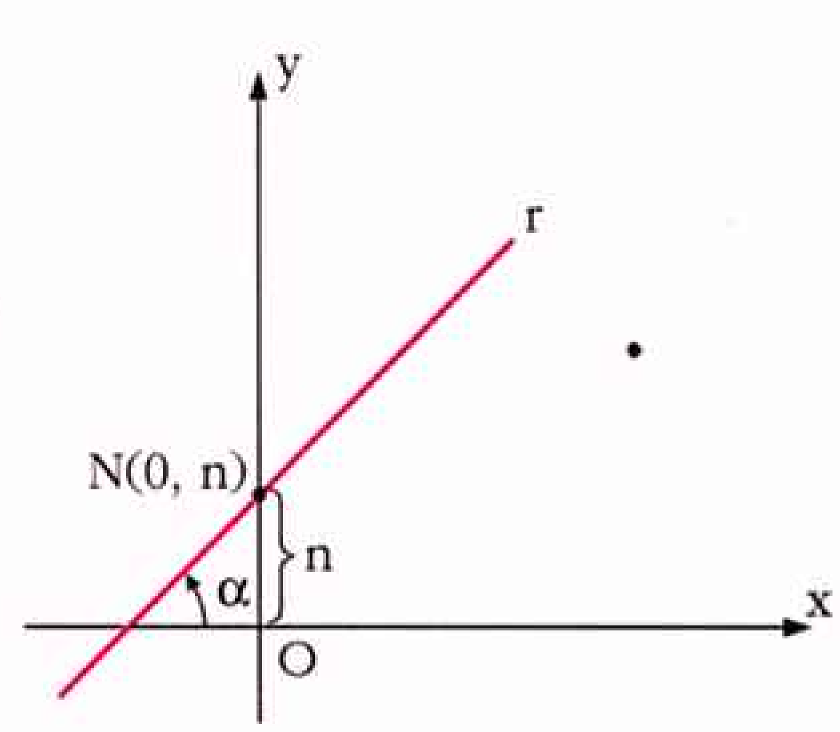
Equação reduzida da reta

Sendo r uma reta cuja equação geral é dada por $ax + by + c = 0$ e supondo $b \neq 0$, podemos determinar a equação reduzida de r isolando o valor de y em função de x, ou seja:

$$ax + by + c = 0$$
$$by = -ax - c$$

$$\boxed{y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}}$$

Assim, podemos considerar:



- o coeficiente angular da reta r como $\boxed{m = -\frac{a}{b}}$,

  sendo $m = \text{tg}\,\alpha$

- o coeficiente linear da reta r como $\boxed{n = -\frac{c}{b}}$,

  sendo n a ordenada do ponto N, intersecção entre r e o eixo Oy, e escrever:

$$\boxed{y = mx + n}$$

Note que as retas paralelas a Oy não possuem equação reduzida. Nesse caso, como b = 0, a equação geral reduzida à forma ax + c = 0, impossibilita o isolamento de *y* no primeiro membro.

Exemplo:
A reta *r* de equação geral $3x - 2y - 1 = 0$ tem como:
a) coeficiente angular

$$m = -\frac{a}{b} \Rightarrow m = -\frac{3}{-2} = \frac{3}{2} \Rightarrow m = \frac{3}{2}$$

b) coeficiente linear

$$n = -\frac{c}{b} \Rightarrow n = -\frac{-1}{-2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow n = -\frac{1}{2}$$

Exercícios

Resolvidos

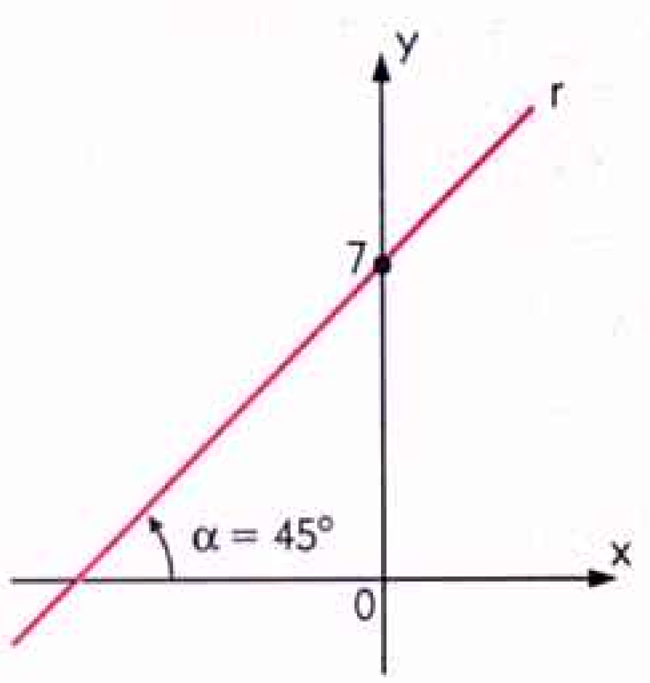
1 Conhecendo-se a equação geral da reta (r) $3x + 2y - 16 = 0$, obter:
a) a equação reduzida
b) o coeficiente angular
c) o coeficiente linear

a) $3x + 2y - 16 = 0$
$2y = -3x + 16$
$y = \underbrace{\frac{-3}{2}}_{\text{coeficiente angular (m)}}x + \underbrace{8}_{\text{coeficiente linear (n)}}$

b) $m = \frac{-3}{2}$

c) $n = 8$

2 Dada a representação gráfica da reta *r*, determinar:
a) o coeficiente angular de *r*
b) o coeficiente linear de *r*
c) a equação reduzida de *r*



a) $m = tg\ \alpha \Rightarrow m = tg\ 45° \Rightarrow m = 1$
b) O coeficiente linear é a ordenada do ponto de intersecção entre *r* e Oy, então, $n = 7$.
c) Substituindo $m = 1$ e $n = 7$ na equação $y = mx + n$, temos: $y = mx + n \Rightarrow y = x + 7$

Propostos

1312 Considerando a equação geral da reta (r), determine o coeficiente angular e linear:

a) $2x + 3y - 1 = 0$

b) $x - y + 4 = 0$

c) $2x + 5y - 3 = 0$

d) $2x + y - 5 = 0$

1313 Conhecendo a equação geral da reta *r*, obtenha a equação reduzida, o coeficiente angular e o coeficiente linear de *r*:

a) $2x - 3y + 1 = 0$

b) $x + 3y - 6 = 0$

c) $4x - y + 2 = 0$

d) $2x - 3y + 6 = 0$

e) $3x - 4y + 3 = 0$

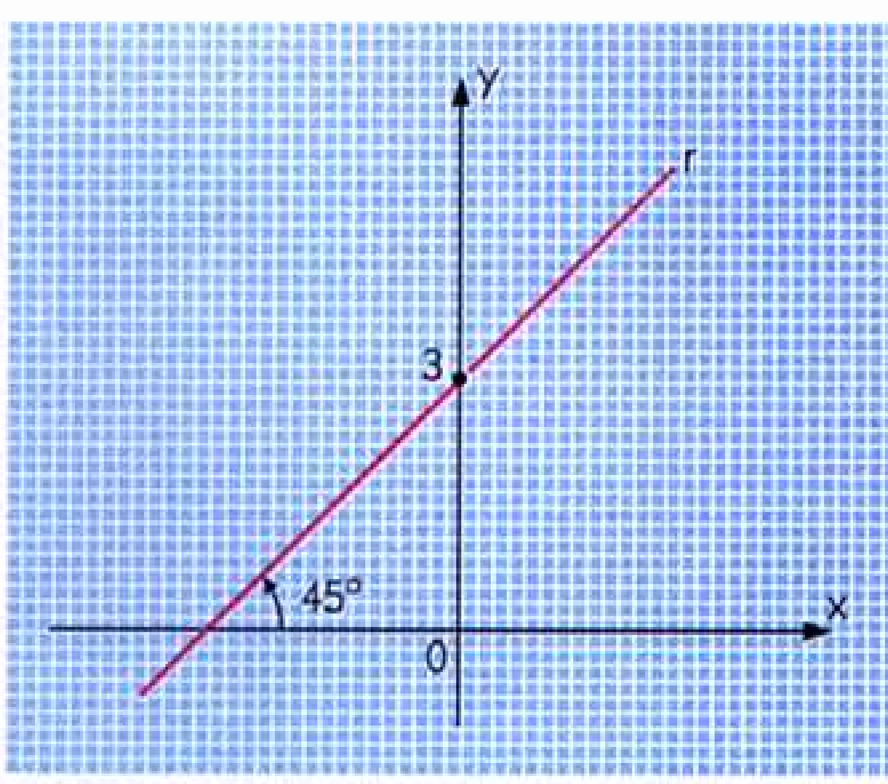
f) $x - y + 2 = 0$

g) $x + y = 0$

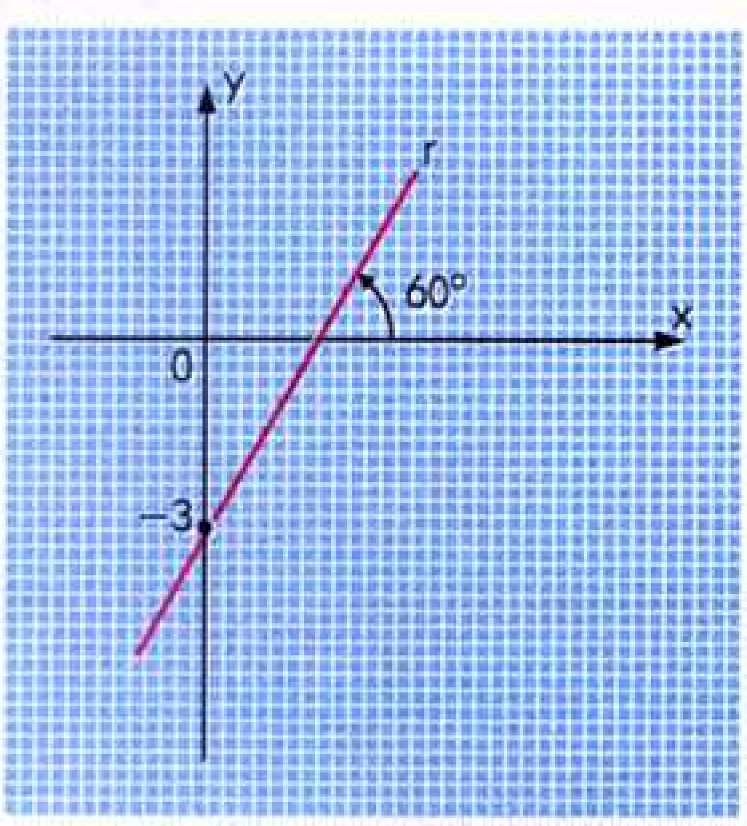
h) $5x + 7y = 0$

1314 Para cada representação gráfica da reta *r*, determine o coeficiente angular, o coeficiente linear e a equação reduzida de *r*.

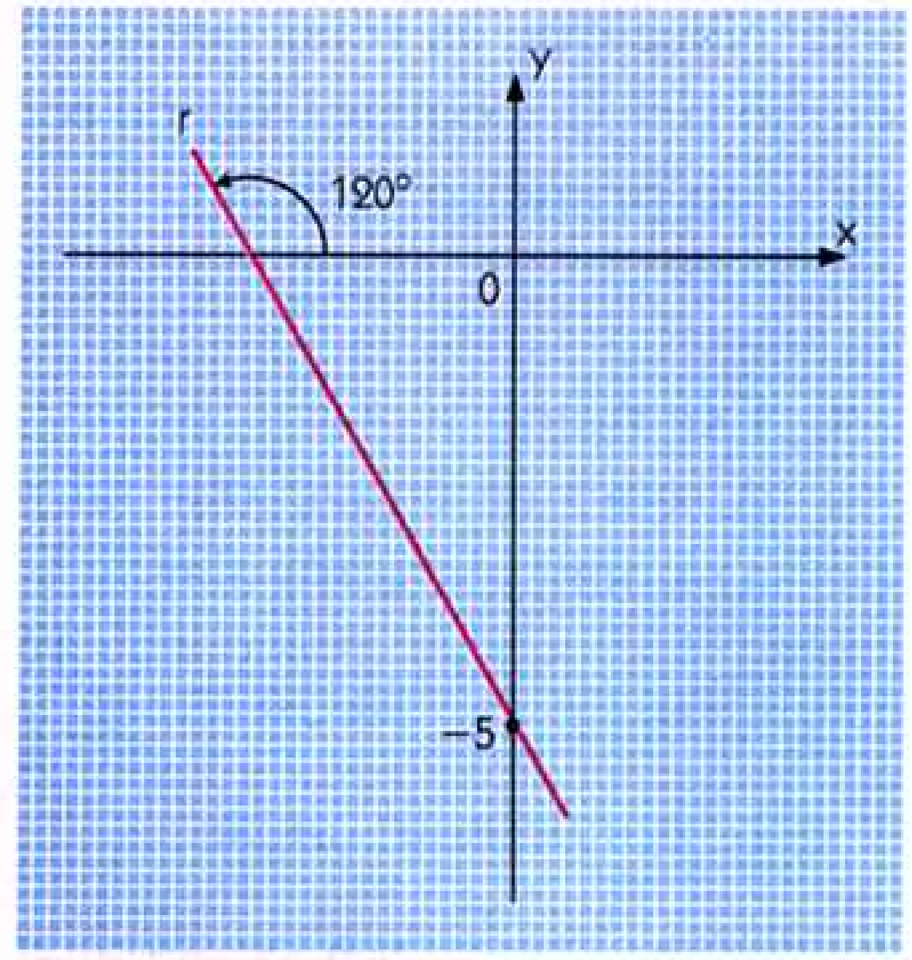
a)



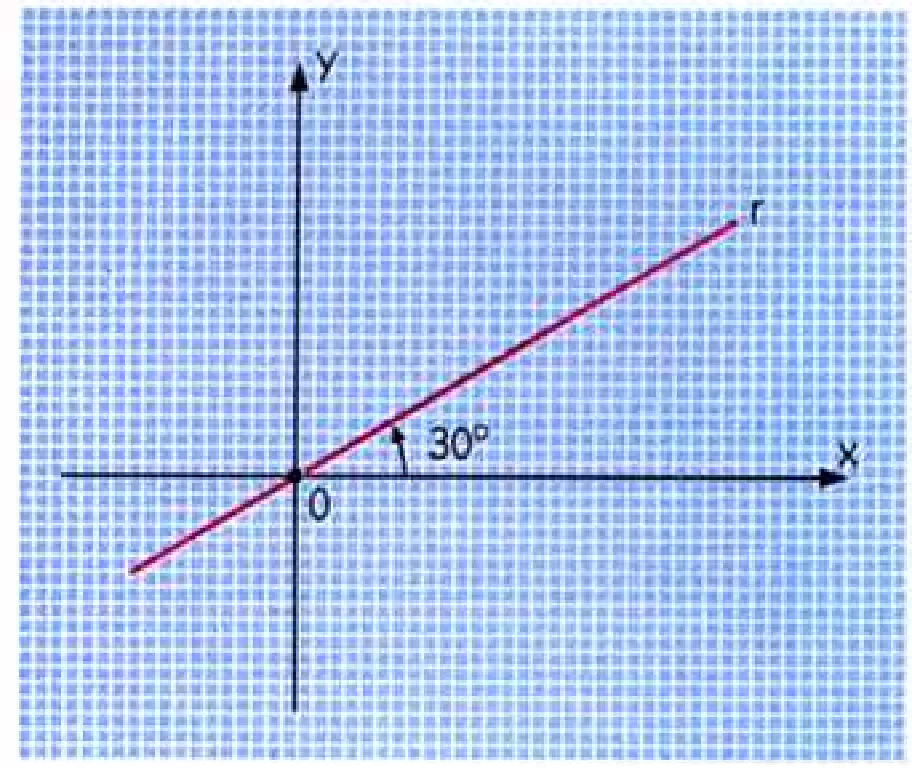
b)



c)



d)



1315 Determine, em cada caso, o coeficiente angular *m* e o ponto *P* de intersecção com o eixo Oy.

a) $y = 4x - 3$

b) $4x + 5y + 15 = 0$

c) $2x - y + 10 = 0$

d) $-3x + 2y + 6 = 0$

1316 (UFAC) A equação da reta, cujo coeficiente angular é igual à metade do valor absoluto da raiz quadrada do logaritmo de 16 na base dois e que passa pela origem é:

a) $y = 4x$

b) $y = x$

c) $y = -2x$

d) $y = 2x$

e) $y = \frac{1}{2}x$

1317 (PUC-SP) A equação geral da reta pelo ponto $P(-3, 2)$ e coeficiente angular *m* é:

a) $mx + y + 3m = 0$

b) $mx - y + 2 + 3m = 0$

c) $x + my + 2 = 0$

d) $x - my + 3m = 0$

e) $x + y + 2 = 0$

Equação da reta, conhecidos um ponto e a direção

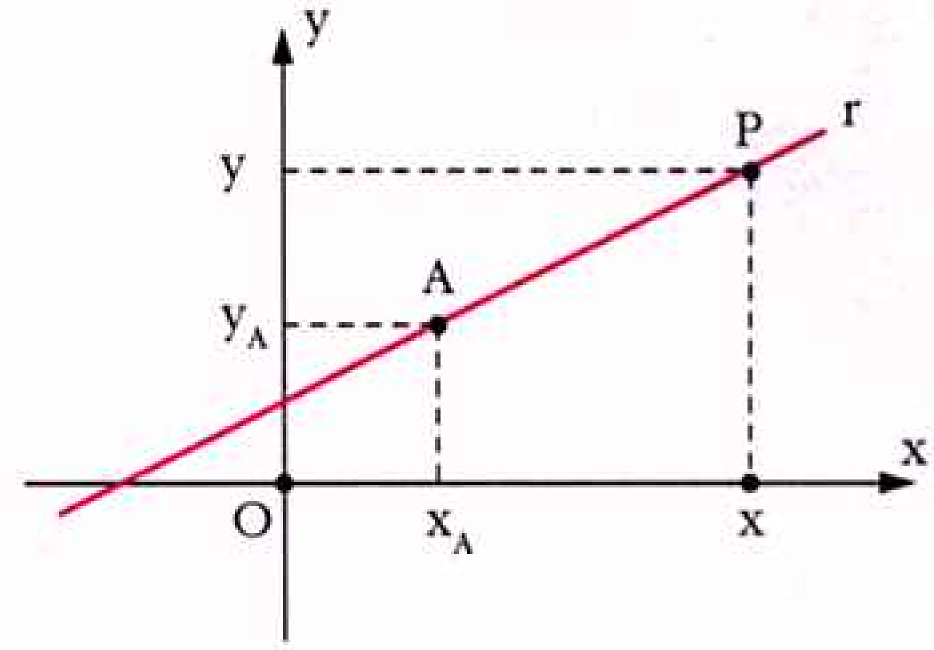
Se uma reta não paralela a Oy passa por um ponto $A(x_A, y_A)$ conhecido e tem coeficiente angular *m*, podemos determinar a equação dessa reta da seguinte forma:

- considerando P(x, y) um ponto qualquer da reta, sendo $P \neq A$.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$m = \frac{y - y_A}{x - x_A}$$

$$\boxed{y - y_A = m(x - x_A)}$$



No caso de a reta ser paralela ao eixo Oy, teremos: $\boxed{x = x_A}$

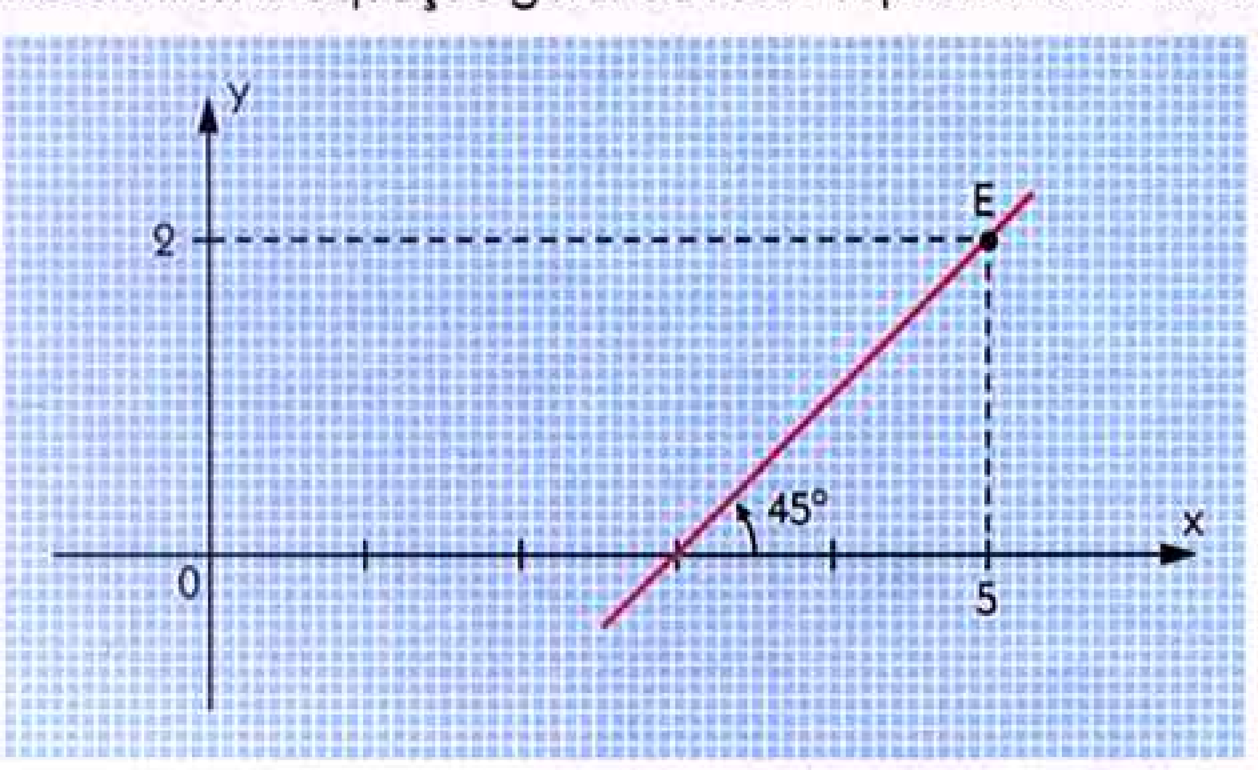
Exemplo:
A equação geral da reta que passa por A(3, 2) e apresenta coeficiente angular $m = -2$ é obtida substituindo-se os valores de $m = -2$ e A(3, 2) na equação $y - y_A = m(x - x_A)$. Então:

$$y - 2 = -2(x - 3)$$
$$y - 2 = -2x + 6$$
$$2x + y - 8 = 0$$

Exercícios

Resolvido

Determinar a equação geral da reta *r* representada abaixo:



$m = \text{tg } \alpha \Rightarrow m = \text{tg } 45° = 1$

Conhecendo m = 1 e E(5, 2), basta substituí-lo na equação:

$y - y_E = m(x - x_E)$

$y - 2 = 1(x - 5)$

$-x + y + 3 = 0$ ou $x - y - 3 = 0$

Propostos

1318 Obtenha, em cada caso, a equação geral da reta que passa por *A* e apresenta coeficiente angular *m*:

a) $A(1, 2)$ e $m = 2$

b) $A(4, 3)$ e $m = -3$

c) $A(-6, 4)$ e $m = -1$

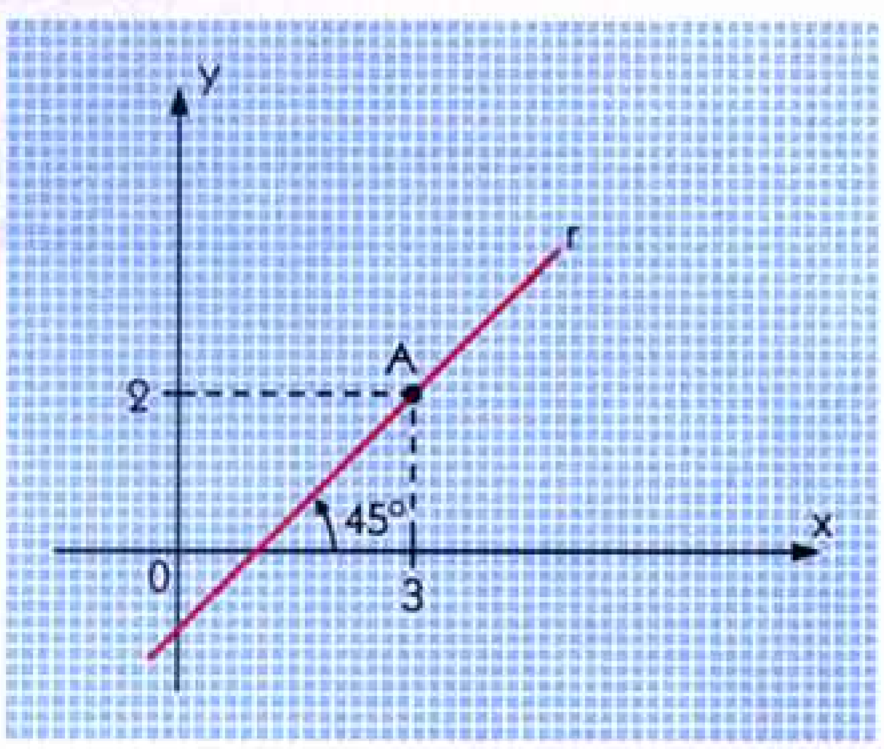
d) $A(2, 6)$ e $m = \frac{1}{2}$

e) $A\left(\frac{1}{2}, 3\right)$ e $m = \frac{1}{3}$

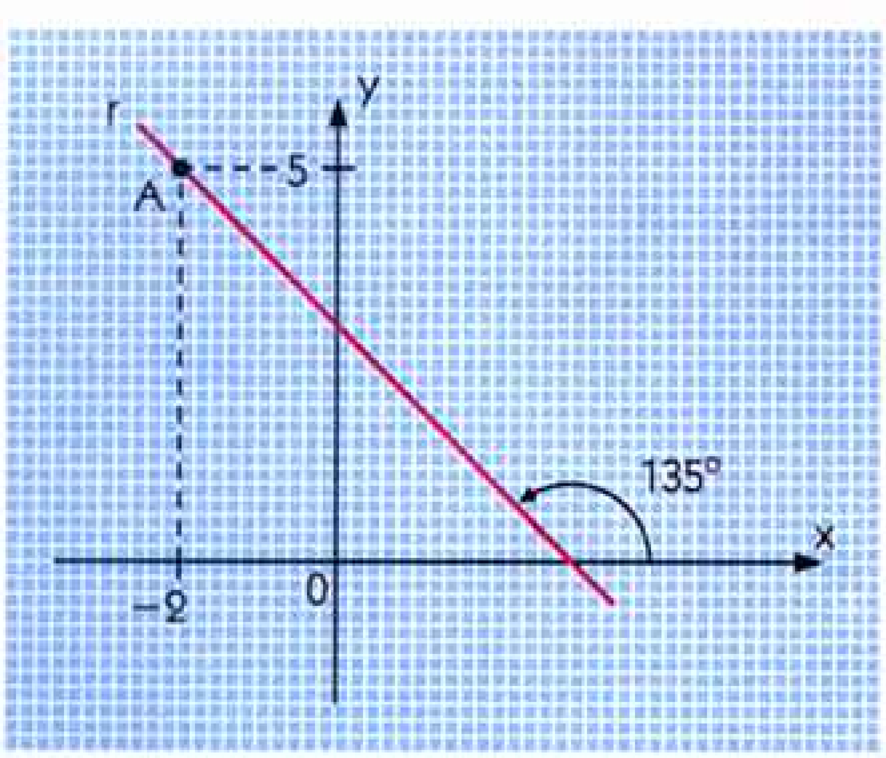
f) $A\left(1, \frac{1}{5}\right)$ e $m = -5$

1319 Determine a equação geral das retas *r* representadas abaixo:

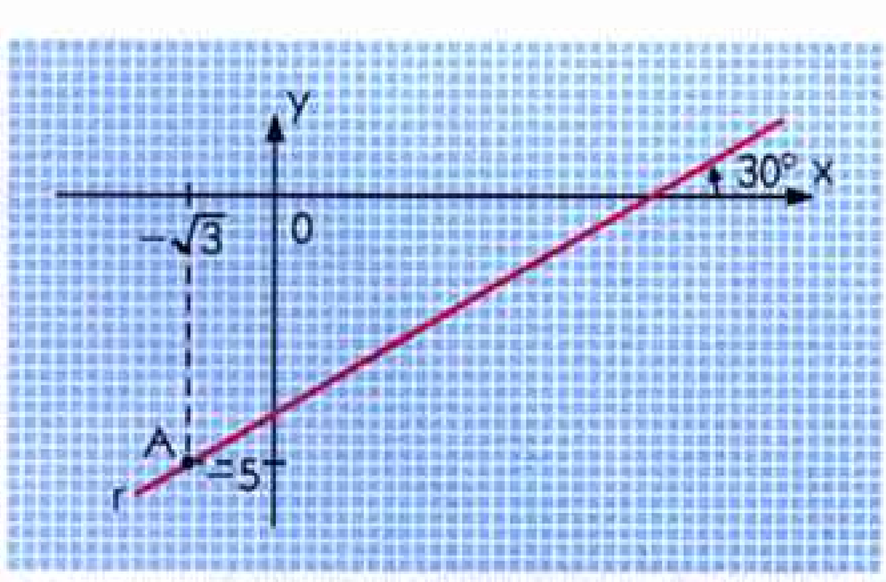
a)



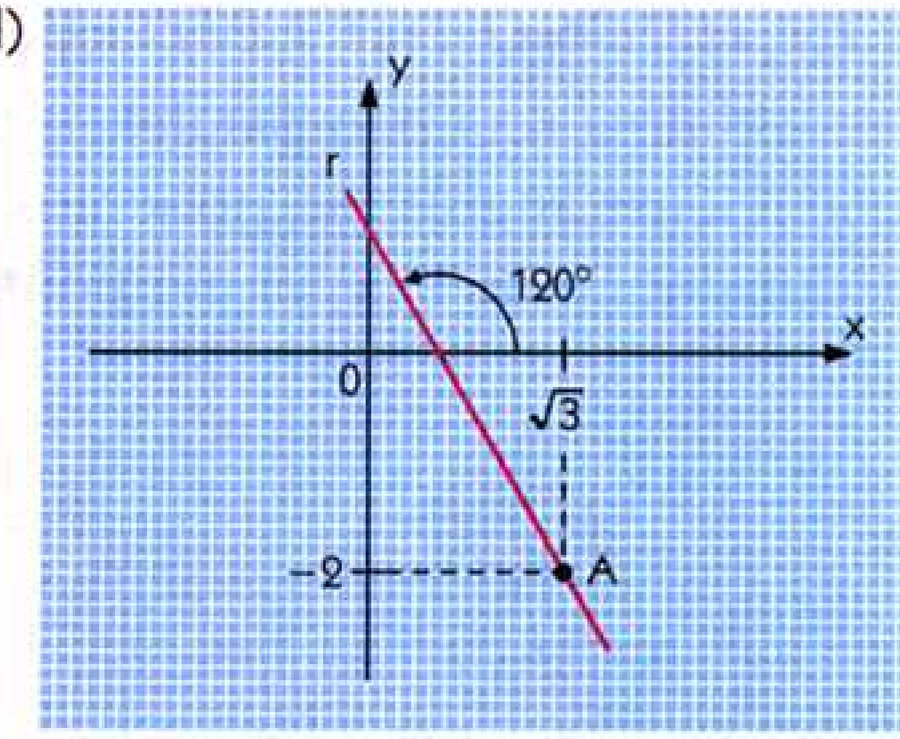
b)



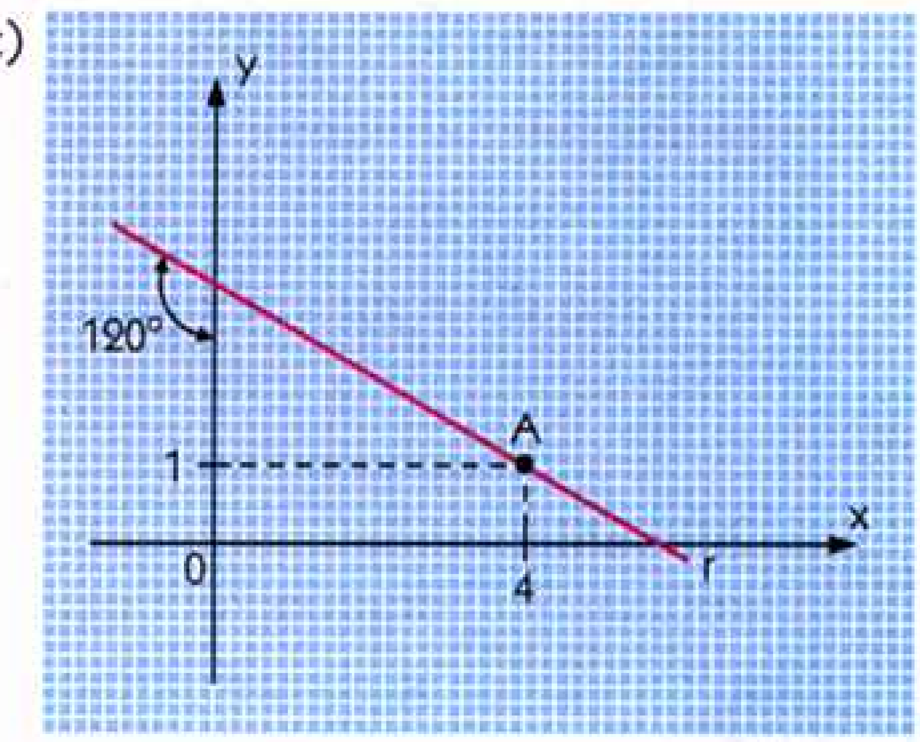
c)



d)



e)



1320 (UFES) A equação da reta que passa pelo ponto $(3, -2)$ com inclinação de 60° é:

a) $\sqrt{3}x - y - 2 - 3\sqrt{3} = 0$

b) $\sqrt{3}x - 3y - 6 - 3\sqrt{3} = 0$

c) $\sqrt{3}x + y + 3 - 2\sqrt{3} = 0$

d) $\sqrt{3}x - y - 2 + 2\sqrt{3} = 0$

e) $\sqrt{3}x - y - 5\sqrt{3} = 0$

1321 (Cescem-SP) A equação da reta que passa pelo ponto $(-1, 2)$ e forma com o eixo Ox um ângulo de 45° é:

a) $y - x - 3 = 0$

b) $y + x - 1 = 0$

c) $2y - \sqrt{2}x - (4 + \sqrt{2}) = 0$

d) $2y + \sqrt{2}x + 2(\cos 45° - 2) = 0$

e) $2y - x - 5 = 0$

1322 A reta *r* que corta o eixo Ox no ponto de abscissa $-\sqrt{2}$ e cuja inclinação é 135° tem equação:

a) $\sqrt{2}x - 2y + \sqrt{2} = 0$

b) $2x - \sqrt{2}y + 2 = 0$

c) $2x + \sqrt{2}y + 2 = 0$

d) $\sqrt{2}x + 2y + 2 = 0$

e) $x + y + 1 = 0$

Equações paramétricas da reta

Enquanto a equação geral $ax + by + c = 0$ relaciona as coordenadas x e y de um ponto qualquer da reta, as equações paramétricas $x = f_1(t)$ e $y = f_2(t)$ relacionam essas coordenadas com uma variável t, chamada parâmetro.

Exemplo:
Vamos considerar a reta de equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = 4t \\ y = 3t + 1 \end{cases}$$

Se quisermos obter a equação geral dessa reta, basta isolar o parâmetro t numa das equações e substituí-lo na outra equação.

Assim, de $x = 4t$, tem-se $t = \dfrac{x}{4}$.

Substituindo em $y = 3t + 1$, vem a equação geral da reta $y = \dfrac{3x}{4} + 1$, ou, ainda, $3x - 4y + 4 = 0$.

Exercícios

Resolvido

Determinar a equação geral da reta, sendo que as equações paramétricas dessa reta são:

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + t \end{cases}$$

Isolando o parâmetro t na 1ª equação:

$t = 2 - x$

Substituindo $t = 2 - x$ na 2ª equação:

$y = 1 + t \Rightarrow y = 1 + (2 - x)$

$x + y - 3 = 0$

Propostos

1323 Determine a equação geral da reta em cada caso:

a) $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 2 - \dfrac{t}{2} \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = \dfrac{3t - 3}{2} \end{cases}$

1324 Conhecendo as equações paramétricas da reta (r) $x = t + 2$ e $y = -3t - 1$, determine:

a) a equação geral de r b) a equação reduzida de r c) o coeficiente angular de r

1325 (UFPA) O coeficiente angular da reta de equações paramétricas $\begin{cases} x = 2t + 2 \\ y = t - 1 \end{cases}$ é:

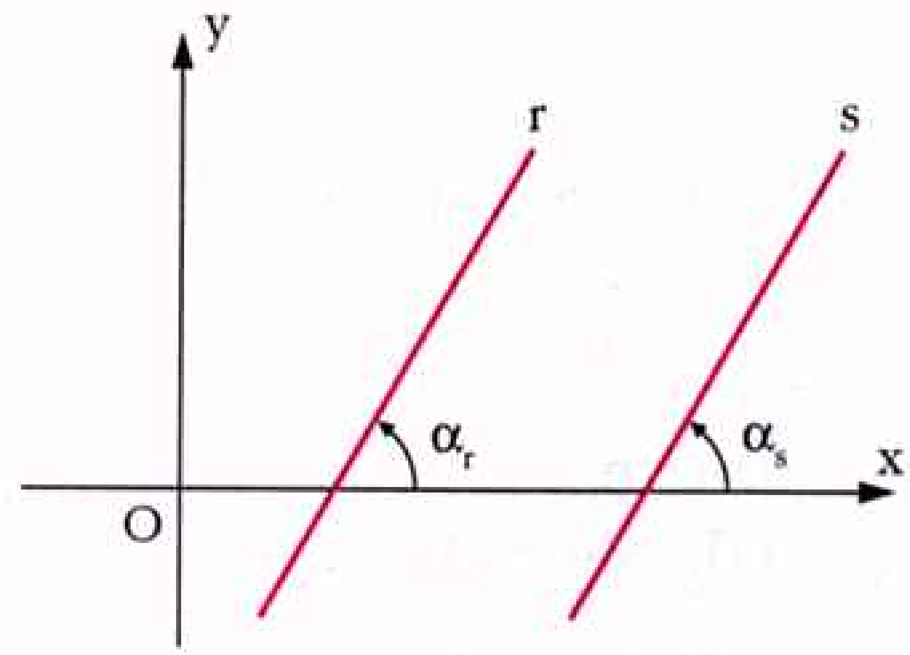
a) $-\dfrac{1}{2}$ b) $\dfrac{1}{2}$ c) 1   d) 2   e) 3

Retas paralelas

Duas retas, *r* e *s*, do plano cartesiano são paralelas (r // s) se, e somente se, ambas forem verticais, ou se os seus coeficientes angulares forem iguais. Na figura, as retas *r* e *s* são paralelas e não verticais. Temos, então:

$$\alpha_r = \alpha_s$$
$$\text{tg}\,\alpha_r = \text{tg}\,\alpha_s$$
$$m_r = m_s$$

logo, $\boxed{r // s \Leftrightarrow m_r = m_s}$



Caso as retas *r* e *s* tenham coeficientes angulares iguais ($m_r = m_s$) e coeficientes lineares iguais ($n_r = n_s$), então elas serão consideradas coincidentes, ou seja:

$$\boxed{r = s \Leftrightarrow m_r = m_s \text{ e } n_r = n_s}$$

Exemplos:

a) As retas (r) $x + 2y - 6 = 0$ e (s) $2x + 4y - 3 = 0$ são paralelas, pois:

$m = -\dfrac{a}{b}$ $\qquad$ $n = -\dfrac{c}{b}$

reta $r \rightarrow m_r = -\dfrac{1}{2}$ $\qquad$ $n_r = -\dfrac{-6}{2} = 3$

reta $s \rightarrow m_s = -\dfrac{2}{4} = -\dfrac{1}{2}$ $\qquad$ $n_s = -\dfrac{-3}{4} = \dfrac{3}{4}$

de onde se observa que $m_r = m_s$ e $n_r \neq n_s$, sendo, por isso, consideradas paralelas distintas.

b) As retas (r) $4x - 3y + 7 = 0$ e (s) $2x - 3y + 7 = 0$ não são paralelas, pois:

$m = -\dfrac{a}{b}$ $\qquad$ $n = -\dfrac{c}{b}$

reta $r \rightarrow m_r = -\dfrac{4}{-3} = \dfrac{4}{3}$ $\qquad$ $n_r = -\dfrac{7}{-3}$

reta $s \rightarrow m_s = -\dfrac{2}{-3} = \dfrac{2}{3}$ $\qquad$ $n_s = -\dfrac{7}{-3} = \dfrac{7}{3}$

de onde se observa que $m_r \neq m_s$ e $n_r = n_s$.

Neste caso *r* e *s* também não são retas coincidentes e para se chegar a essas conclusões bastaria ter verificado que $m_r \neq m_s$.

Exercícios

Resolvidos

1 Sabe-se que o ponto A(1, 3) pertence à reta *s*, paralela a (r) $5x + 2y + 1 = 0$. Determinar a equação geral da reta *s*.

Se *s* é paralela a *r*, então $m_s = m_r$.

$m_s = m_r = -\frac{a}{b} = -\frac{5}{2}$

Conhecendo $m_s = -\frac{5}{2}$ e A(1, 3), basta substituir na fórmula

$y - y_A = m_s(x - x_A) \Rightarrow y - 3 = -\frac{5}{2}(x - 1)$

$y - 3 = -\frac{5}{2}x + \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{5}{2}x + y - \frac{11}{2} = 0 \Rightarrow 5x + 2y - 11 = 0$

2 Determinar o valor de *k* e *w* para que as retas (r) $2x - 3y + 1 = 0$ e (s) $= (k - 1)x - 3y + w = 0$ sejam coincidentes.

Inicialmente vamos determinar *m* e *n* de cada reta.

reta *r*: $m_r = -\frac{2}{-3}$ e $n_r = -\frac{1}{-3}$ reta *s*: $m_s = -\frac{k-1}{-3}$ e $n_s = -\frac{w}{-3}$

Para que as retas sejam coincidentes devemos ter:

$m_r = m_s \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{k-1}{3} \Rightarrow k = 3$ $n_r = n_s \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{w}{3} \Rightarrow w = 1$

Propostos

1326 Classifique as retas *r* e *s* conforme suas posições relativas:

a) (r) $2x - y + 20 = 0$
 (s) $2x - y + 1 = 0$

b) (r) $x - y - 3 = 0$
 (s) $2x - 2y + 3 = 0$

c) (r) $x + 2y - 5 = 0$
 (s) $x + 2y - 5 = 0$

d) (r) $-3x + 3y - 3 = 0$
 (s) $3x - 3y + 1 = 0$

1327 Sabe-se que o ponto *A* pertence à reta *s* e esta é paralela a *r*. Determine a equação geral da reta *s*, em cada caso:

a) A(1, −3) e (r) $2x - y + 5 = 0$

b) A(−2, −3) e (r) $5x + 4y + 2 = 0$

c) A(2, −2) e (r) $2x - y + 3 = 0$

d) A(1, −3) e (r) $x - 3y + 4 = 0$

1328 Determine o valor de *k* para que as retas (r) $x + y - 3 = 0$ e (s) $kx - 3y + 9 = 0$ sejam paralelas.

1329 (UFRGS) Dada a reta (r) $= 2x - y + 1 = 0$, a equação da reta paralela a *r* pelo ponto P(1, 1) será:

a) $2x - y = 0$

b) $2x - y + 2 = 0$

c) $2x + y + 1 = 0$

d) $2x + y - 1 = 0$

e) $2x - y - 1 = 0$

1330 (Cesgranrio-RJ) Se as retas do $\mathbb{R}^2$ de equações $y = 3x - 1$ e $y = mx + n$ são paralelas, então:

a) $m = -3n$

b) $n = 3m$

c) $n = -1$

d) $m = -\frac{1}{3}$

e) $m = 3$

1331 (UEPG-PR) Seja a reta *s* bissetriz do 2º e 4º quadrantes. Sabendo-se que P(−5, 2) pertence à reta r // s, a equação da reta *r* é:

a) $x + y - 3 = 0$
b) $x - y + 3 = 0$
c) $x - y - 7 = 0$
d) $x + y + 7 = 0$
e) n.d.a.

1332 (UFES) A equação da reta que passa pelo ponto $P_1(2, -3)$ e é paralela à reta que passa pelos pontos A(4, 1) e B(−2, 2) é:

a) $x - 6y + 16 = 0$
b) $x + 6y - 16 = 0$
c) $x - 6y - 16 = 0$
d) $2x + 6y + 16 = 0$
e) $x + 6y + 16 = 0$

1333 (Fuvest-SP) São dadas as retas de equações: $x + y = 1$, $mx + y = 2$ e $x + my = 3$.

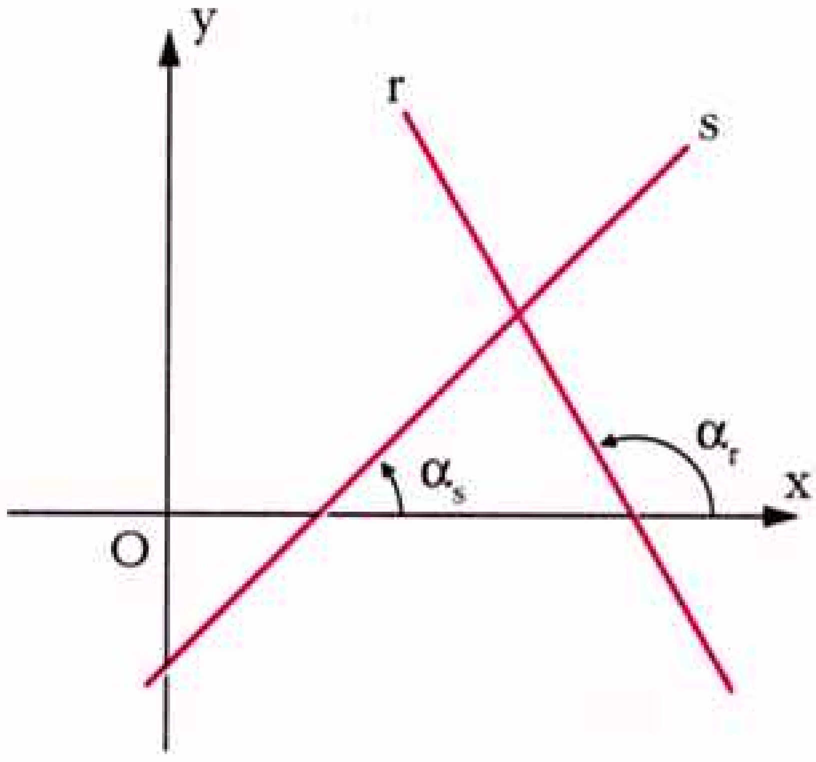
a) Qual a posição relativa dessas retas quando m = 1?
b) Determine *m* para que elas passem pelo mesmo ponto.

Retas concorrentes

Duas retas, *r* e *s*, do plano cartesiano são concorrentes quando apenas uma delas tem coeficiente angular ou, então, quando apresentam coeficientes angulares diferentes.

Na figura, as retas *r* e *s* são concorrentes e não verticais. Temos, então:

$$\alpha_r \neq \alpha_s$$
$$\text{tg}\,\alpha_r \neq \text{tg}\,\alpha_s$$
$$m_r \neq m_s$$

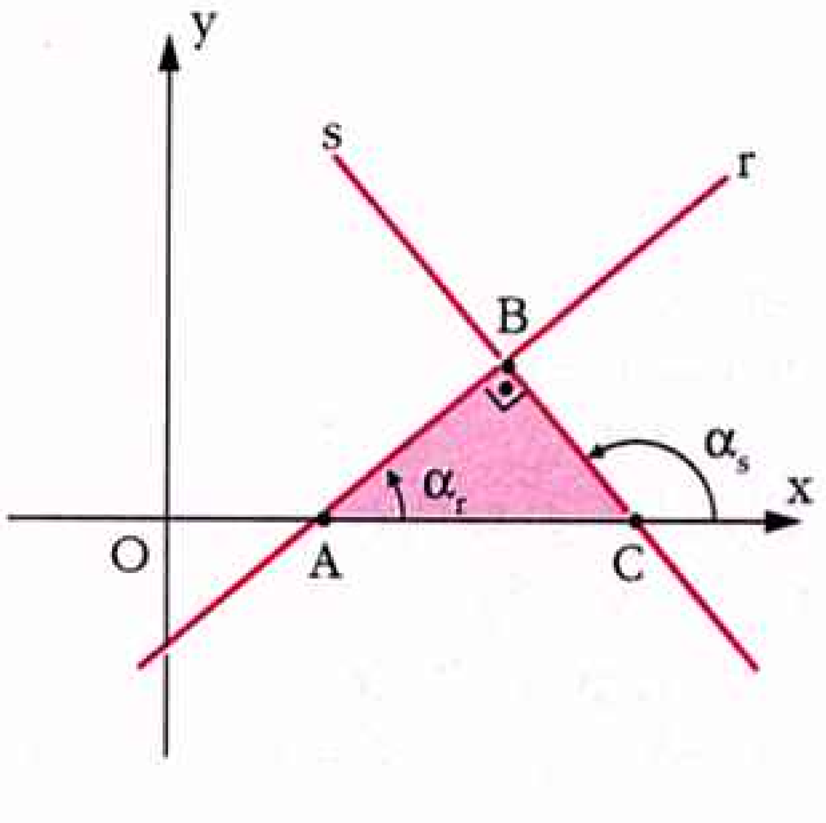


logo, $\boxed{r \times s \Leftrightarrow m_r \neq m_s}$

Caso as retas *r* e *s* não verticais apresentem o produto de seus coeficientes angulares igual a −1, serão consideradas perpendiculares. Reciprocamente, se duas retas não verticais são perpendiculares entre si, então o produto de seus coeficientes angulares é igual a −1.

No triângulo ABC retângulo em *B*, temos:

$$\alpha_s = 90° + \alpha_r$$
$$\text{tg}\,\alpha_s = \text{tg}\,(90° + \alpha_r)$$
$$\text{tg}\,\alpha_s = -\text{cotg}\,\alpha_r$$
$$\text{tg}\,\alpha_s = -\frac{1}{\text{tg}\,\alpha_r}$$



$\boxed{m_s = -\frac{1}{m_r}}$ ou $\boxed{m_r \cdot m_s = -1}$

Partindo da hipótese de que $m_r \cdot m_s = -1$, chamando med $\hat{B} = \theta$ e seguindo os passos acima em ordem inversa, chegaremos a $\theta = 90°$, ou seja, $r \perp s$. Então:

$$\boxed{r \perp s \Leftrightarrow m_r \cdot m_s = -1}$$

Um caso particular de perpendicularismo ocorre quando uma das retas tem coeficiente angular zero (reta horizontal) e a outra não tem coeficiente angular (reta vertical).

Exemplo:

As retas (r) $-5x + 3y + 13 = 0$ e (s) $3x + 5y - 1 = 0$ são perpendiculares, pois:

reta *r* $\longrightarrow m_r = -\frac{-5}{3} = \frac{5}{3}$

reta *s* $\longrightarrow m_s = -\frac{3}{5}$

$$m_r \cdot m_s = \frac{5}{3} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)$$

portanto: $m_r \cdot m_s = -1$

Exercícios

Resolvidos

1 Determinar o valor de *k* para que as retas (r) $5x + 2y + 1 = 0$ e (s) $(k - 1)x - 5y + 4 = 0$ sejam perpendiculares.

Inicialmente, vamos determinar o m_r e m_s:

$$m_r = -\frac{5}{2}$$

$$m_s = -\frac{(k-1)}{-5} = \frac{k-1}{5}$$

Para que *r* e *s* sejam perpendiculares é necessário que:

$$m_r \cdot m_s = -1$$

$$-\frac{5}{2} \cdot \frac{k-1}{5} = -1$$

$$-k + 1 = -2$$

$$k = 3$$

2 Sabe-se que o ponto A(2, −1) pertence à reta *s* e essa é perpendicular a (r) $2x + 3y + 9 = 0$. Determinar a equação geral da reta *s*.

Se a reta *r* é perpendicular a *s*, então $m_r \cdot m_s = -1$

$m_s = -\dfrac{1}{m_r}$ $\qquad$ $m_r = -\dfrac{a}{b} = -\dfrac{2}{3}$

$$m_s = -\frac{1}{\left(-\frac{2}{3}\right)}$$

$$m_s = \frac{3}{2}$$

► Na prática, calculamos m_s trocando o sinal de m_r e invertendo o número obtido:

$$-\frac{2}{3} \rightarrow \frac{2}{3} \rightarrow \frac{3}{2}.$$

Conhecendo $m_s = \dfrac{3}{2}$ e A(2, −1) basta substituir na fórmula

$$(y - y_A) = m_s(x - x_A)$$

$$y - (-1) = \frac{3}{2}(x - 2)$$

$$y + 1 = \frac{3}{2}x - 3$$

$$-\frac{3}{2}x + y + 1 + 3 = 0$$

$$-3x + 2y + 8 = 0$$

Propostos

1334 Classifique as retas *r* e *s* conforme as suas posições relativas:

a) (r) $x - 5y + 3 = 0$
   (s) $5x + y - 1 = 0$

b) (r) $4x - 2 = 0$
   (s) $-4y + 1 = 0$

c) (r) $5x + 2y + 1 = 0$
   (s) $2x + 5y + 4 = 0$

d) (r) $\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{5} = 1$
   (s) $\dfrac{x}{5} = \dfrac{y}{3}$

1335 Sabe-se que o ponto *A* pertence à reta *s* e essa é perpendicular à reta *r*. Determine a equação geral de *s*, em cada caso:

a) A(1, 2) e (r) $x - y + 4 = 0$

b) A(2, −2) e (r) $4x - 3y + 1 = 0$

c) A(2, −3) e (r) $7x - y + 4 = 0$

d) A(1, −2) e (r) $3x - 4y + 3 = 0$

1336 Determine o valor de *k* para que as retas (r) $2x + 3y - 5 = 0$ e (s) $kx - 2y + 4 = 0$ sejam perpendiculares.

1337 (UFMT) São dadas as retas: (r) $x + 3y = 5$; (s) $-x + 3y = 5$; (t) $-x - 3y = 6$; (u) $3x + y = 6$. As retas perpendiculares entre si são:

a) (r) e (s)
b) (r) e (u)
c) (s) e (t)
d) (s) e (u)
e) (t) e (u)

1338 (FEI-SP) A equação da reta que passa pelo ponto (1, 2) e é pependicular à reta $3x - 2y + 2 = 0$ é:

a) $2x - 3y + 5 = 0$
b) $2x - 3y - 5 = 0$
c) $2x - 3y - 4 = 0$
d) $2x - 3y + 4 = 0$
e) $2x + 3y - 8 = 0$

1339 (Cesgranrio-RJ) O valor de α para o qual as retas $2y - x - 3 = 0$ e $3y + \alpha x - 2 = 0$ são perpendiculares é:

a) 6
b) $\frac{3}{2}$
c) 5
d) $-\frac{2}{3}$
e) $-\frac{3}{2}$

1340 (UFRGS) Uma das diagonais de um losango é o segmento de extremos (1, 4) e (3, 2). A outra diagonal está contida na reta de equação:

a) $x + y = 0$
b) $x + y + 1 = 0$
c) $x + y - 1 = 0$
d) $x - y - 1 = 0$
e) $x - y + 1 = 0$

1341 (Fuvest-SP) No plano cartesiano são dados os pontos $A = (-1, 2)$, $B = (1, 3)$ e $C = (2, -1)$. Determine uma equação:

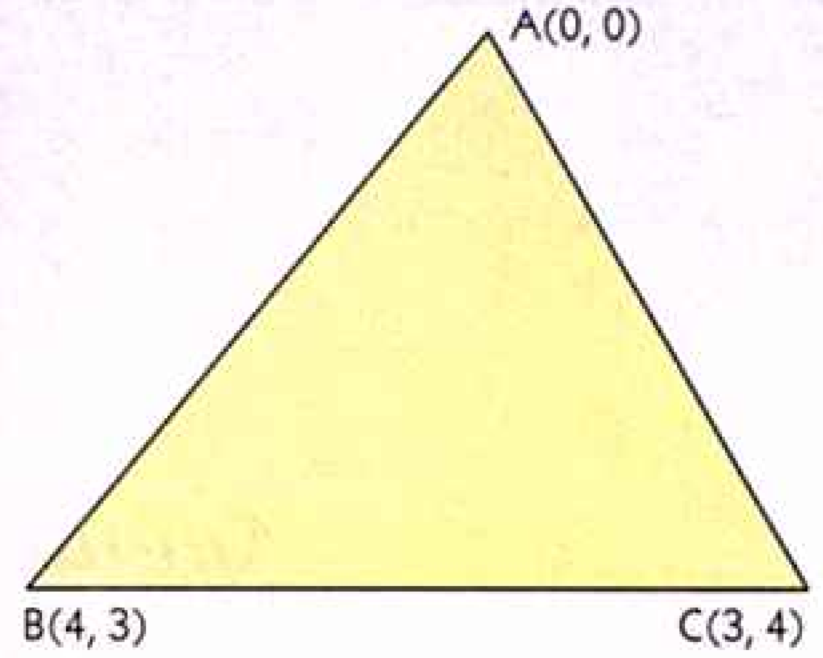
a) da reta AB
b) da reta que passa por C e é perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$

1342 (UFRGS) Os vértices de um triângulo são os pontos $A = (-1, 2)$, $B = (5, 1)$ e $C = (3, 6)$. O coeficiente linear da reta que passa por C e pelo ortocentro do triângulo é:

a) -24
b) -12
c) -10
d) -6
e) 6

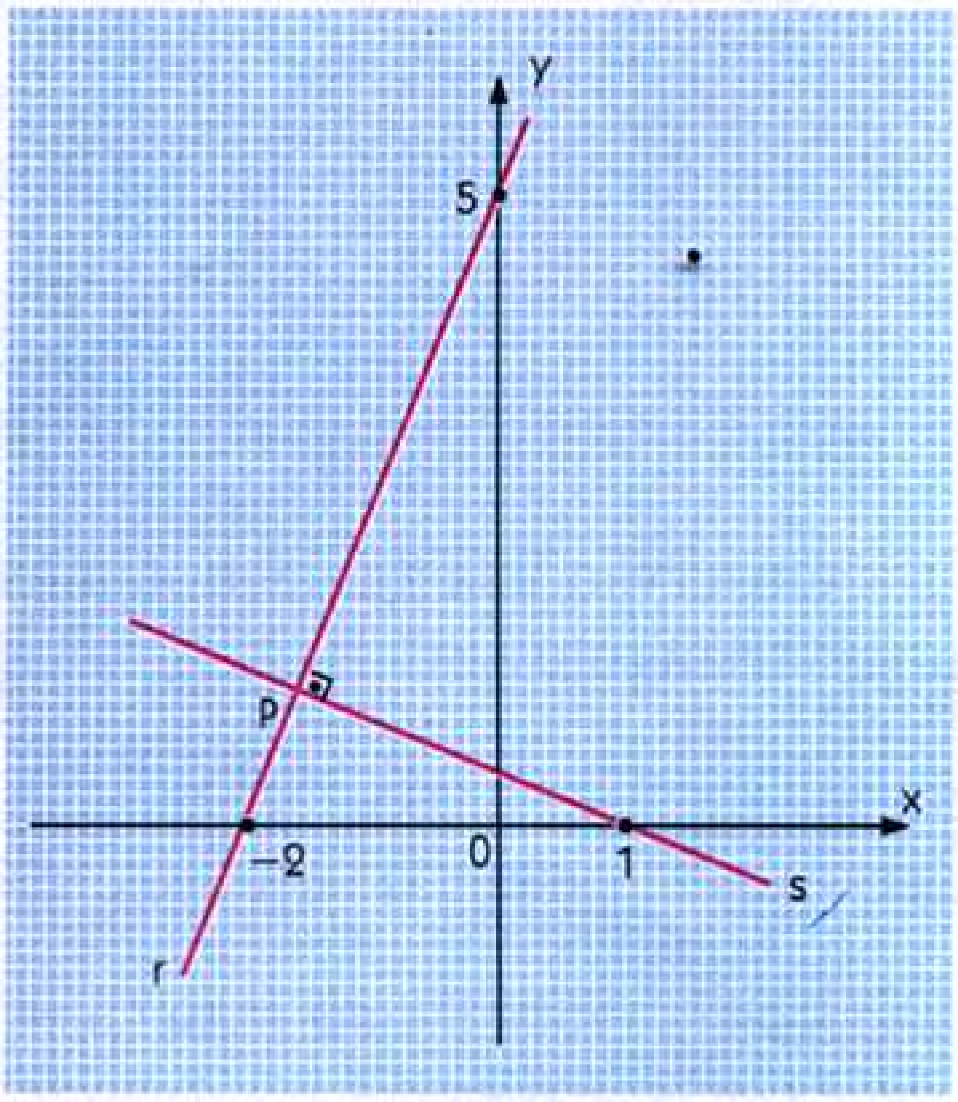
1343 (UFPR) O ortocentro do triângulo ABC é:

a) $\left(\frac{-24}{7}, \frac{-24}{7}\right)$
b) $\left(\frac{7}{3}, \frac{7}{3}\right)$
c) $\left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$
d) $\left(\frac{24}{7}, \frac{24}{7}\right)$
e) $\left(\frac{7}{24}, \frac{7}{24}\right)$

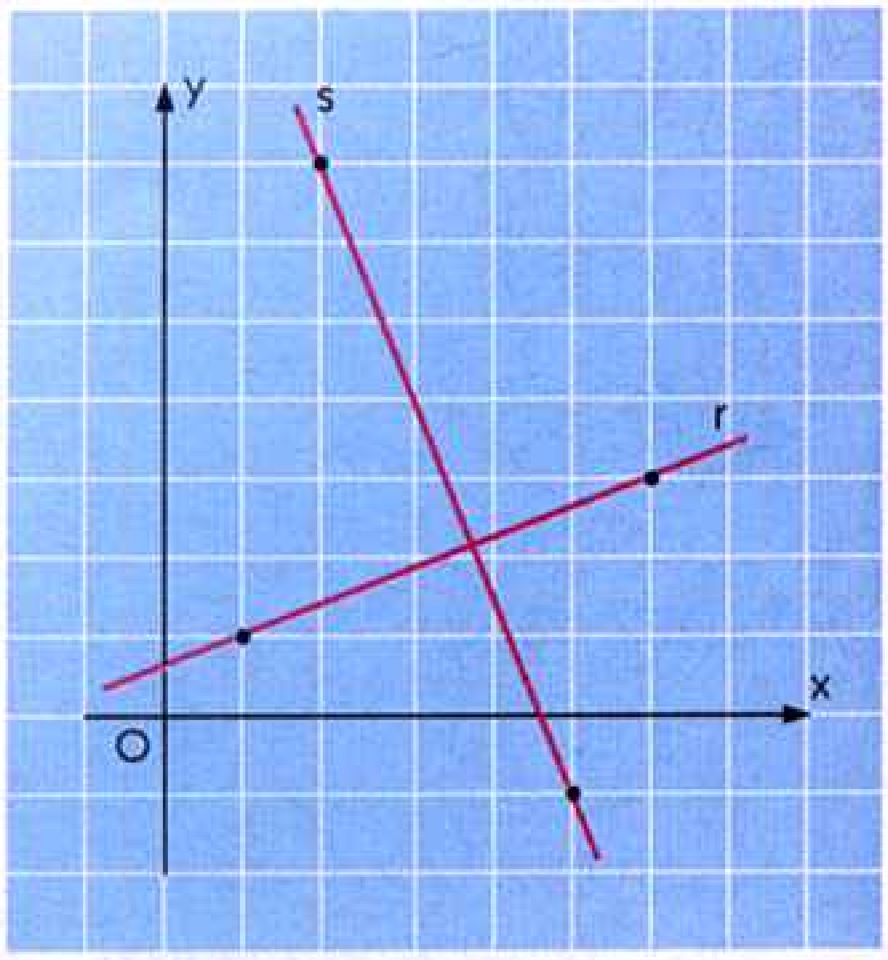


1344 (FGV-SP) A equação da reta s que passa pelo ponto P na figura é:

a) $2x + 5y = 2$
b) $2x - 5y = 2$
c) $-2x + 5y = 2$
d) $5x + 2y = 5$
e) $5x - 2y = 5$



1345 (Vunesp) Ache os coeficientes angulares das retas *r* e *s* da figura e verifique se elas são ortogonais.



1346 A equação da reta que contém o ponto (3, 5) e é perpendicular à reta $3x + y = 6$ é:

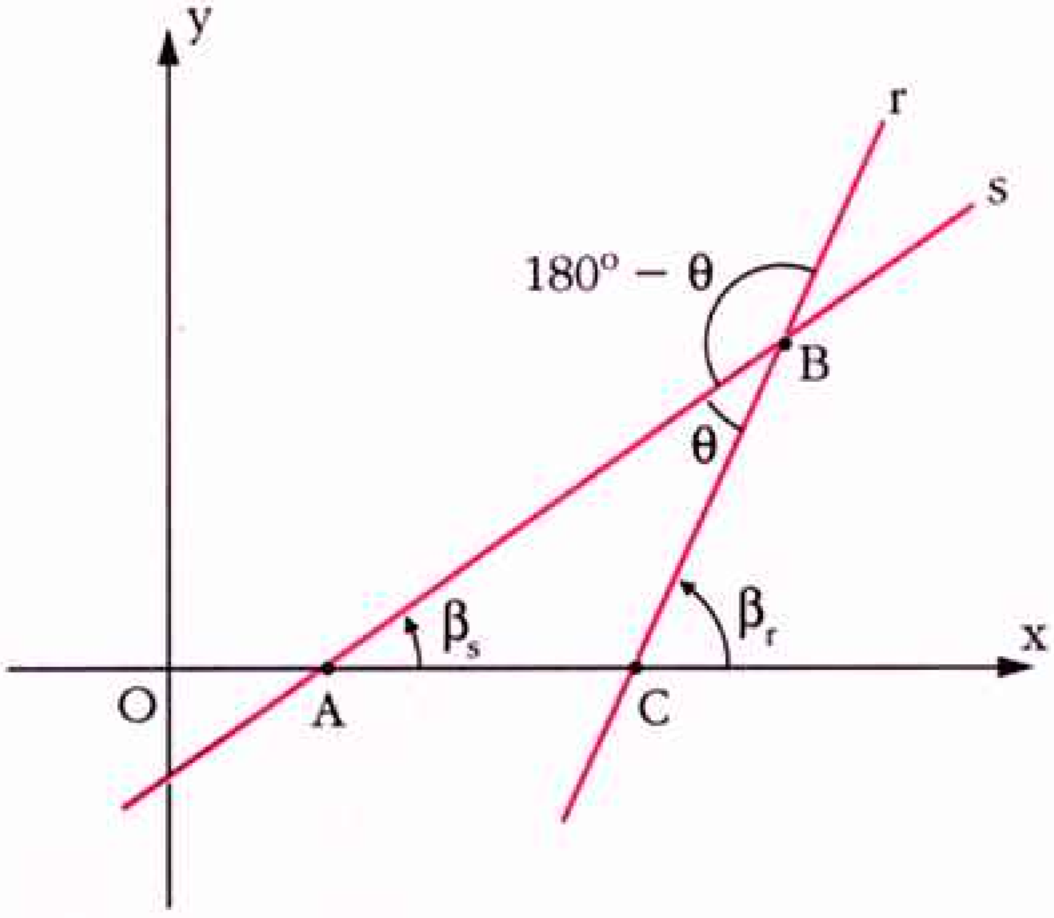
a) $3y + x = 6$
b) $3y - x = 12$
c) $3y + x = 18$
d) $3y + x = -6$
e) $3y - x = 18$

1347 Uma reta *r* determina, no primeiro quadrante do plano cartesiano, um triângulo isósceles, cujos vértices são a origem e os pontos onde a reta intercepta os eixos Ox e Oy. Se a área desse triângulo é 18, a equação de *r* é:

a) $x - y = 4$
b) $x - y = 16$
c) $x + y = 2$
d) $x + y = 4$
e) $x + y = 6$

Ângulo entre duas retas

Entre duas retas, *r* e *s*, concorrentes e não-perpendiculares, formam-se ângulos, dentre os quais determinaremos a medida θ.



Observando a figura, notamos que podemos aplicar o teorema do ângulo externo ao triângulo ABC.

$$\beta_r = \theta + \beta_s$$

$$\theta = \beta_r - \beta_s$$

$$\text{tg}\,\theta = \text{tg}\,(\beta_r - \beta_s) \text{ ou } \text{tg}\,\theta = \frac{\text{tg}\,\beta_r - \text{tg}\,\beta_s}{1 + \text{tg}\,\beta_r \cdot \text{tg}\,\beta_s}$$

Supondo r e s não verticais, fazemos $\text{tg}\ \beta_r = m_r$ e $\text{tg}\ \beta_s = m_s$, respectivamente coeficientes angulares das retas r e s. Então:

$$\boxed{\text{tg}\ \theta = \frac{m_r - m_s}{1 + m_r \cdot m_s}}$$

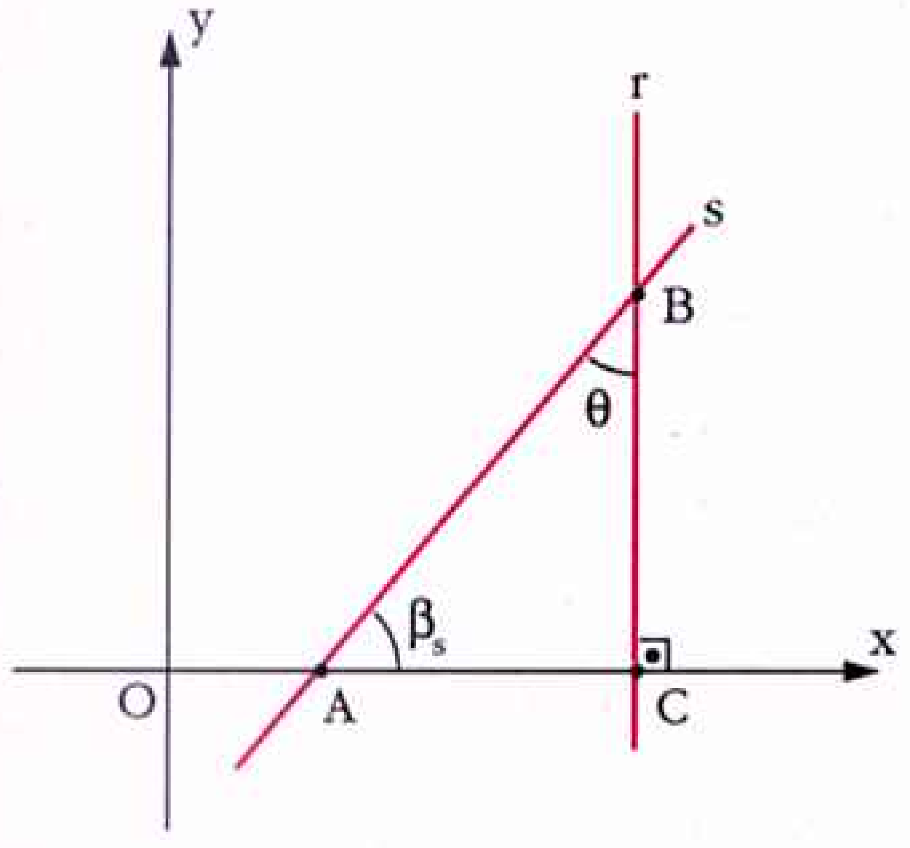
$\text{tg}\ \theta > 0 \Rightarrow \theta$ é a medida de um ângulo agudo

$\text{tg}\ \theta < 0 \Rightarrow \theta$ é a medida de um ângulo obtuso

Para obter a tangente do ângulo agudo, calculamos o módulo do 2º membro.

Note que se entre r e s se formar um ângulo $\theta = 90°$ (retas perpendiculares), o denominador se anula e esta fórmula perderá o sentido.

Um caso particular onde aplicaremos o teorema do ângulo externo, no triângulo ABC, o qual ocorre quando uma das retas r ou s é vertical.

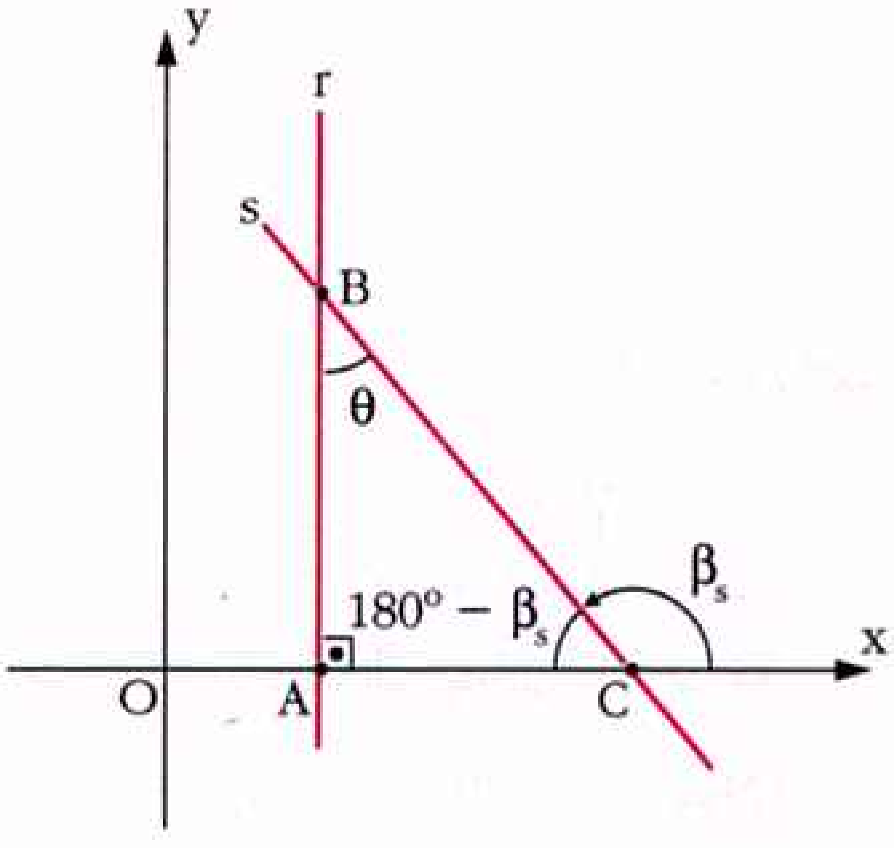


θ e β_s são medidas de ângulos complementares.

$$\text{tg}\ \theta = \frac{1}{\text{tg}\ \beta_s}$$

$$\text{tg}\ \theta = \frac{1}{m_s}$$

como $m_s > 0$, então $\text{tg}\ \theta > 0$



θ e $(180° - \beta_s)$ são medidas de ângulos complementares.

$$\text{tg}\ \theta = \frac{1}{\text{tg}\ (180° - \beta_s)}$$

$$\text{tg}\ \theta = -\frac{1}{\text{tg}\ \beta_s}$$

$$\text{tg}\ \theta = -\frac{1}{m_s}$$

como $m_s < 0$, então $\text{tg}\ \theta > 0$

Podemos resumir as duas situações escrevendo:

$$\boxed{\text{tg}\ \theta = \frac{1}{|\ m_s\ |}}$$

Exemplo:

O ângulo formado entre as retas (r) $2x - y - 2 = 0$ e (s) $x - 3y + 6 = 0$ mede 45°. Veja:

$$m_r = -\frac{a}{b} = -\frac{2}{-1} = 2$$

$$m_s = -\frac{a}{b} = -\frac{1}{-3} = \frac{1}{3}$$

Cálculo de θ.

$$\text{tg}\,\theta = \frac{m_r - m_s}{1 + m_r \cdot m_s} \Rightarrow \text{tg}\,\theta = \frac{2 - \frac{1}{3}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{3}} = 1$$

O ângulo $\theta = 45°$.

Exercícios

Resolvidos

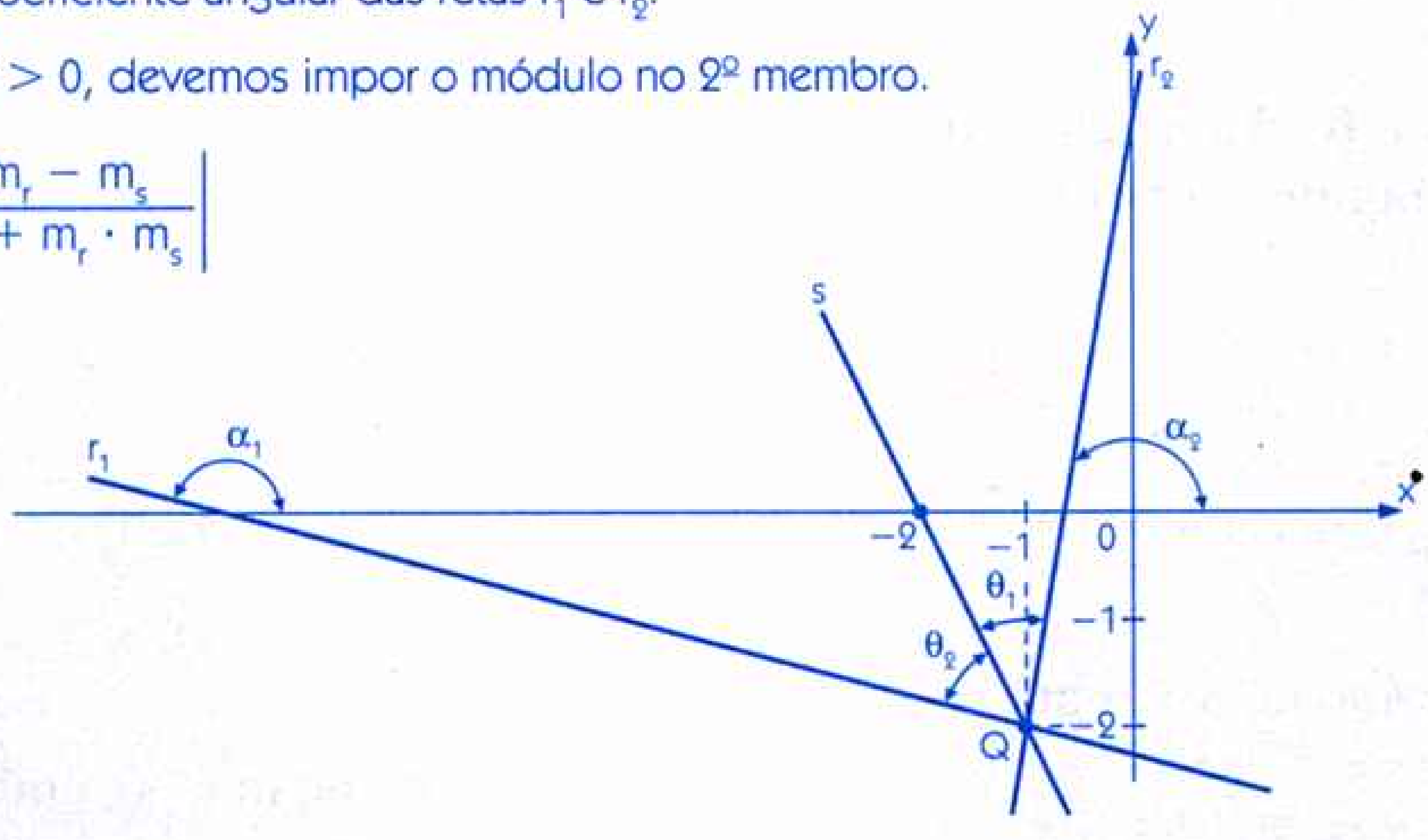
1 Determinar a equação de uma reta *r* que forma um ângulo de 45° com a reta (s) $2x + y + 4 = 0$ e passa pelo ponto $Q(-1, -2)$.

O problema admite duas soluções:

- cálculo do coeficiente angular das retas r_1 e r_2.

Como tg 45° > 0, devemos impor o módulo no 2º membro.

$$\text{tg}\,45° = \left|\frac{m_r - m_s}{1 + m_r \cdot m_s}\right|$$



$$\pm 1 = \frac{m_r - (-2)}{1 + m_r \cdot (-2)} \begin{cases} 1 - 2m_{r_1} = m_{r_1} + 2 \Rightarrow m_{r_1} = -\frac{1}{3} \\ -1 + 2m_{r_2} = m_{r_2} + 2 \Rightarrow m_{r_2} = 3 \end{cases}$$

$m_{r_1} = -\frac{1}{3}$ ou $m_{r_2} = 3$

- equação da reta r_1

$y - y_Q = m_{r_1}(x - x_Q)$

$y - (-2) = -\frac{1}{3}(x - (-1))$

$3y + 6 = -x - 1$

$x + 3y + 7 = 0$

- equação da reta r_2

$y - y_Q = m_{r_2}(x - x_Q)$

$y - (-2) = 3(x - (-1))$

$y + 2 = 3x + 3$

$3x - y + 1 = 0$

2 Determinar o ângulo agudo θ formado pelas retas (r) $2x - 9 = 0$ e (s) $-\sqrt{3}x + y - 2 = 0$.

A reta *r* não tem coeficiente angular.

Cálculo do coeficiente angular m_s da reta *s*: $m_s = -\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

$\text{tg}\ \theta = \frac{1}{|m_s|} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \theta = 30°$

Propostos

1348 Determine a medida θ do ângulo agudo formado entre as retas (r) $x - 5 = 0$ e (s) $y = \frac{\sqrt{3}x + 1}{3}$.

1349 Considere as retas (r) $4x + 3y - 8 = 0$ e (s) $x + 7y - 27 = 0$ e determine a medida do ângulo agudo formado entre elas.

1350 Determine a equação da reta *r* que passa pelo ponto Q(6, 3) e forma um ângulo $\theta = 45°$ com a reta (s) $-3x + 4y + 6 = 0$.

1351 (Mack-SP) O ângulo agudo que as retas $y = x - 1$ e $y = 3$ determinam, possui uma tangente igual a:

a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
b) $\sqrt{3}$
c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
d) $\sqrt{2}$
e) 1

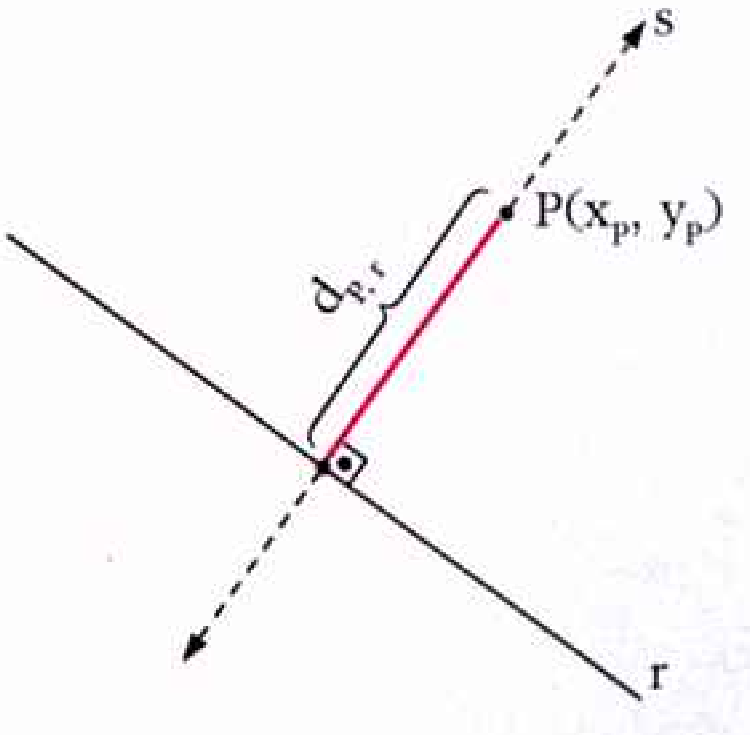
1352 (CTA-SP) Os ângulos formados pelas retas $3x - y - 10 = 0$ e $2x + y - 6 = 0$ medem:

a) 60° e 120°
b) 30° e 150°
c) 0° e 180°
d) 135° e 45°
e) 90° e 90°

Distância entre ponto e reta

A distância entre o ponto $P(x_P, y_P)$ e a reta (r) $ax + by + c = 0$, pode ser calculada com a utilização da fórmula:

$$\boxed{d_{P,r} = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$



Exemplo:

A distância entre o ponto P(2, 1) e a reta (r) $3x + 4y + 7 = 0$ é calculada considerando $a = 3, b = 4, c = 7, x_0 = 2, y_0 = 1$ e substituindo na fórmula da distância do ponto *P* à reta *r*.

$$d_{P,r} = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$d_{P,r} = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 7|}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$$

$$d_{P,r} = \frac{|6 + 4 + 7|}{\sqrt{25}} = \frac{17}{5}$$

$$d_{P,r} = \frac{17}{5}$$

Exercícios

Resolvidos

1 Calcular a altura do triângulo ABC, relativa ao vértice *A*. São dados A(6, 5), B(0, 3) e C(4, 0).

Inicialmente vamos determinar a equação da reta *r*, suporte do lado $\overleftrightarrow{BC}$ do triângulo.

$$D = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3x + 4y - 12 \longrightarrow (r)\ 3x + 4y - 12 = 0$$

A distância *d*, entre o vértice A(6, 5) e a reta *r*, é dada por:

$$d = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$d = \frac{|3 \cdot 6 + 4 \cdot 5 - 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$$

$$d = \frac{|18 + 20 - 12|}{\sqrt{25}} = \frac{26}{5}$$

$$d = \frac{26}{5}$$

2 Obter a distância entre duas retas paralelas (r) $2x + 3y - 6 = 0$ e (s) $4x + 6y + 7 = 0$.

Para obter a distância entre duas retas paralelas, basta determinar um ponto qualquer de uma delas e, posteriormente, calcular a distância desse ponto à outra reta.

Cálculo de um ponto qualquer *P*, da reta *r*

para $x = 0 \longrightarrow 2 \cdot 0 + 3y - 6 = 0$

$3y = 6 \Rightarrow y = 2$

portanto P(0, 2).

Cálculo da distância de P(0, 2) a (s) $4x + 6y + 7 = 0$

$$d = \frac{|4 \cdot 0 + 6 \cdot 2 + 7|}{\sqrt{4^2 + 6^2}} = \frac{19}{\sqrt{52}}$$

$$d = \frac{19}{\sqrt{52}} = \frac{19}{\sqrt{52}} \cdot \frac{\sqrt{52}}{\sqrt{52}} = \frac{19\sqrt{52}}{52} = \frac{19 \cdot 2\sqrt{13}}{52} \longrightarrow d = \frac{19 \cdot \sqrt{13}}{26}$$

Propostos

1353 Determine a distância entre o ponto *P* e a reta *r*, nos casos abaixo:

a) P(3, 1), (r) $3x - 4y + 5 = 0$

b) P(2, −2), (r) $3x - 2y + 1 = 0$

c) P(0, 0), (r) $5x + 2y - 7 = 0$

d) P(2, 3), (r) $2x + y - 7 = 0$

1354 Calcule a altura, relativa ao vértice *A*, do triângulo ABC, cuja base é formada pelos vértices *B* e *C*, nos seguintes casos:

a) A(−5, −5), B(0, −3) e C(−4, 0)

b) A(1, 2), B(6, 2) e C(5, 5)

1355 Obtenha a distância entre as retas paralelas *r* e *s*:

a) (r) $6x + 4y - 11 = 0$ e (s) $3x + 2y + 4 = 0$

b) (r) $-x + y + 1 = 0$ e (s) $x - y + 4 = 0$

1356 (PUC-SP) Qual a distância da origem à reta de equação $3x - 4y = 10$?

a) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt{10}$ e) 2

b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) 1

1357 (PUC-SP) A distância do ponto P(1, 1) à reta de equações paramétricas $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + t \end{cases}$ é:

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ e) $\sqrt{\frac{2}{3}}$

b) 2 d) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

1358 (UFPR) A distância entre as retas paralelas $4x - 3y - 4 = 0$ e $4x - 3y - 14 = 0$ é igual a:

a) 2 c) 5 e) 18

b) 4 d) 10

1359 (UFPA) Os pontos pertencentes à reta $x - 1 = 0$, e que distam 3 unidades da reta $3x - 4y + 1 = 0$ são:

a) (1, 2) e (1, −3)

b) $\left(1, \frac{19}{4}\right)$ e $\left(1, -\frac{11}{4}\right)$

c) (1, −3) e (1, −2)

d) $\left(1, \frac{19}{4}\right)$ e $\left(1, \frac{13}{4}\right)$

e) (1, 2) e (1, 3)

1360 (EFEI-MG) Ache a distância entre as retas (r) $x + 2y + 3 = 0$ e (s) $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 2 - \frac{t}{2} \end{cases}$.

a) $\sqrt{5}$ d) $5\sqrt{2}$

b) 5 e) n.d.a.

c) $2\sqrt{5}$

1361 (Unesp) Sejam *A* e *B* pontos distintos da reta de equação $x = -3$, que distam duas unidades da reta de equação $x - 2y + 3 = 0$. O produto das ordenadas de *A* e *B* é:

a) −5 c) 0 e) 5

b) $-\sqrt{5}$ d) $\sqrt{5}$