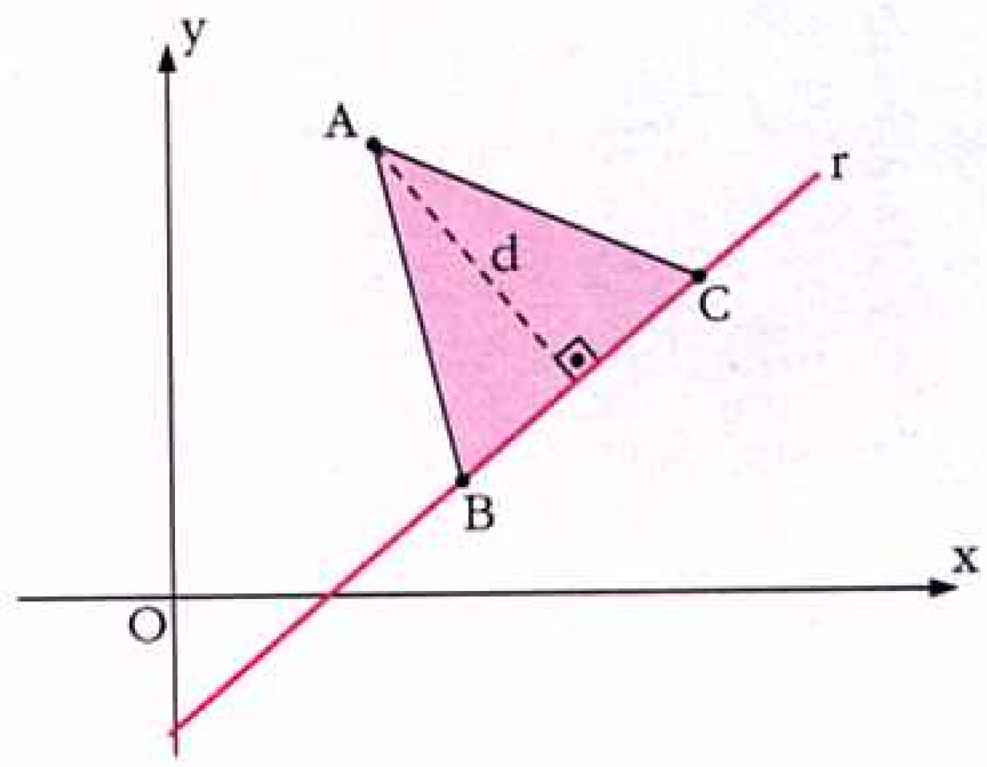
Área de um triângulo

A área de um triângulo ABC, cujos vértices são os pontos $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$, pode ser calculada da seguinte forma:

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\left|D\right|, \text{ onde } D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

ou

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{matrix} \right\|$$



Exemplo:

A área do triângulo ABC, dados A(2, 1), B(3, 2) e C(4, 0), é determinada substituindo as coordenadas dos vértices *A*, *B* e *C* no determinante.

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{matrix} \right\|$$

Calculando o determinante:

$$D = \left|\begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 0 \end{matrix} \qquad D = -3$$

$$-8 \quad 0 \quad -3 \quad 4 \quad 4 \quad 0$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot \left|-3\right| = \frac{3}{2} = 1{,}5 \text{ (unidades de área)}$$

Área = 1,5 (unidades de área)

Exercícios

Resolvidos

1 Dados os vértices $A(1, y_A)$, $B(2, -1)$ e $C(4, 1)$, determinar a ordenada y_A do vértice A de um triângulo, cuja área vale 4 unidades de área.

Substituindo as coordenadas dos vértices, temos:

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} 1 & y_A & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{matrix}\right\|$$

Resolvendo o determinante:

$$D = \begin{array}{|ccc|cc} 1 & y_A & 1 & 1 & y_A \\ 2 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & 4 & 1 \end{array} \qquad \Rightarrow \quad D = 2y_A + 4$$

$$4 \quad -1 \quad -2y_A \quad -1 \quad 4y_A \quad 2$$

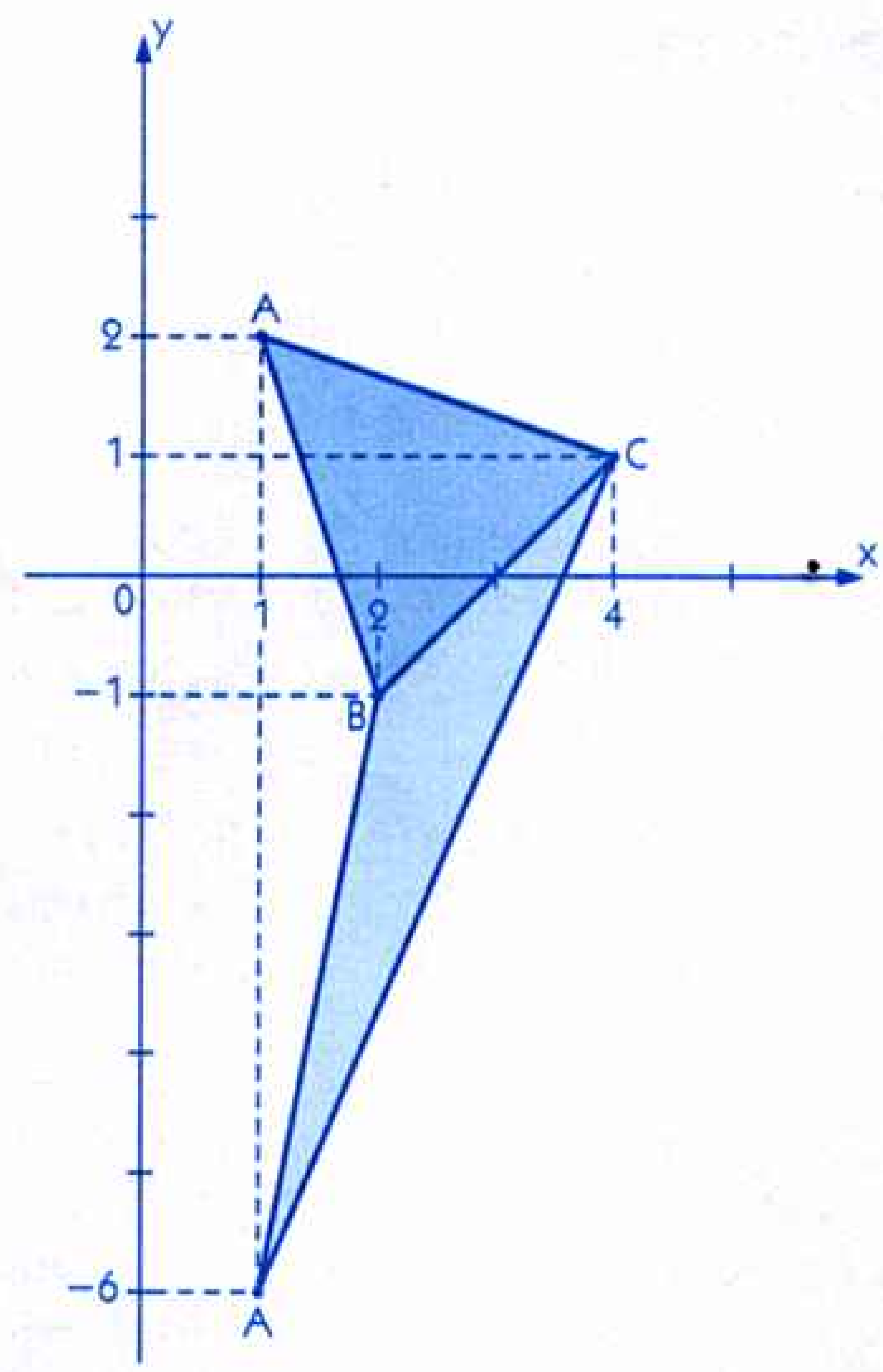
Considerando o valor da área igual a 4, temos:

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\left|2y_A + 4\right| \Rightarrow 4 = \frac{1}{2}\left|2y_A + 4\right| \Rightarrow 4 = \left|y_A + 2\right|$$

Na expressão $(y_A + 2)$, devemos considerar os valores positivo e negativo. Então:

$$4 = \pm(y_A + 2) \begin{cases} 4 = y_A + 2 \longrightarrow y_A = 2 \longrightarrow A(1, 2) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{ou} \\ 4 = -y_A - 2 \longrightarrow y_A = -6 \longrightarrow A(1, -6) \end{cases}$$

Observando a representação gráfica, percebemos que o vértice A pode pertencer ao 1º ou 4º quadrantes e a área permanecer com 4 unidades de área.



2 (Mack-SP) A área do triângulo determinada pela reta $y = x$, $x = 4$ e $x + y - 2 = 0$ é:

a) 4 b) 6 X c) 9 d) 12 e) 16

Os vértices dos triângulos são obtidos pela intersecção das retas.

- Chamamos de vértice *A* a intersecção entre:

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = x \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos A(4, 4).

- Chamamos de vértice *B* a intersecção entre:

$$\begin{cases} x = 4 \\ x + y - 2 = 0 \longrightarrow y = -2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos B(4, −2).

- Chamamos de vértice *C* a intersecção entre:

$$\begin{cases} y = x \\ x + y - 2 = 0 \longrightarrow x = 1 \text{ e } y = 1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos C(1, 1).

Portanto, a área do triângulo é dada por:

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} 4 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}\right\| \Rightarrow \text{Área} = \frac{1}{2}\left|-18\right| \Rightarrow \text{Área} = 9 \text{ (unidades de área)}$$

Propostos

1362 Determine a área dos triângulos cujos vértices têm as seguintes coordenadas:

a) A(1, 2), B(0, 1) e C(4, 5)

b) D(4, 3), E(0, 7) e F(2, 1)

c) G(3, −3), H(2, −1) e I(2, 2)

d) J(2, −3), L(1, 2) e M(4, 2)

1363 Determine a ordenada y_A de um dos vértices do triângulo ABC cuja área vale 8 unidades de área e os vértices são $A(1, y_A)$, B(2, 0) e C(3, 4).

1364 Dados os vértices A(8, 3), $B(x_B, 7)$ e C(2, 1), determine a abscissa x_B de um dos vértices desse triângulo cuja área vale 32 unidades de área.

1365 (UFPA) A área de um triângulo é 12. Dois de seus vértices são (−1, −2) e (2, 3). Sabendo-se que o terceiro vértice está sobre reta $2x + y = 2$, suas coordenadas podem ser:

a) $\left(-\frac{10}{11}, \frac{21}{11}\right)$ d) (−1, 4)

b) $\left(-\frac{13}{11}, \frac{48}{11}\right)$ e) $\left(-\frac{17}{11}, \frac{56}{11}\right)$

c) $\left(-\frac{17}{5}, \frac{44}{5}\right)$

1366 (UFRGS) O ponto *A* de intersecção das retas $x - y - 4 = 0$ e $x + y + 2 = 0$ e os pontos *B* e *C* de intersecção das mesmas retas com o eixo dos *x* são vértices do triângulo ABC de área:

a) 1 b) 6 c) 9 d) 12 e) 18

1367 (FGV-SP) A área do paralelogramo definido pelas retas $y - 2x = 0$, $y - 2x - 2 = 0$, $x = 0$ e $x = 2$ é:

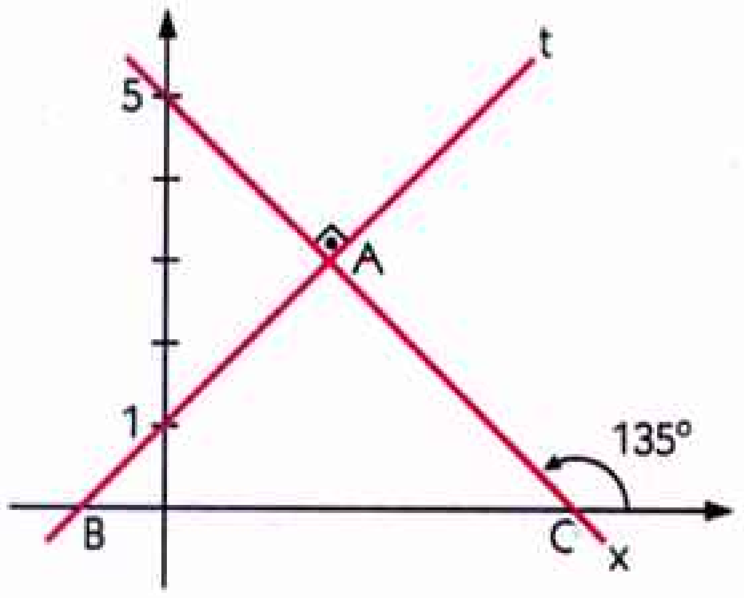
a) 2 b) 4 c) 16 d) 1 e) 8

1368 (UFMT) As retas de equações $y = 2x$, $y = \frac{x}{2}$ e $x = 4$ determinam um triângulo cuja área é:

a) 8 b) 10 c) 12 d) 16 e) 18

1369 (UFU-MG) Considerando o gráfico abaixo, podemos afirmar que a área do $\triangle ABC$ (triângulo ABC) é:

a) 6
b) 9
c) 12
d) 13
e) 18



1370 (UFMG) A área de um quadrado que tem A = (4, 8) e B = (−2, 2) como vértices opostos é:

a) 36
b) 20
c) 18
d) 16
e) 12

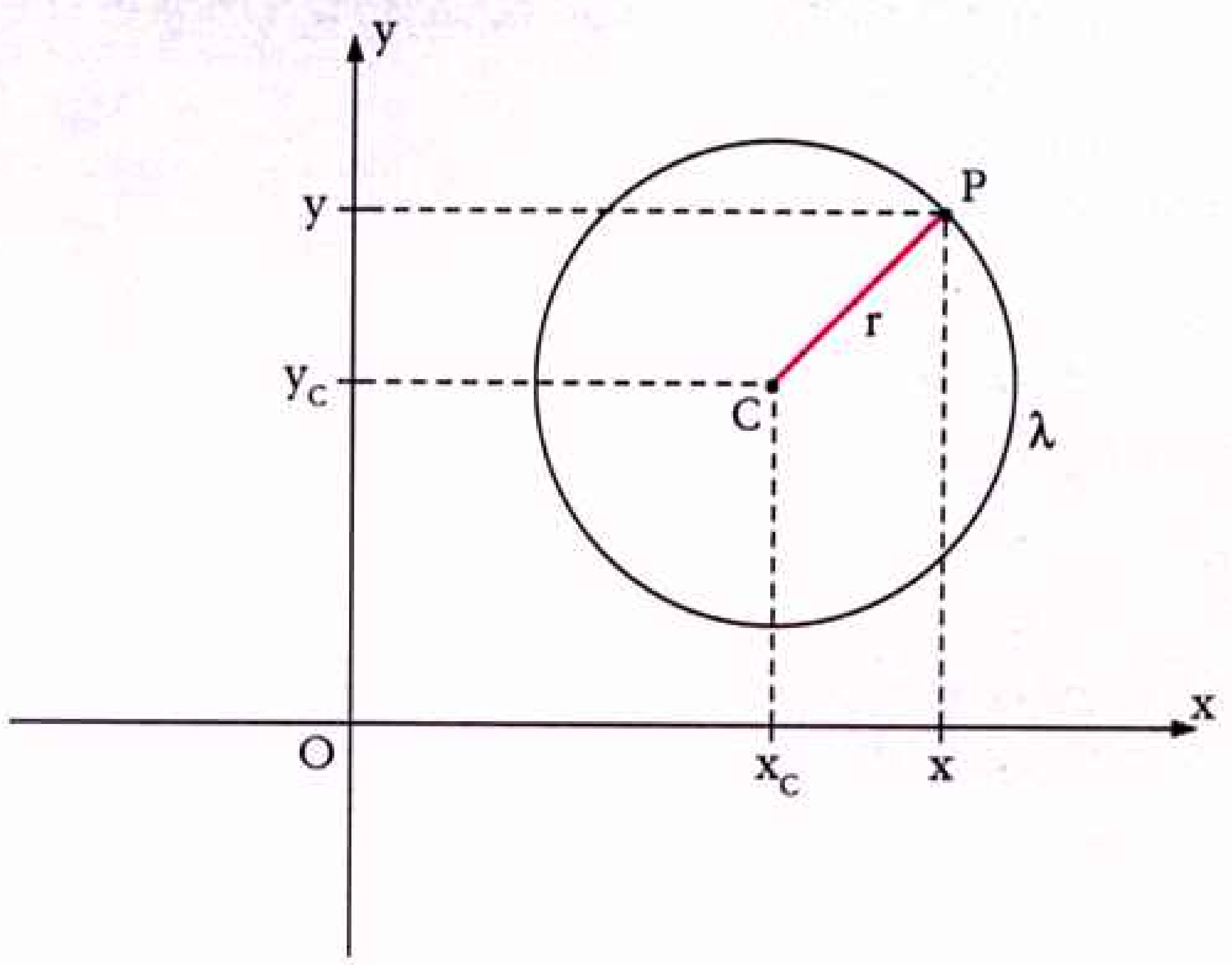
1371 (Fuvest-SP) Uma reta de coeficiente angular $m < 0$ passa pelo ponto P = (1, 2).

a) Escreva a equação da reta para $m = -1$.
b) Calcule *m* de modo que a reta forme com os eixos um triângulo de área 4.

3. Circunferência

Equação reduzida da circunferência

Considerando uma circunferência λ, de raio *r* e centro $C(x_C, y_C)$ num plano α, podemos obter a sua equação reduzida.



Se um ponto qualquer P(x, y) pertencer à circunferência, então:

$$d_{PC} = r$$

$$\sqrt{(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2} = r$$

$$\boxed{(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2, \text{ onde } x_C \text{ e } y_C \text{ são as coordenadas do centro e } r \in \mathbb{R}_+^* \text{ é a medida do raio.}}$$

▶ Com "circunferência de raio *r*" queremos dizer "circunferência com raios de medida *r*".

Exemplo:

A equação reduzida da circunferência que tem raio $r = 2$ e centro $C\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ é obtida substituindo o valor de *r* e as coordenadas de centro *C* na equação reduzida:

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2$$

$$(x + 1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 2^2$$

$$(x + 1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 4$$

Exercícios

Resolvidos

1 Calcular o raio e o centro da circunferência, cuja equação reduzida é:
$(\lambda)\ (x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$

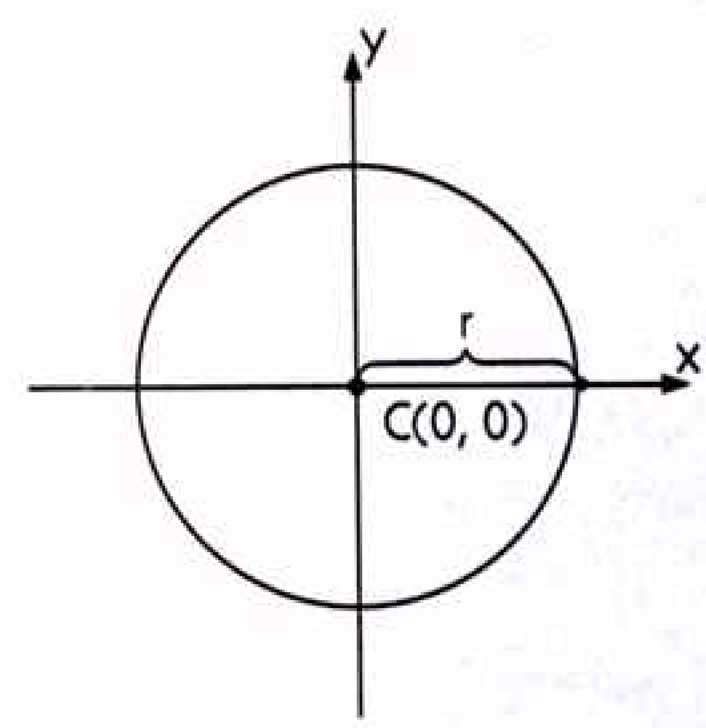
Comparando as equações $(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2$
$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 4^2$

temos: $x_C = 3$; $y_C = -1$ e $r^2 = 4 \Rightarrow r = 2$

portanto, $r = 2$ e $C(3, -1)$

2 Determinar a equação reduzida da circunferência que tem o centro sobre a origem e raio igual a:

a) *r*
b) 6



a) O centro está sobre a origem C(0, 0) e o raio é *r*, então:

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2$$
$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = r^2$$
$$x^2 + y^2 = r^2$$

b) O centro é C(0, 0) e o raio $r = 6$, portanto:

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2$$
$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 6^2$$
$$x^2 + y^2 = 36$$

3 (Mack-SP) Sabendo que o segmento de extremidades P(2, 8) e Q(4, 0) é diâmetro de uma circunferência, determinar a equação dessa circunferência.

Se um diâmetro da circunferência tem extremidades em *P* e *Q*, o ponto médio de $\overline{PQ}$ representa o centro $C(x_C, y_C)$ da circunferência.

$$\left.\begin{aligned} x_C &= \frac{x_P + x_Q}{2} = \frac{2+4}{2} = 3 \\ y_C &= \frac{y_P + y_Q}{2} = \frac{8+0}{2} = 4 \end{aligned}\right\} C(3, 4)$$

O raio é obtido pelo cálculo da distância entre o centro C(3, 4) e um dos extremos P(2, 8).

$$r = \sqrt{(x_P - x_C)^2 + (y_P - y_C)^2} \Rightarrow r = \sqrt{(2-3)^2 + (8-4)^2} \Rightarrow r = \sqrt{17}$$

Substituindo os valores de C(3, 4) e o raio $r = \sqrt{17}$ na equação reduzida da circunferência, temos:

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2 \Rightarrow (x-3)^2 + (y-4)^2 = \left(\sqrt{17}\right)^2 \Rightarrow (x-3)^2 + (y-4)^2 = 17$$

Propostos

1372 Determine a equação reduzida da circunferência que tem raio *r* e centro *C*, em cada caso:

a) $r = 3$ e $C(3, 3)$

b) $r = 1$ e $C(1, 1)$

c) $r = 1$ e $C(-3, -2)$

d) $r = 3$ e $C(1, 2)$

e) $r = 3$ e $C(0, 0)$

f) $r = 1$ e $C\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

1373 Calcule o raio e o centro das circunferências com as seguintes equações reduzidas:

a) $(x+2)^2 + (y+2)^2 = 25$

b) $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 9$

c) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$

d) $(x+3)^2 + (y+2)^2 = 1$

e) $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 75$

f) $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$

g) $x^2 + y^2 = 16$

h) $x^2 + y^2 = 25$

1374 Determine o ponto em que a circunferência (λ) $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 4$ intercepta o eixo Oy.

1375 Determine o ponto em que a circunferência (λ) $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 25$ intercepta o eixo Ox.

1376 (Unifor-CE) O centro e o raio de uma circunferência de equação $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$ são, respectivamente:

a) (4, 9) e 2

b) (−2, −3) e 2

c) (2, 3) e 4

d) (−2, −3) e 4

e) (2, 3) e 2

1377 (PUC-RS) O ponto P(−3, b) pertence à circunferência de centro C(0, 3) e raio r = 5. Quais os valores de *b*?

a) −14 e 20

b) −20 e 14

c) 8 e 2

d) −7 e 1

e) 7 e −1

1378 (Mack-SP) A equação da circunferência de centro no ponto médio do segmento de extremos A(−1, 8) e B(7, −2) e raio 5 é:

a) $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 25$

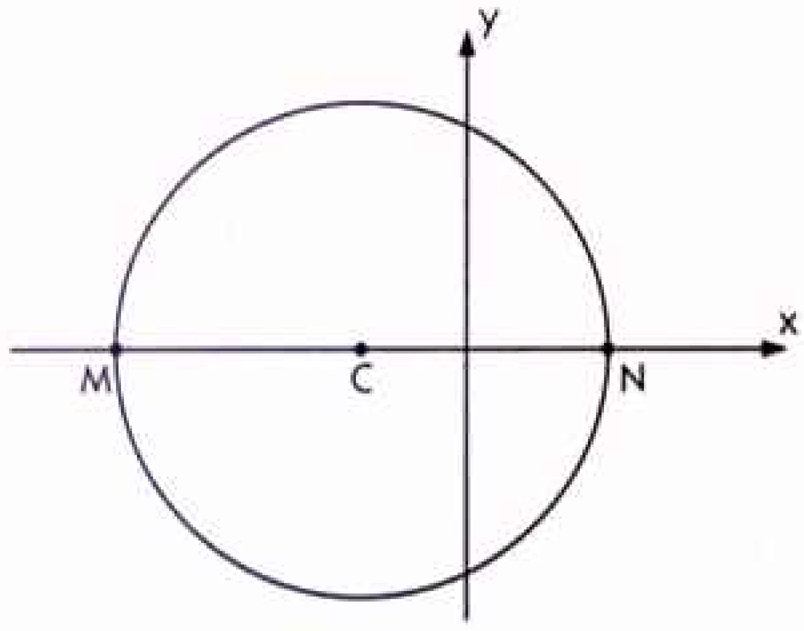
b) $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 25$

c) $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 5$

d) $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 5$

e) $(x+3)^2 + (y+3) = 25$

1379 (UFBA) Sendo M(−5, 0) e N(1, 0), a equação da circunferência abaixo é:



a) $(x + 2)^2 + y^2 = 9$
b) $(x - 2)^2 + y^2 = 9$
c) $x + (y - 2)^2 = 9$
d) $(x - 2)^2 + y^2 = 4$
e) $x^2 + y^2 = 4$

1380 (FEI-SP) Encontre a equação da circunferência que passa pelo ponto A(1, 1) com centro C(2, 1).

1381 (UFES) A circunferência que passa pelos pontos (5, 3), (6, 2) e (3, −1) tem centro e raio, respectivamente:

a) (1, 4) e 5
b) (4, −1) e $\sqrt{5}$
c) (1, 4) e $\sqrt{5}$
d) (4, 1) e 5
e) (4, 1) e $\sqrt{5}$

1382 (UFMG) Determine a equação da circunferência na qual os pontos $A = (2, -\sqrt{3})$ e $B = (0, \sqrt{3})$ são diametralmente opostos.

Equação geral da circunferência

A partir da equação reduzida de uma circunferência λ, de raio *r* e centro $C(x_C, y_C)$, podemos chegar à equação geral da circunferência. Veja:

$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2$

$x^2 - 2xx_C + x_C^2 + y^2 - 2yy_C + y^2 - r^2 = 0$

$$\boxed{x^2 + y^2 - 2x_Cx - 2y_Cy + \underbrace{(x_C^2 + y_C^2 - r^2)}_{F} = 0}$$

Na equação geral da circunferência:

- o termo independente é $F = x_C^2 + y_C^2 - r^2$
- o raio é $r = \sqrt{x_C^2 + y_C^2 - F}$, sendo $r > 0$
- a equação geral da circunferência é do 2º grau em *x* e em *y*
- os coeficientes de x^2 e y^2 são iguais e diferentes de zero
- não apresenta o termo xy, isto é, podemos considerar que o seu coeficiente é zero

Exemplos:

a) $x^2 + y^2 + 4x - 2\sqrt{2}y - 19 = 0$ representa a circunferência de centro $C(-2, \sqrt{2})$ e raio 5

b) $x^2 + y^2 - 10x - 96 = 0$ representa a circunferência de centro C(5, 0) e raio 11

Exercícios

Resolvido

1 Calcular o raio *r* e o centro da circunferência, cuja equação geral é:

a) $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$

b) $2x^2 + 2y^2 - 4x + 12y - 24 = 0$

a) Comparando as equações, temos:

$$x^2 + y^2 - 2x_C x - 2y_C y + F = 0$$
$$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$$

$$\text{logo: } \begin{cases} -2x_C = -2 \Rightarrow x_C = 1 \\ -2y_C = -2 \Rightarrow y_C = 1 \\ F = 1 \end{cases}$$

$$r = \sqrt{x_C^2 + y_C^2 - F}$$

$$r = \sqrt{1^2 + 1^2 - 1}$$

$$r = 1$$

concluindo: $r = 1$ e $C(1, 1)$

b) Dividindo a equação por dois, temos:
$x^2 + y^2 - 2x + 6y - 12 = 0.$

Comparando as equações:

$$x^2 + y^2 - 2x_C x - 2y_C y + F = 0$$
$$x^2 + y^2 - 2x + 6y - 12 = 0$$

$$\text{logo: } \begin{cases} -2x_C = -2 \Rightarrow x_C = 1 \\ -2y_C = 6 \Rightarrow y_C = -3 \\ F = -12 \end{cases}$$

$$r = \sqrt{x_C^2 + y_C^2 - F}$$

$$r = \sqrt{1^2 + (-3)^2 - (-12)}$$

$$r = \sqrt{1 + 9 + 12} \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{22}$$

portanto, $r = \sqrt{22}$ e $C = (1, -3)$

Propostos

1383 Determine, se existir, o raio e o centro da circunferência, em cada caso:

a) $x^2 + y^2 - x - y + 1 = 0$

b) $x^2 + y^2 + 2x - y - \frac{1}{4} = 0$

c) $3x^2 + 3y^2 - 9 = 0$

d) $2x^2 + 2y^2 + 8y = 0$

e) $2x^2 + 2y^2 + 8x + 8y + 16 = 0$

f) $3x^2 + 3y^2 - 18x - 18y + 27 = 0$

1384 Identifique se as equações a seguir representam uma circunferência. Em caso positivo, dê o raio e o centro de cada uma.

a) $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$

b) $x^2 + y^2 - 8x - 8y + 24 = 0$

c) $3x^2 + 3y^2 - xy + 1 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 15 = 0$

1385 (PUC-RJ) O centro da circunferência de equação $x^2 + y^2 + 16x - 4y + 12 = 0$ é o ponto de coordenadas:

a) $(-8, 2)$ c) $(8, -2)$ e) $(4, -1)$

b) $(-16, 4)$ d) $(16, -4)$

1386 Se o ponto (a, b) é o centro da circunferência de equação $x^2 + y^2 + 3x - 4y + 2 = 0$, o ponto $(a, -b)$ pertence ao:

a) primeiro quadrante

b) segundo quadrante

c) terceiro quadrante

d) eixo das abscissas

e) eixo das ordenadas

1387 (UFPR) Em coordenadas cartesianas ortogonais, a equação: $2x^2 + 2y^2 - 4x + 2y = 0$ representa, no plano, uma circunferência de:

a) centro no ponto $(-2, 1)$ e raio $= \sqrt{5}$

b) centro no ponto $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ e raio $= \sqrt{5}$

c) centro no ponto $(2, 1)$ e raio $= 5$

d) centro no ponto $(2, -1)$ e raio $= \frac{\sqrt{5}}{2}$

e) centro no ponto $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$ e raio $= \frac{\sqrt{5}}{2}$

1388 (ITA-SP) No sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, a equação $x^2 + y^2 = ax + by$, onde *a* e *b* são números reais não-nulos, representa a seguinte curva:

a) circunferência de raio $\sqrt{\dfrac{a^2 + b^2}{2}}$

b) circunferência de raio $\sqrt{a^2 + b^2}$

c) circunferência de raio $\dfrac{a + b}{2}$

d) parábola de vértice no ponto (a, b)

e) elipse com semi-eixos de comprimentos $\dfrac{a}{2}, \dfrac{b}{2}$

1389 (FGV-SP) A equação da circunferência que passa pelos pontos (3, 3) e (−1, 3) e cujo centro está no eixo das abscissas é:

a) $x^2 + y^2 = 1$

b) $x^2 + y^2 + 4x = 46$

c) $(x - 1)^2 + y^2 = 25$

d) $x^2 + y^2 - 2y = 10$

e) $x^2 + y^2 - 2x = 12$

1390 (Cescem-SP) O raio da circunferência $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$ é igual a:

a) 2

b) $\sqrt{3}$

c) 3

d) 4

e) 16

1391 (UFPA) O maior valor inteiro de *p* para que a equação $x^2 + y^2 - 6x + 4y + p = 0$ represente uma circunferência é:

a) 8

b) 10

c) 11

d) 12

e) 15

1392 (UA) A circunferência $x^2 + y^2 + 5x + 4y + a = 0$ determina no eixo Ox uma corda de comprimento 3. Calcule *a*:

a) 4

b) $\dfrac{1}{4}$

c) 2

d) $\dfrac{1}{2}$

Posições do ponto em relação à circunferência

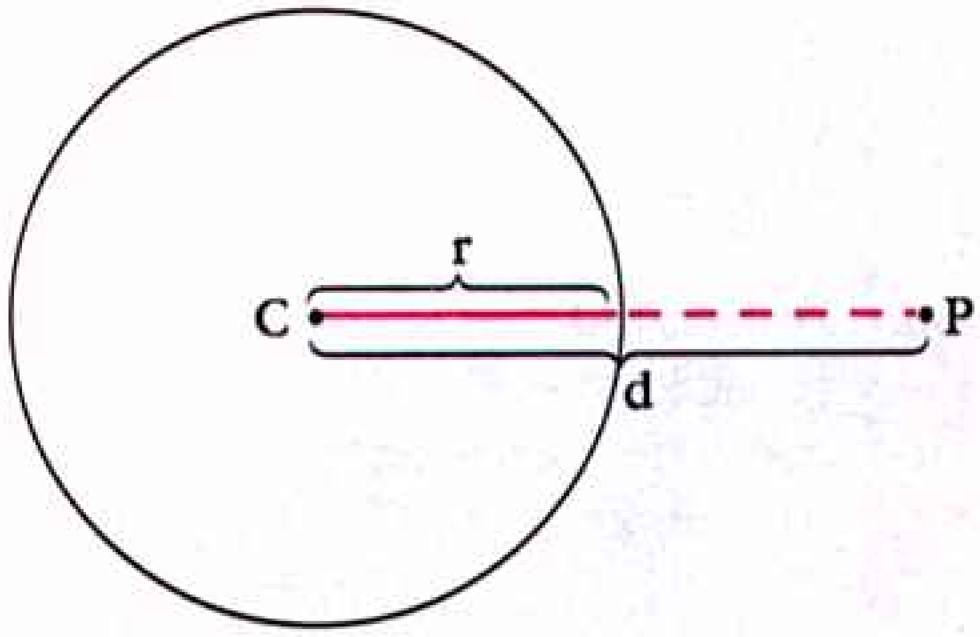
Em relação a uma circunferência λ de centro $C(x_C, y_C)$ e raio *r*, um ponto P(x, y) pode ser externo, interno ou pertencer à circunferência.

Para identificar cada uma dessas posições, basta substituir as coordenadas do ponto *P* no 1º membro da equação geral da circunferência, que corresponde à expressão $(d^2 - r^2)$, onde *d* é a distância de *P* ao centro. Obtém-se, assim, um valor numérico *n*, onde verifica-se uma das seguintes situações:

1ª situação

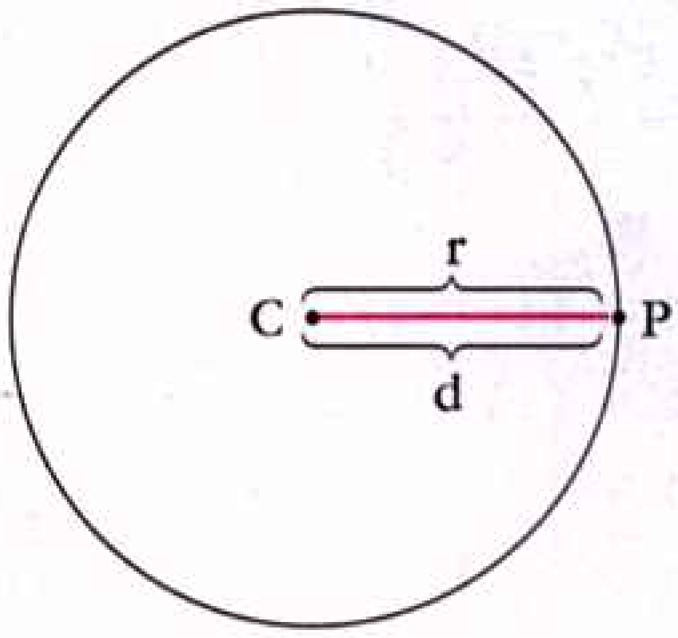
Se $n > 0$, então o ponto *P* é externo à circunferência, pois $n > 0$ equivale a $d^2 - r^2 > 0$ ou $d^2 > r^2$ ou, ainda, a $d > r$.

$\boxed{n > 0 \Rightarrow P \text{ é externo à } \lambda}$



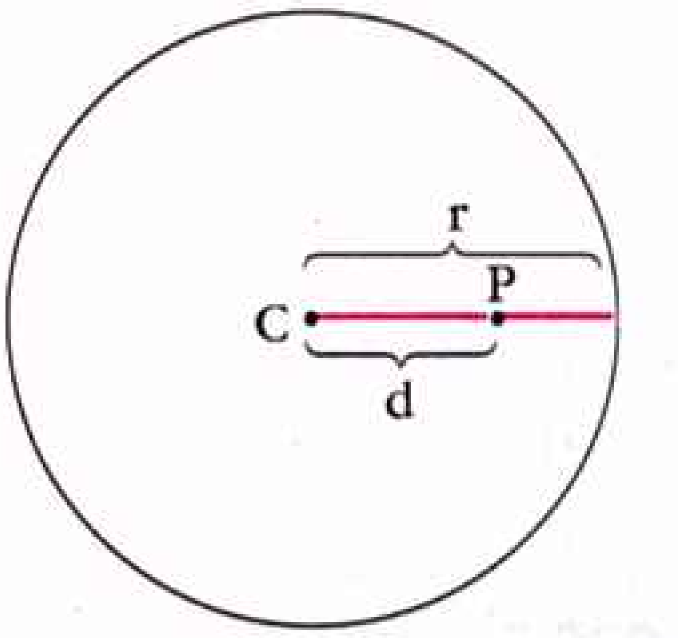
2ª situação Se $n = 0$, então o ponto P pertence à circunferência, pois $n = 0$ equivale a $d^2 - r^2 = 0$ ou a $d^2 = r^2$ ou, ainda, a $d = r$.

$\boxed{n = 0 \Rightarrow P \text{ pertence à } \lambda}$



3ª situação Se $n < 0$, então o ponto P é interno à circunferência, pois $n < 0$ equivale a $d^2 - r^2 < 0$ ou a $d^2 < r^2$ ou, ainda, a $d < r$.

$\boxed{n < 0 \Rightarrow P \text{ é interno à } \lambda}$



Exemplos:

Identificamos a posição do ponto P em relação à circunferência λ nos casos:

a) $P(2, 0)$ e (λ) $(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 25$

$$(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 25$$

$$\underbrace{(x + 2)^2 + (y - 5)^2 - 25}_{d^2 - r^2} = 0$$

$$n = (2 + 2)^2 + (0 - 5)^2 - 25$$

$$n = 4^2 + (-5)^2 - 25$$

$$n = 16 + 25 - 25$$

$$n = 16$$

Como $n > 0$, concluímos que P é externo à circunferência λ.

b) $P(3, 5)$ e $(\lambda)\ (x - 2)^2 + (y - 7)^2 = 36$

$$(x - 2)^2 + (y - 7)^2 = 36$$
$$\underbrace{(x - 2)^2 + (y - 7)^2 - 36}_{d^2 - r^2} = 0$$

$$n = (3 - 2)^2 + (5 - 7)^2 - 36$$
$$n = (1)^2 + (2)^2 - 36$$
$$n = 1 + 4 - 36$$
$$n = -31$$

Como $n < 0$, concluímos que *P* é interno à circunferência λ.

c) $P(1, -1)$ e $(\lambda)\ (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$$
$$\underbrace{(x - 1)^2 + (y - 2)^2 - 9}_{d^2 - r^2} = 0$$

$$n = (1 - 1)^2 + (-1 - 2)^2 - 9$$
$$n = (0)^2 + (-3)^2 - 9$$
$$n = 0 + 9 - 9$$
$$n = 0$$

Concluímos que *P* pertence à circunferência λ.

Exercícios

Resolvido

Representar graficamente no plano as seguintes desigualdades:

a) $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 > 9$

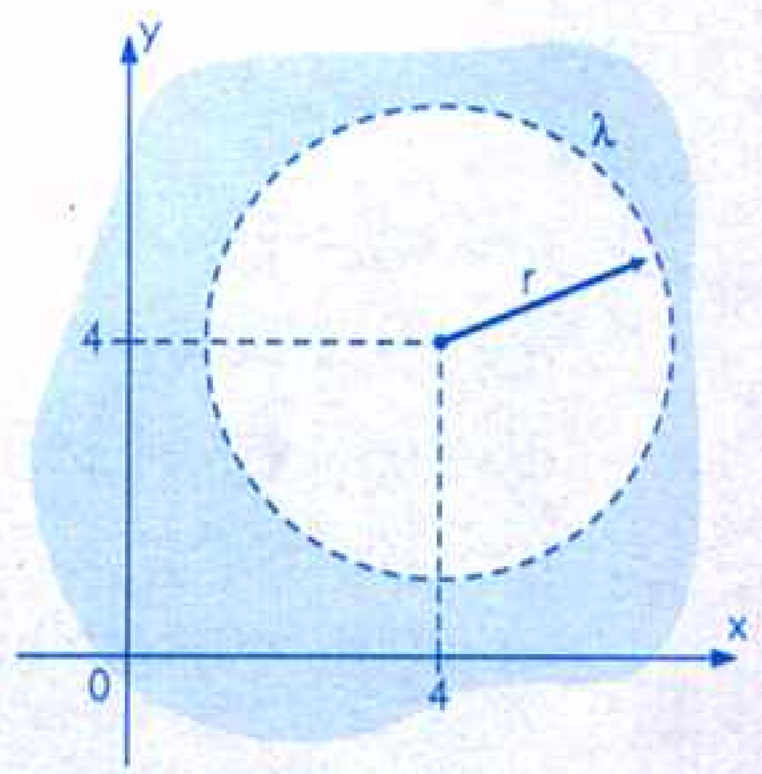
b) $x^2 + y^2 + 2x + 4y \geq -1$

c) $x^2 + y^2 < 49$

d) $x^2 + y^2 + 4y \leq 0$

a) $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 > 9 \Rightarrow \underbrace{(x - 4)^2 + (y - 4)^2 - 9 > 0}_{d^2 - r^2 > 0}$

(condição de ponto externo a uma circunferência)



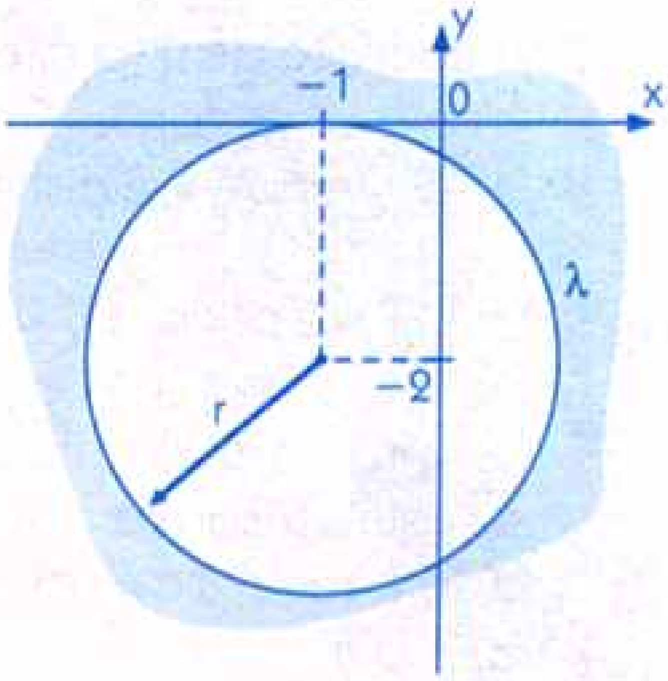
Consideramos a igualdade $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 3^2$ na qual identificamos a circunferência λ de raio $r = 3$ e o centro $C(4, 4)$. Em seguida, após construir o gráfico, impomos a condição da desigualdade, pintando apenas a região externa a λ.

b) $x^2 + y^2 + 2x + 4y \geq -1 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2x + 4y + 1 \geq 0$

Consideramos a igualdade $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 1 = 0$ na qual identificamos a circunferência λ de raio $r = 2$ e o centro $C(-1, -2)$.

Então, $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 1 \geq 0$ nos dá a condição $(d^2 - r^2 \geq 0)$ de pontos externos ou pertencentes a λ.

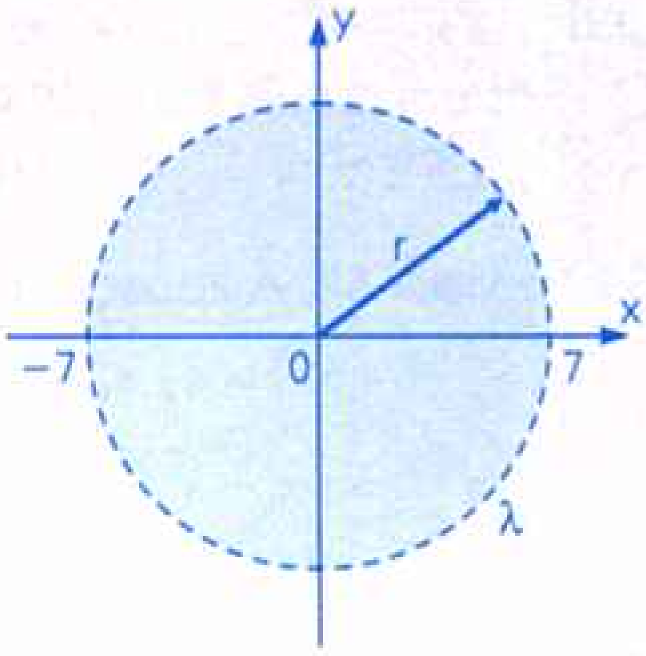
Em seguida, construímos o gráfico e impomos a condição da desigualdade, pintando λ e a região externa a ela.



c) $x^2 + y^2 < 49 \Rightarrow x^2 + y^2 - 49 < 0$

Consideramos a igualdade $x^2 + y^2 = 7^2$ na qual identificamos a circunferência λ de raio $r = 7$ e o centro $C(0, 0)$.

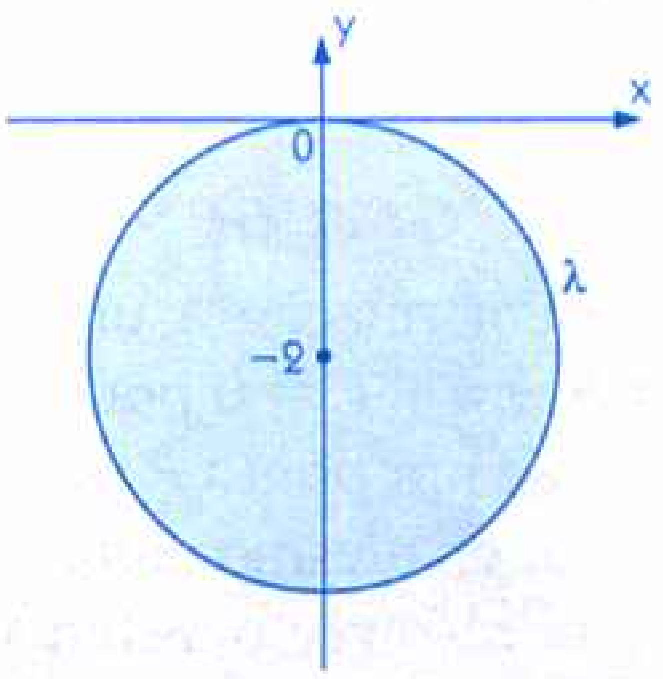
Então, $x^2 + y^2 - 49 < 0$ nos dá a condição $(d^2 - r^2 < 0)$ de pontos internos a λ. Após construir o gráfico, impomos a condição de desigualdade, pintando apenas a região interna a λ.



d) $x^2 + y^2 + 4y \leq 0$

Consideramos a igualdade $x^2 + y^2 + 4y = 0$ na qual identificamos a circunferência λ de raio $r = 2$ e o centro $C(0, -2)$.

Então, $x^2 + y^2 + 4y \leq 0$ nos dá a condição $(d^2 - r^2 \leq 0)$ de pontos internos ou pertencentes a λ. Em seguida, construímos o gráfico e impomos a condição da desigualdade, pintando λ e a região interna a ela.



Propostos

1393 Identifique, se possível, a posição do ponto *P* em relação à circunferência, nos seguintes casos:

a) $P(1, 5)$ e $(\lambda)\ (x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$

b) $P(-2, 1)$ e $(\lambda)\ (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$

c) $P(-1, 2)$ e $(\lambda)\ (x + 3)^2 + (y + 6)^2 = 100$

d) $P(3, -5)$ e $(\lambda)\ (x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 49$

e) $P(-3, -4)$ e $(\lambda)\ (x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 1$

f) $P(-2, -2)$ e $(\lambda)\ (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$

1394 Represente graficamente no plano as seguintes desigualdades:

a) $(x - 2)^2 + (y - 7)^2 > 36$

b) $(x - 2)^2 + y^2 \geq 2$

c) $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 < 1$

d) $x^2 + y^2 \leq 16$

e) $\begin{cases} x^2 + (y + 1)^2 < 1 \\ x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$

1395 A equação de uma circunferência λ é $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$. Então, o ponto A(1, 2):

a) é o centro de λ
b) é interno à λ e distinto do centro
c) pertence à λ
d) é externo à λ

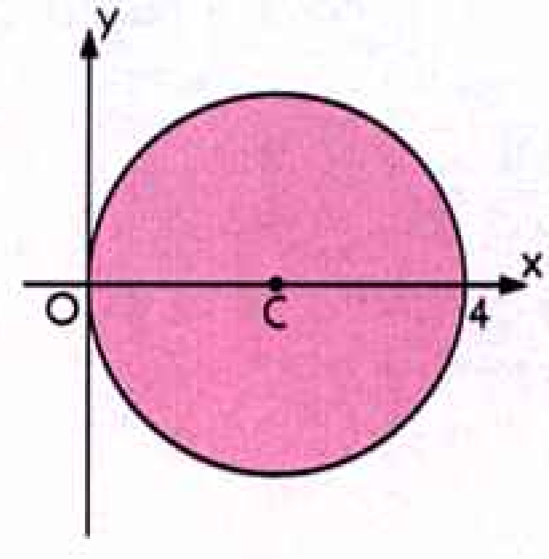
1396 (FEI-SP) O ponto $(1, \sqrt{2})$ em relação à circunferência $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$:

a) está situado no centro
b) é interno à circunferência e fora do centro
c) está situado na curva
d) é externo à circunferência, mas está na reta $y - \sqrt{2}x$
e) n.d.a.

1397 (UGF-RJ) Qual deve ser o valor de *K* de modo que o ponto P(1, 0) pertença ao interior da circunferência cuja equação é $x^2 + y^2 - 2x - 2y - K = 0$?

a) $K = -2$
b) $K > -1$
c) $K < 1$
d) $K > 3$
e) $K = 5$

1398 (Mack-SP) A equação do círculo de centro *C* é:



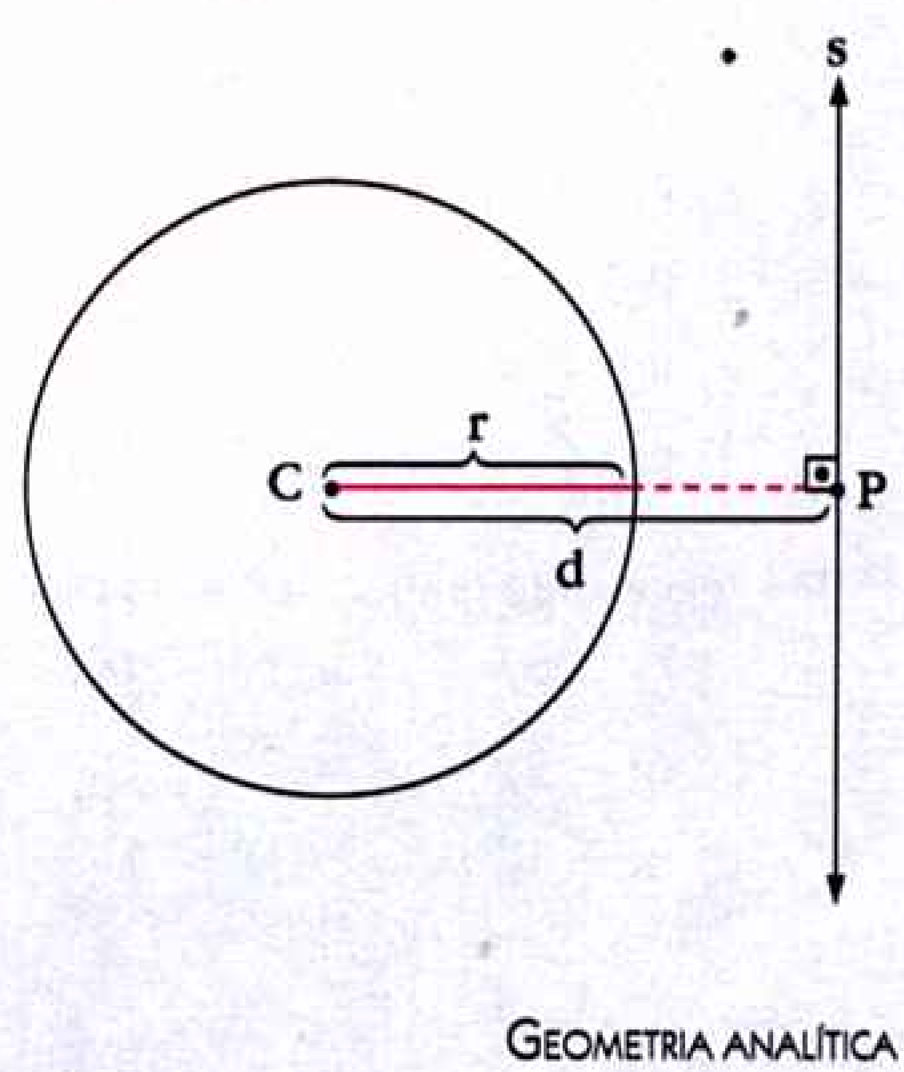
a) $x^2 + y^2 + 4y \leq 0$
b) $x^2 + 4x + y^2 \leq 0$
c) $x^2 - 4x + y^2 \leq 0$
d) $x^2 + y^2 - 4y \leq 0$
e) n.d.a.

Posições da reta em relação à circunferência

Em relação a uma circunferência λ de centro $C(x_C, y_C)$ e raio *r*, a reta (s) $ax + by + c = 0$ pode ser externa, tangente ou secante à circunferência.

Se um ponto *P* pertence à circunferência λ e à reta *s*, as suas coordenadas satisfazem, ao mesmo tempo, as equações de λ e *s*. Por isso, para identificar essas posições, basta resolver o sistema formado pelas equações da circunferência λ e da reta *s*. Isolamos o valor de *x* (ou de *y*) na equação da reta e o substituímos na equação da circunferência. Obtemos uma equação do 2º grau em *y* (ou em *x*) e, a seguir, analisamos o sinal do seu discriminante Δ.

Vejamos: $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ (x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2 \end{cases}$

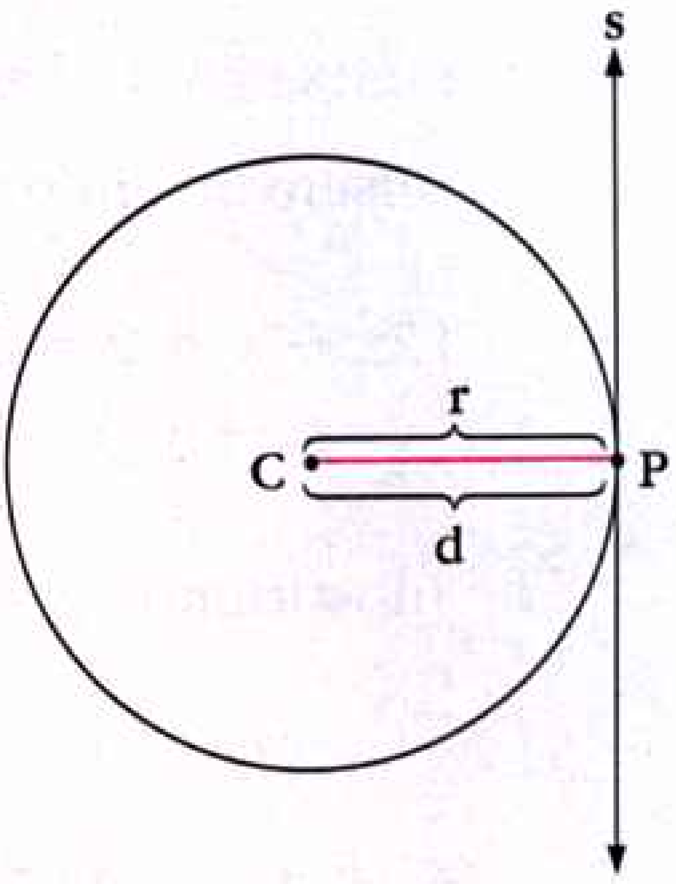


- Se $\Delta < 0$, então o sistema não tem solução real. Temos que $d_{Cs} > r$, logo a reta é externa à circunferência.

$$\boxed{\Delta < 0 \Rightarrow s \cap \lambda = \varnothing}$$

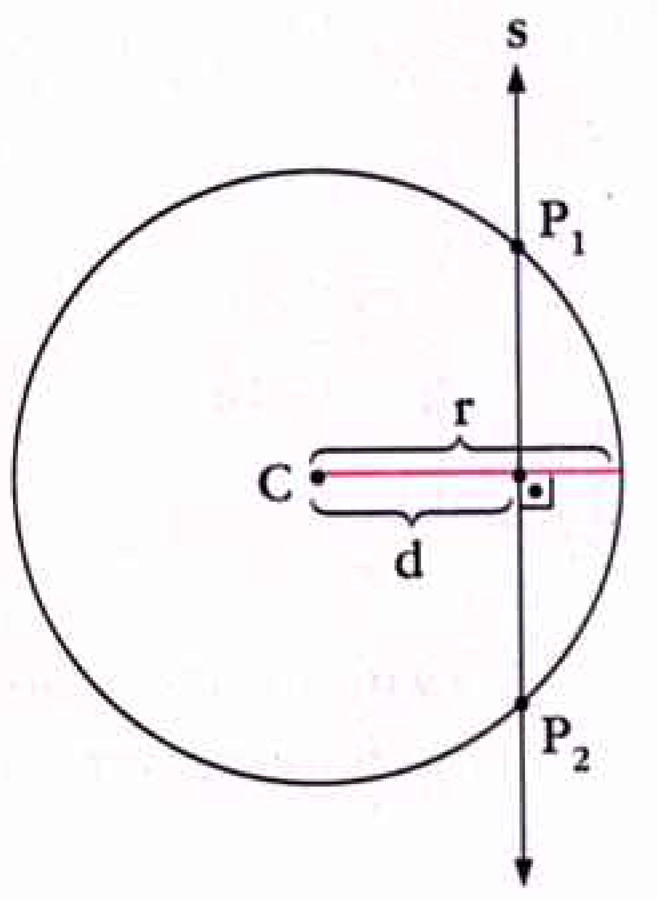
- Se $\Delta = 0$, então o sistema tem uma única solução.
  Temos que $d_{Cs} = r$, logo a reta é tangente à circunferência.

$$\boxed{\Delta = 0 \Rightarrow s \cap \lambda = \{P\}}$$



- Se $\Delta > 0$, então o sistema tem duas soluções.
  Temos que $d_{Cs} < r$, logo a reta é secante à circunferência.

$$\boxed{\Delta > 0 \Rightarrow s \cap \lambda = \{P_1, P_2\}}$$



Exemplos:
Observe alguns casos em que identificamos a posição da reta *s* em relação à circunferência λ.

a) (s) $x + y + 6 = 0$ e (λ) $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 22 = 0$

Desenvolvendo o sistema formado pelas equações:

$$\begin{cases} x + y + 6 = 0 \Rightarrow x = -6 - y \\ x^2 + y^2 + 2x - 6y - 22 = 0 \end{cases}$$

Substituindo $x = -6 - y$ na equação da circunferência:

$$(-6 - y)^2 + y^2 + 2(-6 - y) - 6y - 22 = 0$$

$$36 + 12y + y^2 + y^2 - 12 - 2y - 6y - 22 = 0$$

$$2y^2 + 4y + 2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 0$$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow y = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 2} \Rightarrow y' = y'' = -1 \Rightarrow x = -5$$

Concluindo, como $\Delta = 0$, o sistema tem uma única solução, portanto a reta *s* é tangente à circunferência no ponto $P(-5, -1)$.

b) (s) $2x - y - 2 = 0$ e (λ) $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$

Desenvolvendo o sistema formado pelas equações:

$$\begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2x - 2 \\ x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0 \end{cases}$$

Substituindo $y = 2x - 2$ na equação da circunferência:

$x^2 + (2x - 2)^2 + 2x - 4(2x - 2) = 0$

$x^2 + 4x^2 - 8x + 4 + 2x - 8x + 8 = 0$

$5x^2 - 14x + 12 = 0$

$\Delta = (-14)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 12$

$\Delta = 196 - 240$

$\Delta = -44$

$\Delta < 0$

Concluindo, como $\Delta < 0$, o sistema não tem solução real, a reta *s* é externa à circunferência.

c) (s) $x + y + 1 = 0$ e (λ) $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$

Resolvendo o sistema formado pelas equações:

$$\begin{cases} x + y + 1 = 0 \Rightarrow x = -y - 1 \\ x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

Substituindo $x = -y - 1$ na equação da circunferência:

$(-y - 1)^2 + y^2 + 2(-y - 1) + 2y + 1 = 0$

$y^2 + 2y + 1 + y^2 - 2y - 2 + 2y + 1 = 0$

$2y^2 + 2y = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 2 \cdot 0 = 4$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow y = \frac{-2 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 2} \Rightarrow \begin{cases} y' = 0 \Rightarrow x' = -1 \\ y'' = -1 \Rightarrow x'' = 0 \end{cases}$$

Concluindo, como $\Delta > 0$, o sistema tem duas soluções, portanto a reta *s* é secante à circunferência nos pontos $P_1(-1, 0)$ e $P_2(0, -1)$.

Resolvidos

1 (Cesgranrio) A reta do plano XOY, que passa pela origem *O* e é tangente à circunferência $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 8$, é:

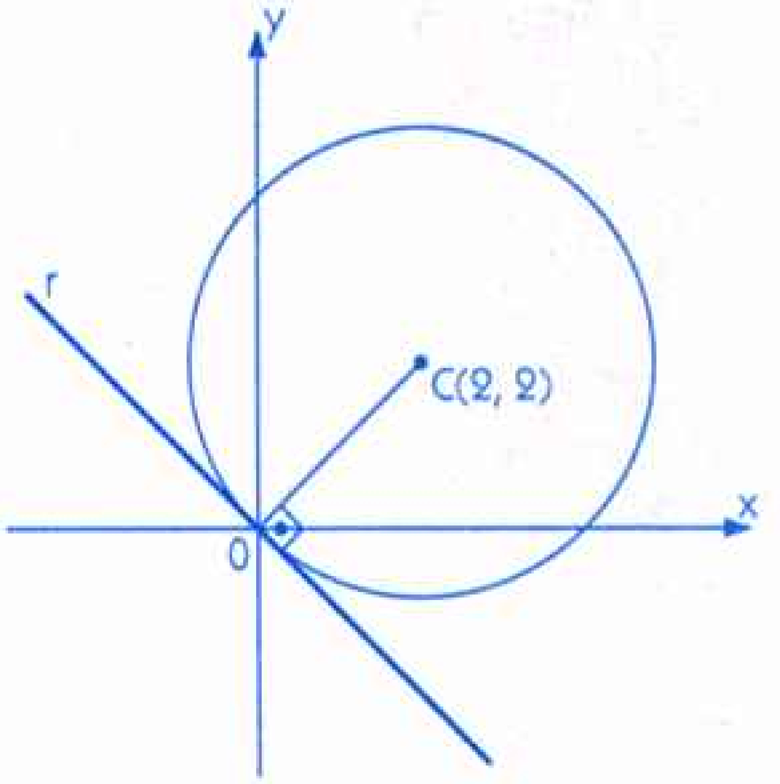
a) $y = x$
×b) $y = -x$
c) $x = 0$
d) $y = 0$
e) $y = -2x$

Inicialmente, verificamos se o ponto O(0, 0) pertence à circunferência:

$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 8$

$(0 - 2)^2 + (0 - 2)^2 - 8 = 0$

Como o resultado é igual a zero, o ponto *O* pertence à circunferência, portanto, existe uma única reta tangente a essa circunferência, passando por *O*.



Calculamos o coeficiente angular m_{CO} da reta $\overleftrightarrow{CO}$:

$$m_{CO} = \frac{2 - 0}{2 - 0} = 1$$

Depois, calculamos o coeficiente angular m_r da reta *r* (perpendicular à reta $\overleftrightarrow{CO}$):

$$m_r = -\frac{1}{m_{CO}} = -\frac{1}{1} = -1$$

A equação da reta *r*, passando pelo ponto O(0, 0) e com coeficiente angular $m_r = -1$, é dada por:

(r): $(y - y_O) = m_r(x - x_O)$

(r): $(y - 0) = -1(x - 0)$

$y = -x$

2 Determinar a equação da reta ou retas que passam pelo ponto P(6, 0) e são tangentes à circunferência (λ): $(x - 1)^2 + y^2 = 5$.

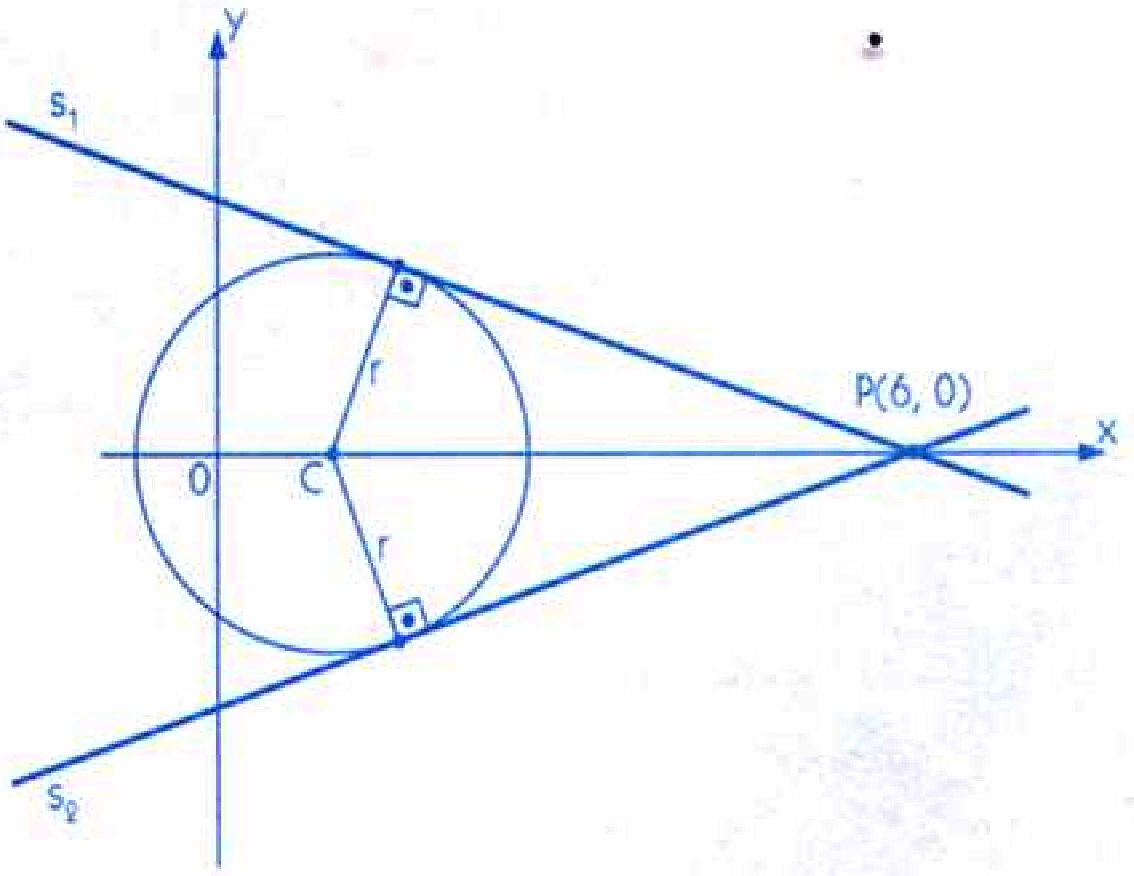
Primeiro precisamos verificar se o ponto P(6, 0) pertence à circunferência (λ):

$(x - 1)^2 + y^2 = 5$

$(6 - 1)^2 + 0^2 - 5 = 0$

$20 > 0$

Como o resultado é maior do que zero, o ponto *P* é externo à circunferência, portanto, existem duas retas s_1 e s_2 tangentes à circunferência passando por *P*.



Se considerarmos que as retas s_1 e s_2 passam pelo ponto P(6, 0) e têm *m* como coeficiente angular, obtemos a seguinte equação:

$(y - y_P) = m(x - x_P)$

$(y - 0) = m(x - 6)$

$y = mx - 6m$ ou $mx - y - 6m = 0$

Como as retas s_1 e s_2 são tangentes à circunferência, podemos deduzir que a distância entre elas e o centro d_{Cs} é igual ao raio, logo:

$$r = d_{Cs} = \frac{|ax_C + by_C + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\sqrt{5} = \frac{|m \cdot 1 - 0 - 6m|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}}$$

$$\left(\sqrt{5m^2 + 5}\right)^2 = (-5m)^2$$

$$5m^2 + 5 = 25m^2$$

$$20m^2 = 5$$

$$m^2 = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} \begin{cases} m = \dfrac{1}{2} \\ m = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Considerando $m = \frac{1}{2}$, teremos a reta s_1:

$$mx - y - 6m = 0$$

$$\frac{1}{2}x - y - 6 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$$x - 2y - 6 = 0$$

Considerando $m = -\frac{1}{2}$, teremos a reta s_2:

$$mx - y - 6m = 0$$

$$-\frac{1}{2}x - y - 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$x + 2y + 6 = 0$$

Propostos

1399 Identifique a posição da reta *s* em relação à circunferência λ, em cada caso:

a) (s) $x - y + 3 = 0$
(λ) $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 11 = 0$

b) (s) $x - y - 2 = 0$
(λ) $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 18 = 0$

c) (s) $x - y - 2 = 0$
(λ) $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 18 = 0$

d) (s) $2x - y - 3 = 0$
(λ) $x^2 + y^2 - 3x + 2y - 3 = 0$

e) (s) $x - y + 1 = 0$
(λ) $x^2 + y^2 - 10y + 15 = 0$

f) (s) $4x - 7y - 28 = 0$
(λ) $x^2 + y^2 - 2x - 4 = 0$

1400 (Mack-SP) Uma reta que passa pelo ponto P(2, 3) e é tangente à circunferência de centro C(0, 0) e raio 2, pode ser:

a) $y = 3$
b) $x = 2$
c) $y = 2x$
d) $y = -2x$
e) $x = 3$

1401 (AMAN-RJ) A equação da reta tangente à circunferência de centro (−2, 1) no ponto (−3, 3) é:

a) $x - 2y + 9 = 0$
b) $x + 2y - 9 = 0$
c) $2x + y + 1 = 0$
d) $2x + y - 1 = 0$
e) $2x + y - 9 = 0$

1402 (F. Oswaldo Cruz-SP) Determine *b* de forma que a reta de equação $y - 2x - b = 0$ seja tangente à circunferência de equação $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

1403 (UFCE) Dada a circunferência $x^2 + y^2 = 8$, e sendo a reta $y = ax + b$ tangente a essa circunferência no ponto (2, 2), calcule o valor de $a + b$.

1404 (UFES) Dado o ponto $A(2, -1)$, o comprimento da corda $\overline{AB}$ da circunferência $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 13 = 0$, paralela à reta $x + y - 10 = 0$, é:

a) $\sqrt{2}$
b) 2
c) $2\sqrt{2}$
d) $2 + \sqrt{2}$
e) $2 - \sqrt{2}$

1405 (UFBA) A intersecção da reta $y + x - 1 = 0$ com a circunferência $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 3 = 0$, determina uma corda cujo comprimento é:

a) $3\sqrt{2}$
b) $2\sqrt{3}$
c) $2\sqrt{2}$
d) $\sqrt{2}$
e) 0

1406 (UFJF-MG) A corda determinada pelo eixo das abscissas sobre a circunferência de equação $x^2 + y^2 - 5x - 7y + 6 = 0$ tem como medida:

a) 1 u.c.
b) 3 u.c.
c) 5 u.c.
d) 9 u.c.
e) 18 u.c.

1407 (PUC-SP) A circunferência com centro na origem e tangente à reta $3x + 4y = 10$ tem equação:

a) $x^2 + y^2 = 1$
b) $x^2 + y^2 = 2$
c) $x^2 + y^2 = 3$
d) $x^2 + y^2 = 4$
e) $x^2 + y^2 = 5$

1408 (PUC-RS) A equação da circunferência de centro em $C(-2, k)$ e tangente ao eixo das ordenadas é:

a) $x^2 + y^2 - 4x + 2ky + k^2 = 0$
b) $x^2 + y^2 + 4x - 2ky + k^2 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 2ky + k^2 = 0$
d) $x^2 + y^2 - 2ky - k^2 = 0$
e) $x^2 + y^2 - k^2 = 0$

1409 (Osec-SP) A equação da circunferência que passa por $A(6, 0)$ e é tangente à reta $x + y = 0$ na origem é:

a) $(x - 3)^2 + (y + 3)^2 = 18$
b) $(x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 18$
c) $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 18$
d) $(x + 3)^2 + (y + 3)^2 = 18$
e) nenhuma das anteriores é correta

1410 (Fuvest-SP) Seja $M = (8, 1)$ o ponto médio de uma corda $\overline{AB}$ da circunferência $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 45 = 0$. Determine os pontos da circunferência onde as retas tangentes são paralelas à reta AB.

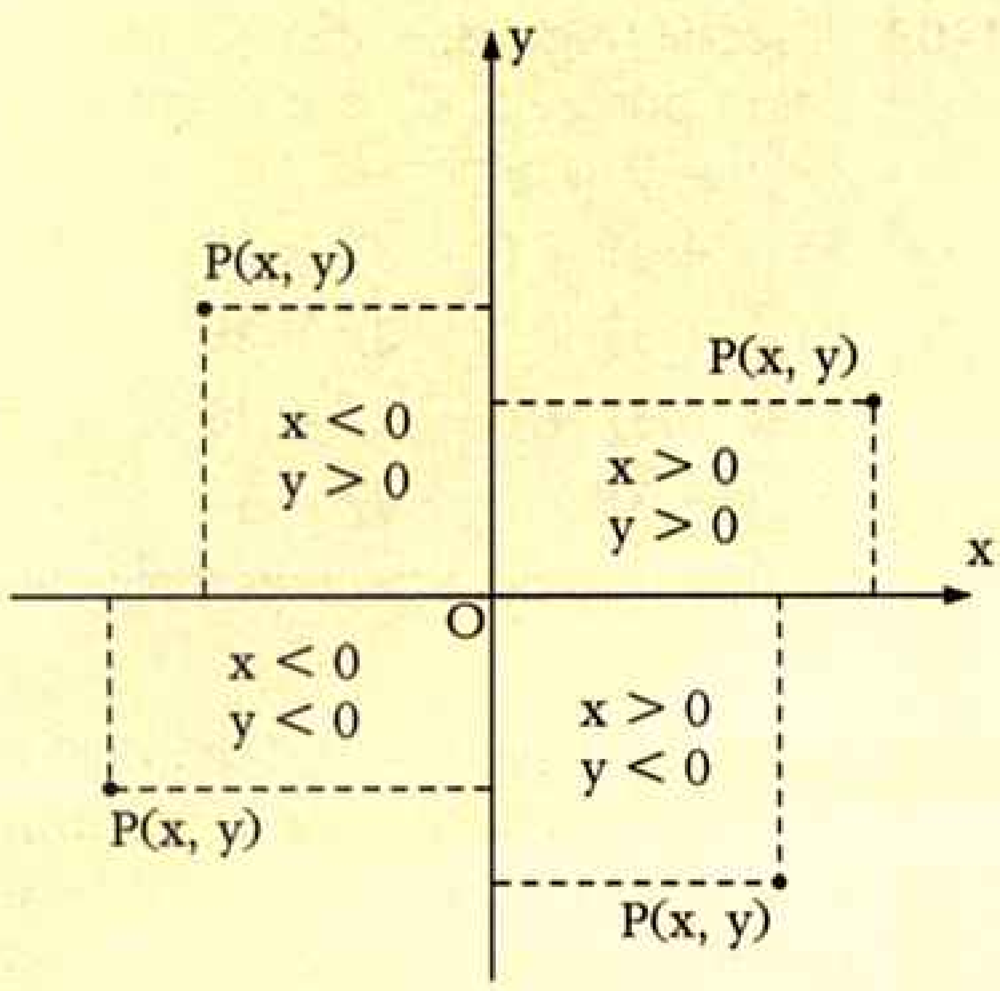
1411 (Fuvest-SP) Uma reta passa pelo ponto $P = (3, 1)$ e é tangente a circunferência de centro $C = (1, 1)$ e raio 1 num ponto T. Então a medida do segmento PT é:

a) $\sqrt{3}$
b) 2
c) $\sqrt{5}$
d) $\sqrt{6}$
e) $\sqrt{7}$

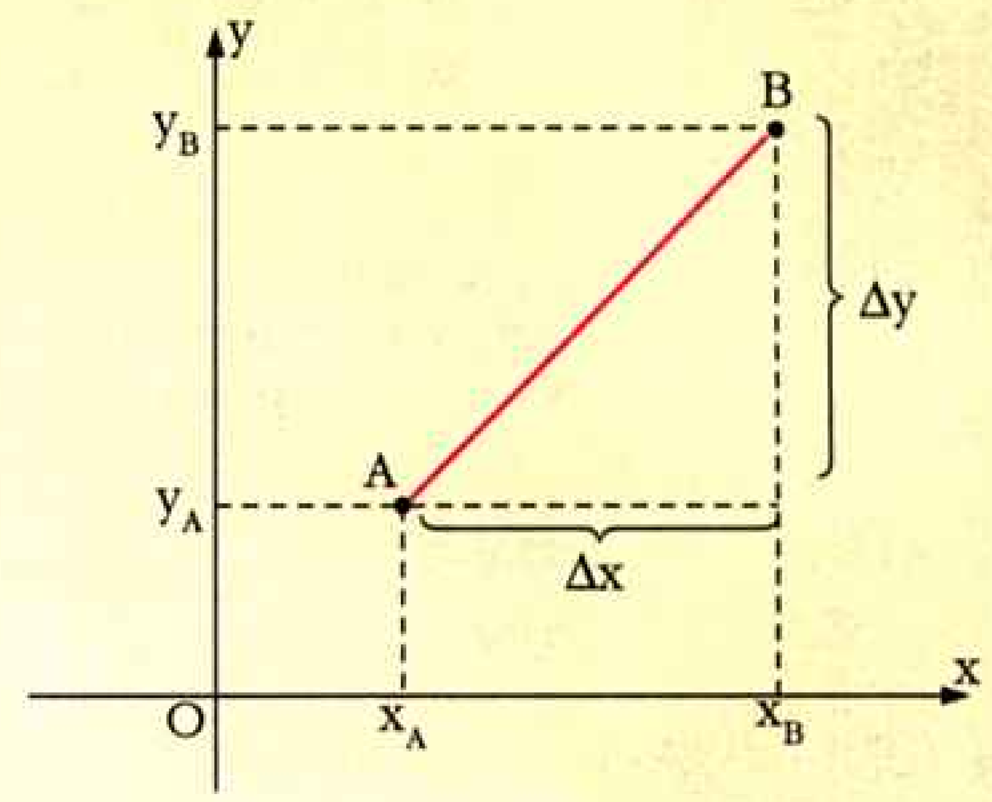
Ficha-Resumo

Ponto

Plano cartesiano

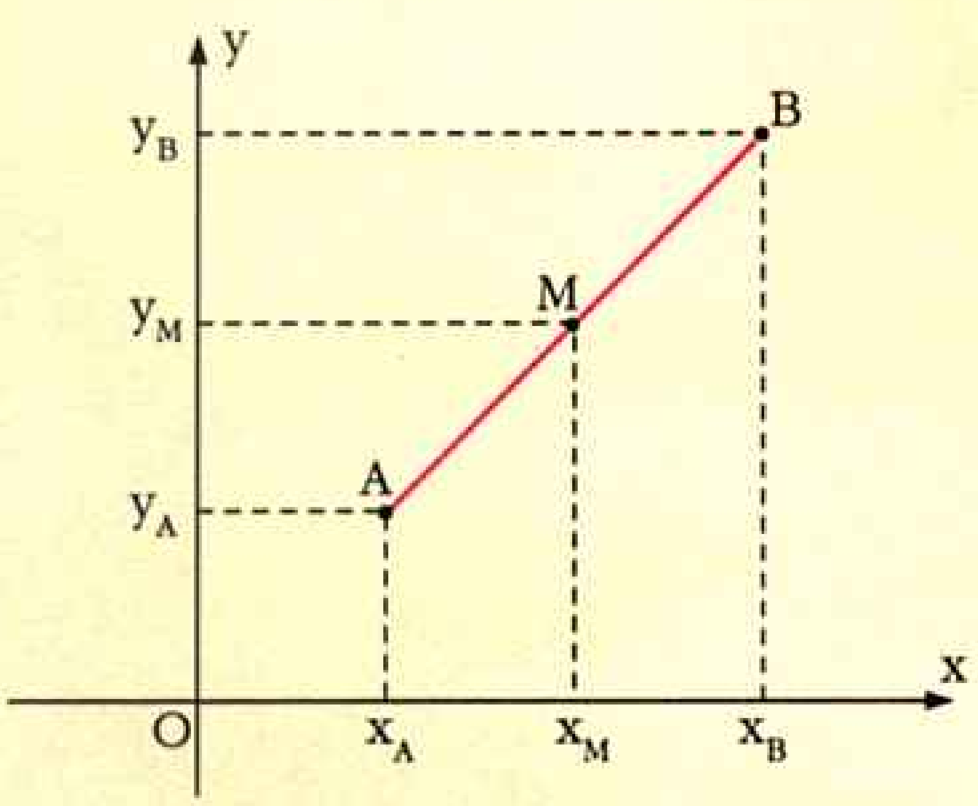


Distância entre dois pontos



$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Ponto médio



$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

Alinhamento de três pontos

$A(x_A, y_A)$

$B(x_B, y_B)$

$C(x_C, y_C)$

$$D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

- Se $D = 0$

  A, *B* e *C* são colineares.

- Se $D \neq 0$

  A, *B* e *C* formam um triângulo.

Geometria Analítica

Reta

Equação geral

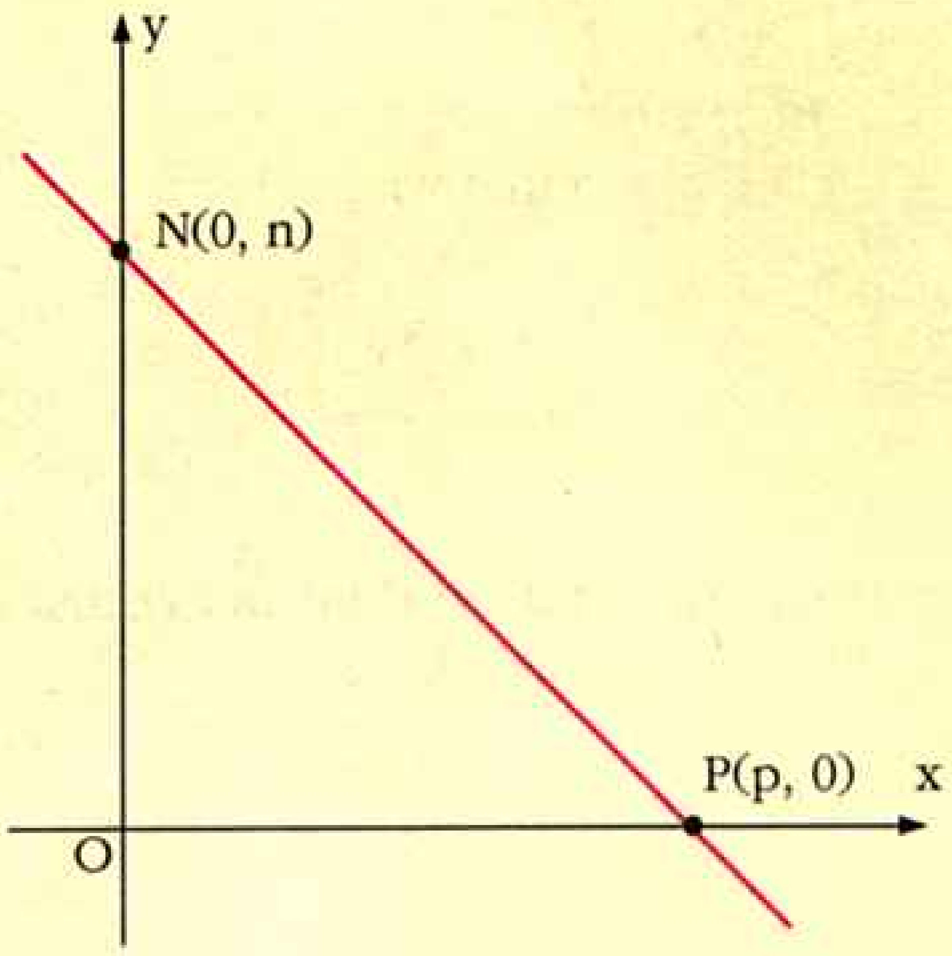
$A(x_A, y_A)$

$B(x_B, y_B)$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$$

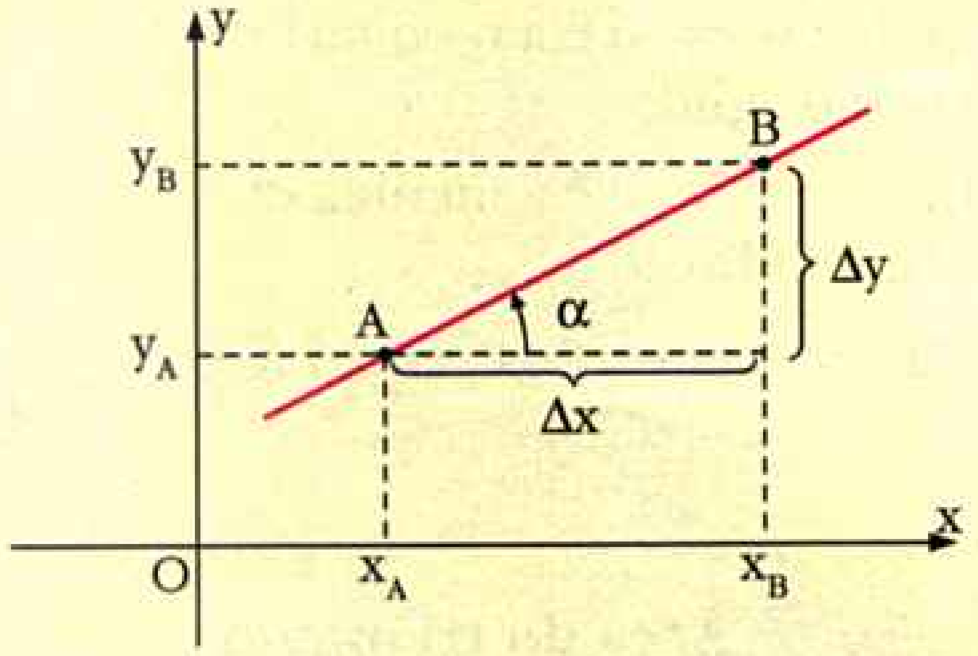
$$\boxed{ax + by + c = 0}$$

Equação segmentária



$$\boxed{\frac{x}{p} + \frac{y}{n} = 1} \qquad p = -\frac{c}{a} \qquad n = -\frac{c}{b}$$

Coeficiente angular



$$\boxed{m = \text{tg}\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$$

Equação reduzida

$$\boxed{y = mx + n}$$

coeficiente angular $m = -\frac{a}{b}$

coeficiente linear $n = -\frac{c}{b}$

Equação da reta, conhecidos um ponto e a direção

a reta não é vertical

$$\boxed{y - y_A = m(x - x_A)}$$

a reta é vertical

$$\boxed{x = x_A}$$

Equações paramétricas

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

são equações paramétricas de uma reta *s* onde f(t) e g(t) expressam leis de funções do primeiro grau

Posição relativa de duas retas no plano

r: $y = m_r x + n_r$
s: $y = m_s x + n_s$

- *r* e *s* paralelas

$$\boxed{m_r = m_s \text{ e } n_r \neq n_s}$$

- *r* e *s* coincidentes

$$\boxed{m_r = m_s \text{ e } n_r = n_s}$$

- *r* e *s* concorrentes

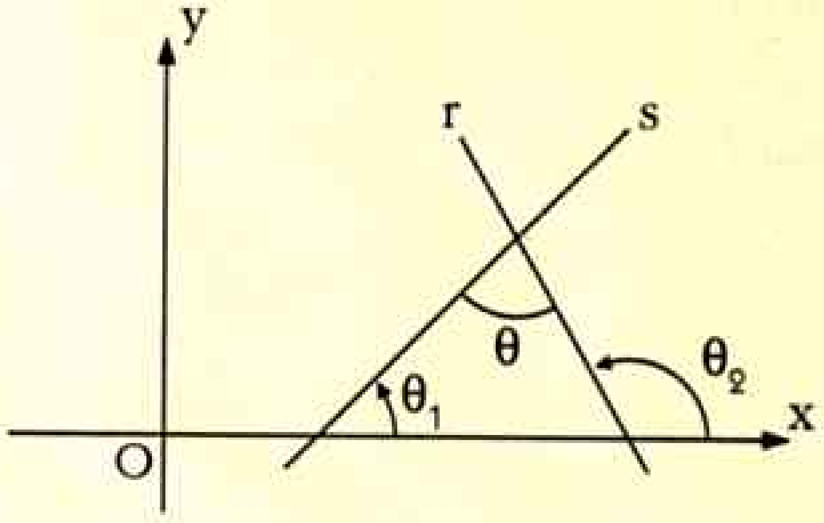
$$\boxed{m_r \neq m_s}$$

- *r* e *s* perpendiculares

$$\boxed{m_r \cdot m_s = -1}$$

Ângulos entre duas retas

Considerando *r* e *s*, retas não verticais, concorrentes mas não-perpendiculares entre si



$$\boxed{\text{tg}\,\theta = \frac{m_r - m_s}{1 + m_r \cdot m_s}}$$

tg θ > 0 ⇒ θ é a medida do ângulo agudo

tg θ < 0 ⇒ θ é a medida do ângulo obtuso

Caso *r* seja vertical, então $\text{tg}\,\theta = \frac{1}{|m_s|}$.

Distância do ponto à reta

$$\begin{cases} r: ax + by + c = 0 \\ P(x_0, y_0) \end{cases}$$

$$\boxed{d_{P,r} = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

Área do triângulo

$$\boxed{\text{Área} = \frac{1}{2}|D|}$$

Circunferência

Equação reduzida

$\begin{cases} \text{raio } r \\ \text{centro}(x_C, y_C) \end{cases}$

$$\boxed{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2}$$

Equação geral

$$\boxed{x^2 + y^2 - 2x_C x - 2y_C y + (x_C^2 + y_C^2 - r^2) = 0}$$

Posições do ponto *P* em relação à circunferência λ

$$\boxed{n > 0 \Rightarrow P \text{ é externo à } \lambda}$$

$$\boxed{n = 0 \Rightarrow P \text{ pertence à } \lambda}$$

$$\boxed{n < 0 \Rightarrow P \text{ é interno à } \lambda}$$

onde $n = x_p^2 + y_p^2 - 2x_c x_p - 2y_c y_p + (x_c^2 + y_c^2 - r^2)$

Posições da reta *s* em relação à circunferência λ

- reta externa à circunferência

$$\boxed{\Delta < 0 \Rightarrow s \cap \lambda = \varnothing}$$

- reta tangente à circunferência

$$\boxed{\Delta = 0 \Rightarrow s \cap \lambda = \{P\}}$$

- reta secante à circunferência

$$\boxed{\Delta > 0 \Rightarrow s \cap \lambda = \{P_1, P_2\}}$$

Exercícios

Complementares

1412 Determine a distância entre os pontos A(3, 0) e B(−3, 8).

1413 Calcule o perímetro de um triângulo formado pelos vértices A(1, 1), B(3, −2) e C(5, 0).

1414 Os pontos A(−3, 3), B(5, 2) e C(7, 10) são vértices de um triângulo. Determine o ponto médio *M* do lado BC e o comprimento da mediana AM.

1415 Identifique se os pontos A(8, 1), B(2, 2) e $C\left(1, \frac{3}{2}\right)$ são vértices de um triângulo.

1416 Os pontos *A*, B(1, 2) e C(2, 3) pertencem a uma mesma reta. Determine a ordenada de *A*, sabendo que esse ponto está sobre o eixo Oy.

1417 Determine o valor de *m* para que o ponto P(1, m + 3) pertença à reta (r) 3x + 4y − 12 = 0.

1418 Determine a equação da reta que contém os pontos $A(2, -3)$ e $B(5, -1)$.

1419 Determine a equação reduzida da reta *r* cuja equação geral é $4x + 3y - 12 = 0$.

1420 Determine a posição relativa entre as retas $x + 2y + 4 = 0$ e $2x - y - 1 = 0$.

1421 (FAAP-SP) Ache a equação da reta *r* que é paralela à reta (s) $3x - 2y + 1 = 0$ e que passa pelo ponto $A(-2, 5)$.

1422 (Mapofei-SP) Determine a intersecção das retas $x + 2y = 3$ e $2x + 3y = 5$

1423 (Unicamp) Os ciclistas *A* e *B* partem do ponto $P(-1, 1)$ no mesmo instante e com velocidades de módulos constantes. O ciclista *A* segue a trajetória descrita pela equação $4y - 3x - 7 = 0$ e o ciclista *B*, a trajetória descrita pela equação $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$. As trajetórias estão no mesmo plano e a unidade de medida de comprimento é o km. Pergunta-se:

a) Quais as coordenadas do ponto *Q*, distinto de *P*, onde haverá cruzamento das duas trajetórias?

b) Se a velocidade do ciclista *A* for de 20 km/h, qual deverá ser a velocidade do ciclista *B* para que cheguem no mesmo instante ao ponto *Q*?

1424 (Mapofei-SP) Para que valores de *k* as retas $(k - 1)x + 6y + 1 = 0$ e $4x + (k + 1)y - 1 = 0$ são paralelas?

1425 (UFPA) Sendo $P(1, 2)$ e $Q(-3, 4)$, a reta mediatriz do segmento $\overline{PQ}$ tem por equação:

a) $y = x - 1$
b) $y = -x + 5$
c) $y = x - 3$
d) $y = 2x$
e) $y = 2x + 5$

1426 (PUC-SP) $A = (3, 5)$, $B = (1, -1)$ e $C = (x, -16)$ pertencem a uma mesma reta, se *x* for igual a:

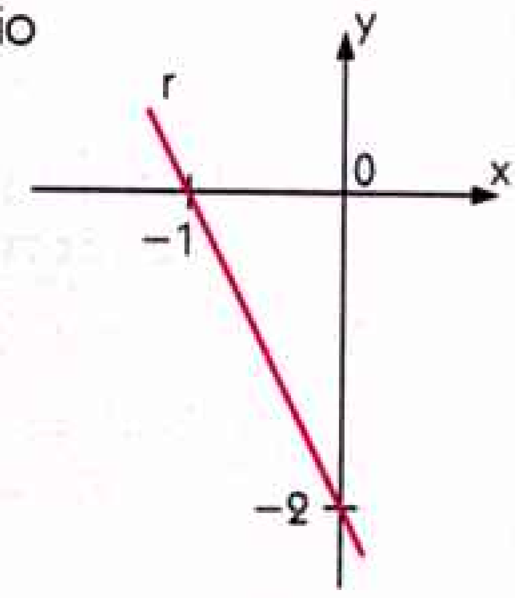
a) -5
b) -1
c) -3
d) -4
e) -2

1427 (USJT-SP) Qual é a área do triângulo de vértices $A(1; -2)$, $B(2; 1)$ e $C(3; 0)$?

1428 (PUC-SP) O triângulo de vértices $A = (4, 3)$, $B = (6, -2)$, $C = (-11, -3)$ é:

a) eqüilátero
b) isósceles
c) acutângulo
d) obtusângulo
e) retângulo

1429 (Mack-SP) A equação da reta *r* é:

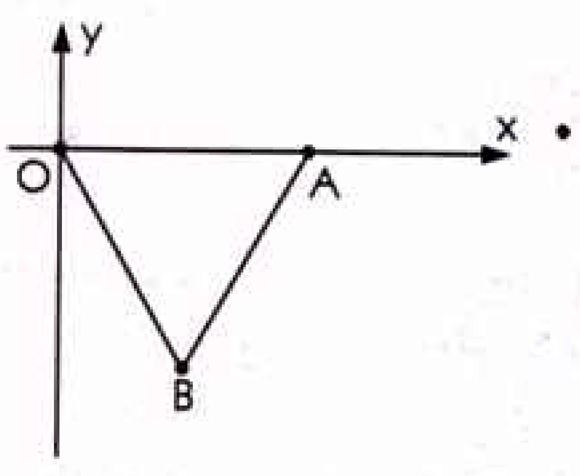


a) $y + 2x - 2 = 0$
b) $y - x - 2 = 0$
c) $y + 2x + 2 = 0$
d) $y - 2x - 2 = 0$
e) $y - 2x + 2 = 0$

1430 (Mack-SP) Uma reta paralela à reta $4x - 3y - 8 = 0$ é:

a) $3x - 4y + 8 = 0$
b) $8x - 6y + 9 = 0$
c) $4x + 3y + 8 = 0$
d) $8x + 6y - 6 = 0$
e) $3x + 4y - 8 = 0$

1431 (Vunesp) Os pontos *O*, *A* e *B*, do plano cartesiano da figura, são os vértices de um triângulo eqüilátero, cuja medida dos lados é dada por $\sqrt{3}$. As equações das retas AB e OB são, respectivamente:



a) $y = \sqrt{2} \cdot x - 3$ e $y = -\sqrt{2} \cdot x$
b) $y = \sqrt{3} \cdot x - 2$ e $y = -\sqrt{3} \cdot x$
c) $y = \sqrt{3} \cdot x - 3$ e $y = -\sqrt{3} \cdot x$
d) $y = x + \sqrt{3}$ e $y = -x$
e) $y = 3x + \sqrt{3}$ e $y = -3x$

1432 (ITA-SP) Seja o triângulo de vértices A (1, 2); B (2, 4) e C (4, 1) no sistema de coordenadas cartesianas ortogonais.
A distância do ponto de encontro das alturas desse triângulo ao lado AC é:

a) $\frac{9\sqrt{10}}{70}$
b) $\frac{9}{70}$
c) $8\sqrt{10}$
d) $3\sqrt{3}$
e) n.d.a.

1433 (Unesp) A equação da reta que é perpendicular à reta $3y + 4x - 3 = 0$ e que passa pelo ponto de intersecção das retas $y + 4x - 13 = 0$ e $y - 2x - 1 = 0$ é:

a) $4y - 3x + 15 = 0$
b) $4y + 3x - 14 = 0$
c) $4y + 3x + 15 = 0$
d) $4y + 3x - 13 = 0$
e) $4y - 3x - 14 = 0$

1434 (Unesp) A distância entre as retas $y = ax + b$ e $y = ax + c$ é:

a) $|b - c|$
b) $\frac{|b - c|}{a}$
c) $\frac{|b - c|}{\sqrt{a^2 + 1}}$
d) $\frac{|b - c|}{a^2 - 1}$
e) $\frac{|b - c|}{a + 1}$

1435 (Santa Casa-SP) Sejam A(−2; 4), B(1; −2) e C(3; 1) três dos vértices de um paralelogramo ABCD. Se $\overleftrightarrow{AC}$ é uma diagonal, a soma das coordenadas do vértice *D* é:

a) −5
b) −1
c) 3
d) 7
e) 10

1436 (Unesp) Em um sistema de eixos cartesianos ortogonais, as coordenadas de dois vértices opostos de um quadrado são (−3; 5) e (5; 3).
As coordenadas de um dos outros vértices do quadrado são:

a) (−2; 8)
b) (−2; 0)
c) (2; 0)
d) (2; 8)
e) (0; 8)

1437 Determine o centro e o raio da circunferência $(\lambda)\ (x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 25$.

1438 Determine o ponto em que a circunferência $(\lambda)\ (x - 7)^2 + (y - 6)^2 = 25$ intercepta o eixo Oy.

1439 (ITA-SP) A equação da circunferência tangente ao eixo das abscissas na origem e que passa pelo ponto (a, b), onde $a^2 + b^2 = 2b$ e $b \neq 0$, é:

a) $(x - b)^2 + y^2 = b^2$
b) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$
c) $x^2 + \left(y - \sqrt{2}\right)^2 = 2$
d) $x^2 + (y - 1)^2 = 1$
e) $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$

1440 Qual a posição do ponto P(3, −3) em relação à circunferência $(\lambda)\ (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 1$?

1441 Determine a equação geral da circunferência, cujo centro é (3, 4) e passa pela origem dos eixos.

1442 (Mapofei-SP) Determine o centro e o raio da circunferência, cuja equação é $4x^2 + 4y^2 - 12x + 12y - 7 = 0$.

1443 (Fuvest-SP) Qual a equação da circunferência tangente ao eixo dos *x* na origem e que passa pelo ponto (3, 4)?

1444 (Mack-SP) O maior valor inteiro de *k* para que a equação $x^2 + y^2 + 4x - 6y + k = 0$ represente uma circunferência é:

a) 10
b) 12
c) 13
d) 15
e) 16

1445 (PUC-SP) Em relação à circunferência de equação $x^2 + y^2 + 5x - 7y - 1 = 0$, a reta de equação $y = 2x - 1$ é:

a) externa
b) tangente
c) secante
d) contém a origem
e) contém P = (1, 4)

1446 (PUC-RS) A circunferência de equação $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 22 = 0$ limita um círculo cuja área é:

a) 3π
b) 6π
c) 9π
d) 11π
e) 22π

1447 (PUC-RS) A circunferência de equação $x^2 + y^2 - 5x + 4y + 4 = 0$ intercepta o eixo dos *x* nos pontos *A* e *B*. Se *C* é o centro da circunferência, então a área do triângulo ABC é igual a:

a) 3
b) 6
c) $\frac{13}{2}$
d) 7
e) $\frac{15}{2}$

1448 (Fatec-SP) A circunferência definida por $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$ tem centro no ponto *P*. Seu gráfico corta o eixo dos *x* nos pontos *M* e *N*. A área do triângulo PMN é:

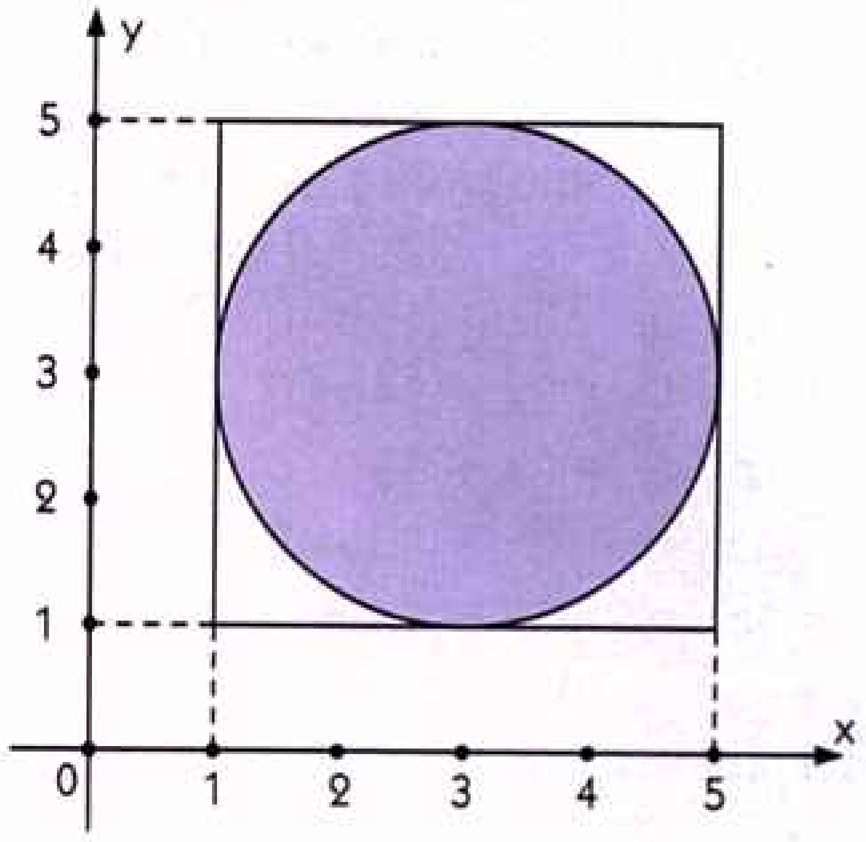
a) 2
b) 4
c) 5
d) 8
e) 11

1449 (Fuvest-SP) A reta $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ é tangente a uma circunferência de centro (2, 0). O raio dessa circunferência é:

a) 3
b) 2
c) $\sqrt{3}$
d) 1
e) 0,5

1450 (UFSC) Determine o raio da circunferência C_1, cujo centro é o ponto de intersecção da reta *r*, de equação $x - y - 1 = 0$, com a reta *s*, de equação $2x - y + 1 = 0$, sabendo que C_1 é tangente exteriormente à circunferência C_2, de equação $x^2 + y^2 - 12x - 6y - 4 = 0$.

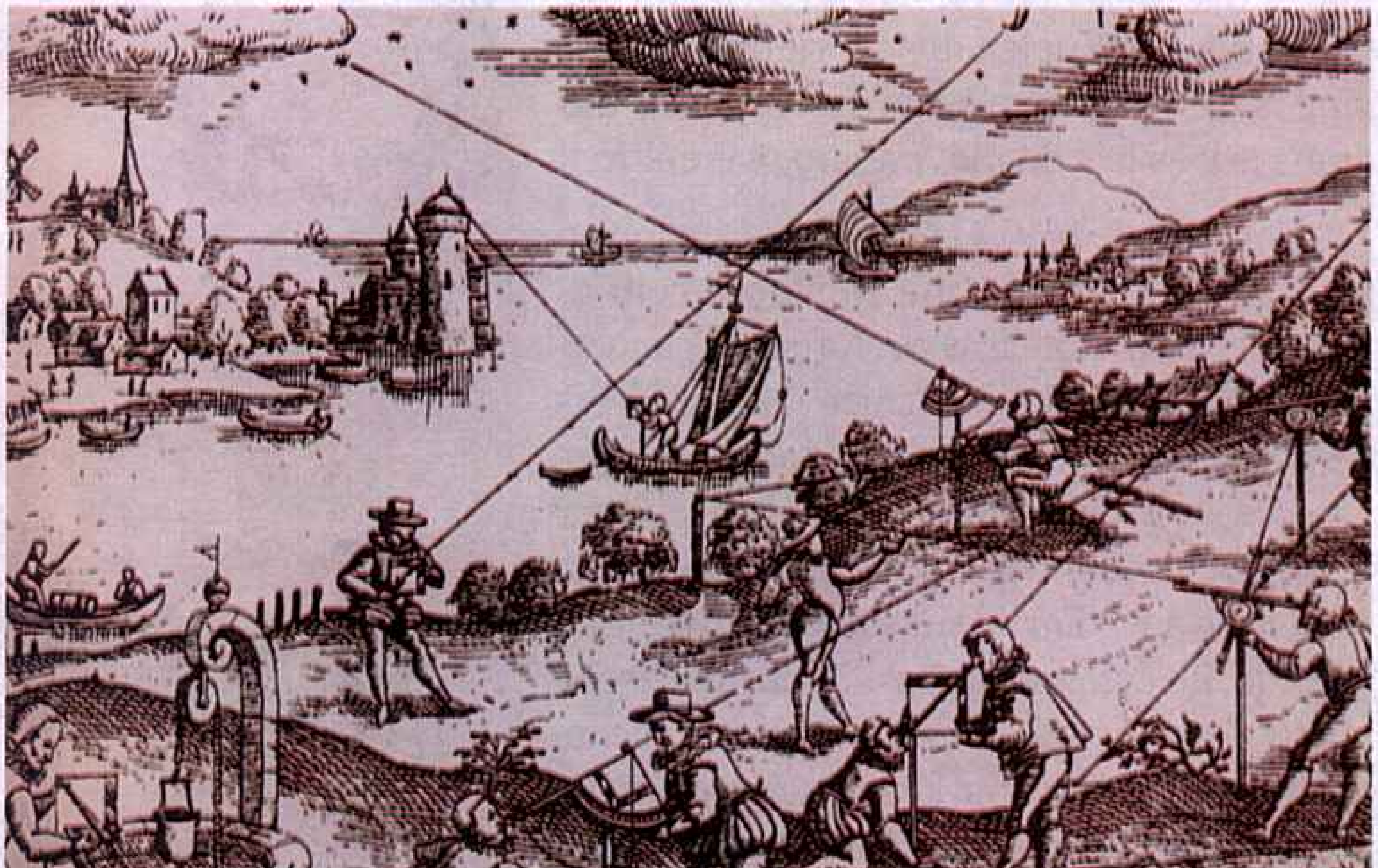
1451 (Fuvest-SP) Uma reta de coeficiente angular $m > 0$ passa pelo ponto (2, 0) e é tangente à circunferência inscrita no quadrado de vértices (1, 1), (5, 1), (5, 5) e (1, 5). Então:



a) $0 < m < \frac{1}{3}$
b) $m = \frac{1}{3}$
c) $\frac{1}{3} < m < 1$
d) $m = 1$
e) $1 < m < \frac{5}{3}$

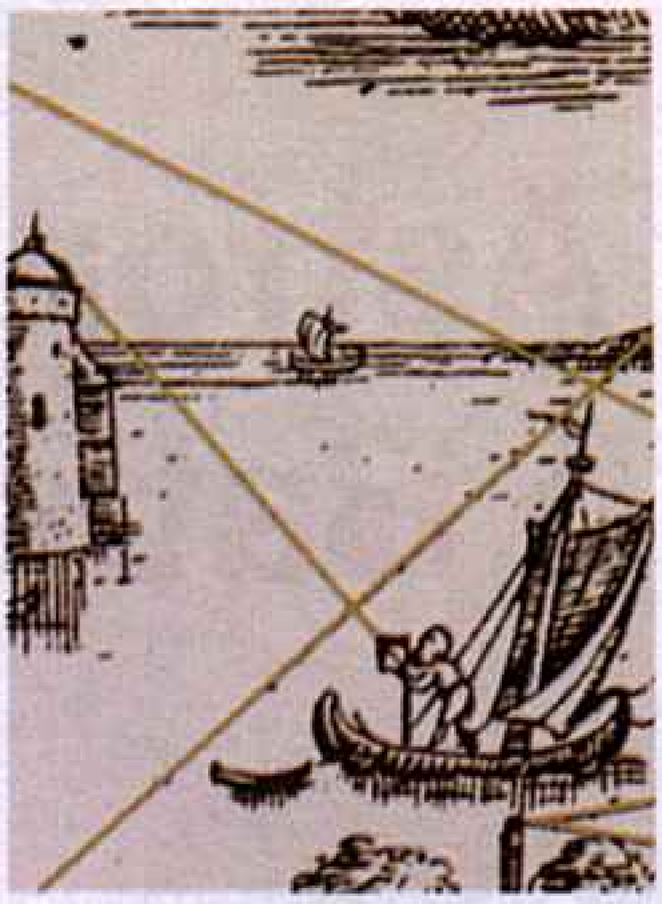
A Astronomia Moderna e o Batismo do Halley

Longo caminho foi percorrido para que a astronomia superasse as concepções aristotélico-ptolomaicas do universo. Segundo tais teorias, os corpos celestes giravam em torno da Terra, fixos a esferas perfeitas e transparentes. Quanto aos cometas, Aristóteles já havia proposto que não eram astros, mas efeitos meteorológicos provocados por emanações que, oriundas da própria Terra, ascendiam à alta atmosfera, onde se inflamavam.

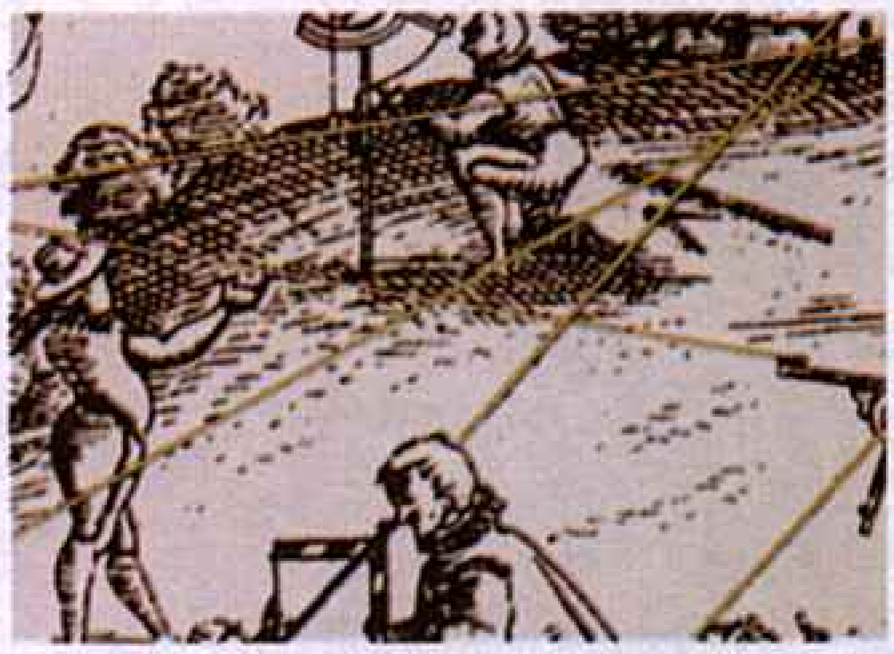


O sistema ptolomaico revelou-se ultrapassado após os avanços das medições dos astros no céu — que no século XVI eram feitas com o quadrante e outros instrumentos. Com esses avanços foi possível observar o Halley, em 1531.

Em 1443, Copérnico publicou *De Revolutionibus Orbium Coelestium,* propondo a idéia de um universo heliocêntrico. Em 1531, a observação do Halley — que ainda não tinha este nome — levou Peter Apianus a apontar pela primeira vez um fato cientificamente relevante: a cauda do cometa voltava-se sistematicamente na direção contrária à do Sol.



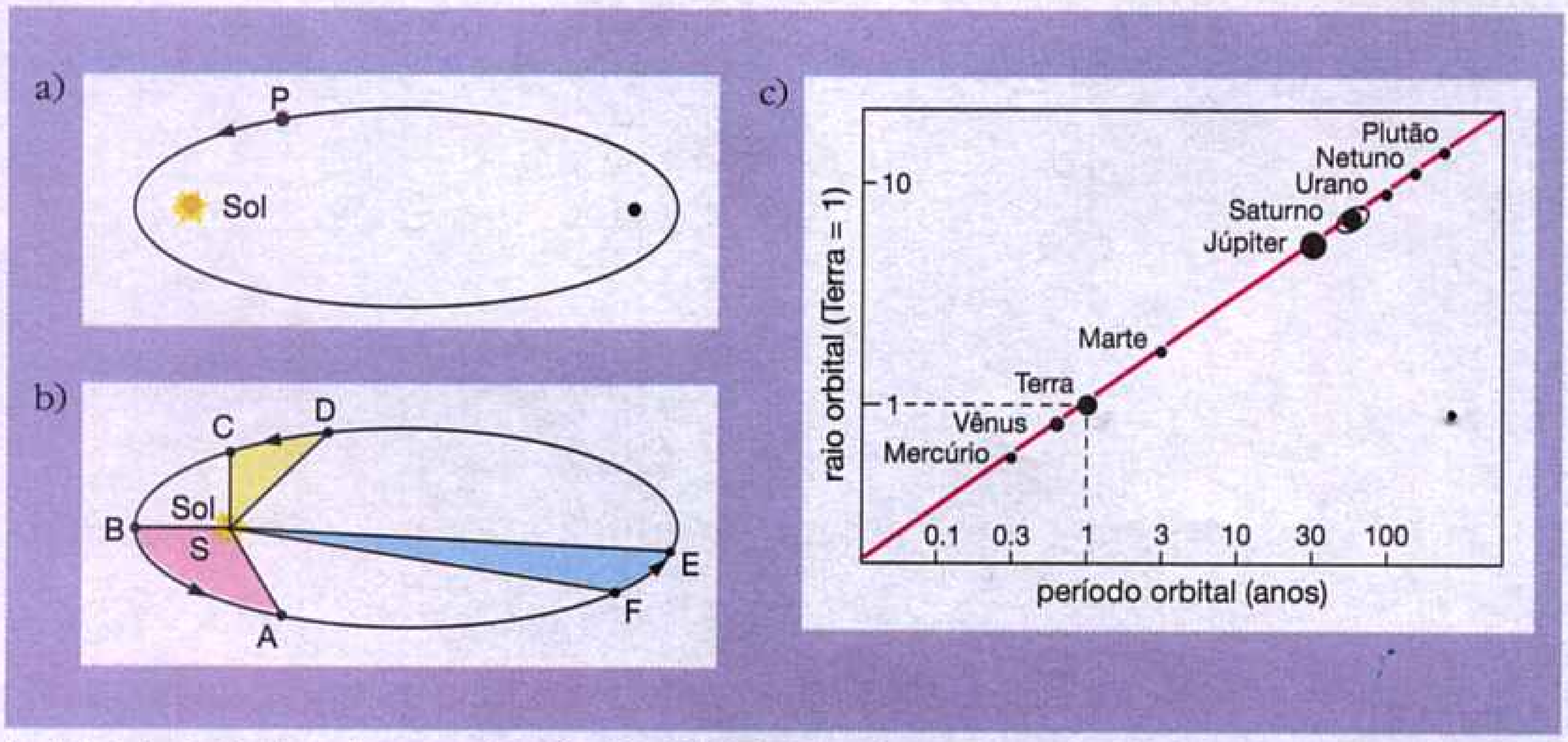
A chegada de um brilhante cometa em 1577 já encontrou um ambiente propício a novas interpretações. Analisando cuidadosamente as observações realizadas em diferentes países, o notável astrônomo dinamarquês Tycho Brahe concluiu que a trajetória desse cometa estava acima da órbita da Lua, afastando assim a idéia de que eram objetos meteorológicos. Os dados que recolheu, extraordinariamente precisos, foram usados depois, entre 1609 e 1618, nas análises do alemão Johannes Kepler, descobridor da forma elíptica das órbitas celestes e formulador das famosas três leis do movimento planetário.



Por volta de 1610, Galileu Galilei anunciou um conjunto de fatos que conflitava com as proposições aristotélicas e reforçava a concepção heliocêntrica de Copérnico. Mas as idéias antigas ainda tinham ao seu lado instituições poderosas. E Galileu foi obrigado a abjurar suas conclusões, permanecendo preso pela Inquisição até o fim de sua vida, em 1642. Seu trabalho, no entanto, apressou a formalização de um novo método de análise, no qual conceitos metafísicos como substância e causa foram substituídos por conceitos operacionais, como massa, tempo e espaço. Passíveis de quantificação, estes últimos podem estabelecer entre si relações matemáticas, dando lugar a modelos cuja verificação experimental é possível. Era o início da revolução científica.

O inglês Isaac Newton, nascido no ano da morte de Galileu, herdou, além de subsídios conceituais, um ambiente mais apropriado para o desenvolvimento de atividades científicas. Os observatórios de Paris e de Greenwich, bem como importantes sociedades científicas, já existiam na época de seus primeiros trabalhos, que logo se revelaram fecundos. Com base em um conceito revolucionário — o da inércia —, aplicou ao movimento da Lua a explicação utilizada para a queda dos corpos na Terra. Depois, em seu livro *Principia Mathematica Philosophiae Naturalis*, estendeu o raciocínio para todos os corpos celestes, propondo a teoria da gravitação universal: os astros se atraem na proporção direta de sua massa e na proporção inversa do quadrado da distância que os separa.

Fonte: extraído de *Bem-vindo Halley!*
MATSUURA, Oscar T., Revista
Ciência Hoje, SBPC, v. 4, n. 21, p. 35.



As três leis de Kepler sobre o movimento planetário: (a) um planeta *P* se move em uma elipse, com o Sol em um dos seus dois focos; (b) um planeta percorre áreas iguais em tempos iguais (no desenho, as áreas BSA, FSE e DSC são iguais entre si, o que indica que o corpo celeste leva o mesmo tempo para percorrer os trechos BA, FE e DC da sua órbita); (c) lei harmônica: há relação matemática precisa entre o tamanho de uma órbita e o período gasto pelo planeta para completá-la. Os movimentos de Urano, Netuno e Plutão, planetas descobertos bem depois da morte de Kepler, confirmam a exatidão da lei.