Números complexos

O mais belo sentimento é o sentido do mistério. É a origem de toda ciência verdadeira. Quem jamais conheceu esta emoção, quem não possui o dom de admiração é como se estivesse morto: seus olhos estão cerrados.

Albert Einstein (1879-1955), físico e matemático alemão

1. Conjunto dos números complexos

Dados dois pares ordenados, (a, b) e (c, d), do produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \text{ e } y \in \mathbb{R}\}$, onde $\mathbb{R}$ é o conjunto dos números reais, podemos definir:

- Igualdade de pares ordenados: dois pares ordenados (a, b) e (c, d) são iguais se, e somente se, a = c e b = d.
- Adição de pares ordenados: a soma de dois pares ordenados (a, b) + (c, d) é igual ao par ordenado (a + c, b + d).
- Multiplicação de pares ordenados: o produto de dois pares ordenados $(a, b) \cdot (c, d)$ é o par ordenado (ac − bd, ad + bc).

Considerando as definições acima, chamamos de conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ ao conjunto de todos os pares ordenados de números reais, para os quais essas definições são válidas.

Exercícios

Propostos

1452 Em cada caso, determine *a* e *b* reais, tal que:

a) (a, 5) = (−4, b)

b) (2a, 3b + 1) = (1, 9 − b)

1453 Efetue:

a) $\left(8, -\frac{3}{10}\right) + \left(\frac{1}{8}, -0{,}3\right)$

b) $(\sqrt{2}, 0) + (\sqrt{8}, 2\sqrt{3})$

c) $\left(\frac{1}{8}, -0{,}3\right) + \left(8, -\frac{3}{10}\right)$

d) $(1, 0) \cdot (\sqrt{5}, -2)$

e) $(1, 2) \cdot (3, 4)$

f) $(3, 4) \cdot (1, 2)$

g) $(7, 0) \cdot (8, 0)$

h) $(0, 1) \cdot (0, 1)$

2. Forma algébrica

Sejam *m* e *n* números reais quaisquer. Temos:

- (m, 0) = (n, 0) se, e somente se, m = n
- (m, 0) + (n, 0) = (m + n, 0 + 0) = (m + n, 0)
- $(m, 0) \cdot (n, 0) = (m \cdot n - 0 \cdot 0, m \cdot 0 + 0 \cdot n) = (m \cdot n, 0)$

Notamos que nos pares onde o segundo elemento é zero, tanto a igualdade quanto a adição e a multiplicação dependem só dos primeiros elementos, que são números reais. Por isso, podemos "identificar" um número (m, 0) com o número real *m*, ou seja, (m, 0) = m.

Por outro lado, já vimos que uma equação como $x^2 + 1 = 0$ não tem raiz real. Mas uma raiz procurada deve ser um número que multiplicado por si mesmo resulte em -1.

Observe que $(0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0)$.

Como $(0, 1)^2 = (-1, 0)$ e $(-1, 0) = -1$, então $(0, 1)^2 = -1$, ou $(0, 1) = \sqrt{-1}$.

O número (0, 1) é chamado de unidade imaginária e é representado por *i*. Como $i^2 = -1$, então *i* é uma raiz quadrada de -1.

Assim, temos: $\sqrt{-1} = i$, $\sqrt{-4} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = 2i$, $\sqrt{-49} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{-1} = 7i$ etc.

Consideremos agora um número complexo qualquer (a, b). Podemos escrever:

$$\boxed{(a, b) = (a, 0) + (0, b) = \underbrace{(a, 0)}_{a} + \underbrace{(b, 0)}_{b} \cdot \underbrace{(0, 1)}_{i} = a + b \cdot i}$$

A forma a + bi, onde *a* e *b* são números reais, é denominada forma algébrica de um número complexo *z*.

Em $z = a + bi$, destacamos:

- *z* é o número complexo
- *a* é a parte real de *z*
- *b* é a parte imaginária de *z*
- *i* é a unidade imaginária

Exemplos:

a) $1 + 2i$, onde $a = 1$ e $b = 2$

b) $-3 + 4i$, onde $a = -3$ e $b = 4$

c) $7 - 2i$, onde $a = 7$ e $b = -2$

d) $5i$, onde $a = 0$ e $b = 5$

e) 6, onde $a = 6$ e $b = 0$

f) $\sqrt{5} - 0{,}7i$, onde $a = \sqrt{5}$ e $b = -0{,}7$

Assim, a definição de igualdade fica:

Dois números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ são iguais se, e somente se, suas partes reais forem iguais e suas partes imaginárias também forem iguais. Então:

$$\boxed{z_1 = z_2 \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d}$$

A utilização deste novo símbolo facilita determinar as raízes de equações do 2º grau.

Exercício

Resolvido

Determinar as raízes da equação $x^2 - 2x + 2 = 0$.

$a = 1, b = -2, c = 2$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -4$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{-4}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 2i}{2} = \begin{cases} x' = 1 + i \\ x'' = 1 - i \end{cases}$$

Note que as raízes desta equação são números complexos $1 + i$ e $1 - i$, pois estão na forma $z = a + bi$.

Características de um número complexo $z = a + bi$

Um número complexo $z = a + bi$ é denominado:

- Imaginário puro: quando $a = 0$ e $b \neq 0$.

> Exemplo:
> $z = 0 + 2i$ ou simplesmente $z = 2i$

- Real: quando $b = 0$.

> Exemplo:
> $z = 3 + 0i$ ou simplesmente $z = 3$

Exercícios

Resolvidos

1 Determinar o valor de x, de modo que $z = 6 + (2x - 4)i$ seja real.

O número z será um número real quando o coeficiente da parte imaginária for igual a zero, então:
$2x - 4 = 0 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$

2 Para qual valor de k o número complexo $z = 3i + k^2 + ki - 9$ é imaginário puro?

Inicialmente vamos colocar o número na forma algébrica, a fim de destacar a parte real e a parte imaginária:

$z = 3i + k^2 + ki - 9 \Rightarrow z = k^2 - 9 + (k + 3)i$

Logo, o número z é imaginário puro se $k^2 - 9 = 0$ e $k + 3 \neq 0$

$$\begin{array}{lll} k^2 - 9 = 0 & \text{e} & k + 3 \neq 0 \\ k = \pm\sqrt{9} & & k \neq -3 \\ k = \pm 3 & & \end{array}$$

Note que se $k = -3$, $z = 0$. Então, $k = 3$.

Propostos

1454 Dados os números complexos $z_1 = 2 + 6i$ e $z_2 = a + bi$, sendo $z_1 = z_2$, determine o valor de *a* e *b*.

1455 Determine o valor de *x* e *y*, de modo que $x + (3y + 2)i = 1 + 8i$.

1456 Determine o valor de *x*, de modo que o número complexo seja um número real:
a) $z = 4 + (8x - 24)i$
b) $z = 1 + (2x - 1)i$

1457 Obtenha o valor de *y*, de modo que o número complexo $z = (6y + 30) + 2i$ seja um número imaginário puro.

1458 Determine o valor de *x*, de modo que o número complexo $z = (x^2 - 5x + 6) + (1 + x)i$ não seja um número real.

1459 Obtenha o valor *m* e *n*, de modo que $(4m + 6) - 3mi = 6 - 6i$.

1460 Para que valores de *x* e *y* são iguais os complexos $z_1 = (2x + 4) + (y + 1)i$ e $z_2 = 8 + 5i$?

1461 Obtenha o valor de *y*, de modo que o número complexo $z = (y + 3) + (y^2 - 4y + 4)i$ seja um número real.

1462 Determine o valor de *x*, para que o número complexo $z = (x^2 - x) + xi$ seja um número imaginário puro.

1463 (UFPA) Qual é o valor de *m*, real, para que o produto $(2 + mi)(3 + i)$ seja um imaginário puro?
a) 5
b) 6
c) 7
d) 8
e) 10

3. Potências da unidade imaginária

Observe:

- $i^0 = 1$, pois todo número elevado a zero é igual a 1, exceção para 0^0
- $i^1 = i$, pois todo número elevado ao expoente 1 é igual ao próprio número
- $i^2 = -1$, definição da unidade imaginária
- $i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$
- $i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$

Sendo $n \in \mathbb{N}$, de um modo geral, temos:

- $i^{4n} = (i^4)^n = 1^n = 1$
- $i^{4n+1} = i^{4n} \cdot i = 1 \cdot i = i$
- $i^{4n+2} = i^{4n} \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$
- $i^{4n+3} = i^{4n} \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i$

A potência i^k, sendo $k \in \mathbb{Z}$, é obtida dividindo o expoente *k* por 4 e considerando o resto r $(0 \leq r < 4)$ da divisão como o novo expoente de *i*.

Exemplos:

- $i^{137} = i^{4 \cdot 34 + 1} = i^1 = i$, pois em $137 : 4$, $q = 34$ e $r = 1$
- $i^{-57} = i^{4 \cdot (-15) + 3} = i^3 = -i$, pois em $-57 : 4$, $q = -15$ e $r = 3$

Exercícios

Resolvidos

1 Calcular:

a) $i^{36} + i^{102}$ b) $\dfrac{3i^{97} + 2i^{-200} - i}{i^{24} - 2i^{1989}}$

a) $i^{36} + i^{102} = i^0 + i^2 = 1 + (-1) = 0$

b) $\dfrac{3i^{97} + 2i^{-200} - i}{i^{24} - i^{66}} = \dfrac{3i^1 + 2 \cdot \frac{1}{i^{200}} - i}{i^0 - i^2} = \dfrac{3i + 2 \cdot \frac{1}{1} - i}{1 - (-1)} = \dfrac{2i + 2}{2} = 1 + i$

2 Efetuar $(1 - i)^8$.

$[(1 - i)^2]^4 = (i^2 - 2i + i^2)^4 = (1 - 2i - 1)^4 = (-2i)^4 = 16i^4 = 16$

Propostos

1464 Calcule:

a) i^{12} c) i^{19} e) $i^{2000} + i^{2002}$

b) i^{42} d) i^{1601} f) $\dfrac{i^{91} + 2i^{52} - 3i^{48}}{3i^{1002} - 5i^{400}}$

1465 Simplifique as expressões:

a) $(1 + i^6) + 3 \cdot (2 - i^{28}) - 4 \cdot (1 - i^6)$

b) $4 \cdot (3 + 2i^{43}) - 6 \cdot (1 + i^{96}) - 7 \cdot (3 + i^{603}) - 21i^{182}$

1466 O valor de $i^{4n} + i^{4n+1} + i^{4n+2}$, com $n \in \mathbb{N}$ é:

a) i b) 1 c) $-i$ d) -1 e) 0

1467 Quem é maior, $(1 - i)^{20}$ ou -2^{10}?

1468 O valor de $(1 - i)^{10} + (1 + i)^{10}$ é positivo ou negativo?

1469 (Cescea-SP) Efetuando-se as operações na expressão $(1 + i)^{-1} \cdot (1 + i^3) \cdot (1 + i)^2$, obtém-se:

a) $2 + i$

b) $2 - i$

c) $2 + 2i$

d) $2 - 2i$

e) 2

1470 (Mack-SP) Se $z = i^m + i^{-m}$, $m \in \mathbb{Z}$ e *i* é a unidade imaginária, então o número total de possíveis valores diferentes de *z* é:

a) 3

b) 4

c) 5

d) 6

e) maior que 6

1471 A soma do complexo $z = (1 - i)^{50}$ com o complexo $w = (1 + i)^{50}$ é igual a:

a) 8 b) 0 c) -8 d) i e) $-8i$

4. Adição, subtração e multiplicação

Sejam os complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$:

- Obtemos a soma adicionando as partes reais e as partes imaginárias.

$$z_1 + z_2 = \underbrace{(a + c)}_{\text{parte real}} + \underbrace{(b + d)}_{\text{parte imaginária}}i$$

$$\boxed{(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i}$$

- Obtemos a diferença subtraindo as partes reais e as partes imaginárias.

$$z_1 - z_2 = \underbrace{(a - c)}_{\text{parte real}} + \underbrace{(b - d)}_{\text{parte imaginária}}i$$

$$\boxed{(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i}$$

- Obtemos o produto aplicando a propriedade distributiva e as potências de *i*.

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) &= ac + adi + cbi + bdi^2 = \\ &= ac + adi + cbi - bd = \\ &= \underbrace{ac - bd}_{\text{parte real}} + \underbrace{(ad + bc)}_{\text{parte imaginária}}i \end{aligned}$$

$$\boxed{(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i}$$

Exemplo:
Considere os números complexos $z_1 = 2 + 3i$ e $z_2 = 1 - 4i$. Então:

$z_1 + z_2 = (2 + 1) + (3 - 4)i$
$z_1 + z_2 = 3 - i$

$z_1 - z_2 = (2 - 1) + [(3 - (-4)]i$
$z_1 - z_2 = 1 + 7i$

$z_1 \cdot z_2 = (2 + 3i)(1 - 4i)$

$z_1 \cdot z_2 = 2 - 8i + 3i - 12i^2$
$z_1 \cdot z_2 = 2 - 8i + 3i - 12 \cdot (-1)$
$z_1 \cdot z_2 = 2 + 12 - 8i + 3i$
$z_1 \cdot z_2 = 14 - 5i$

Exercícios

Propostos

1472 Efetue as seguintes operações:

a) $(3 - 2i) - (1 + 3i)$

b) $(9 + 4i) + (5 - 2i) - (8 - i)$

c) $(12 - 3i) - (1 + i) + (8 + 7i)$

d) $(6 + i) \cdot (6 - i)$

e) $(2 + 3i) \cdot (2 - 3i)$

f) $(1 + 2i) \cdot (-2 + 4i) \cdot (6 - i)$

g) $(3 - 4i) \cdot (3 + 4i) - 2 \cdot (3 - i)$

h) $3 \cdot (1 - i) + (2 + i) \cdot (2 - i)$

i) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}i\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}i\right)$

j) $(\sqrt{2} - 2i) \cdot (\sqrt{2} + 2i)$

l) $(3a - 2bi) \cdot (3a + 2bi) - (8a^2 + 3b^2)$

1473 Determine o valor de *x* e *y*, de modo que $(x + yi) \cdot (3 - i) = 20$.

1474 Obtenha o valor de *m* e *n* reais para que se tenha $(m - ni)^2 = -2i$.

5. Conjugado de um número complexo

Denomina-se conjugado de um número complexo $z = a + bi$ ao número complexo $\bar{z} = a - bi$.

Exemplos:

O conjugado de: $z = 2 + 5i$ é $\bar{z} = 2 - 5i$

$z = 1 - 7i$ é $\bar{z} = 1 + 7i$

$z = 3$ é $\bar{z} = 3$

Propriedades do conjugado

Considerando-se os complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, veja as propriedades:

1ª propriedade

O conjugado da soma é igual à soma dos conjugados.

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

2ª propriedade

O conjugado do produto é igual ao produto dos conjugados.

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

3^a propriedade

O produto de um número complexo pelo seu conjugado é um número real não negativo.

$$z_1 \cdot \overline{z_1} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 - abi + abi - b^2i^2 = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}_+$$

Exercícios

Resolvido

Prove que se $z = \bar{z}$ então $z \in \mathbb{R}$ e vice-versa.

Se $z = x + yi$, então $\bar{z} = x - yi$.

$z = \bar{z} \Leftrightarrow x + yi = x - yi \Leftrightarrow y = -y \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

Propostos

1475 Escreva o conjugado de z:

a) $z = 0{,}3 + i$
b) $z = 12i$
c) $z = -8$
d) $z = 4i + 7$

1476 Sendo $z = a + bi$, prove que:

a) $z + \bar{z} = 2a$
b) $z - \bar{z} = 2bi$

1477 Para quais números complexos $z = a + bi$ é válida a igualdade $z \cdot (\bar{z} + 1) - \bar{z} = 5 + 4i$?

1478 Mostre que $\bar{\bar{z}} = z$, para todo número complexo $z = a + bi$.

1479 (UCMG) O número complexo z, tal que $5z + \bar{z} = 12 + 16i$, é igual a:

a) $-2 + 2i$
b) $2 - 3i$
c) $1 + 2i$
d) $2 + 4i$
e) $3 + i$

1480 Determinar os números complexos z, tais que $z \cdot \bar{z} + (z - \bar{z}) = 34 + 10i$?

6. Divisão

Sejam dois números complexos, z_1 e z_2, com $z_2 \neq 0$. Dividir z_1 por z_2 corresponde a obter o número complexo $x + yi$, tal que $z_2 \cdot (x + yi) = z_1$.

Exemplo:

$$\frac{2 + 3i}{1 + 2i} = x + yi$$

$$(1 + 2i) \cdot (x + yi) = 2 + 3i$$

$$(x - 2y) + (2x + y)i = 2 + 3i \Rightarrow \begin{cases} x - 2y = 2 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema: $x = \dfrac{8}{5}$ e $y = -\dfrac{1}{5}$

Então, $\dfrac{2 + 3i}{1 + 2i} = \dfrac{8}{5} - \dfrac{1}{5}i$.

Uma maneira mais prática de dividir z_1 por z_2 consiste em multiplicar ambos pelo conjugado de z_2 e aplicar a 3ª propriedade.

Exemplo:
Para efetuar a divisão fazemos:

$$\frac{2+3i}{1+2i} = \frac{(2+3i)\cdot(1-2i)}{(1+2i)\cdot(1-2i)} = \frac{2-4i+3i-6i^2}{1^2+2^2} = \frac{8-i}{5} = \frac{8}{5} - \frac{1}{5}i$$

Exercícios

Resolvidos

1 Determinar o valor de *m*, de modo que o quociente $\frac{3+mi}{2-i}$ seja um número imaginário puro.

Inicialmente devemos efetuar a divisão $\frac{3+mi}{2-i}$.

$$\frac{(3+mi)\cdot(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{6+3i+2mi+mi^2}{2^2+(-1)^2} =$$

$$= \frac{6-m+3i+2mi}{4+1} = \frac{6-m+(3+2m)i}{5} =$$

$$= \underbrace{\frac{6-m}{5}}_{\text{parte real}} + \underbrace{\frac{(3+2m)i}{5}}_{\text{parte imaginária}}$$

Devemos ter:

- parte real igual a zero $\Rightarrow \frac{6-m}{5} = 0 \Rightarrow m = 6$
- parte imaginária diferente de zero $\Rightarrow \frac{3+2m}{5} \neq 0 \Rightarrow m \neq -\frac{3}{2}$.

Então, $m = 6$.

2 Determinar o conjugado do número complexo $z = \frac{1}{i} + \frac{1}{i-1}$.

$$z = \frac{1}{i} + \frac{1}{i-1} = \frac{i-1+i}{i(i-1)} = \frac{-1+2i}{i^2-i} =$$

$$= \frac{(-1+2i)\cdot(-1+i)}{(-1-i)\cdot(-1+i)} =$$

$$= \frac{1-i-2i+2i^2}{(-1)^2+(-1)^2} =$$

$$= \frac{1-2-i-2i}{1+1} =$$

$$= \frac{-1-3i}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$$

Então, $\overline{z} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$.

Propostos

1481 Efetue as seguintes divisões:

a) $\dfrac{1+2i}{1+3i}$ d) $\dfrac{4+3i}{4-3i}$

b) $\dfrac{2+i}{4+2i}$ e) $\dfrac{1-i}{2+i}$

c) $\dfrac{5+i}{3-i}$ f) $\dfrac{8+8i}{2-2i}$

1482 Coloque na forma algébrica (a + bi) os números complexos:

a) $\dfrac{1+i}{1-i}+\dfrac{2-i}{2+i}$

b) $\dfrac{3+2i}{4+3i}-\dfrac{4+i}{2-i}$

1483 (FEI-SP) Escreva na forma a + bi o quociente $\dfrac{1-i}{i}$.

1484 Determine o valor de *x*, de modo que $\dfrac{1+xi}{i}$ seja um número imaginário puro.

1485 Determine o valor de *y*, de modo que o número complexo $\dfrac{4+yi}{2-i}$ seja um número real.

1486 (FEI-SP) A forma algébrica do número complexo $z=\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^3$ é:

a) $-1-i$ d) $-i$
b) $1-i$ e) $1-2i$
c) $1+i$

1487 Determine *m*, de modo que o número $z=\dfrac{1+2i}{2+mi}$ seja real.

1488 (UFBA) Existe um número real *x*, tal que o quociente $\dfrac{x-i}{1-3i}$ é um número imaginário puro. Determine o simétrico de *x*.

1489 (Fuvest-SP) Ache os valores reais de *x*, de modo que a parte real do número complexo $z=\dfrac{x-i}{x+1}$ seja negativa (*i* é a unidade imaginária).

1490 (FEI-SP) Se $a=1+2i$, $b=2-i$ e $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}=0$, então o número complexo *c* é:

a) $2i$ d) $1+2i$
b) $1-2i$ e) $3i$
c) $2-i$

1491 (F. E. Bauru-SP) A expressão $\dfrac{i(i-1)\cdot(i-2)\cdot(i-3)}{10}$, onde *i* é a unidade imaginária, é igual a:

a) 1 d) $-i$
b) i e) n.d.a.
c) -1

1492 (AMAN-RJ) Sendo $i=\sqrt{-1}$, o resultado $\dfrac{1+2i}{1-3i}+\dfrac{i}{1+3i}$ é igual a:

a) $\dfrac{1}{5}-\dfrac{3}{5}i$ d) $\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{5}i$

b) $\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{5}i$ e) n.d.a.

c) $-\dfrac{1}{5}-\dfrac{3}{5}i$

1493 (Mack-SP) Sejam os números complexos z_1 e z_2, onde $z_2=3i$ e $z_1z_2=-9+6i$. Então z_1+z_2 vale:

a) $2+6i$ d) $-3-3i$
b) $2-6i$ e) $9i$
c) $-3+3i$

1494 (UFV-MG) Calculando a expressão $\dfrac{(i+1)^2\ (2i-1)i^3}{(i+1)\ (i-1)}+2i$, obtém-se:

a) 1 d) -1
b) zero e) $4i-1$
c) $4i+1$

1495 (Gama Filho-RJ) Dados os complexos $z=ab-3i$ e $v=6+ai$, $a\in\mathbb{N}$, $b\in\mathbb{R}$, os valores de *a* e de *b* para os quais tem-se $z\cdot v=11-17i$ são, respectivamente:

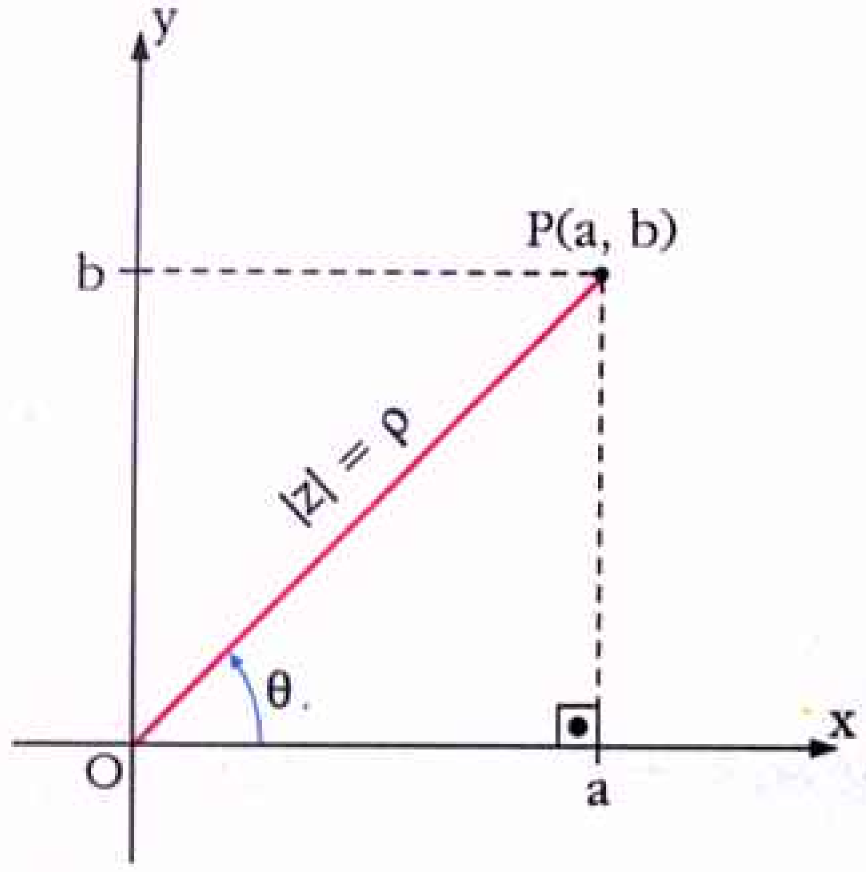
a) $\dfrac{2}{3}$ e $\dfrac{9}{4}$ d) 3 e $\dfrac{2}{3}$

b) 1 e 1 e) 5 e $\dfrac{1}{5}$

c) 3 e $\dfrac{1}{9}$

7. Representação geométrica de um número complexo

A representação geométrica de um número complexo $z = a + bi$, não-nulo, é feita em um plano, denominado plano de Argand-Gauss. Veja:



Onde:

- O plano de Argand-Gauss é xOy.
- O eixo real é Ox.
- O eixo imaginário é Oy.
- O módulo do número complexo é $|z|$ ou ρ.
- O argumento do número complexo é θ.
- O ponto imagem ou afixo do número complexo $z = a + bi$ é $P(a, b)$.

Módulo de um número complexo

É a distância entre a origem *O* e o ponto *P*, que é simbolizado por $|z|$ ou ρ, onde:

$$\boxed{\rho = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

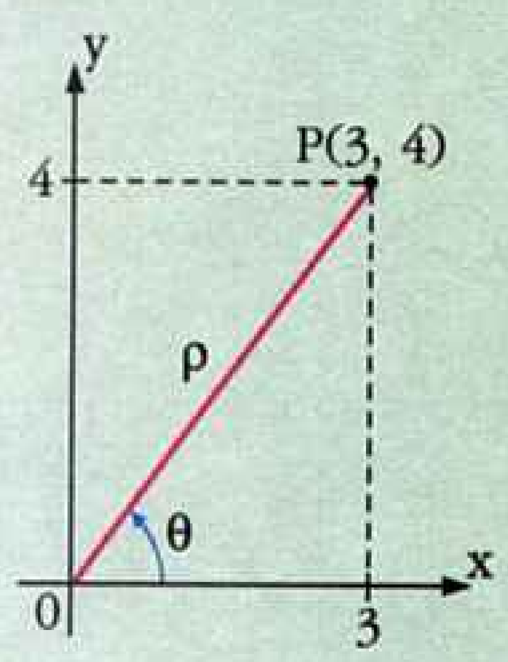
Exemplos:

a) O módulo de $z = 3 + 4i$ é:

$\rho = \sqrt{3^2 + 4^2}$

$\rho = \sqrt{9 + 16}$

$\rho = 5$

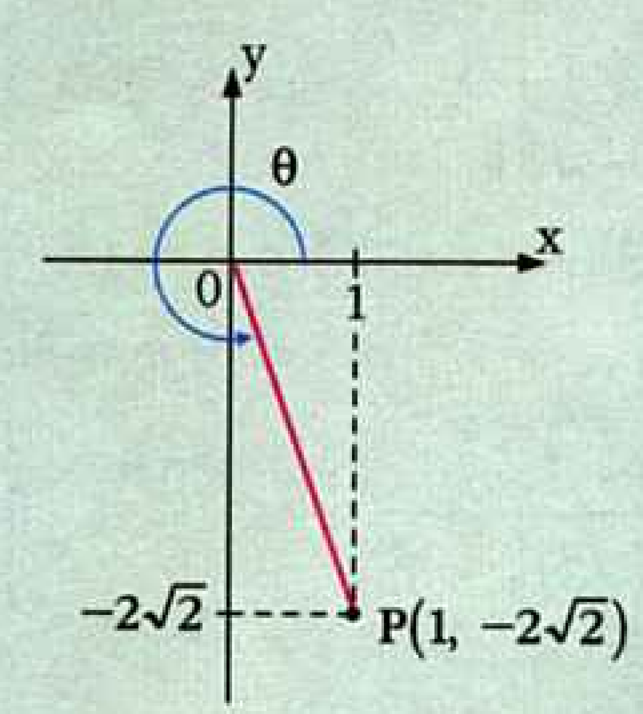


b) O módulo de $z = 1 - 2\sqrt{2}i$ é:

$\rho = \sqrt{1^2\ (-2\sqrt{2})^2}$

$\rho = \sqrt{1 + 8}$

$\rho = 3$



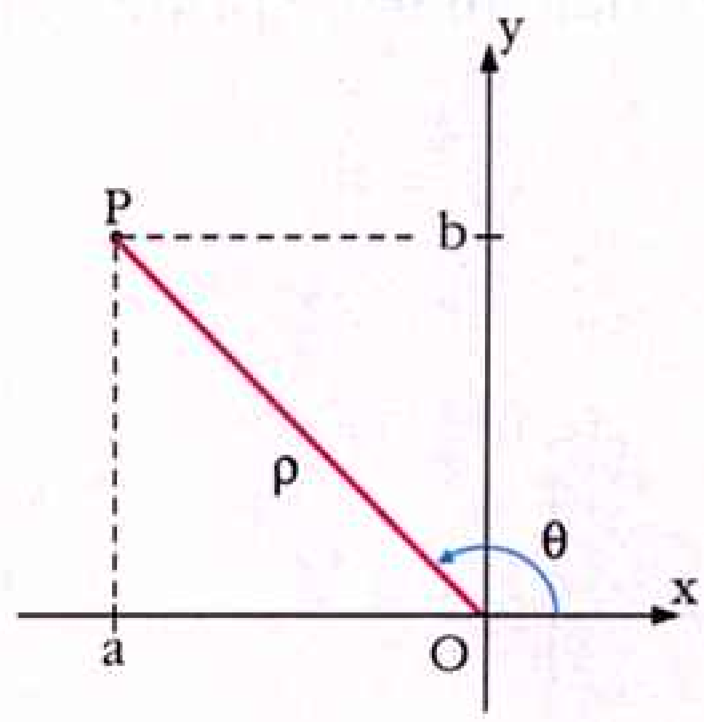
Argumento de um número complexo

O argumento de um número complexo não-nulo, indicado por arg(z), é a medida θ, sendo $0 \text{ rad} \leq \theta < 2\pi \text{ rad}$, do ângulo que se obtém girando, no sentido anti-horário, o semi-eixo real positivo Ox até encontrar $\overrightarrow{OP}$.

O argumento do número complexo $z = a + bi$ é determinado através das relações:

$$\text{sen } \theta = \frac{b}{\rho}$$

$$\cos \theta = \frac{a}{\rho}$$



Exemplo:
Para determinar o argumento do número complexo $z = 1 + \sqrt{3}i$ fazemos:

$a = 1$

$b = \sqrt{3}$

$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\rho = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}$

$\rho = \sqrt{1 + 3}$

$\rho = 2$

$$\left.\begin{array}{l} \text{sen } \theta = \dfrac{b}{\rho} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\[2ex] \cos \theta = \dfrac{a}{\rho} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \theta = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

Exercícios

Resolvido

Determinar o módulo e o argumento dos números complexos e representar no plano de Argand-Gauss.

a) $z = \sqrt{3} + i$

b) $z = 1 - \sqrt{3}i$

c) $z = 3 + 3i$

d) $z = -2i$

a) $z = \sqrt{3} + i$, $a = \sqrt{3}$ e $b = 1$

Módulo:

$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$

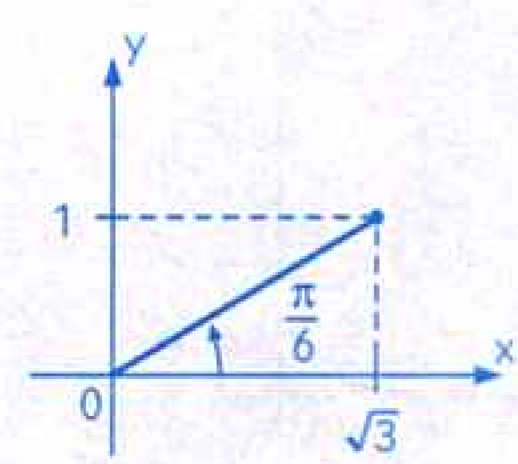
$\rho = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2}$

$\rho = \sqrt{4}$

$\rho = 2$

Argumento:

$$\left.\begin{array}{l} \text{sen } \theta = \dfrac{b}{\rho} = \dfrac{1}{2} \\[2ex] \cos \theta = \dfrac{a}{\rho} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \begin{array}{l} 1^{\underline{o}} \text{ quadrante} \\[1ex] \theta = 30^\circ = \dfrac{\pi}{6} \text{ rad} \end{array}$$



b) $z = 1 - \sqrt{3}i$, $a = 1$ e $b = -\sqrt{3}$

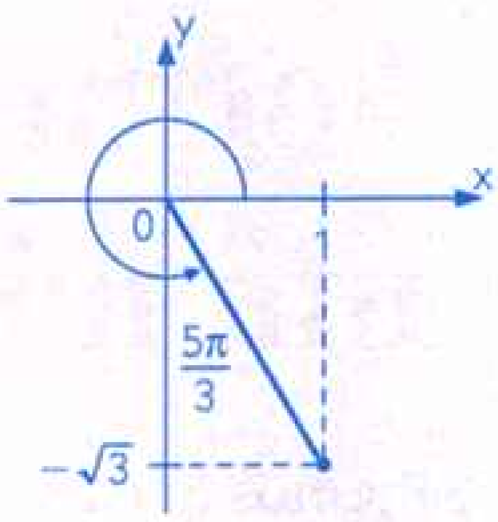
Módulo:

$\rho = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2}$

$\rho = 2$

Argumento:

$$\left.\begin{array}{l} \text{sen } \theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos \theta = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \begin{array}{l} 4^{\text{o}} \text{ quadrante} \\ \theta = 300^\circ = \dfrac{5\pi}{6} \text{ rad} \end{array}$$



c) $z = 3 + 3i$, $a = 3$ e $b = 3$

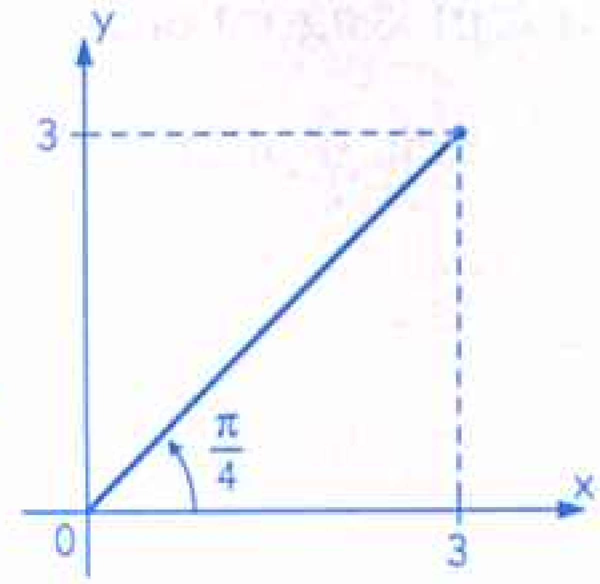
Módulo:

$\rho = \sqrt{3^2 + 3^2}$

$\rho = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

Argumento:

$$\left.\begin{array}{l} \text{sen } \theta = \dfrac{3}{3\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos \theta = \dfrac{3}{3\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \begin{array}{l} 1^{\text{o}} \text{ quadrante} \\ \theta = 45^\circ = \dfrac{\pi}{4} \text{ rad} \end{array}$$



d) $z = -3i$, $a = 0$ e $b = -3$

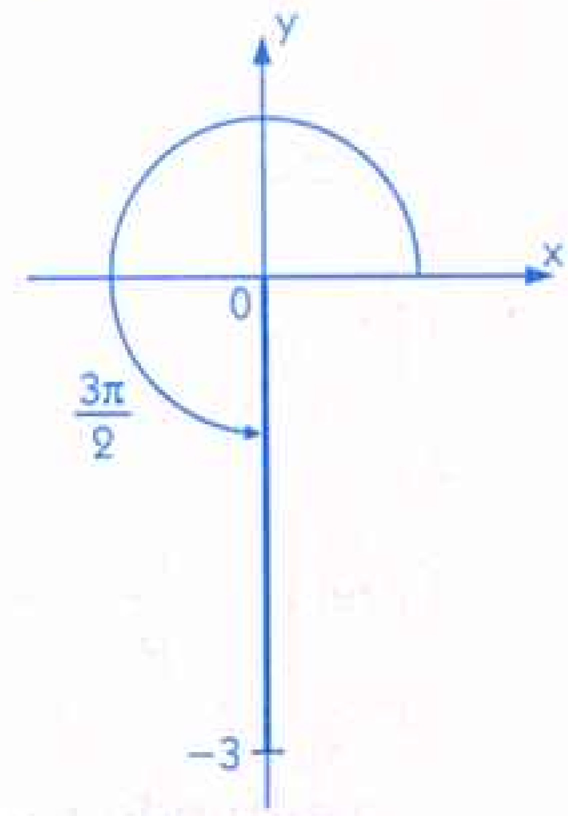
Módulo:

$\rho = \sqrt{0^2 + (-3)^2}$

$\rho = \sqrt{9} = 3$

Argumento:

$$\left.\begin{array}{l} \text{sen } \theta = -\dfrac{3}{3} = -1 \\ \cos \theta = \dfrac{0}{3} = 0 \end{array}\right\} \theta = 270^\circ = \dfrac{3\pi}{2} \text{ rad}$$



Propostos

1496 Determine o módulo e o argumento dos seguintes números complexos:

a) $z = 4 + 4i$
b) $z = -1 - \sqrt{3}i$
c) $z = -\sqrt{3} - i$
d) $z = -1 + i$
e) $z = i$
f) $z = 3{,}5$

1497 Represente graficamente os complexos:

a) $z = \sqrt{3} - i$
b) $z = -5 - 5i$
c) $z = -i$

1498 (Mack-SP) O módulo de $\dfrac{i + \sqrt{3}}{\sqrt{3} - i}$ vale:

a) 0
b) 1
c) $\sqrt{3}$
d) $\dfrac{1}{2}$
e) $\dfrac{1}{4}$

1499 (Mack-SP) Sendo $z_1 = 4 + 2i$ e $z_2 = 1 - 2i$, então $|z_1 - z_2|$ é igual a:

a) 5
b) $\sqrt{5}$
c) $3\sqrt{5}$
d) 10
e) $3\sqrt{15}$

1500 (UFAL) Se z é um complexo, tal que $z \cdot \bar{z} = 25$, então o módulo de z é:

a) $\sqrt{5}$
b) 5
c) $5\sqrt{5}$
d) 25
e) 50

1501 (Santa Casa-SP) Seja o número complexo $z = 1 + 2xi$, onde $x \in \mathbb{R}_+$. Se o módulo de z é igual a 7, então x pertence ao intervalo:

a) $]-\infty; 1[$
b) $[1; 3]$
c) $]3; 5[$
d) $[5; 8]$
e) $]8; +\infty[$

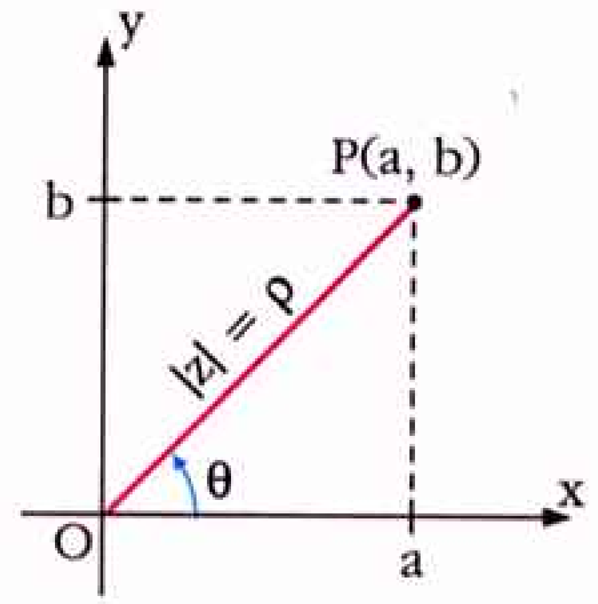
1502 Dado um número complexo $z = a + bi$, z não-nulo, mostre que:

a) $|z| = |\bar{z}|$
b) $z \cdot \bar{z} = (|z|)^2$
c) $\arg(z) + \arg(\bar{z}) = 2\pi$

8. Forma trigonométrica de um número complexo

Sabemos que um número complexo tem como forma algébrica a expressão a + bi. Veremos agora uma forma associada à trigonometria, denominada forma trigonométrica.

Seja o plano de Argand-Gauss:



e as razões trigonométricas:

$$\begin{cases} \text{sen}\ \theta = \dfrac{h}{\rho} \quad \text{então} \quad \boxed{b = \rho \cdot \text{sen}\ \theta} \quad \text{(I)} \\[2ex] \cos \theta = \dfrac{a}{\rho} \quad \text{então} \quad \boxed{a = \rho \cdot \cos \theta} \quad \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo as relações obtidas (I) e (II) em z = a + bi, obtemos a forma trigonométrica do número complexo *z*.

$$z = \rho \cos \theta + i \cdot \rho\ \text{sen}\ \theta$$

$$\boxed{z = \rho\ (\cos \theta + i \cdot \text{sen}\ \theta)}$$

Exemplo:

Obtemos a forma trigonométrica do número complexo $z = 1 + \sqrt{3}i$, fazendo:

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow \rho = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}$$

$$\left.\begin{aligned} \text{sen}\ \theta &= \frac{b}{\rho} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos \theta &= \frac{a}{\rho} = \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \quad \theta = 60° \text{ ou } \theta = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

Forma trigonométrica: $z = 2 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \cdot \text{sen}\ \frac{\pi}{3}\right)$

Exercícios

Resolvidos

1 Dado o número complexo $z = 2 + 2i$, pede-se:

a) o módulo (ρ) de z

b) o argumento (θ) de z

c) representar z no plano de Argand-Gauss

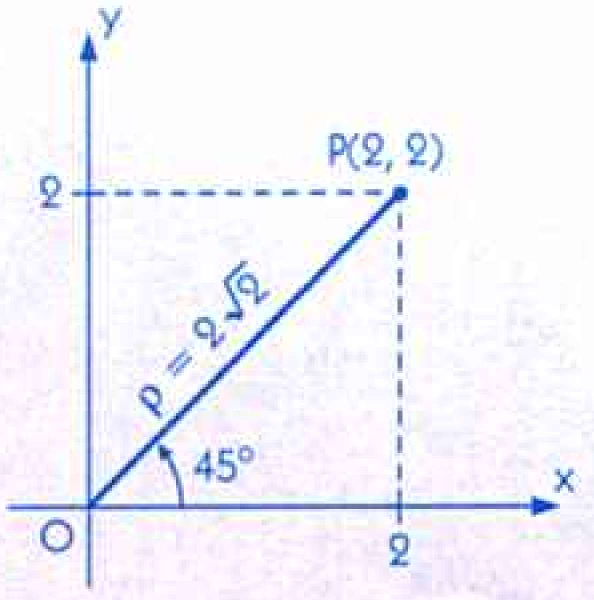
d) a forma trigonométrica de z

a) O módulo de z: $\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$

b) O argumento de z:

$$\left.\begin{array}{l} \text{sen } \theta = \dfrac{b}{\rho} = \dfrac{2}{2 \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\[2ex] \cos \theta = \dfrac{a}{\rho} = \dfrac{2}{2 \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \quad \text{Logo, } \theta = 45° \text{ ou } \theta = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

c) O plano de Argand-Gauss:



d) A forma trigonométrica: $z = 2\sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \cdot \text{sen } \frac{\pi}{4}\right)$

2 Calcular, na forma trigonométrica, o produto $z_1 \cdot z_2$, dados $z_1 = 5 \cdot \left(\cos \frac{2\pi}{5} + i \cdot \text{sen } \frac{2\pi}{5}\right)$ e $z_2 = 2 \cdot \left(\cos \frac{3\pi}{5} + i \cdot \text{sen } \frac{3\pi}{5}\right)$.

$$z_1 \cdot z_2 = 5 \cdot \left(\cos \frac{2\pi}{5} + i \cdot \text{sen } \frac{2\pi}{5}\right) \cdot 2 \cdot \left(\cos \frac{3\pi}{5} + i \cdot \text{sen } \frac{3\pi}{5}\right)$$

$$z_1 \cdot z_2 = 5 \cdot 2 \cdot \left(\cos \frac{2\pi}{5} + i \cdot \text{sen } \frac{2\pi}{5}\right) \cdot \left(\cos \frac{3\pi}{5} + i \cdot \text{sen } \frac{3\pi}{5}\right)$$

$$z_1 \cdot z_2 = 5 \cdot 2 \cdot \left[\left(\cos \frac{2\pi}{5} \cdot \cos \frac{3\pi}{5} - \text{sen } \frac{2\pi}{5} \cdot \text{sen } \frac{3\pi}{5}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\cos \frac{2\pi}{5} \cdot \text{sen } \frac{3\pi}{5} + \cos \frac{3\pi}{5} \cdot \text{sen } \frac{2\pi}{5}\right) \cdot i\right]$$

$$z_1 \cdot z_2 = 5 \cdot 2 \cdot \left[\cos \left(\frac{2\pi}{5} + \frac{3\pi}{5}\right) + i \cdot \text{sen } \left(\frac{2\pi}{5} + \frac{3\pi}{5}\right)\right]$$

$z_1 \cdot z_2 = 10 \cdot (\cos \pi + i \cdot \text{sen } \pi)$

$z_1 \cdot z_2 = -10$

Generalizando, temos:

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot [\cos (\theta_1 + \theta_2) + i \cdot \text{sen } (\theta_1 + \theta_2)]}$$

Propostos

1503 Escrever na forma trigonométrica os números complexos:

a) $z = \sqrt{3} + i$
b) $z = 3 + 3i$
c) $z = 2 - 2i$
d) $z = \sqrt{3} - i$

1504 Escrever na forma algébrica os números complexos:

a) $z = 2 \cdot (\cos 30° + i \cdot \text{sen } 30°)$

b) $z = 4 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \cdot \text{sen } \frac{\pi}{4}\right)$

c) $z = 6 \cdot \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \cdot \text{sen } \frac{5\pi}{4}\right)$

d) $z = 3 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \cdot \text{sen } \frac{\pi}{2}\right)$

1505 (UFBA) Sendo $z_1 = \frac{1}{3} - \frac{2}{5}i$ e $z_2 = -\frac{2}{3} - \frac{3}{5}i$, a representação trigonométrica de $z_1 - \bar{z}_2$ é:

a) $\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \cdot \text{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

b) $\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$

c) $\sqrt{2}\left[\cos \frac{\pi}{2} + i \cdot \text{sen } \frac{\pi}{2}\right]$

d) $\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i \cdot \text{sen}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right]$

e) $\sqrt{2}\left[\cos \frac{3\pi}{4} + i \cdot \text{sen } \frac{3\pi}{4}\right]$

1506 (PUC-RS) O número complexo $2 \cdot \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \cdot \text{sen } \frac{11\pi}{6}\right)$, escrito na forma algébrica $a + bi$, é:

a) $2\sqrt{3} + i$ b) $-\sqrt{3} + i$ c) $-\sqrt{3} - i$ d) $\sqrt{3} - i$ e) $2\sqrt{3} - i$

1507 Calcule os produtos:

a) $\left[12 \cdot \left(\cos \frac{3\pi}{8} + i \cdot \text{sen } \frac{3\pi}{8}\right)\right] \cdot \left[0{,}8 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \cdot \text{sen } \frac{\pi}{8}\right)\right]$

b) $\left[6 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \cdot \text{sen } \frac{\pi}{6}\right)\right] \cdot \left[\sqrt{3} \cdot \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \cdot \text{sen } \frac{2\pi}{3}\right)\right]$

c) $\left[\sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \cdot \text{sen } \frac{\pi}{4}\right)\right] \cdot \left[\sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \cdot \text{sen } \frac{\pi}{4}\right)\right] \cdot \left[\sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \cdot \text{sen } \frac{\pi}{4}\right)\right]$

1508 (Unirio-RJ) Seja o complexo $z = \rho \cdot (\cos \theta + i \text{ sen } \theta)$ escrito na forma trigonométrica. Então $z \cdot \bar{z}$ é:

a) 2ρ
b) $2\rho(\cos 2\theta - i\text{sen } 2\theta)$
c) ρ^2
d) $\rho^2(\cos \theta^2 - i\text{sen } \theta^2)$
e) $\cos^2 \theta + i\text{sen}^2 \theta$

9. Potenciação

Para elevar um número complexo z, não-nulo, ao expoente natural n ($n \geqslant 2$), escreve-se o número na forma trigonométrica, com o módulo ρ elevado ao expoente n e o argumento θ multiplicado pelo expoente n, ou seja:

$$\boxed{z^n = \rho^n \cdot [\cos(n \cdot \theta) + i \cdot \text{sen}(n \cdot \theta)]}$$

- A igualdade acima é conhecida como a 1ª fórmula de Moivre.
  Se $z = 0$, então $z^n = 0$.

Exercícios

Resolvido

Dado o número complexo $z = \sqrt{3} + i$, calcular z^4.

Escrevendo o número $z = \sqrt{3} + i$ na forma trigonométrica, temos:

$z = 2 \cdot (\cos 30° + i \cdot \text{sen } 30°)$

Logo, $z^4 = 2^4 \cdot (\cos 4 \cdot 30° + i \cdot \text{sen } 4 \cdot 30°)$

$z^4 = 16 \cdot (\cos 120° + i \cdot \text{sen } 120°) \Rightarrow z^4 = 16 \cdot \left(-\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow z^4 = -8 + 8\sqrt{3}\,i$

Propostos

1509 Dados os números complexos, faça os cálculos solicitados:

a) $z = 1 + \sqrt{3}i$, calcule z^3

b) $z = 2 + 2i$, calcule z^4

c) $z = \sqrt{3} + i$, calcule z^6

d) $z = 1 - \sqrt{3}i$, calcule z^8

e) $z = 4i$, calcule z^2

1510 (PUCCAMP-SP) O módulo e o argumento do complexo $(\sqrt{3} + i)^8$ são, respectivamente:

a) 4^4 e $\frac{4\pi}{3}$ c) 4^8 e $\frac{8\pi}{9}$ e) n.d.a

b) 2^8 e $\frac{8\pi}{3}$ d) 3^8 e $\frac{5\pi}{4}$

1511 (Mack-SP) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{102}$, $i = \sqrt{-1}$, é igual a:

a) i c) 1 e) -1

b) $-i$ d) $1 + i$

1512 (Santa Casa-SP) Dado o número complexo $z = 1 - i$, tem-se que $\frac{1}{z^2}$ é igual a:

a) $2i$ c) $\frac{i}{2}$ e) $-2i$

b) i d) $-i$

1513 (ITA-SP) O valor da potência $\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^{93}$ é:

a) $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ c) $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ e) $(\sqrt{2})^{93} + i$

b) $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ d) $(\sqrt{2})^{93}i$

Ficha-resumo

Conjunto dos números complexos

$\mathbb{C} = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \text{ e } y \in \mathbb{R}\}$ com

Igualdade: $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c$ e $b = d$

Adição: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

Multiplicação: $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

Forma algébrica

$\boxed{z = a + bi}$

a (parte real) e b (parte imaginária) e $i = \sqrt{-1}$ (unidade imaginária).

Igualdade: $a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c$ e $b = d$

Imaginário puro quando $a = 0$ e $b \neq 0$.

Real quando $b = 0$.

Potências de i

$i^0 = 1$ | $i^1 = i$ | $i^2 = -1$ | $i^3 = -i$

Para i^k ($k \in \mathbb{Z}$), fazemos $i^k = i^{4q + r} = i^r$, onde q é quociente de k: 4 e r é o resto, $0 \leq r < 4$.

Operações

Adição: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

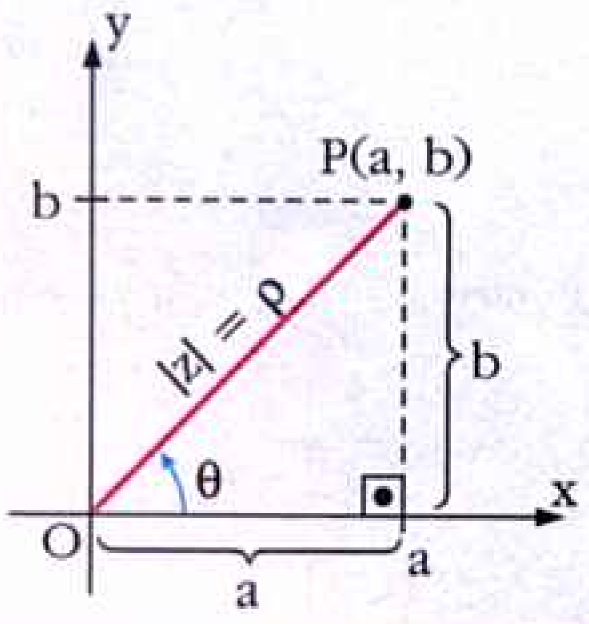
Subtração: $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$

Multiplicação: $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

Conjugado de $z = a + bi$ é $\overline{z} = a - bi$.

Divisão: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \cdot \overline{z}_2}{z_2 \cdot \overline{z}_2}$; $z_2 \neq 0$

Forma trigonométrica



Módulo (ρ): $|z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$; $\rho > 0$

Argumento (θ): $\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen} \theta = \dfrac{b}{\rho} \\ \cos \theta = \dfrac{a}{\rho} \end{array}\right\}$ θ (consultar a tabela)

$\boxed{z = \rho \cdot (\cos \theta + i \cdot \operatorname{sen} \theta)}$

Números complexos

Operações

Potenciação: $z^n = \rho^n \cdot [\cos(n \cdot \theta) + i \cdot \text{sen}(n \cdot \theta)]$

Exercícios

Complementares

1514 (Cescem-SP) Determine os números reais *x* e *y* que satisfazem a equação:
$2x + (y - 3)i = (3y - 4) + xi$

1515 (Santa Casa-SP) Seja a igualdade $1 + (y + x)i = 2y - x - 4i$, onde *i* é a unidade imaginária. Os números reais *x* e *y*, que satisfazem essa igualdade, são tais que:
a) $y = 3x$
b) $x = 3y$
c) $xy = -3$
d) $x - y = 2$
e) $x + y = 2$

1516 Obtenha o valor de *y*, de modo que o número complexo $z = (-8y + 16) + i$ seja um imaginário puro.

1517 (PUC-MG) O produto $(x + yi) \cdot (2 + 3i)$ é um número real quando *x* e *y* são reais e:
a) $x - 3y = 0$
b) $2x - 3y = 0$
c) $2x + 2y = 0$
d) $2x + 3y = 0$
e) $3x + 2y = 0$

1518 Determine o valor de *k*, de tal forma que o número complexo $z = k + (k^2 - 2k + 1)i$ seja um número real.

1519 Calcule o valor das expressões, sendo *i* a unidade imaginária de um número complexo.
a) $i^{10} + 2i^{20}$
b) $8i^{63} + i^{1\,000} + 8i$
c) $\dfrac{i^{157} + i^{203}}{280}$
d) $\dfrac{i^{303} + i^{407}}{i^{14}}$

1520 (Mack-SP) Simplificando
$\dfrac{(2 + i)^{101} \cdot (2 - i)^{50}}{(-2 - i)^{100} \cdot (i - 2)^{49}}$, obtém-se:
a) 1
b) $2 + i$
c) $2 - i$
d) 5
e) -5

1521 O conjugado de $\dfrac{1 + (1 - i)^{16}}{(1 + i)^{16}} - 2^{-8}$ é:
a) -1
b) -2^8
c) i
d) 2^8
e) 1

1522 (Mack-SP) O valor da expressão
$y = i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 + \ldots + i^{1\,001}$ é:
a) 1
b) i
c) $-i$
d) -1
e) $1 + i$

1523 (FESP-SP) O valor de $\left(-\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right)^8$ é:
a) 64
b) 256
c) $64i$
d) $256i$
e) $256(1 + i)$

1524 Determine o valor de *x* e *y*, sendo
$x + (2x + y)i = -1 + 4i$.

1525 (FAAP-SP) Determine *a* e *b*, se:
$a + bi = \dfrac{4 + 3i}{5 - 2i}$.

1526 (UCMG) O quociente $\dfrac{8 + i}{2 - i}$ é igual a:
a) $1 + 2i$
b) $2 + i$
c) $2 + 2i$
d) $2 + 3i$
e) $3 + 2i$

1527 (URRN) O inverso do número complexo $2 + i$ é:
a) $\dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{5}i$
b) $\dfrac{1}{2} - i$
c) $-2 + i$
d) $-\dfrac{1}{5} + \dfrac{2}{5}i$
e) $-\dfrac{1}{2} + i$

1528 (PUC-SP) Dê o conjugado do número complexo $\frac{1 + 3i}{2 - i}$.

1529 (Cesgranrio-RJ) Determine o módulo do complexo $\frac{2 + 3i}{-5 - i}$.

1530 (UEL-PR) O número real positivo *k* que torna o módulo do número complexo $z = \frac{k - i}{3 + i}$ igual a $\frac{\sqrt{5}}{5}$ é:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

1531 (Fesp-SP) O módulo de $\frac{(1 + i)^2}{3 + 4i}$ é:

a) $\frac{3}{25}$ b) $\frac{4}{25}$ c) $\frac{3}{5}$ d) $\frac{4}{5}$ e) $\frac{2}{5}$

1532 (ITA-SP) Sejam *x* e *y* números reais, tais que:

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 1 \\ 3x^2y - y^3 = 1 \end{cases}$$

Então, o número complexo $z = x + iy$ é tal que z^3 e $|z|$ valem, respectivamente:

a) $1 - i$ e $\sqrt[6]{2}$
b) $1 + i$ e $\sqrt[6]{2}$
c) i e 1
d) -1 e i
e) $1 + i$ e $\sqrt[3]{2}$

1533 (Fuvest-SP) Determine dois números complexos z_1 e z_2, tais que $|z_1| = 1$, $|z_2| = 1$ e $z_1 + z_2 = 1$.

1534 (UEL-PR) O argumento principal do número complexo $z = -1 + \sqrt{3}i$ é:

a) $\frac{11\pi}{6}$
b) $\frac{5\pi}{3}$
c) $\frac{7\pi}{6}$
d) $\frac{5\pi}{6}$
e) $\frac{2\pi}{3}$

1535 Escreva na forma trigonométrica os seguintes números complexos:

a) $z = 1 - \sqrt{3}i$
b) $z = 6 + 6i$
c) $z = 1 + i$
d) $z = 3$
e) $z = -2i$

1536 Escreva na forma algébrica os seguintes números complexos:

a) $z = 2 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$

b) $z = 8 \cdot \left(\cos\frac{5\pi}{3} + i \cdot \text{sen}\,\frac{5\pi}{3}\right)$

1537 (UFOP) Coloque na forma $a + bi$ o número $z = \frac{7 + 5i}{1 - i} + \left(i - \sqrt{3}\right)^3$.

1538 Dados os números complexos, calcule o que se pede:

a) $z = 4 + 4i$ calcule z^4
b) $z = \sqrt{3} - i$ calcule z^8

1539 (UFU-MG) Calcule $(1 + i)^8$.

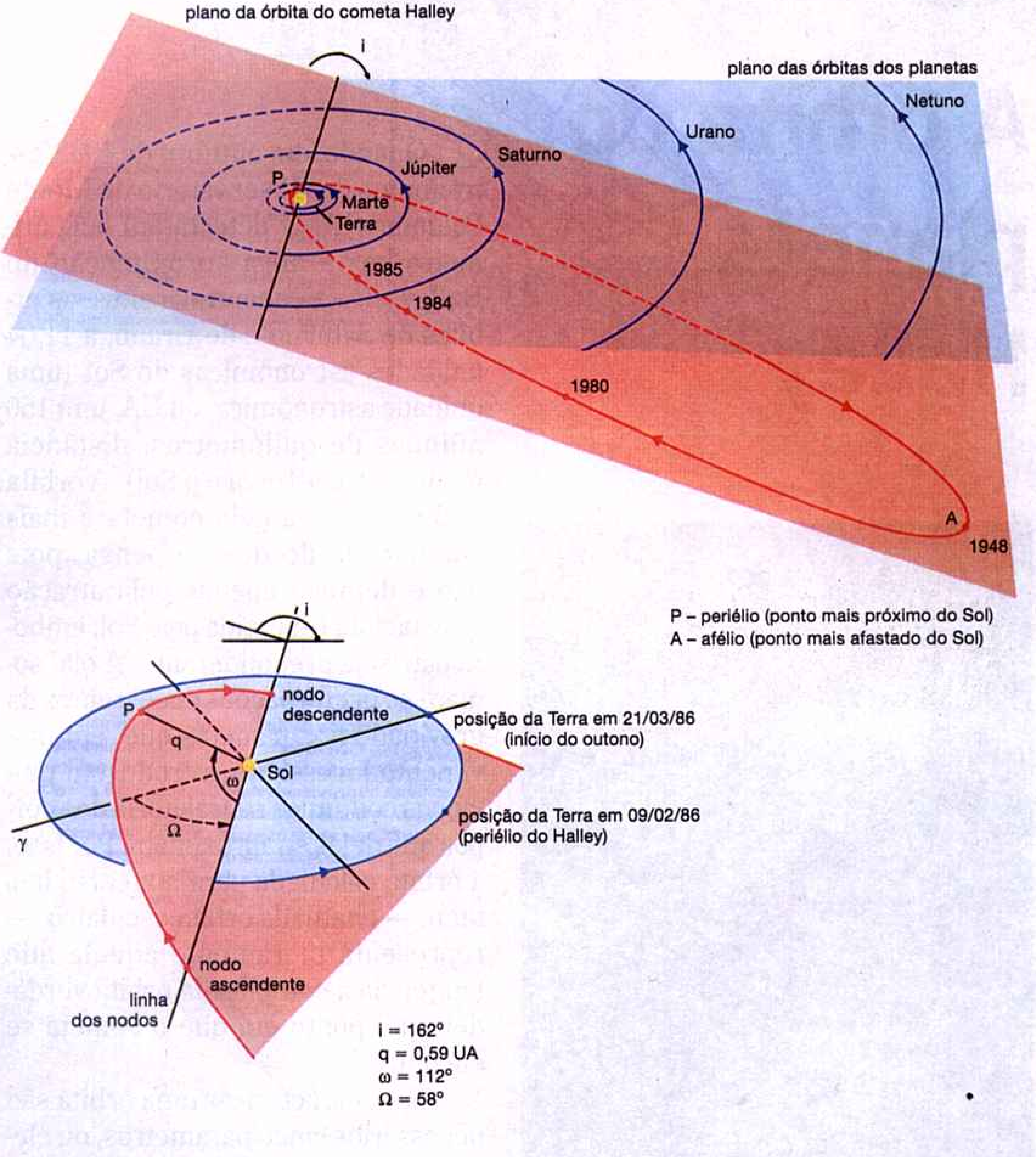
Saiba um pouco mais

A órbita do planeta Halley

Barney Magrath/SPL/Stock Photos

Quando, em outubro de 1982, astrônomos do Observatório de Monte Palomar (EUA) detectaram pela primeira vez a nova aproximação do Halley, ele se encontrava entre as órbitas de Saturno e de Urano, a 11,04 unidades astronômicas do Sol (uma unidade astronômica, ou UA, tem 150 milhões de quilômetros, distância média entre a Terra e o Sol). A órbita real percorrida pelo cometa é mais complicada do que se pensa, pois não é definida apenas pela atração gravitacional exercida pelo Sol, embora esta seja preponderante. A ela, somam-se perturbações decorrentes da gravidade dos planetas que, em movimento incessante, introduzem mutações contínuas na trajetória dos corpos que deles se aproximam. Por isso, a órbita calculada para um certo instante — chamada órbita osculatriz — representa meramente aquela que tangencia a complicada órbita verdadeira no ponto em que o cometa se encontra.

Para caracterizar uma órbita são necessários cinco parâmetros, ou elementos orbitais, mostrados na figura: ângulo de inclinação, distância periélica, argumento do periélio, longitude do nodo ascendente e excentricidade. Um sexto elemento, o instante da passagem do cometa pelo periélio, permite situá-lo na órbita em qualquer instante.



O plano percorrido pelo Halley em sua longa trajetória não coincide com o das órbitas planetárias, e o sentido do movimento do cometa é oposto ao daquele realizado pelos planetas. À esquerda, destaca-se o trecho da órbita do cometa nas proximidades da Terra e os cinco elementos necessários para defini-la: ângulo de inclinação (*i*), distância periélica (*q*), argumento do periélio (ω), longitude do nodo ascendente (Ω, contado a partir da direção γ, em que o Sol passa do hemisfério celeste Sul para o Norte no começo do outono) e excentricidade (*e*). Esse último parâmetro mede o achatamento da elipse $\left(e = \frac{1 - q}{a}\right.$**, sendo *a* o semi-eixo maior da elipse**$\left.\right)$.

Barney Magrath/SPL/Stock Photos

O advento da era das missões espaciais tornou muito mais severas as exigências relativas ao conhecimento das órbitas dos corpos celestes. Cálculos baseados apenas na ação das forças gravitacionais apresentam pequena margem de erro, já detectada em 1822 na passagem do Encke, segundo cometa a ter seu retorno previsto e confirmado, e o de período orbital mais curto: 3,3 anos. Neste caso, algumas horas separavam a previsão da teoria gravitacional e a órbita observada. Verificou-se então a necessidade de levar em conta a influência de forças não gravitacionais, de origem ainda obscura e sem representação matemática formal inteiramente satisfatória. Hoje, acredita-se que a rotação do corpo central (núcleo sólido) do cometa em torno de seu próprio eixo e a ejeção permanente de gases nas partes aquecidas pela insolação têm efeito de empuxo semelhante ao de um foguete. Por isso, aplica-se sempre uma correção semi-empírica quando é necessário determinar com precisão a órbita do Halley, para efeito, por exemplo, de correção da trajetória das naves espaciais que vão abordá-lo. Também serão usadas as novas posições aparentes captadas pela rede astrométrica do IHW na Terra e pelo telescópio espacial norte-americano, que alimentarão um trabalho de permanente reavaliação de dados e prognósticos.

Fonte: extraído de *Bem-vindo Halley!* MATSUURA, Oscar T., Revista *Ciência Hoje*, SBPC, v. 4, n. 21, p. 36.