Estatística e Matemática financeira

Para o homem primitivo,
a noção de espaço era um mistério
incontrolável.
Para o homem da era tecnológica
é o tempo que tem esse papel.

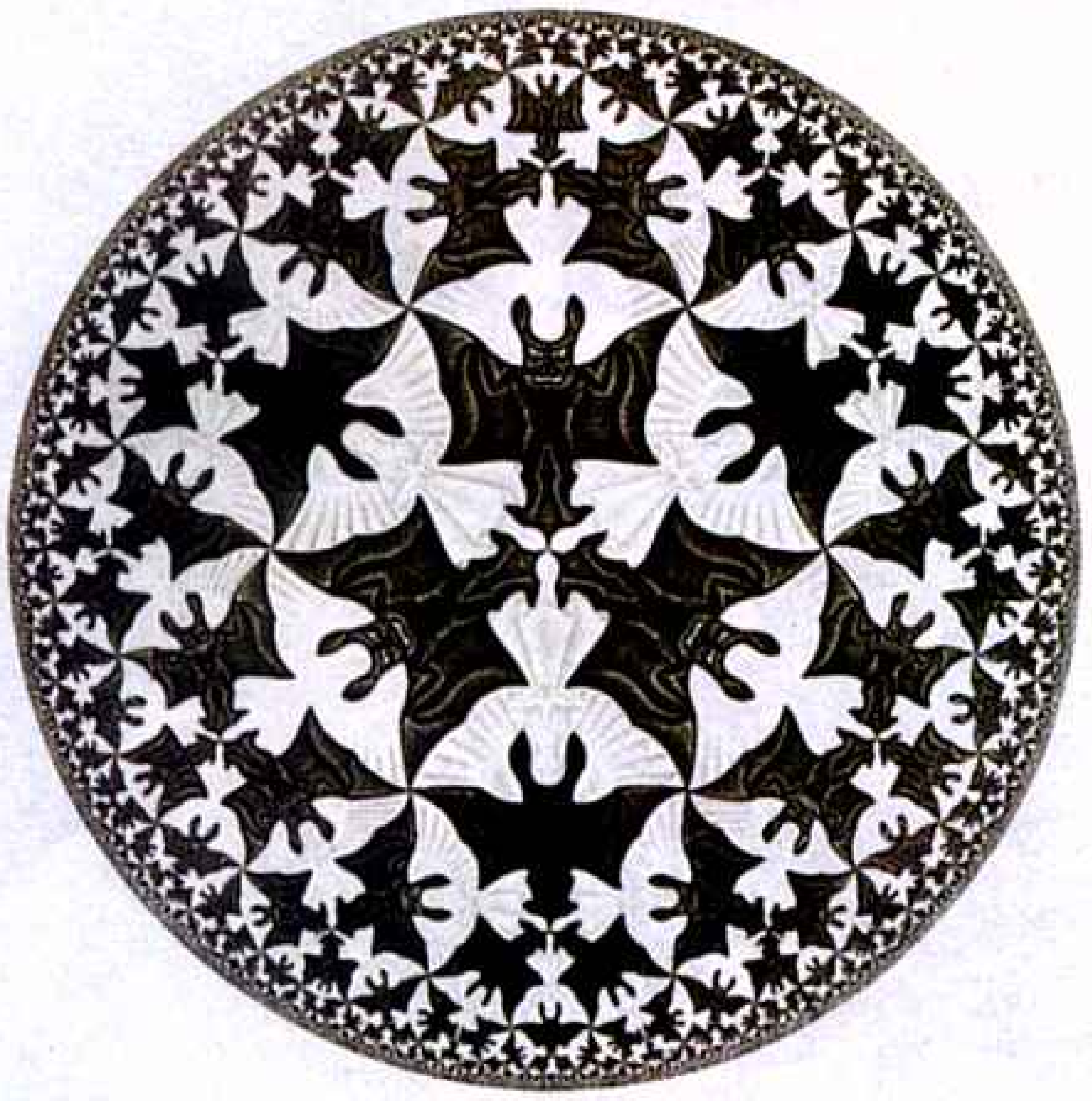
Marshall Mcluhan (1911-1980),
sociólogo e comunicólogo canadense

Parte I: Estatística

1. Conceitos introdutórios

População e amostra

Observe a figura. Para estudá-la não é preciso analisar todos os seus elementos, basta uma parte que lhe seja representativa. As conclusões que obtemos sobre essa parte (amostra) podem ser, por analogia, extensivas ao todo (população).



Limite Circular IV 1960.
M. C. Escher.

Em Estatística, ao estudarmos um conjunto de objetos, de indivíduos ou de ocorrências, podemos considerar todo o conjunto, chamado de população, ou parte desse conjunto, chamado de amostra.

Imagine, por exemplo, um campeonato quadrangular entre Flamengo, Corinthians, Atlético Mineiro e Grêmio, sendo realizado em um único dia, no Maracanã. Se quisermos saber qual é a composição da torcida que está no estádio, podemos desenvolver o estudo, entrevistando:

- o conjunto de todos os torcedores que estão no estádio (população)
- ou parte desse conjunto de torcedores (amostra)

Freqüência absoluta e relativa

Vamos considerar que, nesse exemplo, o conjunto de torcedores seja de 80 000, dentre os quais 40 000 são flamenguistas, 20 000 corintianos, 12 000 atleticanos e 8 000 gremistas.

Chamaremos de freqüência absoluta de cada variável, ou seja, a preferência por um clube, o número de vezes que essa variável aparece no conjunto considerado.

Chamaremos de freqüência relativa de cada variável, ou seja, o clube, a razão entre a sua freqüência absoluta e o número total de torcedores. Em geral, a freqüência relativa é escrita em porcentagem.

$$\text{Flamengo: } \frac{40\,000}{80\,000} \cdot 100 = 50\%$$

$$\text{Corinthians: } \frac{20\,000}{80\,000} \cdot 100 = 25\%$$

$$\text{Atlético: } \frac{12\,000}{80\,000} \cdot 100 = 15\%$$

$$\text{Grêmio: } \frac{8\,000}{80\,000} \cdot 100 = 10\%$$

Para facilitar a apresentação do estudo, podemos construir:

a) Tabelas

Torcedores	Freqüência absoluta	Freqüência relativa
Flamenguistas	40 000	50%
Corintianos	20 000	25%
Atleticanos	12 000	15%
Gremistas	8 000	10%
Total	80 000	100%

b) Gráficos

Gráfico de barras

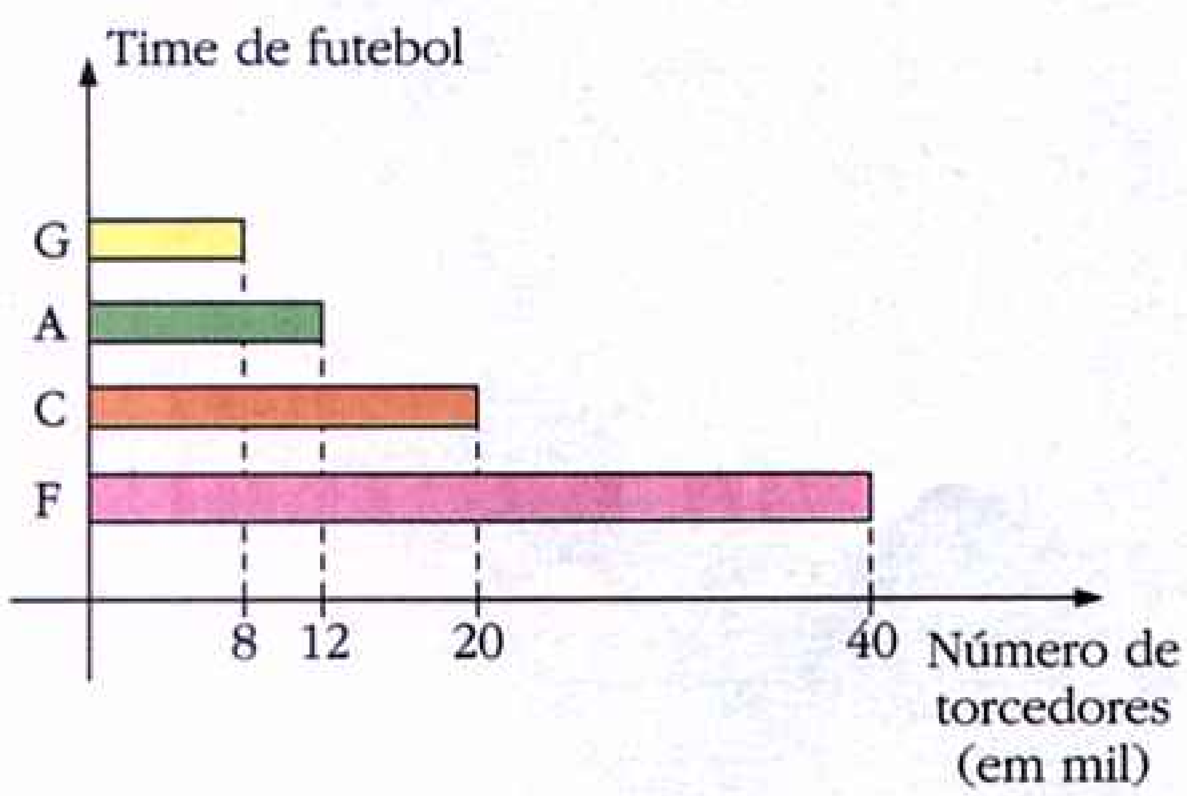


Gráfico de colunas

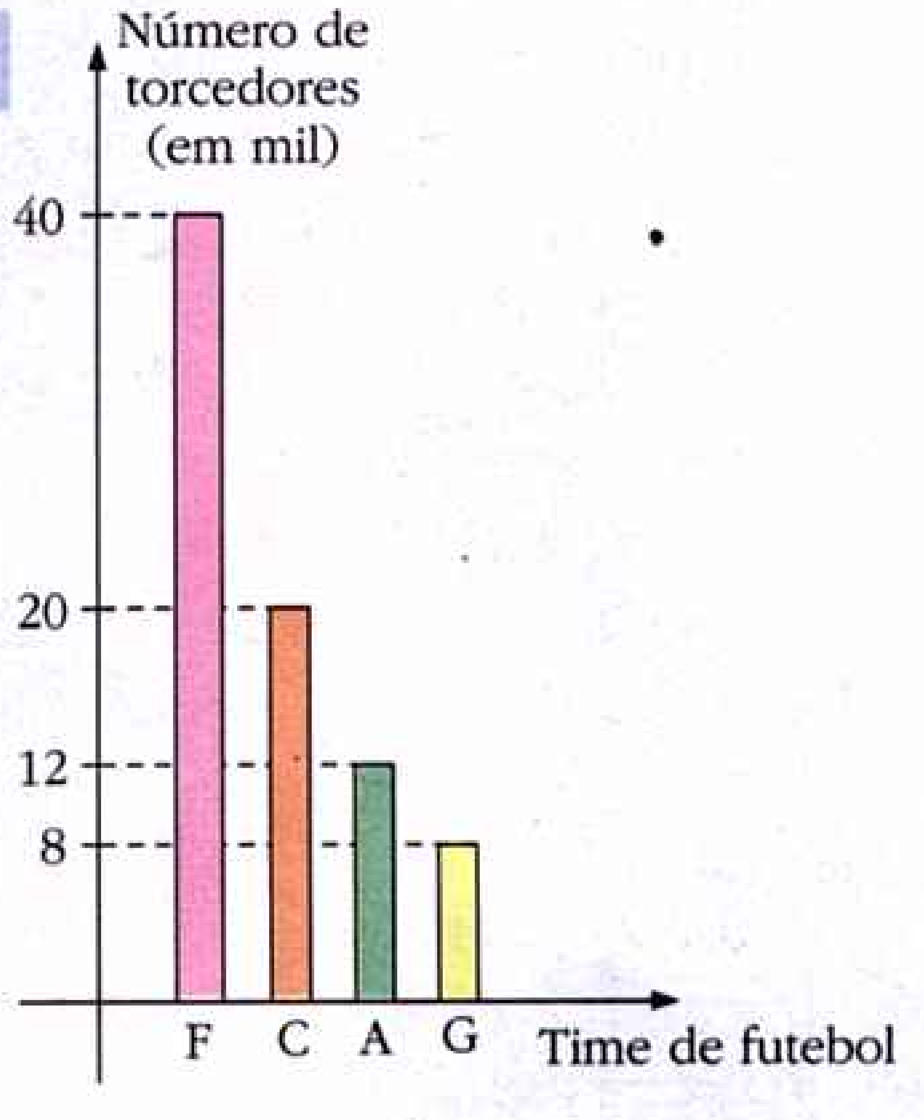
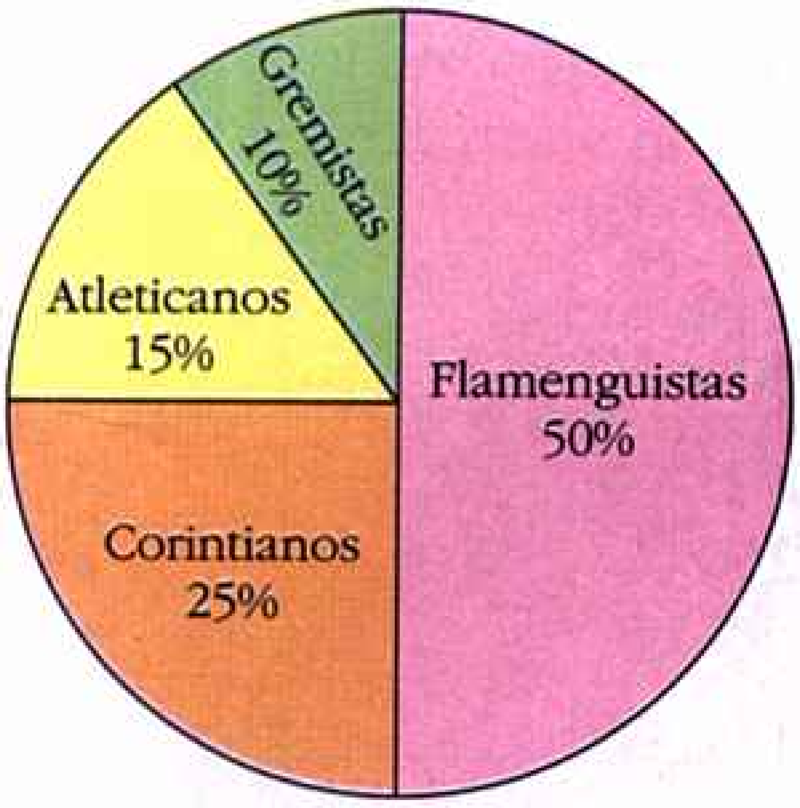


Gráfico de setores



Usamos a freqüência relativa para obter as medidas dos setores:

50% de 360° = 0,50 · 360° = 180°

25% de 360° = 0,25 · 360° = 90°

15% de 360° = 0,15 · 360° = 54°

10% de 360° = 0,10 · 360° = 36°

Exercícios

Resolvido

Com o objetivo de divulgar um de seus produtos, determinada indústria entrevistou 600 pessoas para saber qual veículo de informação (jornal, rádio, revista e televisão) era mais utilizado por elas. Dentre os entrevistados, 72 preferiram jornal, 276 rádio, 42 revista e 210 televisão.

a) Construir uma tabela relacionando os quatro veículos de informação e as freqüências absoluta e relativa.

b) Construir o gráfico de barras e de setores para representar os dados dessa tabela.

a)

Variável (veículos de informação)	Freqüência absoluta	Freqüência relativa
Rádio	276	$\frac{276}{600} \cdot 100\% = 46\%$
Televisão	210	$\frac{210}{600} \cdot 100\% = 35\%$
Jornal	72	$\frac{72}{600} \cdot 100\% = 12\%$
Revista	42	$\frac{42}{600} \cdot 100\% = 7\%$
Total	600	100%

b) Gráfico de barras

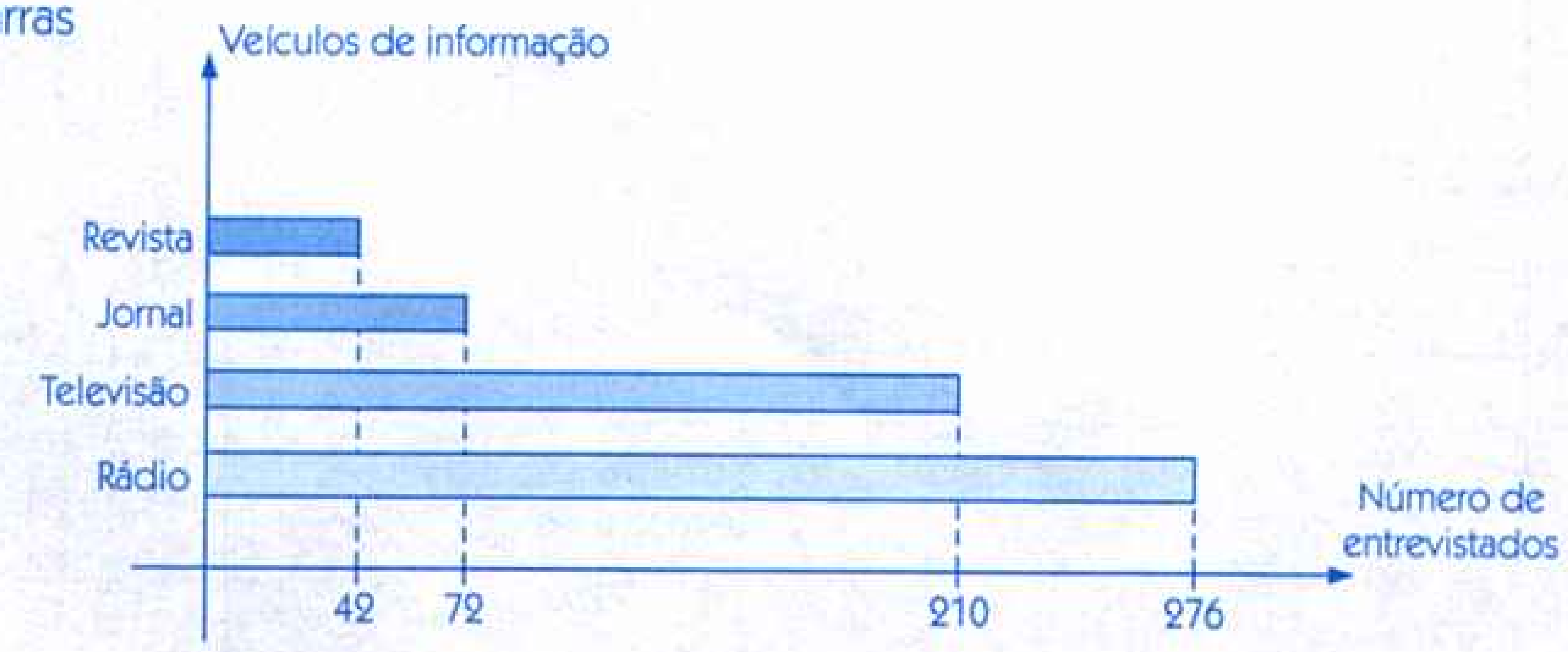
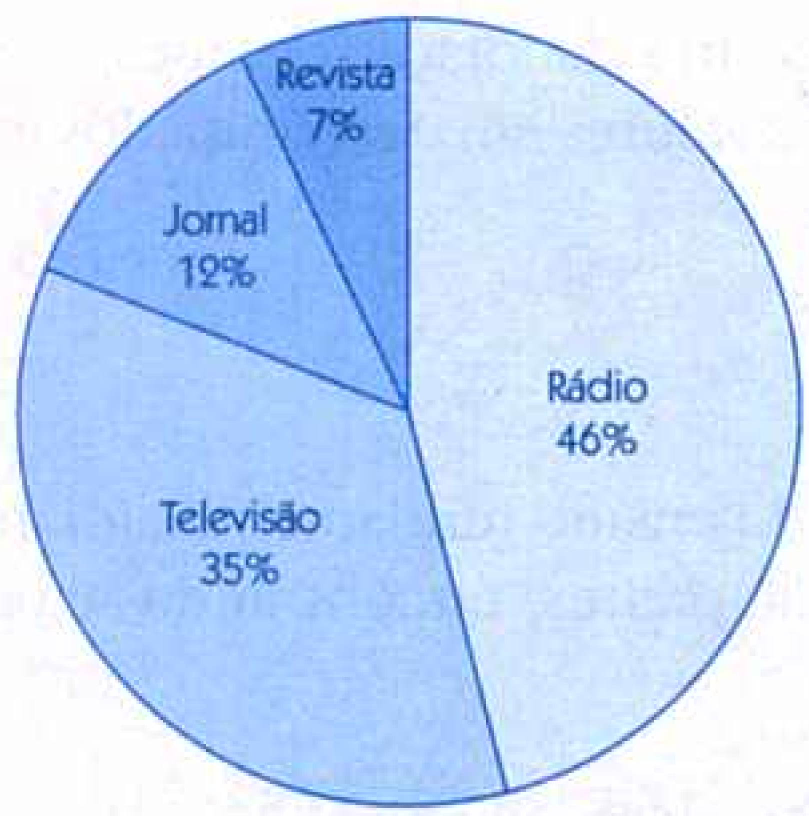


Gráfico de setores



Cálculos auxiliares:

46% de $360° = 0,46 \cdot 360° = 165,6°$

35% de $360° = 0,35 \cdot 360° = 126°$

12% de $360° = 0,12 \cdot 360° = 43,2°$

7% de $360° = 0,07 \cdot 360° = 25,2°$

Propostos

1667 Sessenta jurados escolheram a sede das próximas Olimpíadas entre cinco países (*A*, *B*, *C*, *D* e *E*). Uma entrevista com esses jurados revelou que nove deles optaram pelo país *A*, seis por *B*, 27 por *C*, três por *D* e 15 por *E*.

a) Construa uma tabela relacionando os países escolhidos e as freqüências absoluta e relativa.

b) Construa o gráfico de colunas e o de setores, para representar os dados dessa tabela.

1668 Um laboratório realizou, num certo dia, noventa coletas de sangue. Um dos itens analisados foi o grupo sangüíneo do sistema ABO. Desse total, constatou-se que 27 coletas eram do grupo sangüíneo *A*, 36 do *B*, 18 do AB e 9 do *O*.

a) Construa uma tabela relacionando os grupos sangüíneos e as freqüências absoluta e relativa.

b) Construa o gráfico de barras e de setores, para representar os dados dessa tabela.

1669 (Vunesp) Examine o gráfico a seguir.

No período considerado,

a) houve um contínuo déficit na balança comercial brasileira.

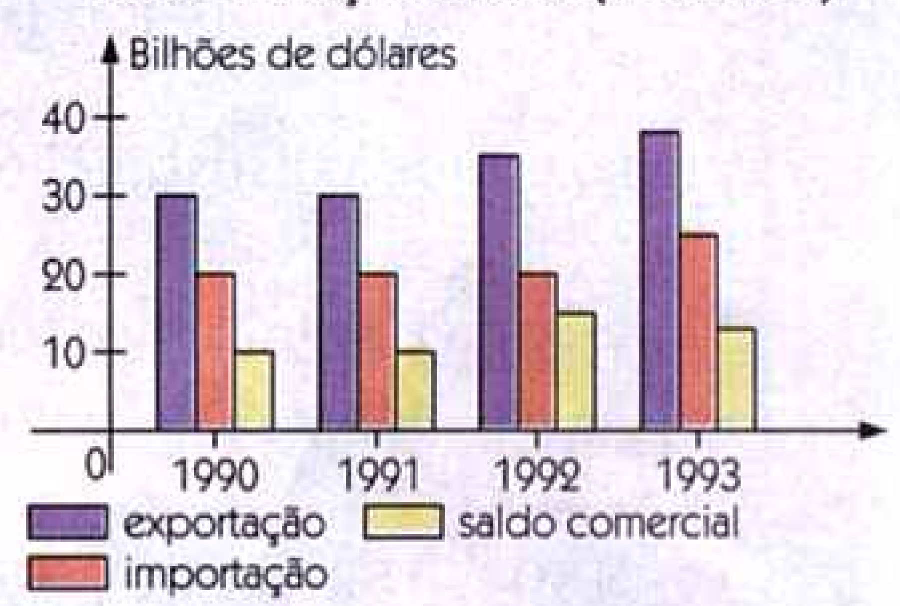
b) houve um contínuo crescimento no valor das exportações.

c) a maior movimentação financeira ocorreu no ano de 1991.

d) os maiores saldos na balança comercial ocorreram em 1990 e 1993.

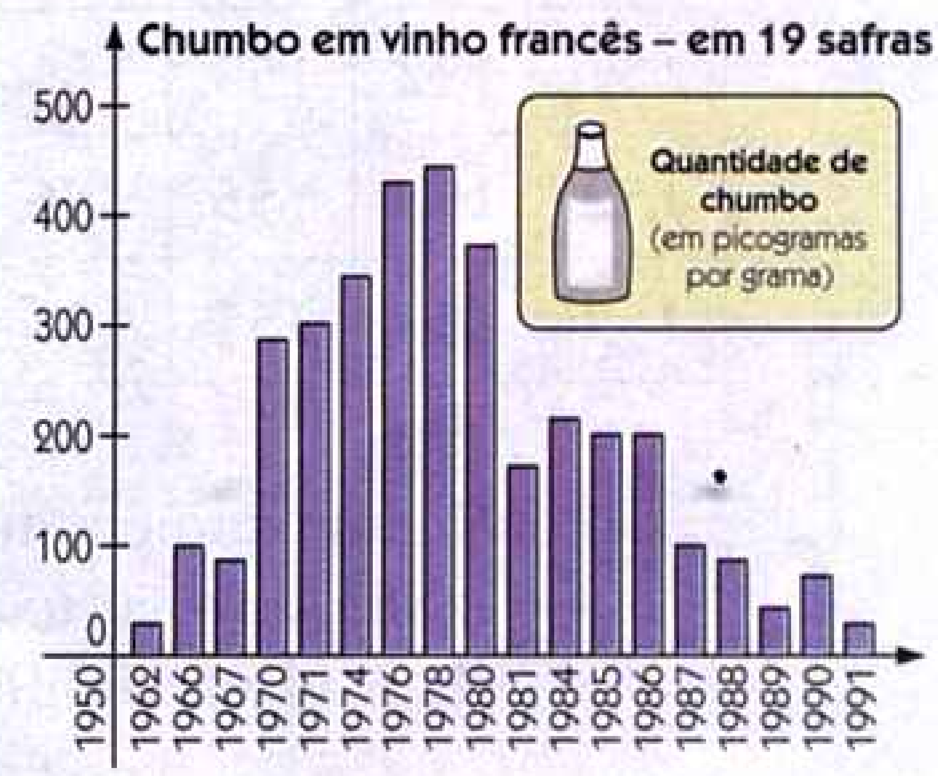
e) o menor valor de exportação brasileira verificou-se em 1992.

Brasil – Balança Comercial (1990-1993)



(Fonte: *Brasil em números*, 1994, IBGE.)

1670 (Vunesp)



Os números encontrados estão expressos em picogramas por grama de vinho. Um picograma equivale a 10^{-12} gramas. Suponhamos que a massa de 1 litro desse vinho seja igual a 1 kg. Nessas condições, determine a quantidade aproximada de chumbo, em miligramas, numa garrafa de 750 mℓ, safra de 1984.

Distribuição de freqüência

Algumas coletas com muitos dados não favorecem a elaboração de tabelas detalhadas.

Nesses casos, é mais interessante agrupar os valores em determinados intervalos que apresentam a mesma amplitude.

Exemplo:

Em uma olimpíada estudantil, com alunos do ensino fundamental, foi medida a altura de cada um dos cinqüenta participantes, encontrando-se os seguintes valores, em centímetros:

152	155	167	176	155	156	166	178	153	162
155	160	155	160	162	158	178	162	152	160
163	161	155	160	164	158	179	162	160	167
151	150	152	174	167	156	154	166	162	152
156	152	171	161	170	157	151	153	172	157

Para fazermos a distribuição de freqüência, procedemos da seguinte forma:

1º passo Organizamos todas as medidas (dados brutos) em ordem crescente ou decrescente. Essa relação, assim organizada, chama-se rol.

150	152	154	155	157	160	162	163	167	174
151	152	155	156	158	160	162	164	167	176
151	152	155	156	158	160	162	166	170	178
152	153	155	156	160	161	162	166	171	178
152	153	155	157	160	161	162	167	172	179

2º passo Notamos que a menor estatura é 150 cm e a maior é 179 cm. Assim, a variação é de 179 cm − 150 cm = 29 cm. Esse valor é chamado de amplitude total (H).

3º passo Agrupamos os valores em intervalos de classe.
Podemos considerar, por exemplo, a classe de 150 (inclusive) à 154 (exclusive). Em símbolos, é denotada por $150 \vdash 154$. Nesse caso, 150 é o limite inferior e 154 o limite superior da classe.
A diferença entre o limite superior e o limite inferior é igual à amplitude da classe (h).

Adotando-se a amplitude da classe igual a h = 4, teremos oito classes.
Construímos, então, uma tabela de freqüências com classes.

Estatura (cm)	Freqüência simples ou absoluta	Freqüência relativa ou percentual
150 ⊢— 154	10	0,20 ou 20%
154 ⊢— 158	11	0,22 ou 22%
158 ⊢— 162	9	0,18 ou 18%
162 ⊢— 166	7	0,14 ou 14%
166 ⊢— 170	5	0,10 ou 10%
170 ⊢— 174	3	0,06 ou 6%
174 ⊢— 178	2	0,04 ou 4%
178 ⊢— 182	3	0,06 ou 6%
Total	50	100%

Exercícios

Resolvido

O exame de sangue de quarenta pacientes de um hospital constatou o seguinte número de leucócitos (glóbulos brancos) por mm^3.

5 800	3 900	7 100	3 500	2 800	4 500	6 900	5 700
2 000	2 400	1 500	1 400	5 900	7 200	3 100	5 800
1 300	2 100	4 100	3 400	2 000	3 100	2 900	1 600
4 000	2 500	8 300	4 200	3 200	2 400	1 900	6 800
5 900	2 600	6 100	8 900	2 900	1 900	1 900	1 100

Com esses dados, construir uma tabela de freqüências absoluta e relativa, considerando a amplitude de classe igual a 2 000 (h = 2 000).

Observando os dados, podemos estabelecer os intervalos:

1 000 ⊢— 3000: 18 pacientes

3 000 ⊢— 5000: 10 pacientes

5 000 ⊢— 7000: 8 pacientes

7 000 ⊢— 9000: 4 pacientes

Perceba que esses intervalos apresentam a mesma amplitude, ou seja, o valor absoluto da diferença entre os extremos de cada intervalo é o mesmo.

$3000 - 1000 = 5000 - 3000 = 7000 - 5000 = 9000 - 7000 = 2000$

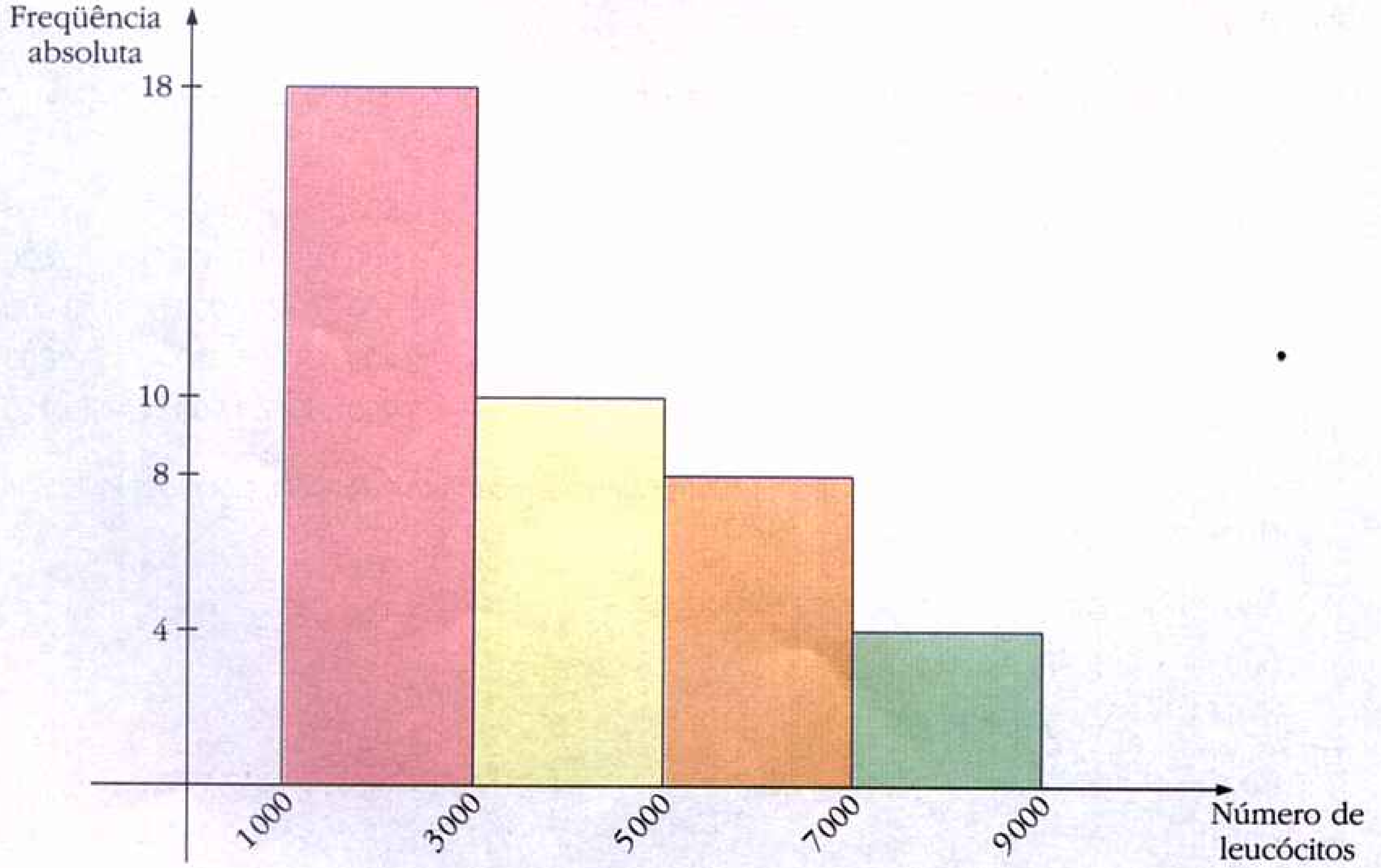
Construindo a tabela, temos:

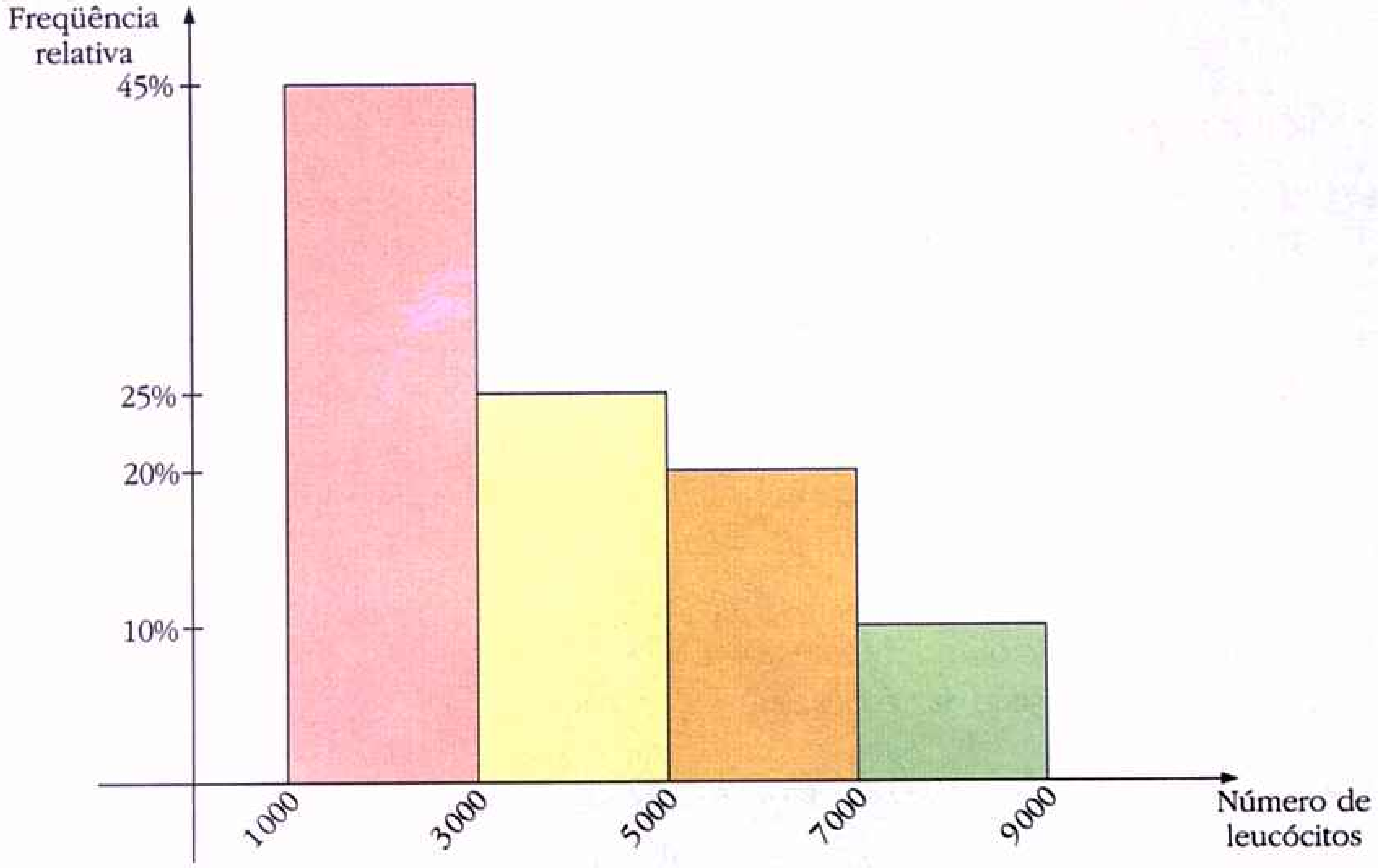
Número de leucócitos por mm³	Freqüência simples ou absoluta	Freqüência relativa ou percentual
1 000 ⊢— 3 000	18	0,45 ou 45%
3 000 ⊢— 5 000	10	0,25 ou 25%
5 000 ⊢— 7 000	8	0,20 ou 20%
7 000 ⊢— 9 000	4	0,10 ou 10%
Total	40	100%

Histogramas e polígono de freqüências

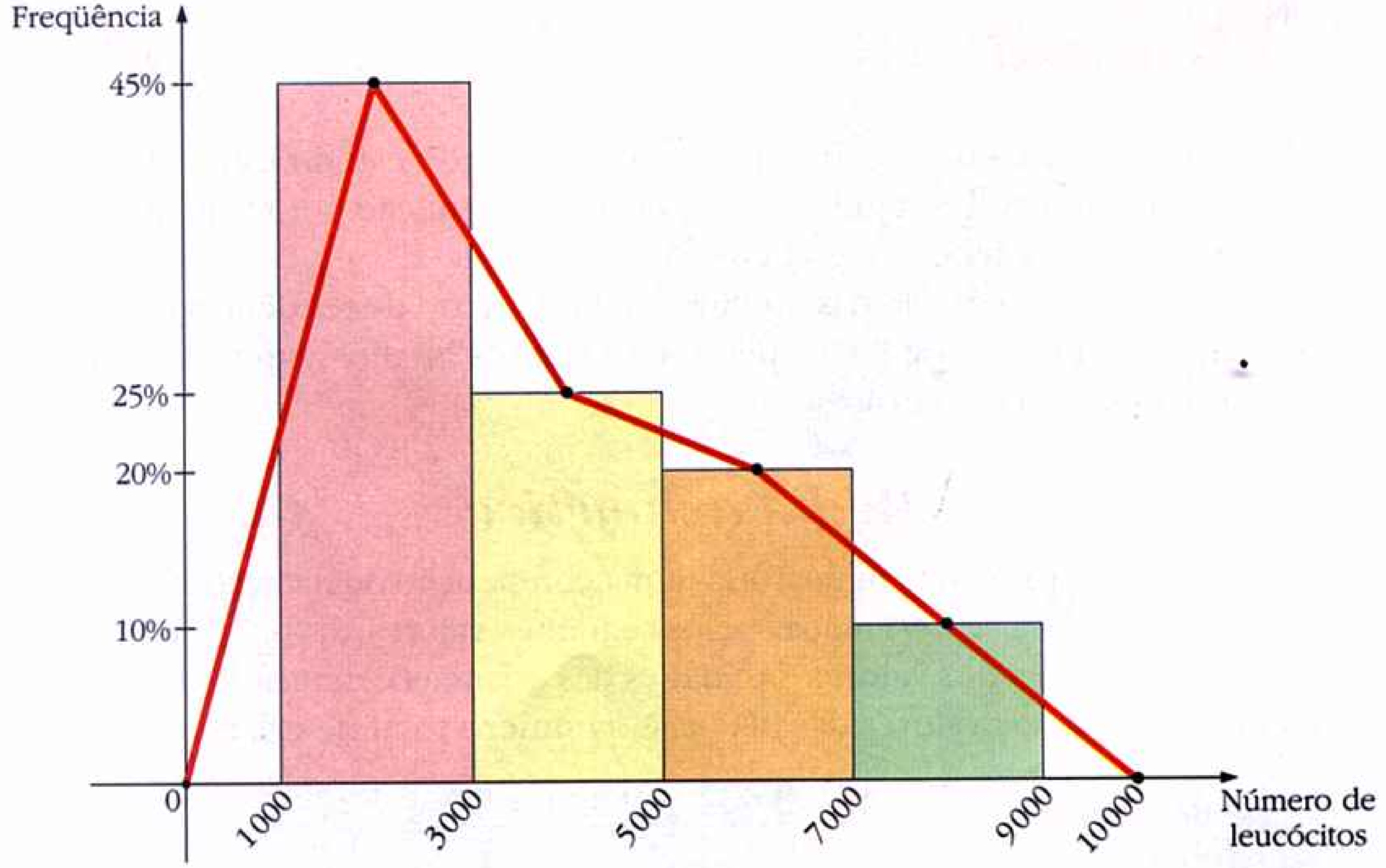
Além da tabela de freqüências, os gráficos que a representam são de grande valia para a interpretação dos dados coletados.

Vamos representar por meio de gráficos de colunas as freqüências absoluta e relativa do exercício resolvido que constata a quantidade de leucócitos em pacientes de um hospital. Estes gráficos são chamados de histogramas.





Outro recurso para representar graficamente a distribuição de freqüências por agrupamento é o polígono de freqüências. O histograma pode servir de esboço para chegar até ele. Basta, para isso, traçar os segmentos de reta consecutivos com extremidades nos pontos médios das bases superiores dos retângulos que formam o histograma. Veja como fica o polígono de freqüências do exemplo anterior, onde acrescentamos os valores 0 e 10 000, com freqüência nula.



Exercícios

Propostos

1671 Uma agência bancária fez, no último dia do mês, uma pesquisa sobre os depósitos em caderneta de poupança e seus respectivos valores em reais, desprezados os centavos, e obteve os seguintes dados:

50	70	150	90	80	340	110	320	610	800
130	120	60	90	180	270	320	110	260	340
580	410	230	210	430	290	480	60	700	720
70	90	50	220	70	240	80	270	270	350
430	320	180	420	310	315	410	490	90	710

a) Considere intervalos de 0 a 200, de 200 a 400, de 400 a 600 e de 600 a 800 reais e construa uma tabela de freqüências absoluta e relativa.

b) Construa o polígono de freqüências.

1672 Uma loja de calçados vendeu quarenta pares de tênis com a seguinte numeração:

37	39	37	35	37	41	37	39	37	35
37	39	37	35	37	39	37	35	37	41
37	35	37	33	37	35	37	33	37	35
37	39	37	33	37	39	37	35	37	33

a) Considere os intervalos da numeração dos tênis de 32 a 34, de 34 a 36, de 36 a 38, de 38 a 40 e de 40 a 42 e construa a tabela de freqüências relativa e absoluta.

b) Construa o polígono de freqüências.

2. Medidas de tendência central

Observamos que os dados obtidos num determinado estudo estatístico podem ser agrupados em intervalos regulares, no caso da distribuição por freqüência e organizados sob a forma de tabelas e gráficos.

Vejamos a seguir o cálculo das medidas de posição ou de tendência central. Elas representam os conjuntos de dados pelos seus valores médios, em torno dos quais esses dados tendem a concentrar-se.

Média aritmética

Participando da primeira eliminatória numa competição de natação, há um grupo de crianças com idades representadas pelos seguintes valores: 6, 10, 7, 9, 8, 7, 9, 6, 10.

A média aritmética dos valores das idades das crianças é determinada pelo quociente entre a soma dos valores das idades e o número total de crianças.

$$\frac{6 + 10 + 7 + 9 + 8 + 7 + 9 + 6 + 10}{9} = \frac{72}{9} = 8$$

O número 8 é a média aritmética dos números 6, 10, 7, 9, 8, 7, 9, 6, 10.

Generalizando, podemos dizer que a média aritmética ($\overline{x}$) dos valores $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ é determinada pelo quociente entre a soma desses valores e a quantidade dos mesmos:

$$\boxed{\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}}$$

Mediana

Retomando o exemplo anterior, vamos colocar as idades representadas pelos seguintes valores em ordem:

- crescente $\underbrace{6,\ 6,\ 7,\ 7,}_{\text{4 valores}}\ \boxed{8,}\ \underbrace{9,\ 9,\ 10,\ 10,}_{\text{4 valores}}$ ou

valor central

- decrescente $\overbrace{10,\ 10,\ 9,\ 9,}\ \boxed{8,}\ \overbrace{7,\ 7,\ 6,\ 6}$

Observe que o número 8 ocupa a posição central entre os valores obtidos, sendo chamado de mediana (M_d).

Perceba que, nesse exemplo, foram coletados nove dados, ou seja, um número ímpar de informações. Caso o número dessas informações seja par, a mediana desses valores será a média aritmética dos dois valores centrais.

Observe os valores no exemplo seguinte:

$6,\ 6,\ 7,\ 7,\ \boxed{7,\ 8,}\ 9,\ 9,\ 10,\ 10$

valores centrais

$10,\ 10,\ 9,\ 9,\ \boxed{8,\ 7,}\ 7,\ 7,\ 6,\ 6$

$$M_d = \frac{8 + 7}{2} = 7{,}5$$

Moda

Participando da segunda eliminatória da competição de natação há um grupo de crianças com idades representadas pelos seguintes valores: $6, 6, \underbrace{7, 7, 7, 7}_{\text{valor que mais se repete}}, 8, 9.$

A moda (M_o) é um valor que apresenta maior freqüência, ou seja, que se repete o maior número de vezes. É representado por M_o. No exemplo acima, temos: $M_o = 7$.

Também há a possibilidade de a moda ser representada por mais de um valor. Observe a seqüência de valores:

$$6,\ 6,\ \underbrace{7,\ 7,\ 7}_{\text{valor que mais se repete}},\ 8,\ \underbrace{9,\ 9,\ 9}_{\text{valor que mais se repete}}$$

Nesse caso, as modas são 7 e 9.

Exercícios

Resolvidos

1 O Brasil extrai petróleo de sete bacias submarinas, num total de 91 plataformas. As plataformas estão assim distribuídas: Bacia de Santos (2), Bacia de Campos (27), Bacia do Espírito Santo (3), Bacia do Recôncavo (7), Bacia Sergipe/Alagoas (25), Bacia Potiguar (18) e Bacia do Ceará (9). Com esses dados, calcular a média aritmética, a mediana e a moda.

Média aritmética: $\bar{x} = \dfrac{2 + 3 + 7 + 9 + 18 + 25 + 27}{7} = \dfrac{91}{7} = 13$

Mediana: observe que o número de informações é ímpar, portanto o valor central corresponde à mediana.

$$2,\ 3,\ 7,\ \underset{\uparrow\, M_d = 9}{9},\ 18,\ 25,\ 27$$

Moda: neste caso, nenhum valor se repete, portanto, não há moda.

2 Pesquisa realizada recentemente revela que nos últimos anos o consumo de cigarros vem crescendo entre as mulheres. Parte desse estudo permitiu a montagem de uma tabela de freqüências, que relaciona a quantidade de cigarros consumidos diariamente, entre 1 000 mulheres fumantes. Calcular a média aritmética e analisar os possíveis valores da mediana e da moda.

Cigarros consumidos diariamente	Freqüência absoluta	Freqüência relativa
15 ⊢— 20	150	15%
20 ⊢— 25	300	30%
25 ⊢— 30	250	25%
30 ⊢— 35	200	20%
35 ⊢— 40	100	10%
Total	1 000	100%

Observe que, nesse caso, o consumo de cigarros está representado na tabela por intervalos cuja amplitude é 5. Vamos determinar, inicialmente, o ponto médio de cada intervalo:

$$15 \vdash 20 \longrightarrow \text{o ponto médio é } \frac{15 + 20}{2} = 17{,}5$$

$$20 \vdash 25 \longrightarrow \text{o ponto médio é } \frac{20 + 25}{2} = 22{,}5$$

$$25 \vdash 30 \longrightarrow \text{o ponto médio é } \frac{25 + 30}{2} = 27{,}5$$

$$30 \vdash 35 \longrightarrow \text{o ponto médio é } \frac{30 + 35}{2} = 32{,}5$$

$$35 \vdash 40 \longrightarrow \text{o ponto médio é } \frac{35 + 40}{2} = 37{,}5$$

Conhecendo a freqüência de cada intervalo e o respectivo ponto médio, temos:

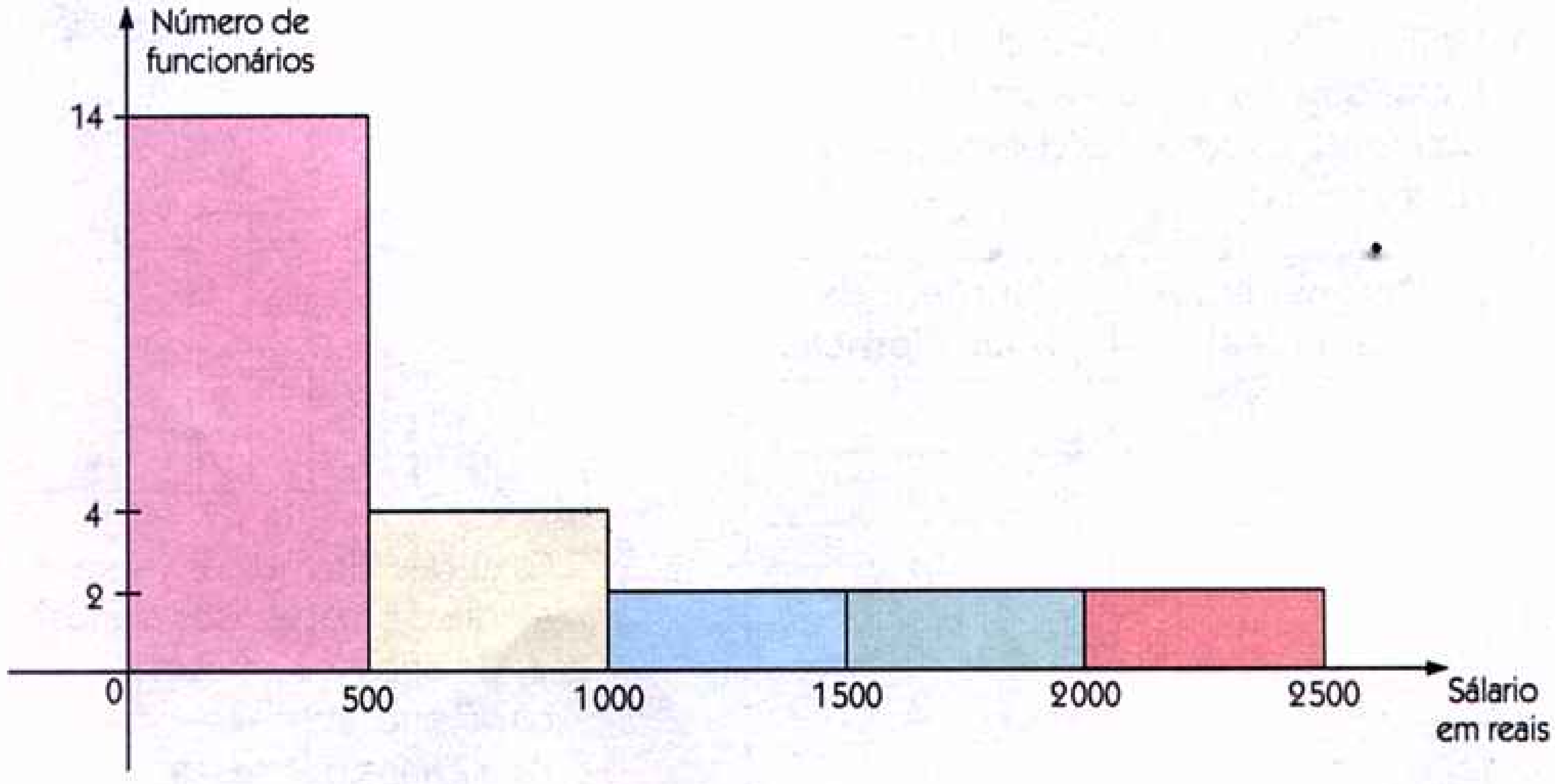
$$\text{Média aritmética: } \bar{x} = \frac{17{,}5 \cdot 150 + 22{,}5 \cdot 300 + 27{,}5 \cdot 250 + 32{,}5 \cdot 200 + 37{,}5 \cdot 100}{1\,000}$$

$$\bar{x} = 26{,}5$$

Como não conhecemos a freqüência dentro de um intervalo, nos limites deste curso, não temos condições de determinar a mediana ou a moda. No entanto, podemos assegurar que a mediana está no terceiro intervalo, pois aqui ela é dada pela média aritmética dos 500º e 501º valores, supondo todos os dados colocados em ordem crescente. Quanto à moda nada podemos afirmar.

Propostos

1673 (PUC-SP) O histograma abaixo apresenta a distribuição de freqüência das faixas salariais numa pequena empresa.



Com os dados disponíveis, pode-se concluir que a média desses salários é, aproximadamente:

a) R$ 420,00 b) R$ 536,00 c) R$ 562,00 d) R$ 640,00 e) R$ 708,00

1674 Com o objetivo de orientar pessoas com problemas cardiovasculares, um nutricionista divulgou tabela relacionando determinados alimentos com a gordura saturada.

Alimento	Gordura saturada (em gramas)
leite integral (1 copo)	5,1
carne de porco (100 g)	3,2
bife magro (100 g)	2,7
fígado (100 g)	2,5
frango (100 g)	2,0
iogurte desnatado (1 copo)	1,8
ovo (1)	1,7
lula (100 g)	0,4
camarão (100 g)	0,2
óleo de coco (colher/sopa)	0
óleo de milho (colher/sopa)	0

Calcule a média aritmética, a mediana e a moda desses valores.

1675 Desejando lançar uma nova pasta dental, uma indústria pesquisou sobre os valores cobrados por nove marcas concorrentes e obteve os seguintes valores, em reais: 1,12; 1,00; 1,07; 1,18; 1,60; 1,90; 0,92; 2,02; 1,70; 1,12. Calcule a média aritmética, a moda e a mediana desses valores.

1676 Verificando a durabilidade de 48 pilhas elétricas, quando utilizadas sem interrupção, obtivemos os seguintes dados, em quantidade de dias:

Durabilidade (em dias)	Número de pilhas elétricas
0 ⊢— 2	0
2 ⊢— 4	16
4 ⊢— 6	18
6 ⊢— 8	12
8 ⊢— 10	2
Total	48

Calcule a durabilidade média dessas pilhas.

1677 (PUC-SP) A média aritmética de 100 números é igual a 40,19. Retirando-se um desses números, a média aritmética dos 99 números restantes passará a ser 40,5. O número retirado equivale a:

a) 9,5%
b) 75%
c) 95%
d) 750%
e) 950%

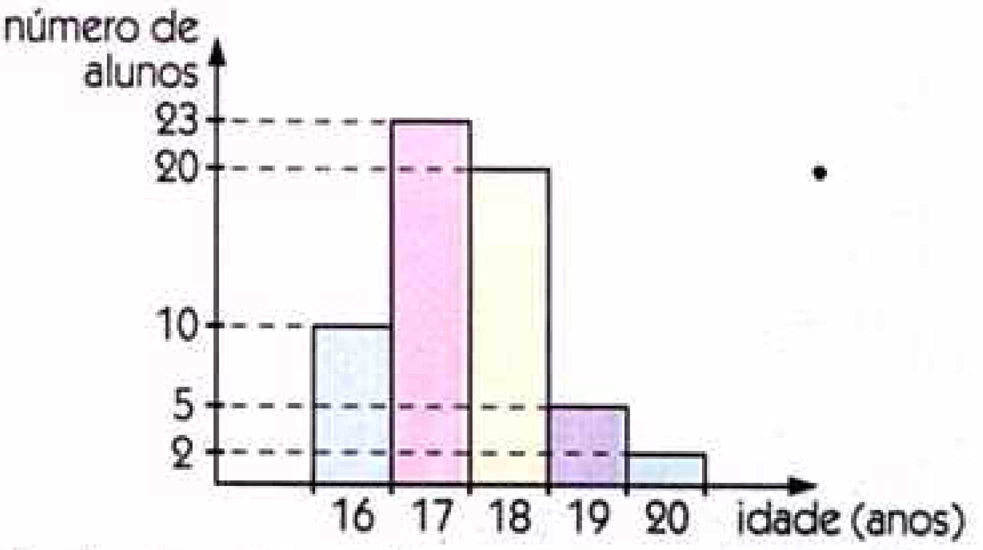
1678 Alê, Bia e Célia têm a mesma idade. A soma dessas idades com as de Dea (13), Solange (18) e Fausto (20) é 96 anos. Qual é a moda e qual é a média aritmética dessas seis idades?

1679 (FAAP-SP) Nas eleições em 1º turno em todo o país, no dia 3 de outubro de 1996, inaugurou-se o voto eletrônico. Numa determinada seção eleitoral, cinco eleitores demoraram para votar, respectivamente: 1min 04s, 1min 32s, 1min 12s, 1min 52s e 1min 40s.
A média aritmética do tempo de votação (em minutos e segundos) desses eleitores é:

a) 1min 28s
b) 1min 58s
c) 1min
d) 1min 04s
e) 2min 04s

1680 (Unicamp-SP) A média aritmética das idades de um grupo de 120 pessoas é de 40 anos. Se a média aritmética das idades das mulheres é de 35 anos e a dos homens é de 50 anos, qual o número de pessoas de cada sexo, no grupo?

1681 (Fuvest-SP) A distribuição das idades dos alunos de uma classe é dada pelo seguinte gráfico:



Qual das alternativas representa a melhor média de idades dos alunos?

a) 16 anos e 10 meses
b) 17 anos e 1 mês
c) 17 anos e 5 meses
d) 18 anos e 6 meses
e) 19 anos e 2 meses

3. Medidas de dispersão

Ao efetuar os cálculos da média aritmética, mediana e moda, pudemos observar que são medidas de tendência central, ou ainda, são valores em torno dos quais os dados se distribuem.

Vamos agora analisar o número de gols por partida da última rodada de um campeonato de futebol.

Jogos	1	2	3	4	5	6
Número de gols	5	0	11	3	4	1

Nessa rodada, a média aritmética de gols por partida foi:

$$\overline{x} = \frac{5 + 0 + 11 + 3 + 4 + 1}{6} = \frac{24}{6} = 4 \text{ gols}$$

Observando a tabela de gols, temos que os jogos 2, com 0 gol, e 3, com 11 gols, estão bem mais distantes da média $\overline{x} = 4$ do que os jogos 1, com 5 gols, e 4, com 3 gols.

Em Estatística, podemos ter uma idéia de como esses dados se distribuem em torno da média, ou seja, se estão muito ou pouco dispersos.

Para tanto, basta calcular as medidas de dispersão que são: o desvio médio, a variância e o desvio padrão.

Desvio médio (D_m)

Vamos verificar o desvio do valor que representa o número de gols de cada partida em relação à média $\overline{x} = 4$.

Jogos	1	2	3	4	5	6
Desvios	$x_1 - \overline{x}$ $5 - 4 = 1$	$x_2 - \overline{x}$ $0 - 4 = -4$	$x_3 - \overline{x}$ $11 - 4 = 7$	$x_4 - \overline{x}$ $3 - 4 = -1$	$x_5 - \overline{x}$ $4 - 4 = 0$	$x_6 - \overline{x}$ $1 - 4 = -3$

O desvio médio é calculado pela média aritmética dos valores absolutos dos desvios:

$$D_m = \frac{|1| + |-4| + |7| + |-1| + |0| + |-3|}{6} = \frac{16}{6} \cong 2,6$$

Concluindo, podemos dizer que a medida de dispersão determinada pela média aritmética dos valores absolutos dos desvios é chamada desvio médio (D_m).

$$D_m = \frac{|x_1 - \overline{x}| + |x_2 - \overline{x}| + ... + |x_n - \overline{x}|}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \overline{x}|}{n}$$

Variância (V_{ar})

A dispersão dos dados também pode ser calculada considerando-se os quadrados dos desvios médios. À média aritmética desses quadrados chamamos de variância (V_{ar}).

$$V_{ar} = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + ... + (x_n - \overline{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n}$$

Considerando como exemplo a mesma rodada do campeonato de futebol, teremos o seguinte cálculo da variância:

$$V_{ar} = \frac{(1)^2 + (-4)^2 + (7)^2 + (-1)^2 + (0)^3 + (-3)^2}{6} = \frac{76}{6} \cong 12,6$$

Desvio padrão (S)

O desvio padrão (S) é utilizado para representar a dispersão dos valores, sendo calculado pela raiz quadrada da variância.

$$S = \sqrt{V_{ar}}$$

No exemplo anterior o desvio padrão será:

$$S \cong \sqrt{12,6}$$

$$S \cong 3,5$$

Exercícios

Resolvidos

1 Determinada editora pesquisou o número de páginas das revistas mais vendidas em uma cidade.

Revistas	A	B	C	D	E	F
Número de páginas	62	90	88	92	110	86

Calcular:

a) o número médio de páginas

b) o desvio médio

c) a variância

d) o desvio padrão

a) o número médio de páginas é $\bar{x}$.

$$\bar{x} = \frac{62 + 90 + 88 + 92 + 110 + 86}{6} = 88$$

b) o desvio médio é D_m

$$D_m = \frac{|62 - 88| + |90 - 88| + |88 - 88| + |92 - 88| + |110 - 88| + |86 - 88|}{6} \cong 9{,}3$$

c) a variância é V_{ar}

$$V_{ar} = \frac{(62 - 88)^2 + (90 - 88)^2 + (88 - 88)^2 + (92 - 88)^2 + (110 - 88)^2 + (86 - 88)^2}{6} \cong 197{,}3$$

d) o desvio padrão é S

$$S = \sqrt{V_{ar}} = \sqrt{197{,}3} \cong 14$$

2 Após um ano de funcionamento, uma maternidade registrou o nascimento de 720 crianças, em parto normal. Os dados referentes à altura dessas crianças permitiu a construção desta tabela.

Altura (em cm)	Número de crianças
45 ⊢— 47	80
47 ⊢— 49	260
49 ⊢— 51	200
51 ⊢— 53	160
53 ⊢— 55	20
Total	720

Calcular:

a) a altura média

b) o desvio médio

c) a variância

d) o desvio padrão

a) Considerando que os dados foram agrupados em intervalos, vamos calcular o ponto médio de cada intervalo.

Altura	Ponto médio	Freqüência
45 ⊢— 47	46	80
47 ⊢— 49	48	260
49 ⊢— 51	50	200
51 ⊢— 53	52	160
53 ⊢— 55	54	20
Total		720

Levando em conta a freqüência de cada intervalo e o respectivo ponto médio, temos:

altura média: $\bar{x} = \dfrac{80 \cdot 46 + 260 \cdot 48 + 200 \cdot 50 + 160 \cdot 52 + 20 \cdot 54}{720} \cong 49$

b) desvio médio:

$$D_m = \frac{80 \cdot |46 - 49| + 260 \cdot |48 - 49| + 200 \cdot |50 - 49| + 160 \cdot |52 - 49| + 20 \cdot |54 - 49|}{720} \cong 1{,}8$$

c) variância

$$V_{ar} = \frac{80 \cdot (46 - 49)^2 + 260 \cdot (48 - 49)^2 + 200 \cdot (50 - 49)^2 + 160 \cdot (52 - 49)^2 + 20 \cdot (54 - 49)^2}{720} \cong 4{,}3$$

d) desvio padrão: $S = \sqrt{V_{ar}} = \sqrt{4{,}3} \cong 2$

Propostos

1682 Uma pesquisa realizada pela Secretaria da Saúde de uma cidade, visando conhecer os hábitos de higiene bucal da população, identificou num de seus itens o tipo de creme dental mais consumido e tabelou os seguintes dados:

Tipo de creme dental	Flúor	Bicarbonato de sódio	Menta e flúor	Flúor e bicarbonato de sódio
Número de pessoas	80	20	60	40

Calcule:

a) a média aritmética desses valores

b) o desvio médio

c) a variância

d) o desvio padrão

1683 Em um supermercado, a reposição de pacotes de arroz, nesta segunda-feira, permitiu a construção da seguinte tabela de dados:

Marca do arroz	A	B	C	D	E
Quantidade de pacotes	120	60	280	200	140

Calcule:

a) a média de pacotes repostos

b) o desvio médio

c) a variância

d) o desvio padrão

1684 Uma distribuidora pesquisou o consumo de refrigerantes entre diferentes faixas etárias, para melhor direcionar a sua campanha publicitária.

Baseado nos dados, calcule:

a) a idade média dos consumidores

b) o desvio médio

c) a variância

d) o desvio padrão

Idade dos consumidores	Número de consumidores
$10 \vdash 14$	60
$14 \vdash 18$	100
$18 \vdash 22$	130
$22 \vdash 26$	90
$26 \vdash 30$	20
Total	400

Parte II: Matemática financeira

4. Introdução

O estudo e o desenvolvimento da Matemática financeira estão vinculados ao sistema econômico. O mundo, hoje, está de alguma forma ligado à economia de mercado, de modo que é importante termos noções sobre esse estudo matemático para melhor compreender os mecanismos das operações financeiras.

5. Porcentagem

Quando escrevemos 7% — lemos: sete por cento — estamos usando uma outra forma para representar a razão $\frac{7}{100}$, também chamada de razão centesimal.

Por cento é uma expressão representada pelo símbolo %, que significa centésimos. Logo, $7\% = \frac{7}{100} = 0{,}07$.

Exemplos:

a) $15\% = \frac{15}{100} = 0{,}15$

b) $2{,}9\% = \frac{2{,}9}{100} = 0{,}029$

c) $174\% = \frac{174}{100} = 1{,}74$

d) $305{,}2\% = \frac{305{,}2}{100} = 3{,}052$

Exercícios

Resolvidos

1 Escrever sob a forma de porcentagem os seguintes números:

a) 0,96

b) 0,038

a) $0{,}96 = \frac{96}{100} = 96\%$

b) $0{,}038 = \frac{3{,}8}{100} = 3{,}8\%$

2 Calcular:

a) 35% de 90

b) 25% de 80%

a) 35% de 90 $= \frac{35}{100} \cdot 90 = 31{,}5$

b) 25% de 80% $= \frac{\cancel{25}^{1}}{\cancel{100}_{1}} \cdot \frac{\cancel{80}^{20}}{100} = \frac{20}{100} = 20\%$

Propostos

1685 Escreva sob a forma decimal as seguintes porcentagens:

a) 5% b) 64% c) 7,9%

1686 Use porcentagens para representar os números:

a) 0,36 b) 0,04 c) 0,009

1687 Calcule:

a) 22% de 70
b) 5% de 30
c) 9,1% de R$ 50,00
d) 359,1% de 770 g

1688 Calcule:

a) 6% de 20%
b) 12% de 40%
c) 32% de 45%

1689 (Fuvest-SP) Calcule $(10\%)^2$.

a) 100%
b) 20%
c) 5%
d) 1%
e) 0,1%

1690 (Fuvest-SP) Que número deve ser somado ao numerador e ao denominador da fração $\frac{2}{3}$ para que ela tenha um aumento de 20%?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

1691 (Fatec-SP) Numa eleição para prefeito de uma certa cidade, concorreram somente os candidatos *A* e *B*. Em uma seção eleitoral votaram 250 eleitores. Do número total de votos de uma urna dessa seção, 42% foram para o candidato *A*, 34% para o candidato *B*, 18% foram anulados e os restantes estavam em branco. Tirando-se ao acaso um voto dessa urna, a probabilidade de que seja um voto em branco é:

a) $\frac{1}{100}$
b) $\frac{3}{50}$
c) $\frac{1}{50}$
d) $\frac{1}{25}$
e) $\frac{3}{20}$

1692 (Santa Úrsula-RJ) Se um trabalhador recebe um corte de 20% no seu salário, ele só vai readquirir o sálario original se tiver um aumento de:

a) 20%
b) 25%
c) 22,5%
d) R$ 20,00
e) R$ 25,00

6. Lucro

Em uma transação comercial há a possibilidade de se obter lucro. Isso ocorre quando o valor de venda é maior do que o valor de custo (ou de compra). A taxa percentual desse lucro pode ser calculada considerando-se o valor de compra ou de venda do produto. Vamos observar o caso seguinte:

Um televisor foi comprado por R$ 300,00 e vendido por R$ 450,00. Vamos determinar a taxa percentual do lucro obtido.

Para facilitar o estudo, vamos adotar:

$$\begin{cases} C \longrightarrow \text{valor de custo ou inicial} \\ V \longrightarrow \text{valor de venda} \\ L \longrightarrow \text{lucro} \\ i_L \longrightarrow \text{taxa percentual de lucro} \end{cases}$$

O lucro é determinado por:

$$\boxed{L = V - C, \text{ onde } V > C}$$

No exemplo: $L = 450{,}00 - 300{,}00 = 150{,}00$

A taxa percentual de lucro em relação ao valor de custo é dada pela razão entre o lucro e o valor de custo.

$$\boxed{i_L = \frac{L}{C} \cdot 100\%}$$

Novamente, no exemplo: $i_L = \dfrac{150{,}00}{300{,}00} \cdot 100\% = 50\%$

► Note que 100% = 1, ou seja, $i_L = \dfrac{150{,}00}{300{,}00} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5 = 50\%$.

A taxa percentual de lucro em relação ao valor de venda é dada pela razão entre o lucro e o valor de venda.

$$\boxed{i_L = \frac{L}{V} \cdot 100\%}$$

No exemplo: $i_L = \dfrac{150{,}00}{450{,}00} \cdot 100\% \cong 33{,}3\%$

Exercícios

Resolvidos

1 O preço de custo de um pneu para carro é de R$ 60,00 e foi vendido com lucro de R$ 30,00. Calcular:

a) o preço de venda

b) a taxa percentual de lucro em relação ao valor de custo

a) $L = V - C \Rightarrow 30{,}00 = V - 60{,}00 \Rightarrow V = \text{R\$ } 90{,}00$

b) $i_L = \dfrac{L}{C} \cdot 100\% \Rightarrow i_L = \dfrac{30{,}00}{60{,}00} \cdot 100\% = 50\%$

2 O valor de custo de um telefone sem fio é de R$ 220,00. Foi vendido com 20% de lucro sobre o preço de custo. Por quanto foi vendido?

$L = 20\% \cdot 220{,}00 = 0{,}20 \cdot 220{,}00 = 44{,}00$

$L = V - C \Rightarrow 44{,}00 = V - 220{,}00 \Rightarrow V = \text{R\$ } 264{,}00$

Também poderíamos fazer:

$L = V - C \Rightarrow V = C + L$

$V = C + 0{,}20\,C \Rightarrow V = (1 + 0{,}20)\,C \Rightarrow V = 1{,}20\,C$

$V = 1{,}20 \cdot 220{,}00 \Rightarrow V = \text{R\$ } 264{,}00$

3 Um relógio foi vendido por R$ 350,00 com R$ 70,00 de lucro sobre o valor de custo. Qual o preço de custo e a taxa percentual de lucro sobre o valor de venda?

$L = V - C \Rightarrow 70{,}00 = 350{,}00 - C \Rightarrow C = \text{R\$ } 280{,}00$

$i_L = \frac{L}{V} \cdot 100\% \Rightarrow i_L = \frac{70{,}00}{350{,}00} \cdot 100\% = 20\%$

4 Uma bicicleta foi vendida por R$ 600,00 com uma taxa percentual de lucro de 25% sobre o valor de venda. Calcular o valor de custo dessa bicicleta.

$L = 25\% \cdot 600{,}00 \Rightarrow L = 0{,}25 \cdot 600 = 150{,}00$

$L = V - C \Rightarrow 150{,}00 = 600{,}00 - C \Rightarrow C = \text{R\$ } 450{,}00$

5 Dois sócios, um fabricante e um vendedor, concordaram em ter um mesmo ganho, em reais, na produção e na comercialização de um objeto. O fabricante propôs, para cada um deles, um ganho de 20% sobre o preço de custo. Já o vendedor propôs um ganho de 20% sobre o preço de custo para cada um deles. Qual das duas propostas respeita o acordo?

x = preço de custo do objeto

Na proposta do fabricante o preço de custo para o fabricante e o preço de custo para o vendedor é x. Então:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Lucro do fabricante} = 20\% \text{ de } x = 0{,}20x \\ \text{Lucro do vendedor} = 20\% \text{ de } x = 0{,}20x\end{array}\right\} \text{ iguais}$$

Na proposta do vendedor o preço de custo para o fabricante é x e o preço de custo para o vendedor é o preço que o fabricante lhe faz, isto é, $1{,}20x$. Então:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Lucro do fabricante} = 20\% \text{ de } x = 0{,}20x \\ \text{Lucro do vendedor} = 20\% \text{ de } 1{,}20x = 0{,}20 \cdot 1{,}20x = 0{,}24x\end{array}\right\} \text{ diferentes}$$

A proposta do fabricante respeita o acordo.

Propostos

1693 O preço de custo de um aparador de grama é de R$ 160,00. Foi vendido por R$ 240,00. Qual a taxa percentual de lucro sobre o preço de custo?

1694 Um motor vendido por R$ 1 200,00 deu um lucro de 20% sobre o valor de venda. Qual o valor de custo desse motor?

1695 (Fuvest-SP) Uma certa mercadoria que, custava R$ 12,50, teve um aumento, passando a custar R$ 13,50. A majoração sobre o preço antigo foi de:

a) 1,0%
b) 10%
c) 12,5%
d) 8,0%
e) 10,8%

1696 (Fuvest-SP) Um vendedor ambulante vende seus produtos com um lucro de 50% sobre o preço de venda. Então o seu lucro sobre o preço de custo é de:

a) 10%
b) 25%
c) 33,333%
d) 100%
e) 120%

1697 (PUC-SP) Para publicar certo livro, há um investimento inicial de R$ 200 000,00 e, depois, um gasto de R$ 5,00 por exemplar. Calculando-se o custo por exemplar, numa tiragem de 4 000 exemplares e uma tiragem de 16 000 exemplares, obtém-se, respectivamente:

a) R$ 55,00 e R$ 22,00
b) R$ 55,00 e R$ 13,75
c) R$ 105,00 e R$ 30,00
d) R$ 55,00 e R$ 17,50
e) R$ 105,00 e R$ 26,25

1698 (PUC-SP) Uma certa mercadoria que custava R$ 12,50 teve um aumento, passando a custar R$ 14,50. A taxa de reajuste sobre o preço antigo é de:

a) 2,0%
b) 20,0%
c) 12,5%
d) 11,6%
e) 16,0%

1699 (PUC-SP) Usando uma unidade monetária conveniente, o lucro obtido com a venda de uma unidade de certo produto é $x - 10$, sendo x o preço de venda e 10 o preço de custo. A quantidade vendida, a cada mês, depende do preço de venda e é, aproximadamente, igual a $70 - x$. Nas condições dadas, o lucro mensal obtido com a venda do produto é uma função quadrática de x, cujo valor máximo da unidade monetária usada é:

a) 1 200
b) 1 000
c) 900
d) 800
e) 600

7. Desconto

Já vimos que uma transação comercial pode dar lucro. De forma análoga, pode ocorrer prejuízo. Isso acontece quando o valor de venda é menor que o valor de custo (ou de compra). Por razões comerciais, pode ainda ocorrer um desconto. Um desconto não implica necessariamente em um prejuízo, mas para o cálculo da taxa percentual, seja de um desconto, seja de um prejuízo, procedemos da mesma maneira: comparamos o módulo da diferença entre os preços de custo e de venda com o preço de custo ou com o preço de venda conforme a conveniência do contexto.

- Os termos prejuízo e desconto apresentam significados diferentes dependendo do contexto apresentado. No entanto, aqui não faremos distinção.

Veja o seguinte caso:

O custo de uma impressora é de R$ 700,00. Numa liquidação, foi vendida por R$ 400,00. Vamos determinar essas taxas percentuais.

Para facilitar o nosso estudo, vamos adotar:

$$\begin{cases} D = \text{desconto ou prejuízo} \\ i_D = \text{taxa percentual de desconto} \end{cases}$$

O desconto é determinado por:

$$\boxed{D = |C - V|}$$

No exemplo, fica: $D = |700{,}00 - 400{,}00| = 300{,}00$

A taxa percentual de desconto, em relação ao valor de custo, é dada pela razão entre o desconto e o valor de custo.

$$i_D = \frac{D}{C} \cdot 100\%$$

Novamente, no exemplo: $i_D = \dfrac{300,00}{700,00} \cdot 100\% \cong 43\%$

A taxa percentual de desconto em relação ao valor de venda é dada pela razão entre o desconto e o valor de venda.

$$i_D = \frac{D}{V} \cdot 100\%$$

Ainda no exemplo: $i_D = \dfrac{300,00}{400,00} \cdot 100\% = 75\%$

Exercícios

Resolvidos

1 O preço de custo de uma calculadora é de R$ 160,00 e foi vendida com desconto de R$ 20,00 sobre esse preço de custo. Calcular:

a) o valor da venda

b) a taxa percentual de desconto em relação ao valor de custo

a) $D = |C - V|$

Nesse caso, o preço de venda é menor do que o preço de custo.

$$20,00 = |160,00 - V| \Rightarrow \pm 20,00 = 160,00 - V \Rightarrow V = \begin{cases} 140,00 \\ \text{ou} \\ 180,00 \text{ (não convém)} \end{cases}$$

b) $i_D = \dfrac{D}{C} \cdot 100\% \Rightarrow i_D = \dfrac{20,00}{160,00} \cdot 100\% = 12,5\%$

2 O valor de custo de um ventilador é R$ 110,00. A sua venda foi realizada com um desconto de 10% sobre o preço de custo. Qual o valor da venda?

$D = 10\% \cdot 110,00 = 0,10 \cdot 110,00 = 11,00$

Como, nesse caso, $V < C$, temos:

$D = |C - V| \Rightarrow D = C - V \Rightarrow 11,00 = 110,00 - V \Rightarrow V = 99,00$

Logo, o valor de venda foi de R$ 99,00.

Também podemos fazer:

$D = C - V \Rightarrow V = C - D \Rightarrow V = C - 0,10C = (1 - 0,10)C = 0,90C$

$V = 0,90 \cdot 110,00 \Rightarrow V = \text{R\$ } 99,00$

3 Uma serra elétrica foi vendida por R$ 450,00, com R$ 50,00 de prejuízo sobre o valor de custo. Qual o valor de custo e a taxa percentual de prejuízo sobre o valor da venda?

Nesse caso, o valor do custo é maior do que o preço de venda, então:

$D = C - V \Rightarrow 50{,}00 = C - 450{,}00 \Rightarrow C = \text{R\$ } 500{,}00$

$i_D = \frac{D}{V} \cdot 100\% \Rightarrow i_D = \frac{50{,}00}{450{,}00} \cdot 100\% \cong 11{,}1\%$

4 Ao vender uma moto por R$ 2 600,00, um comerciante utilizou taxa percentual de desconto de 15% sobre esse valor de venda. Calcular o valor de custo dessa moto.

$D = 15\% \cdot 2\,600{,}00 \Rightarrow D = 0{,}15 \cdot 2\,600{,}00 = 390{,}00$

Como $V < C$, temos:

$D = C - V \Rightarrow 390{,}00 = C - 2\,600{,}00 \Rightarrow C = \text{R\$ } 2\,990{,}00$

5 O aluguel de uma casa é de R$ 800,00. Se houver atraso no pagamento há uma multa de R$ 200,00. Porém, por estratégia ou para evitar possíveis impedimentos legais, uma imobiliária faz rezar no contrato que o aluguel é de R$ 1 000,00 e que, em não havendo atraso no pagamento, há um desconto de R$ 200,00. Dessa forma, o que é multa vira desconto. Qual taxa percentual é maior: a da multa ou a do desconto?

As taxas são calculadas em relação ao aluguel. Então, temos:

taxa de multa $\longrightarrow i_m = \frac{200{,}00}{800{,}00} = 0{,}25 = 25\%$

taxa de desconto $\longrightarrow i_a = \frac{200{,}00}{1\,000{,}00} = 0{,}20 = 20\%$

Portanto, a maior é a taxa da multa.

Propostos

1700 O valor de uma Brasília branca é de R$ 2 400,00. Foi vendida por R$ 1 600,00. Qual a taxa percentual de desconto sobre o valor inicial?

1701 A venda de um terreno por R$ 12 000,00 proporcionou um prejuízo de 40% sobre o valor de venda. Qual o valor de custo desse terreno?

1702 A concorrência fez com que um saco de cimento, cujo valor inicial era de R$ 7,00, fosse vendido por R$ 5,60. Qual a taxa de desconto sobre o preço inicial?

1703 Um carro é vendido com um desconto de 20% sobre o preço de tabela. Supondo que houve lucro, qual a taxa de desconto sobre o valor de custo?

1704 (Vunesp) As promoções do tipo "leve 3 e pague 2", comuns no comércio, acenam com um desconto, sobre uma unidade vendida, de:

a) $\frac{50}{3}\%$
b) 20%
c) 25%
d) 30%
e) $\frac{100}{3}\%$

1705 (Mack-SP) Uma loja comunica a seus clientes que promoverá, no próximo mês, um desconto de 30% em todos os seus produtos. Na ocasião do desconto, para que um produto que hoje custa *k* mantenha este preço, ele deverá ser anunciado por:

a) $\frac{7k}{3}$
b) $\frac{10k}{3}$
c) $\frac{17k}{10}$
d) $\frac{17k}{3}$
e) $\frac{10k}{7}$

1706 (Fatec-SP) Desejo comprar uma televisão a vista, mas a quantia *Q* que possuo corresponde a 80% do preço *P* do aparelho. O vendedor ofereceu-me um abatimento de 5% no preço, mas, mesmo assim, faltam R$ 84,00 para realizar a compra. Os valores de *P* e *Q* são, respectivamente:

a) R$ 520,00; R$ 410,00
b) R$ 530,00; R$ 419,50
c) R$ 540,00; R$ 429,00
d) R$ 550,00; R$ 438,50
e) R$ 560,00; R$ 448,00

1707 (Mack-SP) Numa loja, a soma dos preços dos produtos *A* e *B* era R$ 280,00. Durante uma promoção, o preço de *B* sofreu um desconto de 25%, passando a custar o mesmo que *A*. Dessa forma, na promoção a soma inicial dos preços sofreu uma redução de:

a) R$ 20,00
b) R$ 25,00
c) R$ 30,00
d) R$ 35,00
e) R$ 40,00

8. Acréscimos sucessivos

Vários são os fatores que determinam o preço de um produto. A lei da oferta e da procura é um desses fatores que obriga, às vezes, mais de um reajuste de preços, para valores maiores (acréscimos sucessivos) ou para valores menores (descontos sucessivos).

Se um produto com preço inicial P_0 sofre acréscimos sucessivos, cujas taxas percentuais são $i_1, i_2, ..., i_n$, então o preço desse produto após *n* reajustes é P_n, dado por:

$$\boxed{P_n = P_0 \cdot (1 + i_1) \cdot (1 + i_2) \cdot ... \cdot (1 + i_n)}$$

Particularmente, esses acréscimos podem apresentar taxas percentuais iguais, $i_1 = i_2 = ... = i_n = i$. Neste caso, temos:

$$\boxed{P_n = P_0 \cdot (1 + i)^n}$$

Observe este exemplo:

Durante a entressafra o preço do café, que era de R$ 30,00 a saca, sofreu aumentos sucessivos de 10%, 5% e 15% nos três primeiros meses.

O preço atual é dado por:

$$P_3 = 30{,}00\left(1 + \frac{10}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{15}{100}\right)$$

$$P_3 = 30{,}00 \cdot 1{,}1 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}15 \Rightarrow P_3 = \text{R\$ } 39{,}85$$

Exercícios

Resolvidos

1 O leite *B* teve três aumentos sucessivos de 5% cada. Calcular o valor atual, sabendo que o preço do litro antes dos reajustes era de R$ 0,60.

$$P_3 = 0{,}60 \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right)^3 \Rightarrow P_3 = 0{,}60 \cdot (1{,}05)^3$$

$$P_3 \cong 0{,}69 \Rightarrow P_n \cong \text{R\$ } 0{,}69$$

2 Determinar o preço de venda P_n após *n* aumentos sofridos por um par de sapatos, cujo valor inicial era P_0 e as taxas percentuais de aumento foram $i_1, i_2, ..., i_n$.

Considerando P_1 o preço de venda após o primeiro reajuste, temos:

$$P_1 = \underbrace{P_0}_{\text{preço inicial}} + \underbrace{(i_1 \cdot P_0)}_{\text{aumento}} = P_0 \cdot (1 + i_1) \quad \text{(I)}$$

Considerando P_2 o preço de venda após o segundo reajuste, temos:

$$P_2 = P_1 + (i_2 \cdot P_1) = P_1 \cdot (1 + i_2) \quad \text{(II)}$$

Substituindo (I) em (II), temos:

$$P_2 = P_0 \cdot (1 + i_1) \cdot (1 + i_2)$$

Utilizando o mesmo raciocínio até o enésimo reajuste, temos:

$$P_n = P_0 \cdot (1 + i_1) \cdot (1 + i_2) \cdot ... \cdot (1 + i_n)$$

Propostos

1708 O aumento da procura por ovos de Páscoa fez com que o seu preço sofresse dois aumentos, de 15% e 12%, respectivamente. Se, antes dos aumentos, o preço de um ovo de 500 g era R$ 28,00, qual o preço atual?

1709 O governo autorizou três aumentos sucessivos no valor do litro da gasolina, de 8% cada. Calcule o preço atual do litro, sabendo que o valor anterior era de R$ 0,56.

1710 (Fuvest-SP) O preço de certa mercadoria sofre anualmente um acréscimo de 100%. Supondo que o preço atual seja R$ 100,00, daqui a três anos o preço será:

a) R$ 300,00
b) R$ 400,00
c) R$ 600,00
d) R$ 800,00
e) R$ 1 000,00

1711 A média aritmética entre 20 e 80 é igual a 50. O preço de uma mercadoria que sofre reajustes sucessivos de 20% e de 80% seria o mesmo se sofresse reajustes sucessivos de 50% e de 50%?

1712 (Fuvest-SP) Atualmente, 50% das gaivotas de certa região são brancas e 50% são cinzentas. Se a população da espécie branca aumentar 40% ao ano, e a da espécie cinzenta aumentar 80% ao ano, qual será, aproximadamente, a porcentagem de gaivotas brancas daqui a dois anos?

a) 50%
b) 38%
c) 26%
d) 14%
e) 9%

1713 (Fuvest-SP) No dia 1º de setembro foi aberta uma caderneta de poupança e depositada uma quantia x. No dia 1º de dezembro do mesmo ano, o saldo era de R$ 665 500,00. Sabendo que, entre juros e correção monetária, a caderneta rendeu 10% ao mês, qual era a quantia x, em milhares de reais?

a) 650
b) 600
c) 550
d) 500
e) 450

9. Descontos sucessivos

Já vimos que numa transação comercial o preço de um produto pode sofrer acréscimos sucessivos. Da mesma forma, os preços de um produto podem ter descontos sucessivos.

Vejamos:

Se um produto com preço inicial P_0 sofre descontos sucessivos, cujas taxas percentuais são $i_1, i_2, ..., i_n$, então o preço desse produto após n descontos será P_n.

$$\boxed{P_n = P_0 \cdot (1 - i_1) \cdot (1 - i_2) \cdot ... \cdot (1 - i_n)}$$

Particularmente, esses descontos podem apresentar taxas percentuais iguais, $i_1 = i_2 = ... = i_n = i$, e neste caso, teremos:

$$\boxed{P_n = P_0 \cdot (1 - i)^n}$$

Observe o exemplo:

Alguns artigos importados fizeram com que o preço de um eletrodoméstico, que era de R$ 170,00, sofresse três descontos sucessivos de 3%, 5% e 2%. O preço atual é dado por:

$$P_3 = 170{,}00 \cdot \left(1 - \frac{3}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{5}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{100}\right)$$

$$P_3 = 170{,}00 \cdot 0{,}97 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}98 \Rightarrow P_3 \cong \text{R\$ } 153{,}52$$

Exercícios

Resolvidos

1 Para atingir uma fatia do mercado consumidor, o preço de uma bicicleta, cujo valor inicial era de R$ 780,00, sofreu quatro descontos sucessivos de 7% cada. Calcular o preço de venda atual.

$$P_4 = 780{,}00 \cdot \left(1 - \frac{7}{100}\right)^4$$

$$P_4 = 780{,}00 \cdot (0{,}93)^4 \cong 583{,}48 \Rightarrow P_4 \cong \text{R\$ } 583{,}48$$

2 Determinar o valor de venda P_n após *n* descontos sofridos no preço de um automóvel, cujo valor inicial era P_0 e as taxas percentuais de desconto $i_1, i_2, \ldots, i_n$.

Considerando P_1 o preço de venda após o primeiro desconto:

$$P_1 = \underbrace{P_0}_{\text{preço inicial}} - \underbrace{(i_1 \cdot P_0)}_{\text{desconto}} = P_0 \cdot (1 - i_1) \quad \text{(I)}$$

Considerando P_2 o preço de venda após o segundo desconto:

$$P_2 = P_1 - (i_2 \cdot P_1) = P_1 \cdot (1 - i_2) \quad \text{(II)}$$

Substituindo (I) em (II), temos:

$$P_2 = P_0 \cdot (1 - i_1) \cdot (1 - i_2)$$

Utilizando o mesmo raciocínio até o n-ésimo desconto:

$$P_n = P_0 \cdot (1 - i_1) \cdot (1 - i_2) \cdot \ldots \cdot (1 - i_n)$$

Propostos

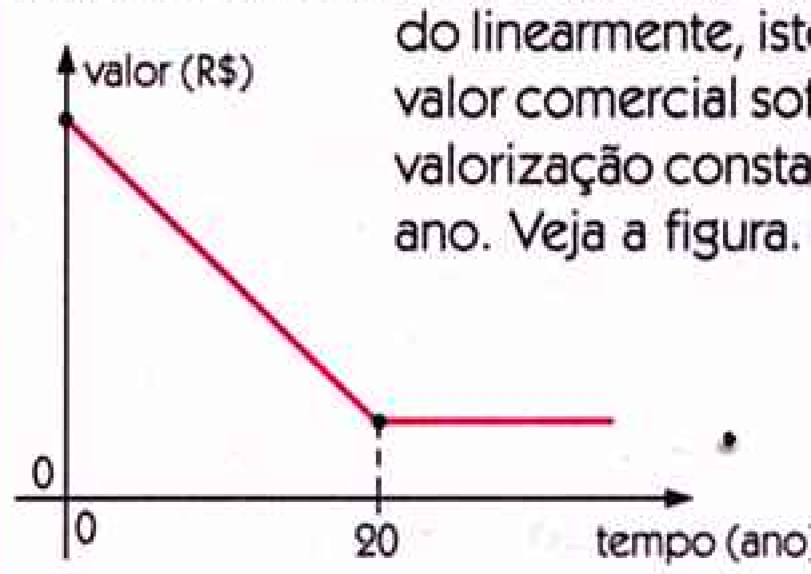
1714 O lançamento de um novo aparelho de som fez com que o modelo antigo sofresse desvalorizações sucessivas de 7% e 13%. Calcule o preço atual, sabendo que o valor anterior às desvalorizações era de R$ 900,00.

1715 Ao sair de linha de produção, um modelo de automóvel teve três desvalorizações sucessivas de 4% cada. Se o valor anterior aos descontos era R$ 12 000,00, qual é o valor atual?

1716 (Fuvest-SP) A cada ano que passa, o valor de um carro diminui 30% em relação ao seu valor anterior. Se *V* for o valor do carro no primeiro ano, o seu valor no oitavo ano será:

a) $(0{,}7)^7 \cdot V$
b) $(0{,}3)^7 \cdot V$
c) $(0{,}7)^8 \cdot V$
d) $(0{,}3)^8 \cdot V$
e) $(0{,}3)^9 \cdot V$

1717 (PUC-SP) Um veículo de transporte de passageiros tem seu valor comercial depreciado linearmente, isto é, seu valor comercial sofre desvalorização constante por ano. Veja a figura.



Esse veículo foi vendido pelo seu primeiro dono, após 5 anos de uso, por R$ 24 000,00. Sabendo-se que o valor comercial do veículo atinge seu valor mínimo após 20 anos de uso e que esse valor mínimo corresponde a 20% do valor que tinha quando era novo, então qual é esse valor mínimo?

a) R$ 3 000,00
b) R$ 12 000,00
c) R$ 7 500,00
d) R$ 6 000,00
e) R$ 4 500,00

Ficha-resumo

Freqüências

Freqüência absoluta de cada variável é o número de vezes que essa variável aparece.

Freqüência relativa de cada variável é a razão entre a freqüência absoluta e o número total de elementos.

Medidas de tendência central

Média aritmética: $\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$

Mediana: A mediana é representada pelo "valor central" entre os dados obtidos, estando esses em ordem crescente ou decrescente.

Moda: É um valor que se repete o maior número de vezes, entre os dados obtidos.

Medidas de dispersão

Desvio médio: $D_m = \dfrac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \dots + |x_n - \bar{x}|}{n} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|}{n}$

Variância: $V_{ar} = \dfrac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n}$

Desvio padrão: $S = \sqrt{V_{ar}}$

Porcentagem

O símbolo % (lê-se por cento)

$$x\% = \frac{x}{100}$$

Estatística e Matemática financeira

Lucro

$L = V - C$

- taxa de lucro em relação ao valor de custo: $i_L = \frac{L}{C} \cdot 100\%$
- taxa de lucro em relação ao valor de venda: $i_L = \frac{L}{V} \cdot 100\%$

Desconto

$D = |C - V|$

- taxa de desconto em relação ao valor de custo: $i_D = \frac{D}{C} \cdot 100\%$
- taxa de desconto em relação ao valor de venda: $i_D = \frac{D}{V} \cdot 100\%$

Acréscimos sucessivos

Preço para *n* acréscimos diferenciados.

$$P_n = P_0 \cdot (1 + i_1) \cdot (1 + i_2) \cdot \ldots \cdot (1 + i_n)$$

Preço para *n* acréscimos iguais.

$$P_n = P_0 \cdot (1 + i)^n$$

Descontos sucessivos

Preço para *n* descontos diferenciados.

$$P_n = P_0 \cdot (1 - i_1) \cdot (1 - i_2) \cdot \ldots \cdot (1 - i_n)$$

Preço para *n* descontos iguais.

$$P_n = P_0 \cdot (1 - i)^n$$

Exercícios

Complementares

1718 (Unicamp-SP) Para um conjunto $x = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, a média aritmética de x é definida por $\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}$

e a variância de x é definida por:

$V = \dfrac{1}{4}[(x_1 - \bar{x})^2 + ... + (x_4 - \bar{x})^2]$.

Dado o conjunto $x = \{2, 5, 8, 9\}$, pede-se:

a) calcular a média aritmética de x

b) calcular a variância de x

c) quais os elementos de x pertencentes ao intervalo $[\bar{x} - \sqrt{V}, \bar{x} + \sqrt{V}]$

1719 (Fuvest-SP) Numa classe de um colégio existem estudantes de ambos os sexos. Numa prova, as médias aritméticas das notas dos meninos e das meninas foram respectivamente iguais a 6,2 e 7,0. A média aritmética das notas de toda a classe foi igual a 6,5.

a) A maior parte dos estudantes dessa classe é composta de meninos ou meninas? Justifique a resposta.

b) Que porcentagem do total de alunos da classe é do sexo masculino?

1720 (FGV-SP) A tabela a seguir apresenta a distribuição de freqüência dos salários de um grupo de cinqüenta empregados de uma empresa, num certo mês.

Número de classe	Salário do mês (em reais)	Número de empregados
1	1 000 → 2 000	20
2	2 000 → 3 000	18
3	3 000 → 4 000	9
4	4 000 → 5 000	3

O salário médio desses empregados, nesse mês, foi de:

a) R$ 2 637,00
b) R$ 2 520,00
c) R$ 2 500,00
d) R$ 2 420,00
e) R$ 2 400,00

1721 (Mack-SP) Uma pessoa pagou 20% de uma dívida. Se R$ 4 368,00 correspondem a 35% do restante a ser pago, então a dívida total inicial era de:

a) R$ 10 200,00
b) R$ 11 400,00
c) R$ 15 600,00
d) R$ 16 800,00
e) R$ 18 100,00

1722 (Mack-SP) Numa loja, para um determinado produto, a diferença entre o preço de venda solicitado e o preço de custo é 3 000. Se esse produto for vendido com 20% de desconto, ainda assim dará um lucro de 30% à loja. Então a soma entre os preços de venda e de custo é:

a) 13 200
b) 14 600
c) 13 600
d) 12 600
e) 16 400

1723 (PUC-SP) Uma cooperativa compra a produção de pequenos horticultores, revendendo-a para atacadistas com um lucro de 50% em média. Esses, repassam o produto para os feirantes, com um lucro de 50% em média. Os feirantes vendem o produto para o consumidor e lucram, também, 50% em média. O preço pago pelo consumidor tem um acréscimo médio, em relação ao preço dos horticultores, de:

a) 150,0%
b) 187%
c) 237,5%
d) 285,5%
e) 350,0%

1724 (FGV-SP) Um produto cujo preço era R$ 220,00 teve dois aumentos sucessivos de 15% e 20%, respectivamente. Em seguida, o valor resultante teve um desconto percentual igual a x, resultando um preço final y. Calcule y se $x = 10\%$.

1725 (Fuvest-SP) Sobre o preço de um carro importado incide um imposto de 30%. Em função disso, o preço de um determinado modelo, para o importador, é de R$ 19 500,00. Supondo que tal imposto passe de 30% para 60%, qual será, em reais, o novo preço desse carro, para o importador?

a) R$ 22 500,00
b) R$ 24 000,00
c) R$ 25 350,00
d) R$ 31 200,00
e) R$ 39 000,00

Saiba um pouco mais

A Estatística é o melhor calmante

É inevitável. Depois de um ano sombrio para a aviação comercial, como foi o de 1996, até o passageiro mais viajado sente medo. Diante de tantos desastres aéreos nas manchetes dos jornais, não há quem o convença de que as quedas são raras, de que o normal é tudo dar certo. Mas é exatamente isso que dizem as estatísticas. A chance de alguém bater o carro e morrer a caminho do aeroporto é 500 vezes maior do que a de o avião cair. Segundo a Administração Federal de Aviação, americana, de cada 1 000 mortes, 228 acontecem em acidentes rodoviários e 0,45 em aeroviários. Até nadar é mais perigoso. A cada 1 000 fatalidades, 26 são por afogamento.

"Seria preciso viajar todos os dias, durante 712 anos, para que alguém se envolvesse com certeza em um acidente aéreo", disse à SUPER Stuart Matthews, da FSF (sigla para Fundação de Segurança no Vôo, em inglês). O que aconteceu no dia 31 de outubro em São Paulo, quando um Fokker 100 despencou sobre várias casas segundos depois de decolar, foi uma tremenda falta de sorte, levando-se em conta as estatísticas. Pesquisas mostram que desde o final da década de 50 o número de desastres caiu bastante, embora eles tenham matado mais de 20 000 pessoas. Há 37 anos, eram sessenta casos para cada milhão de decolagens. Hoje são três. E o Brasil segue a tendência. Em 1987, quando o país tinha 7 890 aviões, houve 226 acidentes. Hoje, com uma frota quase 20% maior, o número baixou para menos da metade.

Mas a matemática nem sempre tranqüiliza. A lei da gravidade parece ser mais cruel na América Latina. Aqui, a cada milhão de pousos e decolagens 32,4 não dão muito certo. Na América do Norte a freqüência é oito vezes menor. "E o maior problema é a tripulação", diz Stuart Matthews. Ou seja, em geral a culpa não é da tecnologia.

Os números animadores também não valem para aviões pequenos. No Brasil, entre 1992 e 1994, os desastres com jatinhos aumentaram em 55%. Alguns viraram notícia. Na noite de 2 de março de 1996, um Learjet chegou ao Aeroporto de Guarulhos com velocidade superior à indicada para pouso. O piloto subiu e virou à esquerda. Chocou-se com uma montanha. Morreram nove pessoas. Eram os Mamonas Assassinas e a tripulação. Conclusão do inquérito policial: erros do piloto, do co-piloto e da torre.

O que derruba uma aeronave

15,7% Falha mecânica

O atrito com o ar e os processos de compressão e descompressão provocam trincas na fuselagem, que é o corpo do avião. Quando não são percebidas e reparadas a tempo, parte da carcaça se solta em pleno vôo.

Informações sobre o vôo chegam ao painel por fios conectados a aparelhos espalhados pelo avião. Interferências eletromagnéticas alteram os dados, confundem os pilotos e podem acionar equipamentos em hora errada.

O desgaste na ligação entre as turbinas e a asa podem fazer com que uma delas se solte parcialmente e deixe de funcionar.

3,4% Manutenção

Antes do vôo, todo o aparelho deve ser avaliado. Peças desgastadas que já derrubaram muitos aviões poderiam ter sido trocadas nessa fase.

4,8% Clima

Nevoeiros diminuem a visibilidade e correntes de vento podem desestabilizar o aparelho. O relâmpago é uma fatalidade que não se pode evitar.

69,2% Falhas humanas

Piloto e co-piloto causam nada menos que 64,4% das quedas. Por inexperiência ou cansaço, confundem-se com aparelhos e orientações da torre e cometem deslizes. Pela lei, podem ficar no comando até 9 horas e 30 minutos por dia. Mas o Sindicato Nacional dos Aeronautas garante que a norma não é respeitada.

A torre de controle orienta o tráfego no aeroporto e é crucial no pouso e na decolagem. Falhas na comunicação e orientações erradas causam 4,8% dos acidentes.

As turbinas empurram a aeronave, mantendo-a no ar, e ajudam na freagem, com o mecanismo chamado reverso. São partes delicadas do aparelho, que já causaram muitos acidentes.

Cadeiras malfixadas esmagam os passageiros. Além disso, é sob elas que se colocam as bombas. O terrorismo não entra nas estatísticas, mas é um dado importante.

Fagulhas surgidas em possíveis atritos entre partes do avião podem chegar ao tanque de combustível e provocar explosões.

7,1% Outras causas

Testes e vôos militares.

O trem de pouso é controlado por um sistema hidráulico. Às vezes ele não funciona e o avião tem de pousar de barriga.

Fonte: *Revista Superinteressante*, Abril, ano 10, n. 12, pp. 26-27.