Polinômios

Renunciar à liberdade é renunciar à qualidade de homem, aos direitos da humanidade, e até aos próprios deveres. Não há recompensa possível para quem a tudo renuncia. Tal renúncia não se compadece com a natureza do homem, e destituir-se voluntariamente de toda e qualquer liberdade, equivale a excluir a moralidade de suas ações.

Rousseau (1712-1778), filósofo

1. Polinômios

Denominamos polinômio na variável x e indicamos por P(x) a expressão do tipo:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

onde:

- Os números complexos $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ e a_n são os coeficientes do polinômio.
- Os termos do polinômio são: $a_0x^n, a_1x^{n-1}, a_2x^{n-2}, \ldots, a_{n-1}x, a_n$.
- O termo independente é a_n.
- n é um número natural ($n \in \mathbb{N}$).
- A variável é $x \in \mathbb{C}$.

Grau de um polinômio

O grau de um polinômio P(x) é representado pelo maior expoente da variável x, que possui coeficiente não-nulo e é indicado por gr(P).

Exemplos:

- $P(x) = x^3 + x^2 + 7$ é um polinômio de 3º grau: gr(P) = 3.
- $Q(x) = x^5 + 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 + x - 1$ é um polinômio de 5º grau: gr(Q) = 5.
- $A(x) = 7x^4 + x^2$ é um polinômio de 4º grau: gr(A) = 4.
- $B(x) = 5$ é um polinômio constante. Possui apenas o termo independente e seu grau é zero: gr(B) = 0.

Valor numérico de um polinômio

Obtemos o valor numérico de um polinômio P(x) para um número $x = k$, quando substituímos a variável x pelo número k e efetuamos as operações indicadas.

Em símbolos, esse valor numérico é indicado por P(k).

Se $P(k) = 0$, diremos que k é uma raiz do polinômio.

Exemplos:

Dado o polinômio $P(x) = 4x^3 - 2x^2 - x - 1$, temos:

a) $P(1) = 4 \cdot (1)^3 - 2 \cdot (1)^2 - 1 - 1$
$P(1) = 4 \cdot 1 - 2 \cdot 1 - 1 - 1$
$P(1) = 4 - 2 - 1 - 1$
$P(1) = 0$, logo, 1 é raiz de P(x)

b) $P(-3) = 4 \cdot (-3)^3 - 2 \cdot (-3)^2 - (-3) - 1$
$P(-3) = 4 \cdot (-27) - 2 \cdot (9) + 3 - 1$
$P(-3) = -108 - 18 + 3 - 1$
$P(-3) = -124$, logo, -3 não é raiz de P(x)

Exercícios

Resolvidos

1 Determinar o valor de *n*, de tal forma que o polinômio $P(x) = (n^2 - 4)x^3 + x^2 + 2x = 3$ tenha grau 2.

Para que o polinômio tenha grau 2 é necessário que $(n^2 - 4)$ seja igual a zero, pois dessa forma o termo em x^3 se anula.

$$n^2 - 4 = 0 \Rightarrow n^2 = 4 \Rightarrow n = \pm\sqrt{4} \begin{cases} n' = 2 \\ n'' = -2 \end{cases}$$

Logo, $n = 2$ ou $n = -2$.

2 Discutir o grau do polinômio $P(x) = (a - 2)x^3 + ax^2 + 3$, em função de *a*.

O maior expoente da variável *x* é 3, no caso de o coeficiente de x^3 não ser nulo, logo:

- se $a - 2 \neq 0$, ou seja, $a \neq 2$, então $gr(P) = 3$
- se $a - 2 = 0$, ou seja, $a = 2$, temos $P(x) = (2 - 2)x^3 + 2x^2 + 3 = 2x^2 + 3$, então $gr(P) = 2$

3 Dado o polinômio $P(x) = 2x^2 - 3x + k$, determinar o valor de *k* de modo que a raiz de P(x) seja 4.

Sendo 4 raiz de P(x), temos $P(4) = 0 \Rightarrow 2 \cdot 4^2 - 3 \cdot 4 + k = 0$

$32 - 12 + k = 0$

$k = -20$

4 Determinar o polinômio $P(x) = ax + b$, com $a \neq 0$ e $P(-1) = 1$ e $P(3) = 9$.

O problema consiste em determinar o valor de *a* e *b*.

$P(-1) = 1 \Rightarrow a(-1) + b = 1 \Rightarrow -a + b = 1$

$P(3) = 9 \Rightarrow a(3) + b = 9 \Rightarrow 3a + b = 9$

Resolvendo o sistema:

$$\begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \end{array} \begin{cases} -a + b = 1 & \cdot (3) \\ 3a + b = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3a + 3b = 3 \\ 3a + b = 9 \end{cases}$$

$$4b = 12 \Rightarrow b = 3$$

Substituindo $b = 3$ em I, vem: $-a + 3 = 1 \Rightarrow a = 2$

Logo, $P(x) = 2x + 3$.

Propostos

1540 Dê o grau dos seguintes polinômios:

a) $P(x) = 5x^2 + x - 4$

b) $P(x) = -6x^4 + x^3 + 2x - 1$

c) $P(x) = 8x^3 + 2x$

d) $P(x) = x^8 - x^7 + x^6 + 2x^5 + 3$

e) $P(x) = x$

f) $P(x) = 7$

1541 Determine o valor de *a*, de modo que o polinômio $P(x) = (a^2 - 9)x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x$ tenha grau 3.

1542 Dado o polinômio $P(x) = -4x^3 + 2x^2 + x - 1$, calcule:

a) P(1) c) P(−3)

b) P(2) d) P(0)

1543 Sendo o polinômio $P(x) = 4x^2 + x - n$, determine o valor de *n*, sabendo que 1 é raiz de P(x).

1544 Dado o polinômio $P(x) = mx^3 - n$, determine o valor de *m* e *n*, sabendo que $P(-1) = -7$ e $P(1) = -1$.

1545 Seja o polinômio $P(x) = ax^2 + 2x - b$, determine o valor de *a* e de *b*, sabendo que $P(2) = 6$ e $P(3) = 13$.

1546 Discuta o grau de cada um dos polinômios em função de *a*.

a) $A(x) = ax^4 - 3ax^3$

b) $B(x) = (a - 2)x^2 + (a - 1)x + 3$

c) $P(x) = (a^2 - 4a + 3)x^3 + (a - 1)x^2 + ax + 1$

1547 (UFRGS) Se P(x) é um polinômio de grau 5, então o grau de $[P(x)]^3 + [P(x)]^2 + 2P(x)$ é:

a) 3 b) 8 c) 15 d) 20 e) 30

1548 (PUCCAMP-SP) Dado o polinômio $P(x) = x^n + x^{n-1} + ... + x^2 + x + 3$ se *n* for ímpar, então $P(-1)$ vale:

a) -1 b) 0 c) 2 d) 1 e) 3

1549 (Fuvest-SP) Um polinômio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ satisfaz as seguintes condições: $P(1) = 0$, $P(-x) + P(x) = 0$, qualquer que seja *x* real. Qual o valor de $P(2)$?

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

2. Identidade de polinômios

Polinômios idênticos

Considerando dois polinômios, P(x) e Q(x), dizemos que esses polinômios são idênticos se, e somente se, os coeficientes dos termos correspondentes, forem iguais.

$$\text{Sendo: } \begin{cases} P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n \\ Q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_nx^n \end{cases} \text{ temos:}$$

$$\boxed{P(x) \equiv Q(x) \Leftrightarrow a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ ...,\ a_n = b_n}$$

Sendo os dois polinômios idênticos, para qualquer valor de *x* eles assumem o mesmo valor numérico:

$$P(x) \equiv Q(x) \Rightarrow P(\beta) = Q(\beta),\ \forall\ \beta \in \mathbb{C}$$

Exemplo:

Dados os polinômios idênticos $P(x) = ax^2 + 3x = 8$ e $Q(x) = 4x^2 + 3x + b$ e sendo $P(x) \equiv Q(x)$, temos: $a = 4$ e $b = -8$.

Polinômio identicamente nulo

O polinômio $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ será identicamente nulo se, e somente se, todos os seus coeficientes forem nulos ($a_0 = a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$). Em símbolo: $P(x) \equiv 0$. Para o polinômio nulo não se define grau.

Exemplo:

Dado o polinômio $P(x) = (k + 3)x^2 + (p - 1)x + 8$, temos:

$$P(x) \equiv 0 \text{ para } \begin{cases} k + 3 = 0 \Rightarrow k = -3, \text{ e} \\ p - 1 = 0 \Rightarrow p = 1 \end{cases}$$

Exercícios

Resolvido

Determinar a, b e c para que o polinômio $P(x) = (a + 3)x^2 + (3b - 9)x + c$ seja identicamente nulo.

Basta igualar cada um de seus coeficientes a zero:

$a + 3 = 0 \Rightarrow a = -3$

$3b - 9 = 0 \Rightarrow 3b = 9 \Rightarrow b = 3$

$c = 0$

Propostos

1550 Determine a, b e c para que o polinômio $P(x) = (a - 8)x^3 + (5b - 15)x^2 + cx$, seja identicamente nulo.

1551 Determine m, n e t para que o polinômio $P(x) = (3m + 2)x^2 + (2n - 1)x - t$ seja identicamente nulo.

1552 Calcule os valores de k e p, de modo que o polinômio $P(x) = (k^2 - 1)x^2 + px + 3$ seja identicamente nulo.

1553 Calcule a e b, de modo que os polinômios $P(x) = (2a + 6)x^3 + (3b - 4)x^2$ e $Q(x) = x^3 + 3x^2$ sejam idênticos.

1554 Sendo os polinômios $P(x) = x^2 + 2ax + b$ e $Q(x) = (x - 3)^2$ idênticos, determine os valores de a e b.

1555 Sabendo que os polinômios $P(x) = mx^3 - tx$ e $Q(x) = x(x^2 + 8)$ são idênticos, calcule os valores de m e t.

1556 Determine a, b, c e d, de modo que o polinômio $M(x) = (a - b)x^3 + (b + c)x^2 - cx - 2x + d$ seja identicamente nulo.

1557 (Osec-SP) Sejam os polinômios $f(x) = ax^2 - 2x + 1$, $g(x) = x + 2$ e $h(x) = x^3 + bx^2 - 3x + c$, os valores de a, b e c, tais que $f \cdot g = h$ são, respectivamente:

a) -1; 2 e 0
b) 0; 1 e 2
c) 1; -1 e 2
d) 1; 0 e 2
e) 2; -1 e 0

1558 Obtenha os valores de m e n para que os polinômios sejam idênticos.

a) $P(x) = (1 - m)x^2 - 8x + 3$ e $Q(x) = -3x^2 + (2n - 1)x + 3$

b) $P(x) = x^2 + mx - n$ e $Q(x) = (x + 2)^2$

3. Adição e subtração de polinômios

A soma de dois ou mais polinômios é o polinômio cujos coeficientes são obtidos adicionando-se os coeficientes dos termos que apresentam o mesmo grau.

Exemplo:

$$P(x) = \boxed{3}x^4 \boxed{-2}x^3 \boxed{+\ \ }x^2 \boxed{+4}x \boxed{+1}$$

$$Q(x) = \boxed{4}x^4 \boxed{-6}x^3 \boxed{+2}x^2 \boxed{-4}x \boxed{+1}$$

$$P(x) + Q(x) = (3 + 4)x^4 + (-2 - 6)x^3 + (1 + 2)x^2 + (4 - 4)x + (1 + 1) =$$

$$= 7x^4 - 8x^3 + 3x^2 + 2$$

De forma análoga, a diferença de dois polinômios é o polinômio cujos coeficientes são obtidos subtraindo-se, numa certa ordem, os coeficientes dos termos que apresentam o mesmo grau.

Exemplo:

$$P(x) = 2x^4 - 3x^3 + x^2 - 2x + 1$$
$$Q(x) = 2x^4 - x^3 + x^2 + x + 3$$
$$P(x) - Q(x) = (2-2)x^4 + (-3+1)x^3 + (1-1)x^2 + (-2-1)x + (1-3) =$$
$$= -2x^3 - 3x - 2$$

▶ A soma ou a diferença entre dois polinômios não tem, como grau, necessariamente, a soma ou a diferença dos graus desse polinômios.

Exercícios

Resolvido

Sendo $P(x) = 2x^4 - x^3 + x^2 + x + 3$ e $Q(x) = x^3 + 2x^2 - x + 3$, calcular:

a) $P(x) + Q(x)$

$$P(x) = 2x^4 - x^3 + x^2 + x + 3$$
$$Q(x) = x^3 + 2x^2 - x + 3$$
$$P(x) + Q(x) = 2x^4 + 3x^2 + 6$$

b) $P(x) - Q(x)$

$$P(x) = 2x^4 - x^3 + x^2 + x + 3$$
$$Q(x) = x^3 + 2x^2 - x + 3$$
$$P(x) - Q(x) = 2x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x$$

c) $Q(x) - P(x)$

$$Q(x) = x^3 + 2x^2 - x + 3$$
$$P(x) = 2x^4 - x^3 + x^2 + x + 3$$
$$Q(x) - P(x) = -2x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x$$

Propostos

1559 Sendo $P(x) = 5x^3 + 3x^2 - 5x + 8$ e $Q(x) = x^3 + 2x^2 - x + 8$, calcule:
a) $P(x) + Q(x)$ b) $P(x) - Q(x)$ c) $Q(x) - P(x)$ d) $Q(x) + P(x)$

1560 Considere $P(x) = 2x^4 + 3x^2 + 4x + 1$, $Q(x) = 2x^3 + 5x^2 - x - 3$ e $G(x) = -2x^4 - 7x^2 + x - 10$ e calcule o grau dos seguintes polinômios:
a) $gr[P(x) + Q(x) + G(x)]$
b) $gr[P(x) + Q(x) - G(x)]$
c) $gr[P(x) - Q(x) - G(x)]$

1561 Dados os polinômios $A(x) = 6x^3 + mx^2 - \frac{2}{5}$, $B(x) = -2x^2 + 7x + n$ e $C(x) = px^3 - 7x - 1$, calcule *m*, *n* e *p* para que C(x) seja a diferença entre A(x) e B(x), nessa ordem.

4. Multiplicação de polinômios

Para se obter o produto de dois polinômios faremos, inicialmente, a multiplicação de cada termo de um deles, por todos os termos do outro. Posteriormente, faremos a adição dos resultados.

Exemplo:

$P(x) = x^2 - x$ e $Q(x) = -x^2 + 2x + 5$

multiplicando, temos: $(x^2 - x) \cdot (-x^2 + 2x + 5)$

$-x^4 + 2x^3 + 5x^2 + x^3 - 2x^2 - 5x$

Adicionando os resultados:

$-x^4 + (2 + 1)x^3 + (5 - 2)x^2 - 5x = -x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 5x$

- O grau do produto de dois polinômios não-nulos é a soma dos graus desses polinômios.

Exercícios

Resolvido

Sendo $P(x) = x^3 + 2x^2$ e $Q(x) = x^4 - x^3 + 2x - 1$, calcular:

a) $[P(x)]^2$

$(x^3 + 2x^2) \cdot (x^3 + 2x^2)$

$x^6 + 2x^5 + 2x^5 + 4x^4$

$[P(x)]^2 = x^6 + 4x^5 + 4x^4$

b) $P(x) \cdot Q(x)$

$(x^3 + 2x^2) \cdot (x^4 - x^3 + 2x - 1)$

$x^7 - x^6 + 2x^4 - x^3 + 2x^6 - 2x^5 + 4x^3 - 2x^2$

$P(x) \cdot Q(x) = x^7 + x^6 - 2x^5 + 2x^4 + 3x^3 - 2x^2$

Propostos

1562 Considere os polinômios $P(x) = x^3 - x$, $Q(x) = 3x^4 + 6x^3 - x^2 + 2x - 4$ e calcule:

a) $[P(x)]^2$

b) $P(x) \cdot Q(x)$

1563 Sendo $P(x) = 7x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 5x + 10$, $Q(x) = x^2 + 4$ e $G(x) = -3x^4 + 2x^3 + 4x^2 + + x + 1$, calcule o grau dos polinômios:

a) $gr[Q(x)]^2$

b) $gr[Q(x) \cdot G(x)]$

c) $gr[P(x) \cdot Q(x)]$

5. Divisão de polinômios

Considere dois polinômios, A(x) e B(x), sendo B(x) um polinômio não identicamente nulo. Ao dividir A(x) por B(x) encontramos os polinômios Q(x) e R(x), tais que:

$$\underbrace{A(x)}_{\text{dividendo}} \equiv \overbrace{Q(x)}^{\text{quociente}} \cdot \underbrace{B(x)}_{\text{divisor}} + \overbrace{R(x)}^{\text{resto}}$$

Indicando na chave, temos: $\begin{array}{r|l} A(x) & B(x) \\ \hline R(x) & Q(x) \end{array}$

Observe que:

- o grau de Q(x) é igual à diferença dos graus de A(x) e de B(x).
- o grau do resto R(x) para R(x) não-nulo será sempre menor que o grau do divisor B(x).
- se a divisão é exata, o resto R(x) é nulo, ou seja, o polinômio A(x) é divisível pelo polinômio B(x).

Método da chave

Para dividir o polinômio $A(x) = 4x^3 + x^4 + 9 + 4x^2$ pelo polinômio $B(x) = x^2 + x - 1$, adotamos um procedimento análogo ao algoritmo usado na aritmética.

1º passo Escrevemos os polinômios dados na ordem decrescente de seus expoentes, e completamos o polinômio com termos de coeficiente zero.
$A(x) = x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 0x + 9$ e $B(x) = x^2 + x - 1$

2º passo Dividimos o termo de maior grau do dividendo pelo termo de maior grau do divisor. Obtemos, assim, o primeiro termo do quociente. A seguir multiplicamos o termo obtido pelo divisor, e subtraímos esse produto do dividendo.

$$\begin{array}{l|l} \cancel{x^4} + 4x^3 + 4x^2 + 0x + 9 & x^2 + x - 1 \\ \cline{2-2} -\cancel{x^4} - x^3 + x^2 & x^2 \\ \cline{1-1} \qquad 3x^3 + 5x^2 & \end{array}$$

3º passo Caso a diferença obtida tenha grau maior ou igual ao do divisor, ela passa a ser um novo dividendo. Repetimos, então, o processo a partir do 2º passo.

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
\cancel{x^4} & +\,4x^3 & +\,4x^2 & +\,0x & +\,9 & x^2 + x - 1 \\ \cline{6-6}
-\cancel{x^4} & -\,x^3 & +\,x^2 & & & x^2 + 3x + 2 \\ \cline{1-3}
 & 3\cancel{x^3} & +\,5x^2 & +\,0x & & \\
 & -3\cancel{x^3} & -\,3x^2 & +\,3x & & \\ \cline{2-4}
 & & 2\cancel{x^2} & +\,3x & +\,9 & \\
 & & -2\cancel{x^2} & -\,2x & +\,2 & \\ \cline{3-5}
 & & & x & +\,11 &
\end{array}
$$

Logo, obtemos: quociente: $Q(x) = x^2 + 3x + 2$

resto: $R(x) = x + 11$

Exercícios

Resolvidos

1 Na divisão de um polinômio $D(x)$ pelo polinômio $d(x) = x^2 + 1$, encontramos o quociente $Q(x) = x^2 - 6$ e o resto $R(x) = x + 6$. Determinar $D(x)$.

De acordo com o enunciado, $D(x) = Q(x) \cdot d(x) + R(x)$, então temos:

$D(x) = (x^2 - 6) \cdot (x^2 + 1) + x + 6$, ou seja,

$D(x) = x^4 - 5x^2 + x$

2 Obter o valor de k, de modo que $A(x) = x^2 - 3x + k$ seja divisível por $B(x) = x - 1$.

$$
\begin{array}{rrr|l}
\cancel{x^2} & -\,3x & +\,k & x - 1 \\ \cline{4-4}
-\cancel{x^2} & +\,x & & x - 2 \\ \cline{1-3}
 & -2\cancel{x} & +\,k & \\
 & +2\cancel{x} & -\,2 & \\ \cline{2-3}
 & & k - 2 &
\end{array}
$$

Para que $A(x)$ seja divisível por $B(x)$, o resto $R(x)$ deve ser igual a zero. Logo $k = 2$.

3 Obter o polinômio $A(x)$ tal que $A(x) : B(x) = B(x) : C(x)$, dados $B(x) = -3x + 6$ e $C(x) = x - 2$.

$A(x) : B(x) = B(x) : C(x) \Rightarrow A(x) = B(x) \cdot B(x) : C(x)$

$B(x) \cdot B(x) = (-3x + 6)^2 = 9x^2 - 36x + 36$

Efetuando a divisão pelo método da chave, temos $A(x) = 9x + 18$.

$$
\begin{array}{rrr|l}
9x^2 & -\,36x & +\,36 & x - 2 \\ \cline{4-4}
-9x^2 & +\,18x & & 9x - 18 \\ \cline{1-2}
 & -18x & +\,36 & \\
 & 18x & -\,36 & \\ \cline{2-3}
 & & 0 &
\end{array}
$$

Propostos

1564 Obtenha o quociente Q(x) e o resto R(x), na divisão do polinômio A(x), pelo polinômio B(x), em cada caso:

a) $A(x) = x^2 - 3x - 4$
$B(x) = x + 1$

b) $A(x) = x^3 + x^2 - 11x + 10$
$B(x) = x - 2$

c) $A(x) = 3x^3 + 9x^2 - 2x - 6$
$B(x) = 3x^2 - 2$

d) $A(x) = 7x^2 - 8$
$B(x) = x - 3$

e) $A(x) = x^4 - 5x^2 + x$
$B(x) = x^2 + 1$

f) $A(x) = 12x^3 + 24x^2 - 13x + 6$
$B(x) = 6x^2 - 3x + 1$

1565 Na divisão de um polinômio A(x) por $B(x) = x^2 - 2x + 1$, encontramos como quociente o polinômio $Q(x) = x - 2$ e como resto $R(x) = x + 1$. Determine A(x).

1566 Determine o polinômio D(x), sabendo que a divisão de D(x) por $B(x) = 2x + 3$ tem como quociente $Q(x) = x - 4$ e resto igual a zero.

1567 Obtenha o valor de *m*, de tal forma que o polinômio $A(x) = x^2 - 5x + m$ seja divisível por $B(x) = x + 3$.

1568 Determine o valor de *k*, sabendo que o polinômio $D(x) = 2x^3 + 8x^2 + 4x - k$ é divisível por $B(x) = 2x + 2$.

1569 (FGV-SP) Seja Q(x) o quociente da divisão do polinômio $P(x) = x^6 - 1$ pelo polinômio $d(x) = x - 1$. Então:

a) $Q(0) = 0$
b) $Q(0) < 0$
c) $Q(1) = 0$
d) $Q(-1) = 1$
e) $Q(1) = 6$

Teorema do resto

O resto da divisão de um polinômio P(x) por um binômio (x − a) é o próprio valor numérico do polinômio para x = a, que indicamos por P(a).

De acordo com a definição de divisão, temos:

$$P(x) = (x - a) \cdot \underset{\text{quociente}}{Q(x)} + \underset{\text{resto}}{R(x)}, \text{ onde } R(x) = k \text{ (constante), pois } gr(x - a) = 1$$

$$P(a) = \underbrace{(a - a)}_{0} \cdot Q(a) + k \Rightarrow P(a) = k$$

Logo: $R(x) = P(a)$

Exemplo:

O resto da divisão do polinômio $P(x) = 4x^3 - 2x^2 + x + 1$ pelo binômio $(x - 2)$ é dado pelo valor numérico do polinômio P(x) para $x = 2$, ou seja, para *x* igual à raiz do binômio.

$$P(2) = 4(2)^3 - 2(2)^2 + 2 + 1 \Rightarrow P(2) = 27$$

Logo, o resto é $R(x) = 27$.

Teorema de D'Alembert

A divisão de um polinômio P(x) por um binômio (x − a) é exata se, e somente se, P(a) = 0.

Pelo teorema do resto, temos que R(x) = P(a).

Se a divisão é exata e R(x) = 0, então P(a) = 0.

Se P(a) = 0, então R(x) = 0, logo a divisão é exata.

Exemplo: 8 + 4 − 22 + 10

A divisão de polinômio $P(x) = x^3 + x^2 - 11x + 10$ pelo binômio $(x - 2)$ é exata, pois:

$P(2) = 2^3 + 2^2 - 11 \cdot 2 + 10$

$P(2) = 8 + 4 - 22 + 10$

$P(2) = 0$

Divisão de um polinômio P(x) por (x − a) · (x − b)

Sendo o polinômio P(x) divisível por x − a e por x − b com a ≠ b, então P(x) é divisível por (x − a) · (x − b).

Como o divisor (x − a) · (x − b) é de grau 2, o resto será no máximo de grau 1, assim:

$P(x) = (x - a) \cdot (x - b) \cdot Q(x) + mx + q$

Como P(a) = 0:

$$P(a) = \underbrace{(a - a) \cdot (a - b)}_{0} \cdot Q(a) + m \cdot a + q = 0 \Rightarrow m \cdot a + q = 0 \quad \text{(I)}$$

Como P(b) = 0:

$$P(b) = \underbrace{(b - a) \cdot (b - b) \cdot Q(b)}_{0} + m \cdot b + q = 0 \Rightarrow m \cdot b + q = 0 \quad \text{(II)}$$

Subtraindo, membro a membro, (II) de (I), temos:

$m \cdot a + q - (mb + q) = 0$

$m \cdot a + \cancel{q} - m \cdot b - \cancel{q} = 0$

$m(a - b) = 0$

Como a ≠ b, a − b ≠ 0, então m = 0.

Substituindo m = 0 em (II): $m \cdot b + q = 0$

$0 \cdot b + q = 0$, então $q = 0$

Portanto, o resto $R(x) = mx + q$ é identicamente nulo e $P(x)$ é divisível por $(x - a) \cdot (x - b)$.

Exemplo:

O polinômio $P(x) = -x^3 + 2x^2 + 5x - 6$ é divisível por $(x - 3) \cdot (x + 2)$, pois $P(3) = -3^3 + 2(3)^2 + 5 \cdot 3 - 6 = -27 + 18 + 15 - 6 = 0$, isto é, $P(x)$ é divisível por $(x - 3)$.

$P(-2) = -(-2)^3 + 2 \cdot (-2)^2 + 5 \cdot (-2) - 6 = 0$, de onde concluímos que $P(x)$ é divisível por $(x + 2)$.

Logo, o polinômio $P(x)$ é divisível por $(x - 3) \cdot (x + 2)$.

Exercícios

Resolvidos

1 Determinar o valor de *m*, de modo que a divisão do polinômio $P(x) = 4x^3 - x^2 + mx + 3$ pelo binômio $x + 2$ tenha resto igual a 7.

Para achar o valor de *m*, basta aplicar o teorema do resto:

$P(-2) = 4 \cdot (-2)^3 - (-2)^2 + m(-2) + 3 = 7$

$4 \cdot (-8) - 4 - 2m + 3 = 7$

$-32 - 4 - 2m + 3 = 7$

$-2m = 7 + 33 \Rightarrow m = -20$

2 Obter o valor de *k*, para que o polinômio $P(x) = 2x^4 + kx^3 - 6x^2$ seja divisível pelo binômio $x - 1$.

Para que a divisão de $P(x)$ pelo binômio seja exata, devemos ter que $P(1) = 0$ (Teorema de D'Alembert):

$P(1) = 2 \cdot (1)^4 + k \cdot (1)^3 - 6(1)^2 = 0$

$2 + k - 6 = 0$

$k = 4$

Propostos

1570 Determine o resto da divisão do polinômio $D(x)$ pelo binômio $A(x)$, nos seguintes casos:

a) $D(x) = 2x^3 + x^2$
$A(x) = (x - 2)$

b) $D(x) = 4x^3 + 3x^2 - x$
$A(x) = (x + 1)$

c) $D(x) = x^3 + 2$
$A(x) = (x + 4)$

d) $D(x) = -5x^4 + 3x^3 + x^2 - 1$
$A(x) = (x - 1)$

1571 Calcule *m*, de modo que a divisão do polinômio $P(x) = 3x^2 + mx - 2$ pelo binômio $x - 3$ tenha resto igual a 5.

1572 Encontre o valor de *k*, para que o resto da divisão do polinômio $P(x) = -2x^4 + kx^3 + x^2 - 1$ pelo binômio $x + 2$ seja igual a 10.

1573 Obtenha *y*, de modo que o polinômio $P(x) = x^3 - yx^2 + x - 3$ seja divisível por $(x - 2)$.

1574 Qual o valor de *p*, sabendo-se que o polinômio $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + px - 4$ é divisível pelo binômio $x + 3$?

1575 Determine de *m* e *n*, sabendo-se que os restos das divisões de $P(x) = -x^3 + 3x^2 + mx - n$ pelos binômios $x + 1$ e $x - 1$ são, respectivamente, 1 e -5.

1576 A divisões do polinômio $P(x) = 3x^2 + ax + 8$ por $(x + 2)$ e $(x - 3)$ possuem restos iguais. Determine o valor do parâmetro *a*.

1577 Mostre que o polinômio $P(x) = -n + x^2 + x^4 + x^6 + \dots + x^{2n}$ é divisível por $(x + 1)$.

Dispositivo prático de Briot-Ruffini

O dispositivo de Briot-Ruffini nos permite encontrar o quociente e o resto da divisão de um polinômio P(x) de grau *n* ($n \geq 1$) por um binômio $x - a$, sendo $(n - 1)$ o grau do quociente.

Exemplo:

Efetuar a divisão $(3x^3 - 8x^2 + 5x + 6) : (x - 2)$.

1º Passo:

Determinamos a raiz do binômio $x - 2$, que é o número 2. Colocamos a raiz do lado esquerdo do dispositivo e, do lado direito, os coeficientes de todos os termos do dividendo, em ordem decrescente de expoente.

$$\begin{array}{c|c} \overbrace{2}^{\text{raiz do binômio}} & \overbrace{3 \quad -8 \quad 5 \quad 6}^{\text{coeficientes do dividendo}} \\ \hline & \end{array}$$

2º passo:

Abaixamos o primeiro coeficiente do dividendo; em seguida, multiplicamos esse coeficiente pela raiz e somamos o produto ao 2º coeficiente do dividendo escrevendo o resultado obtido abaixo deste.

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 3 & -8 & 5 & 6 \\ \hline & \downarrow & & & \\ & 3 & & & \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} 2 & 3 & -8 & 5 & 6 \\ \hline \times & 3 & -2 & & \end{array}$$

$$3 \cdot 2 + (-8) = -2$$

3º passo:

Multiplicamos o resultado obtido pela raiz e adicionamos o produto ao 3º coeficiente. Repetimos o processo até o último coeficiente.

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 3 & -8 & 5 & 6 \\ \hline \times & 3 & -2 & 1 & \end{array} \qquad -2 \cdot 2 + 5 = 1$$

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 3 & -8 & 5 & 6 \\ \hline \times & 3 & -2 & 1 & 8 \end{array} \qquad 1 \cdot 2 + 6 = 8$$

Concluindo, os três primeiros números obtidos são os coeficientes do quociente. O último número obtido é o resto da divisão.

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 3 & -8 & 5 & 6 \\ \hline & \underbrace{3 \quad -2 \quad 1}_{\text{coeficientes do quociente}} & & & \underbrace{8}_{\text{resto}} \end{array}$$

Ou seja,

quociente: $Q(x) = 3x^2 - 2x + 1$

resto: $R(x) = 8$

▶ note que o grau do quociente é sempre uma unidade inferior ao grau do dividendo

Exercícios

Resolvidos

1 Determinar o quociente e o resto da divisão do polinômio $P(x) = 4x^3 + 8 - 3x^2$ por $x + 1$.

Inicialmente, observamos que falta o termo em x no polinômio $P(x) = 4x^3 + 8 - 3x^2$ e, além disso, não há ordem nos termos. Devemos, então, completá-lo com $0x$ e ordená-lo:

$P(x) = 4x^3 - 3x^2 + 0x + 8$

Aplicando o dispositivo de Briot-Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc} \overbrace{-1}^{\text{raiz do binômio}} & \overbrace{4 \quad -3 \quad 0 \quad 8}^{\text{coeficientes do dividendo}} \\ \hline & \underbrace{4 \quad -7 \quad 7}_{\text{coeficientes do quociente}} \quad \underbrace{1}_{\text{resto}} \end{array}$$

Obtemos o resultado:

quociente: $Q(x) = 4x^2 - 7x + 7$

resto: $R(x) = 1$

2 Obter o quociente e o resto da divisão do polinômio $P(x) = 6x^3 - 2x^2 + 3x + 2$ pelo binômio $2x - 1$.

O dispositivo de Briot-Ruffini e aplicável apenas quando o coeficiente de x no binômio for igual a 1. Usamos, então, o seguinte artifício:

$P(x) = (2x - 1) \cdot Q(x) + R(x)$

$P(x) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot Q(x) + R(x)$

$P(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot 2Q(x) + R(x)$

Observamos que, na divisão de P(x) por $\left(x - \frac{1}{2}\right)$, o quociente aparece dobrado. Devemos, então, dividir por 2 os coeficientes desse quociente e conservar o resto.

$$\begin{array}{c|cccc} \frac{1}{2} & 6 & -2 & 3 & 2 \\ \hline & \underbrace{6 \quad 1 \quad \frac{7}{2}}_{\text{dividir por 2}} & & & \underbrace{\frac{15}{4}}_{\text{o resto não se altera}} \end{array}$$

Dividindo-se por 2 os coeficientes encontrados, e conservando-se o resto, temos que 3, $\frac{1}{2}$ e $\frac{7}{4}$ são os coeficientes do quociente e $\frac{15}{4}$ o resto.

quociente: $Q(x) = 3x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{7}{4}$

resto: $R(x) = \frac{15}{4}$

3 Um polinômio P(x) dividido por (x − 2) dá resto 4 e dividido por (x − 5) dá resto 6. Obter o resto da divisão de P(x) por (x − 2) · (x − 5).

Pelo teorema do resto, P (2) = 4 e P (5) = 6, sendo $P(x) = (x - 2) \cdot (x - 5) \cdot Q(x) + ax + b$.

Fazendo x = 2, temos:

$$P(2) = \underbrace{(2 - 2) \cdot (2 - 5) \cdot Q(2)}_{0} + 2a + b = 4 \Rightarrow 2a + b = 4 \quad \text{I}$$

e

$$P(5) = \underbrace{(5 - 2) \cdot (5 - 5) \cdot Q(5)}_{0} + 5a + b = 6 \Rightarrow 5a + b = 6 \quad \text{II}$$

Resolvendo o sistema: $\begin{cases} 2a + b = 4 & \text{I} \\ 5a + b = 6 & \text{II} \end{cases}$ $a = \frac{2}{3}$ e $b = \frac{8}{3}$

$R(x) = \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$

Propostos

1578 Utilizando o dispositivo de Briot-Ruffini, determine o quociente Q(x) e o resto R(x), na divisão do polinômio D(x) pelo binômio B(x), em cada caso:

a) $D(x) = x^2 - 7x + 12$
$B(x) = (x - 5)$

b) $D(x) = x^3 + 2x^2 - x + 3$
$B(x) = (x - 1)$

c) $D(x) = 4x^3 - 2x^2 + 3x - 1$
$B(x) = (x + 2)$

d) $D(x) = x^4 + 2x^3 + x - 6$
$B(x) = (x - 3)$

e) $D(x) = 4x^3 - 3x + 4$
$B(x) = (x - 4)$

1579 Encontre o quociente e o resto, em cada divisão do polinômio D(x) pelo binômio B(x), utilizando o dispositivo de Briot-Ruffini:

a) $D(x) = 2x^3 - 4x^2 + x - 3$
$B(x) = (2x - 1)$

b) $D(x) = -6x^3 + 2x^2 - x - 4$
$B(x) = (2x + 1)$

c) $D(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 + 1$
$B(x) = (2x - 3)$

d) $D(x) = x^3 + 3x - 1$
$B(x) = (2x + 3)$

1580 Determine o resto da divisão do polinômio $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 4$ por $M(x) = x - 3$.

1581 Encontre o quociente da divisão do polinômio $x^4 + 6x^2 + x + 6$ pelo binômio $x + 2$.

1582 Qual é o coeficiente do termo em *x*, no quociente da divisão de $3x^3 + 2x^2 - x + 1$ por $(x - 4)$?

1583 Determinar o valor de *k*, de modo que a divisão do polinômio $P(x) = 3x^2 + x - 4$ pelo binômio $(x + k)$ seja exata.

1584 Um polinômio $P(x)$ dividido por $x + 2$ dá resto 3 e dividido por $x - 3$ dá resto 5. Obtenha o resto da divisão de $P(x)$ por $(x + 2) \cdot (x - 3)$.

1585 (UFBA) Na divisão de um polinômio pelo binômio $ax + b$, usou-se o dispositivo prático de Briot-Ruffini e encontrou-se.

	1	p	−3	4	−5
−2	q	−4	5	r	7

Os valores de *a, b, p, q* e *r* são, respectivamente:

a) 1, −2, 1, −6 e 6
b) 1, −2, 1, 1 e 4
c) 1, 2, −2, −2 e −6
d) 1, 2, 1, −4 e 4
e) 1, 2, −2, 1 e −6

1586 (Cesgranrio-RJ) O polinômio $x^3 + px + q$ é divisível por $x^2 + 2x + 5$. Os valores de *p* e *q* são, respectivamente:

a) 2 e 5
b) 5 e 2
c) 1 e 5
d) 1 e −10
e) 3 e 6

1587 (Cesgranrio-RJ) O polinômio $x^3 + 2x^2 + mx + n$ é divisível por $x^2 + x + 1$. O valor de $m + n$ é:

a) −3
b) −1
c) 1
d) 2
e) 3

1588 (UCMG) Se o polinômio $x^4 - 4x^3 - 10x^2 + ax + b$ é divisível por $x^2 - x + 5$, então $a + b$ é igual a:

a) −90
b) −87
c) −10
d) 5
e) 10

1589 (Osec-SP) Os valores reais de *m* e *n*, para os quais o polinômio $(x^4 - x^3 + mx^2 + 4x + n)$ seja divisível por $(x - 1) \cdot (x - 5)$, valem, respectivamente:

a) −6 e − 5
b) 6 e − 5
c) 6 e 5
d) −6 e 5
e) nenhuma das anteriores

1590 (UFRN) O resto da divisão de $x^{85} - 1$ por $x + 1$ é igual a:

a) −2
b) −1
c) 0
d) 1
e) 2

1591 (Osec-SP) Um polinômio inteiro em *x*, quando dividido por $x + 2$ dá para resto 5 e quando dividido por $x - 2$ dá para resto 13. Então, o resto da sua divisão por $x^2 - 4$ vale:

a) 18
b) 65
c) $2x + 4$
d) $9x + 4$
e) $2x + 9$

1592 (EEM-SP) Dados $P(x) = 2x^3 + Ax + 3B$ (*A* e *B* constantes) e $Q(x) = x^2 - 3x + 9$:

a) divida $P(x)$ por $Q(x)$
b) determine *A* e *B* para que a divisão seja exata

1593 (Fuvest-SP) Dividindo-se um polinômio $P(x)$ por $(x - 1)^2$, obtém-se um resto que, dividido por $x - 1$, dá resto 3. Ache $P(1)$.

1594 (Santa Úrsula-RJ) Se $x^{13} + 1$ é dividido por $x - 1$, o resto é:

a) 1
b) −1
c) 0
d) 2
e) 13

1595 (Fuvest-SP) Dividindo-se o polinômio $p(x)$ por $2x^2 - 3x + 1$, obtém-se quociente $3x^2 + 1$ e resto $-x + 2$. Nessas condições, o resto da divisão de $p(x)$ por $x - 1$ é:

a) 2
b) 1
c) 0
d) −1
e) −2

6. Equações algébricas

Chama-se equação algébrica ou polinomial toda equação redutível à forma

$$\boxed{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0}$$

com $a_n \neq 0$, sendo a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 e x números complexos, $n \in \mathbb{N}^*$ e sendo n o grau da equação.

Raiz ou zero de uma equação algébrica

Raiz ou zero de uma equação algébrica é o valor de x que a verifica.

Exemplos:

a) Na equação $x^2 - 3x - 10 = 0$:
-2 é raiz, pois $(-2)^2 - 3 \cdot (-2) - 10 = 4 + 6 - 10 = 0$
7 não é raiz, pois $7^2 - 3 \cdot 7 - 10 = 8 \neq 0$

b) Na equação $x^3 - 6x^2 - x + 30 = 0$:
3 é raiz, pois $3^3 - 6 \cdot (3)^2 - 3 + 30 = 27 - 54 - 3 + 30 = 0$

Resolver uma equação algébrica é determinar todas as suas raízes que, assim, formam o conjunto solução ou o conjunto verdade da equação.

Exemplos:

a) A equação $3x - 6 = 0$ possui como conjunto solução $S = \{2\}$.

b) A equação $x^2 - 5x + 6 = 0$ possui como conjunto verdade $V = \{2, 3\}$.

Teorema fundamental da Álgebra

Toda equação algébrica $P(x) = 0$ de grau $n \geq 1$ admite, pelo menos, uma raiz complexa.

Decomposição em fatores do 1º grau

Com o auxílio do teorema fundamental da Álgebra, mostraremos que um polinômio de grau $n \geq 1$ pode ser decomposto em um produto de fatores do 1º grau.

Vejamos:

Seja a equação polinomial de grau $n \geq 1$:

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$

Pelo teorema fundamental da Álgebra, existe um número x_1, tal que $P(x_1) = 0$. Assim:

$$\boxed{P(x) = (x - x_1) \cdot Q_1(x) = 0} \quad \text{I}$$

Concluímos que $x - x_1 = 0$ ou $Q_1(x) = 0$. Sendo $n > 1$, $Q_1(x)$ não é um polinômio constante. Logo, ele admite uma raiz x_2, tal que:

$$\boxed{Q_1(x) = (x - x_2) \cdot Q_2(x)} \quad \text{II}$$

Substituindo II em I, temos:

$P(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot Q_2(x) = 0$

Procedendo do mesmo modo, podemos escrever:

$P(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \cdot \ldots \cdot (x - x_n) \cdot Q_n$

Sendo Q_n uma constante e a_n o coeficiente de x^n, pela identidade de polinômios temos $Q_n = a_n$. Logo:

$$\boxed{P(x) = a_n(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)}$$

Exemplo:

Considere o polinômio $P(x)$, $2x^3 - 8x^2 - 2x + 8$, cujas raízes são $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ e $x_3 = 4$. Colocando $P(x)$ na forma fatorada, temos:

$P(x) = 2(x + 1) \cdot (x - 1) \cdot (x - 4)$

Exercícios

Resolvidos

1 Colocar o polinômio $P(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$ na forma fatorada, sabendo-se que uma raiz é o número 1.

Sendo 1 raiz do polinômio $P(x)$, temos que $P(1) = 0$. Então, baseando-se no Teorema de D'Alembert, $P(x)$ é divisível por $x - 1$.

Com o auxílio do dispositivo de Briot-Ruffini, temos:

$$\begin{array}{c|ccc:c} 1 & 1 & 4 & 1 & -6 \\ \hline & \underbrace{1 \quad 5 \quad 6}_{\text{coeficientes de } Q_1(x)} & & & \underbrace{0}_{\text{resto}} \end{array}$$

$Q_1(x) = x^2 + 5x + 6$

então,

$P(x) = (x - 1) \cdot Q_1(x)$

$P(x) = (x - 1) \cdot (x^2 + 5x + 6)$

Como $Q_1(x)$ é do 2º grau, podemos resolver a equação $x^2 + 5x + 6 = 0$ e determinar as outras raízes.

$x^2 + 5x + 6 = 0$

$\Delta = 1$

$$x = \frac{-5 \pm 1}{2} = \begin{cases} x' = -2 \\ x'' = -3 \end{cases}$$

Logo, $P(x) = (x - 1) \cdot (x + 2) \cdot (x + 3)$

2 Resolver a equação $P(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$, sabendo-se que 1 e −3 são raízes.

Uma das raízes de P(x) é 1.

$$\begin{array}{c|cccc:c} 1 & 1 & 1 & -7 & -1 & 6 \\ \hline & \underbrace{1 \quad 2 \quad -5 \quad -6} & & & & 0 \end{array}$$

$$x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$$

Como −3 é raiz de P(x), também é raiz de $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$

$$\begin{array}{c|ccc:c} -3 & 1 & 2 & -5 & -6 \\ \hline & \underbrace{1 \quad -1 \quad -2} & & & 0 \end{array}$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

Resolvendo a equação $x^2 - x - 2 = 0$, obtemos as outras raízes.

$x^2 - x - 2 = 0$

$\Delta = 9$

$$x = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} x' = -1 \\ x'' = 2 \end{cases}$$

Portanto, o conjunto solução da equação é:

$S = \{-3, -1, 1, 2\}$

3 Determinar o polinômio de 3º grau, cujas raízes são −1, 3i e −3i, sendo o coeficiente de x^3 igual a 2.

Como $P(x) = a_n(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \cdot ... \cdot (x - x_n)$,

temos $P(x) = 2(x + 1) \cdot (x - 3i) \cdot (x + 3i)$. Então, $P(x) = 2x^3 + 2x^2 + 18x + 18$.

Propostos

1596 Coloque na forma fatorada o polinômio $P(x) = x^3 - 7x^2 + 7x + 15$, sabendo que uma raiz é 5.

1597 Uma raiz de $P(x) = 3x^3 + 9x^2 - 18x - 24$ é 2. Coloque esse polinômio na forma fatorada.

1598 Resolva a equação $x^3 - 7x + 6 = 0$, sabendo que uma das raízes é 2.

1599 Sabendo que −1 e 1 são raízes da equação $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$, determine o conjunto solução.

1600 As raízes de um polinômio de 4º grau são $3, -2, 1, \frac{1}{2}$ e o coeficiente do termo x^4 é 2. Qual é seu polinômio?

1601 Determine o valor de *k* na equação $2x^3 + 6x^2 + 7x + k = 0$, sabendo que -4 é raiz.

1602 Determine *a* e *b* na equação $2x^3 + ax^2 + bx - 2 = 0$, sabendo que $\frac{1}{2}$ e -2 são raízes.

1603 (EEM-SP) Determine todas as raízes da equação $P(x) = 0$, sendo $P(x) = 9x^3 - 36x^2 + 29x - 6$. Sabe-se que esse polinômio é divisível por $x - 3$.

1604 (FGV-SP) Na equação $x^4 + px^3 + px^2 + px + p = 0$, sabendo que 1 é raiz, então:

a) $p = -\frac{1}{4}$
b) $p = 0$ ou $p = 1$
c) $p = 0$ ou $p = -1$
d) $p = \frac{1}{3}$

1605 (FGV-SP) Num polinômio $P(x)$ do 3º grau, o coeficiente de x^3 é 1. Sabendo que $P(1) = 0$; $P(2) = 0$ e $P(3) = 30$, calcule o valor de $P(-1)$.

a) 56
b) 32
c) -3
d) 66
e) n.d.a.

1606 (Fatec-SP) Se $x + 2$ é um fator do polinômio $P(x) = x^3 - 2x + 4$, determine as três raízes de $P(x)$.

Relações de Girard

Relações entre os coeficientes e as raízes de uma equação

1º caso Seja a equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, onde $a \neq 0$, cujas raízes são x_1 e x_2.

Decompondo em fatores do 1º grau:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

$$ax^2 + bx + c = a[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2]$$

Dividindo os membros por *a*:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2$$

Pela identidade de polinômios:

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\[2ex] x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} \end{array}}$$

2º caso Seja a equação de 3º grau $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, onde $a \neq 0$, cujas raízes são x_1, x_2 e x_3.

Decompondo em fatores do 1º grau:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3)$$

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a[x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3]$$

Dividindo ambos os membros por a:

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3$$

Pela identidade de polinômios:

$$\boxed{\begin{aligned} &x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \\ &x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a} \\ &x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a} \end{aligned}}$$

3º caso Se a equação do 4º grau $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, onde $a \neq 0$, cujas raízes são x_1, x_2, x_3 e x_4. Temos, então:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = a(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \cdot (x - x_4)$$

Procedendo de modo análogo ao 1º e 2º casos, concluímos que:

$$\boxed{\begin{aligned} &x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{b}{a} \\ &x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \frac{c}{a} \\ &x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\frac{d}{a} \\ &x_1x_2x_3x_4 = \frac{e}{a} \end{aligned}}$$

Exemplo:

Vamos escrever as relações de Girard para as seguintes equações:

a) $4x^2 - 3x + 1 = 0$

Raízes: x_1 e x_2

Relações de Girard:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{3}{4}$$

$$x_1x_2 = \frac{c}{a} = \frac{1}{4}$$

b) $2x^3 - 7x^2 + x - 2 = 0$

Raízes: x_1, x_2 e x_3

Relações de Girard:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} = \frac{7}{2}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$$

$$x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a} = \frac{2}{2} = 1$$

c) $3x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 6x - 8 = 0$

Raízes: x_1, x_2, x_3 e x_4

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{b}{a} = \frac{2}{3}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \frac{c}{a} = \frac{4}{3}$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\frac{d}{a} = -\frac{6}{3} = - = -2$$

$$x_1x_2x_3x_4 = \frac{e}{a} = -\frac{8}{3}$$

Exercícios

Resolvidos

1 Dada a equação $x^4 - 2x^2 + 3 = 0$, determinar:

a) a soma das raízes

b) o produto das raízes

"Completando" a equação: $x^4 + 0x^3 - 2x^2 + 0x + 3 = 0$

a) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{b}{a} = \frac{0}{1} = 0$

b) $x_1x_2x_3x_4 = \frac{e}{a} = \frac{3}{1} = 3$

2 Determinar *k* na equação $x^2 - 9x + k = 0$, de modo que uma raiz seja o dobro da outra.

Soma das raízes: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 9$ (I)

Produto das raízes: $x_1x_2 = k$ (II)

Uma raiz sendo o dobro da outra: $x_1 = 2x_2$ (III)

Substituindo (III) em (I): $2x_2 + x_2 = 9 \Rightarrow 3x_2 = 9 \Rightarrow x_2 = 3$

Como $x_1 = 2x_2$, então $x_1 = 2 \cdot 3$, isto é, $x_1 = 6$

Substituindo $x_1 = 6$ e $x_2 = 3$ em (II): $x_1 \cdot x_2 = k \Rightarrow 6 \cdot 3 = k \Rightarrow k = 18$

3 (Mack-SP) Se *a*, *b* e *c* são raízes da equação $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ o valor de $\text{sen}\left(\frac{\pi}{a} + \frac{\pi}{b} + \frac{\pi}{c}\right)$ é:

a) $\frac{1}{2}$ X b) $-\frac{1}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) 0

Relações de Girard $\begin{cases} a + b + c = 6 \\ ab + ac + bc = 11 \\ a \cdot b \cdot c = 6 \end{cases}$

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{a} + \frac{\pi}{b} + \frac{\pi}{c}\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi bc + \pi ac + \pi ab}{abc}\right) = \text{sen}\,\pi\left(\frac{bc + ac + ab}{abc}\right) = \text{sen}\,\pi \cdot \frac{11}{6} = -\frac{1}{2}$$

Propostos

1607 Sendo *a*, *b* e *c* as raízes da equação $2x^3 - 4x^2 + 6x - 8 = 0$, determine:

a) $a + b + c$

b) $ab + ac + bc$

c) $a \cdot b \cdot c$

d) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

c) $a^2 + b^2 + c^2$

1608 Determine as raízes da equação $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$, sabendo-se que elas estão em progressão aritmética.
Sugestão: estabelecer $x_1 = a - r$, $x_2 = a$ e $x_3 = a + r$.

1609 (Mack-SP) Um valor de *k*, para o qual uma das raízes da equação $x^2 - 3kx + 5k = 0$ é o dobro da outra, é:

a) $\frac{5}{2}$

b) 2

c) -5

d) -2

e) $-\frac{5}{2}$

1610 (UFMT) Sejam -2 e 3 duas das raízes da equação $2x^3 - x^2 + kx + t = 0$ onde $k, t \in \mathbb{R}$. A terceira raiz é:

a) impossível de ser determinada

b) -1

c) $-\frac{1}{2}$

d) $\frac{1}{2}$

e) 1

1611 (FCC-BA) Se a equação $6x^3 + 5x^2 - 2x - 1 = 0$ admite as raízes reais *a*, *b* e *c*, então:

a) $ab + bc + ac = -\frac{1}{3}$

b) $abc = 1$

c) $abc = -\frac{1}{6}$

d) $a + b + c = -5$

e) $a + b + c = \frac{5}{6}$

1612 (Santa Casa-SP) A soma dos inversos das raízes da equação $2x^3 - 5x^2 + 4x + 6 = 0$, é:

a) $\frac{3}{2}$

b) $\frac{2}{3}$

c) $\frac{1}{3}$

d) $-\frac{2}{3}$

e) $-\frac{3}{2}$

1613 (Med. Rio Preto-SP) Se a equação $x^3 + 2x^2 - x + a = 0$ admite duas raízes opostas, então o produto de todas as suas raízes é:

a) -3

b) -1

c) $\frac{1}{2}$

d) 1

e) 2

1614 (UFPR) Calcule o valor de $\log_{10}\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac}\right)$ sendo *a*, *b* e *c* as raízes da equação $2x^3 - 30x^2 + 15x - 3 = 0$.

Multiplicidade de uma raiz

Um polinômio P(x), na forma fatorada, pode apresentar fatores repetidos.

Exemplos:

a) Seja $P(x) = x^2 - 4x + 4$.

Na forma fatorada, $P(x) = (x - 2) \cdot (x - 2)$.

Observamos dois fatores iguais a $(x - 2)$. Dizemos, então, que 2 é raiz dupla, isto é, de multiplicidade 2.

b) Seja o polinômio $P(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 9$.

Na forma fatorada, $P(x) = (x - 3) \cdot (x - 3) \cdot (x + 1)$.

Observamos dois fatores iguais a$(x - 3)$ e um fator $(x + 1)$. Dizemos que 3 é raiz dupla, ou de multiplicidade 2, e -1 é raiz simples, ou de multiplicidade 1.

Generalizando

Se x' é raiz de multiplicidade m $(m \geqslant 1)$ na equação $P(x) = 0$, então $P(x) = (x - x')^m \cdot Q(x)$, sendo $Q(x') \neq 0$.

Exercícios

Resolvidos

1 Determinar na equação $x(x - 2)^2 \cdot (x - 3)^3 = 0$:

a) o grau da equação

b) o conjunto verdade

a) o grau da equação: $1 + 2 + 3 = 6$

b) $x = 0$ (raiz simples)
$x = 2$ (raiz dupla)
$x = 3$ (raiz tripla)

Portanto a equação possui 6 raízes e o conjunto verdade é $V = \{0, 2, 3\}$.

2 Determinar o conjunto verdade da equação $x^3 + 7x^2 + 8x - 16 = 0$, sendo -4 raiz dupla.

Como -4 é raiz dupla da equação, temos:

$x^3 + 7x^2 + 8x - 16 = (x + 4)^2 \cdot Q(x)$

$x^3 + 7x^2 + 8x - 16 = (x^2 + 8x + 16) \cdot Q(x)$

Fazendo a divisão de $x^3 + 7x^2 + 8x - 16$ por $x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$, encontramos Q(x).

-4	1	7	8	-16
-4	1	3	-4	
	1	-1	0	

Logo, $Q(x) = x - 1$ e a outra raiz é $x = 1$.

$V = \{-4, 1\}$

Propostos

1615 Seja a equação $x(x - 1)^4 \cdot (x + 5)^3 = 0$. Determine:
a) o grau da equação
b) o conjunto verdade

1616 Sabendo que -1 é raiz dupla de $x^3 - 3x^2 - 9x - 5 = 0$, determine o conjunto verdade da equação.

1617 Determine o conjunto verdade da equação $x^3 - 5x^2 + 3x + 9 = 0$, sendo 3 a raiz dupla.

1618 (Fuvest-SP) O número 2 é raiz dupla de $ax^3 + bx + 16$. Determine *a* e *b*.

1619 Determine *m* e *n* de modo que 2 seja raiz tripla da equação $x^3 + mx^2 + nx - 8 = 0$.

1620 Mostre que 1 é raiz de multiplicidade 3, na equação $x^4 - 2x^3 + 2x - 1 = 0$.

1621 Quais valores devem assumir *a*, *b* e *c* para que a equação $x^5 - x^4 + 2ax^2 - bx + c = 0$ admita o número 1 como raiz tripla?

1622 Verifique qual é a multiplicidade da raiz -3 na equação $x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 12x + 18 = 0$.

1623 Determine *m* de modo que a equação $x^3 + mx - 2 = 0$ tenha raiz real dupla.

Raízes complexas

Sendo $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$) raiz da equação $P(x) = 0$ de coeficientes reais, temos que $\bar{z} = a - bi$ também é raiz dessa equação. Vejamos:

$$P(x) = (x - a - bi)\,(x - a + bi) \cdot \overbrace{Q(x)}^{\text{quociente}} + \underbrace{px + q}_{\text{resto}}$$

$$P(x) = (x^2 - 2ax + a^2 + b^2) \cdot Q(x) + px + q$$

Portanto, $P(a + bi) = 0 + p(a + bi) + q = 0$

$pa + q + pbi = 0$

$$\begin{cases} pa + q = 0 & \text{(I)} \\ pbi = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

em (II) $p = 0$.

Substituindo em (I) $q = 0$, logo $R(x) = 0$, portanto $P(x)$ é divisível por $(x - a - bi)$ e por $(x - a + bi)$, de onde concluímos que $a - bi$ é raiz da equação $P(x) = 0$.

Exemplo:

As raízes da equação $x^2 - 4x + 5 = 0$ são dois números complexos conjugados. Veja:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{4 \pm 2i}{2} = \begin{cases} x' = 2 + i \\ x'' = 2 - i \end{cases}$$

Conseqüências:

- Sendo o número complexo $z = a + bi$ $(b \neq 0)$ com multiplicidade m, raiz de uma equação algébrica de coeficientes reais, então o conjugado $\bar{z} = a - bi$ também é raiz dessa equação, com a mesma multiplicidade.
- Uma equação algébrica de coeficientes reais possui um número par de raízes complexas.
- Uma equação algébrica de grau ímpar admite pelo menos uma raiz real.

Exercícios

Resolvidos

1 Determinar o conjunto verdade da equação $x^3 + 3x^2 + x + 3 = 0$, sabendo que $x = i$ é uma de suas raízes.

Sabendo que $x = i$ é uma das raízes da equação, então podemos afirmar que o conjugado $\bar{x} = -i$ também é raiz.

Logo, $P(x) = x^3 + 3x^2 + x + 3$ é divisível por $(x + i) \cdot (x - i)$.

Então, $P(x) = (x + i) \cdot (x - i) \cdot Q(x) + \underbrace{R(x)}_{\text{igual a zero}}$.

Usando o dispositivo de Briot-Ruffini:

i	1	3	1	3
$-i$	1	$3 + i$	$3i$	0
	1	3	0	

$Q(x) = x + 3$

A outra raiz é -3, pois $x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$

$V = \{-3, -i, i\}$

2 Determinar os valores de p e q, de modo que a equação $x^2 + px + q = 0$ admita a raiz complexa $(3 + 2i)$.

Como $(3 + 2i)$ é raiz da equação, temos que $(3 - 2i)$ também é raiz.

Aplicando as relações de Girard:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \Rightarrow (3 + 2i) + (3 - 2i) = -p \Rightarrow p = -6$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow (3 + 2i)(3 - 2i) = q \Rightarrow 9 + 4 = q \Rightarrow q = 13$$

Propostos

1624 Sabendo que $x = -i$ é uma das raízes, da equação $x^3 + 2x^2 + x + 2 = 0$, determine o conjunto verdade.

1625 Qual o conjunto verdade de $x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6 = 0$, sabendo que $x = i$ é uma das raízes dessa equação?

1626 Calcule os valores de m e n, de modo que a equação $x^2 - mx + n = 0$ tenha uma raiz igual a $(3 - 4i)$.

1627 Calcule os valores de *p* e *q*, de modo que a equação $x^3 + px^2 + q = 0$ tenha uma raiz igual a $(1 + i)$.

1628 (Fatec-SP) Seja $i^2 = -1$. A equação $x^3 - 5x^2 + mx + n = 0$ admite a raiz dupla $(a + bi)$ e a raiz simples $(-1 + di)$ onde, *a*, *b* e *d* são números reais. Nestas condições, $(m + n)$ é igual a:

a) 0 b) 9 c) 12 d) −12 e) 6

1629 (ITA-SP) Sabendo-se que $z_1 = i$, z_2 e z_3 são as raízes da equação $z^3 + az^2 + bz + c = 0$, onde *a*, *b* e *c* são reais não-nulos, podemos afirmar que:

a) z_1, z_2 e z_3 são imaginários puros

b) z_2 e z_3 são reais

c) $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = c$

d) $z_1 + z_2 + z_3 = a$

e) pelo menos uma das raízes é real

1630 Dada a equação $x^3 + px + q = 0$ de coeficientes reais e raiz $(1 + 2i)$, determine $(p + q)$.

1631 Um polinômio de coeficientes reais admite como raízes os números $(1 + i)$ e $(-1 + i)$. O grau desse polinômio é, necessariamente:

a) dois b) quatro c) par d) maior que três e) um

Raízes racionais

Seja a equação algébrica $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$ de coeficientes inteiros. Se o número racional $\frac{p}{q}$ ($p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$, com *p* e *q* primos entre si), é raiz dessa equação, então *p* é divisor de a_0 e *q* é divisor de a_n. Vejamos:

Fazendo $x = \frac{p}{q}$ na equação $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$, temos:

$$P\left(\frac{p}{q}\right) = a_n\frac{p^n}{q^n} + a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \ldots + a_1\frac{p}{q} + a_0 = 0$$

Multiplicando os dois membros da igualdade por q^n, temos:

$$a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \ldots + a_1pq^{n-1} + a_0q^n = 0$$

Isolando a_0q^n no 2º membro, vem:

$$a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \ldots + a_1pq^{n-1} = -a_0 \cdot q^n$$

Dividindo os dois membros por $p(p \neq 0)$, temos:

$$a_np^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + \ldots + a_1q^{n-1} = -\frac{a_0q^n}{p}$$

No 1º membro, os números *p*, *q* e *n* e os coeficientes são números inteiros, portanto, o 1º membro representa um número inteiro.

Então, $a_0 \cdot q^n$ é múltiplo de *p* e, como *p* e *q* são números primos entre si, q^n não é múltiplo de *p*. Logo, a_0 é múltiplo de *p*, ou seja, *p* é divisor de a_0.

De um modo análogo, podemos provar que a_n é múltiplo de *q*, isto é, *q* é divisor de a_n.

Exercícios

Resolvido

Resolva a equação cúbica: $x^3 - x^2 - 2x + 2 = 0$.

Inicialmente vamos pesquisar as possíveis raízes racionais da forma $\frac{p}{q}$, para recairmos numa equação do 2º grau.

$p \in \{-2, -1, 1, 2\}$ e $q \in \{-1, 1\} \Rightarrow \frac{p}{q} \in \{-2, 2, -1, 1\}$

$P(-2) \neq 0$, $P(2) \neq 0$, $P(-1) \neq 0$ e $P(1) = 0$, ou seja, 1 é raiz.

Pelo dispositivo de Briot-Ruffini:

$$\begin{array}{c|ccc:c} 1 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ \hline & 1 & 0 & -2 & 0 \end{array}$$

$$\underbrace{1 \quad 0 \quad -2}_{Q(x) = x^2 - 2 = 0}$$

Para obtermos as outras raízes, resolvemos a equação $x^2 - 2 = 0$.

$x = \pm\sqrt{2} \Rightarrow$ então, $V = \left\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1\right\}$.

Propostos

1632 Determine as raízes racionais das equações:

a) $3x^3 - 13x^2 + 19x - 5 = 0$

b) $2x^3 - x^2 + 6x - 3 = 0$

c) $3x^4 - 8x^3 + 3x^2 + 2x = 0$

1633 Resolva as equações:

a) $x^3 - 7x + 6 = 0$

b) $2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = 0$

1634 (FEI-SP) Resolva a equação cúbica: $x^3 - 2x^2 - 3x + 6 = 0$.

1635 Determine as raízes inteiras da equação $x^3 - 8x^2 - 2x - 2 = 0$.

1636 Verifique se a equação $x^4 - 4x + 2 = 0$ possui raízes inteiras.

Ficha-Resumo

Polinômios

Seja o polinômio:

$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2\,x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$

Grau: gr(P) $\rightarrow$ é o maior expoente da variável (x) que possui coeficiente não-nulo.

Valor numérico: para $x = k$, o valor numérico de $P(x)$ é $P(k)$. $P(k) = 0 \Rightarrow k$ é raiz do polinômio.

Identidade de Polinômios

Dados os polinômios $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$

e

$Q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n$

$$\boxed{P(x) \equiv Q(x) \Leftrightarrow a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ \ldots,\ a_n = b_n}$$

Polinômio identicamente nulo

Se $a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$, temos que $P(x) \equiv 0$.

Adição e Subtração

Adicionar ou subtrair algebricamente os coeficientes dos termos de mesmo grau.

Multiplicação

Multiplicar cada termo de um dos polinômios por todos os termos do outro polinômio.

Polinômios

Divisão de Polinômios

Chave

$$\begin{array}{l|l} D(x) & d(x) \\ \hline R(x) & Q(x) \end{array}$$

Teorema do resto

O resto da divisão de P(x) por (x − a) é P(a).

Teorema D'Alembert

A divisão de P(x) por (x − a) é exata se, e somente se, P(a) = 0.

Dispositivo prático de Briot-Ruffini

Permite encontrar o quociente Q(x) e o resto R(x) na divisão de P(x) por x − a.

raiz do binômio	coeficientes de P(x)	
	coeficientes de Q(x)	→ R(x)

Equações algébricas

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$

Teorema fundamental da álgebra

Toda equação algébrica P(x) = 0, de grau $n \geqslant 1$, admite pelo menos uma raiz complexa.

Decomposição

$P(x) = a_n(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$, onde $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ são as raízes.

Relações de Girard

Equação de 2º grau

$ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} \end{array}}$$

Equação de 3º grau

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, com $a \neq 0$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -\frac{b}{a} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 &= \frac{c}{a} \\ x_1x_2x_3 &= -\frac{d}{a} \end{aligned}}$$

Equação de 4º grau

$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, com $a \neq 0$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= -\frac{b}{a} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 &= \frac{c}{a} \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 &= -\frac{d}{a} \\ x_1x_2x_3x_4 &= \frac{e}{a} \end{aligned}}$$

Multiplicidade de uma raiz

$P(x) = (x - x')^m \cdot Q(x)$ e $Q(x') \neq 0$ x' é raiz de $P(x)$, com multiplicidade m.

Raízes complexas

Se $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$) é raiz de uma equação algébrica de coeficientes reais, então $\bar{z} = a - bi$ também é raiz dessa equação.

- Uma equação algébrica de coeficientes reais possui um número par de raízes complexas.
- Uma equação algébrica de grau ímpar admite pelo menos uma raiz real.

Raízes racionais

Equação algébrica:

$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$ (coeficientes inteiros)

Se o número racional $\frac{p}{q}$ ($p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$, com p e q primos entre si) é raiz dessa equação, então p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n.

Exercícios

Complementares

1637 Determine o valor de *k*, de modo que o polinômio
$P(x) = (k^2 - 25)x^3 - x^2 - 2x^2 - 2x + 3$
tenha grau 2.

1638 Dado o polinômio $P(x) = 4x^2 - 8x - 3k$, determine o valor de *k*, de forma que $P(2) = 4$.

1639 Dado o polinômio $P(x) = ax^3 - bx^2 + 1$, determine os valores de *a* e *b*, sabendo-se que $P(2) = 1$ e $P(3) = 10$.

1640 (EEM-SP) Dado o polinômio
$x^3 + (2 + m)x^2 + (3 + 2m)x + 3m$, calcule o seu valor numérico, se $x = m$.

1641 Determine os valores de *a*, *b* e *c* para que o polinômio
$P(x) = (2a - 3)x^2 + (b - 4)x + (7c - 1)$
seja identicamente nulo.

1642 Calcule *a*, *b* e *c*, de modo que
$P(x) = (a - b + c)x^2 + (b + c)x + c + 2$
seja identicamente nulo.

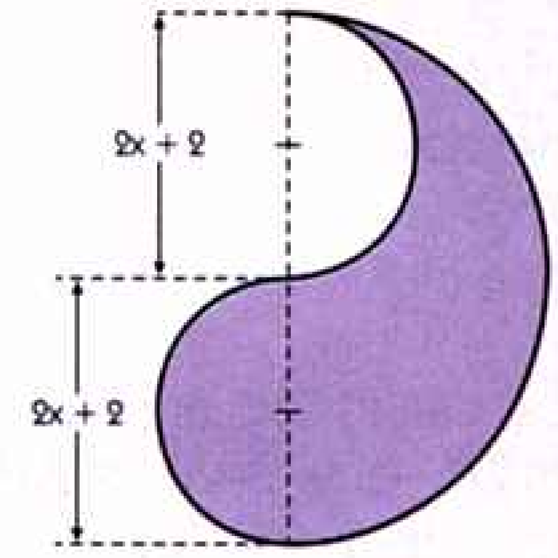
1643 Calcule os valores de *m* e *n* para que os polinômios $P(x) = (3 - m)x^2 - 6x + 4$ e $Q(x) = 8x^2 + (5n - 4)x + 4$ sejam idênticos.

1644 (UEL-PR) Se o polinômio
$f = 2x^2 - 12\sqrt{2}\,x + 4k$ é um quadrado perfeito, então a constante real *k* é um número:

a) quadrado perfeito
b) cubo perfeito
c) irracional
d) divisível por 8
e) primo

1645 Determine *p* e *q* sabendo-se que os polinômios
$P(x) = px^2 - 12x + q$ e $Q(x) = (2x - 3)^2$
são idênticos.

1646 O perímetro e a área da figura representada são expressos, respectivamente, por:



a) $4\pi x + 4\pi$ e $(5x^2 + 10x + 5)\pi$
b) $6\pi x + 6\pi$ e $4\pi x^2 + 8\pi x + 4\pi$
c) πx^2 e $6\pi x$
d) $4\pi x + 4\pi$ e $(2x^2 + 4x + 2)\pi$
e) $(\pi x + \pi)$ e $(x^2 + \pi)$

1647 (Mack-SP) O resto da divisão de
$P(x) = 4x^3 + 2x^2 - mx + 5$ por $x + 2$ é 1.
Determine *m*.

1648 (FEI-EEM-SP) Determine o valor de *k* para que a divisão $(x^3 + kx^2 + 3x + 4) : (x - 1)$ seja exata.

1649 Obter o quociente e o resto da divisão do polinômio $P(x) = 2x^3 + x^2 - 8x + 10$ pelo binômio $2x - 3$.

1650 (Mack-SP)

$$\begin{array}{r|l} P(x) & x - 2 \\ \hline 4 & Q(x) \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} Q(x) & x - 6 \\ \hline 1 & Q_1(x) \end{array}$$

Considerando as divisões de polinômios acima, podemos afirmar que o resto da divisão de $P(x)$ por $x^2 - 8x + 12$ é:

a) $3x - 2$
b) $x + 1$
c) $2x + 2$
d) $2x + 1$
e) $x + 2$

1651 (Mack-SP) Um polinômio $P(x)$ foi dividido por $x - a$. Usando-se o dispositivo de Briot-Ruffini, obteve-se o quadro a seguir:

$$\begin{array}{c|ccccc} a & 3 & -4 & 5 & d & e \\ \hline & b & -10 & c & 24 & 40 \end{array}$$

Determine $P(x)$.

1652 (UFBA) Um aluno *x* chegou atrasado à aula e encontrou, no quadro de giz, o esquema

	1	−5	−2	24
...	1	−7	...	0

para a divisão do polinômio $y^3 - 5y^2 - 2y + 24$ pelo binômio do primeiro grau y + ... tendo sido apagados os números onde há reticências, calcule o maior deles.

1653 (Santa Casa-SP) Sabe-se que a equação $4x^3 - 12x^2 - x + k = 0$, onde $k \in \mathbb{R}$, admite duas raízes opostas. O produto das raízes dessa equação é:

a) −12 c) $-\frac{1}{4}$ e) 12

b) $-\frac{3}{4}$ d) $\frac{3}{4}$

1654 (Cesgranrio-RJ) Um dos fatores de $P(x) = 2x^3 - 11x^2 + 17x - 6$ é $2x - 1$. A maior raiz de P(x) é:

a) 1 c) 3 e) 6
b) 2 d) 4

1655 (Fatec-SP) O polinômio: $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

a) tem uma raiz real com multiplicidade 3
b) tem três raízes reais distintas entre si
c) tem duas raízes complexas e não reais
d) tem exatamente uma raiz complexa e não real
e) não tem raízes reais

1656 (UECE) Se o polinômio $P(x) = x^3 - K \cdot x^2 + K \cdot x - 1$ é divisível por $(x - 1)^2$, então *K* é igual a:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

1657 (PUC-SP) Sabe-se que os restos das divisões do polinômios $f = 2X^3 + 3X^2 + kX - 2$ por $X + 1$ e $X - 1$ são iguais. Determine o resto da divisão de *f* por $(X + 1) \cdot (X - 1)$.

1658 (Cesesp-PE) Seja p(x) o polinômio definido por $p(x) = \sum_{i=1}^{100} ix^i$ assinale a alternativa que corresponde ao resto da divisão de p(x) por $x - 1$.

a) i^2 c) 0 e) 5 050
b) i! d) 1

1659 (Mack-SP) Na equação $x^3 - 5x^2 + 5x - 2 = 0$, de raízes *a*, *b* e *c*, o produto $(a + 2)(b + 2)(c + 2)$ vale:

a) 45 c) 35 e) 25
b) 40 d) 30

1660 (EEM-SP) Dado o polinômio $P(x) = x^3 + 6x^2 + 6x + 5$

1) calcular $P(-5)$;
2) resolver a equação $P(x) = 0$.

1661 (FEI-SP) Calcule *a* e *b* para que a igualdade

$$\frac{a}{x-3} + \frac{b}{x+1} = \frac{3x-5}{x^2-2x-3}$$

seja verificada para todo $x \in \mathbb{R} - \{-1, 3\}$

1662 (ITA-SP) Se P(x) é um polinômio do 5º grau que satisfaz as condições $1 = P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5)$ e $P(6) = 0$, então temos:

a) $P(0) = 4$ d) $P(0) = 2$
b) $P(0) = 3$ e) n.d.a.
c) $P(0) = 9$

1663 O polinômio $P(x) = x^3 - x^2 + x + a$ é divisível por $x - 1$. Ache todas as raízes complexas de P(x).

1664 (Vunesp) Os coeficientes do polinômio $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 3$ são números inteiros. Supondo que f(x) tenha duas raízes racionais positivas distintas,

a) encontre todas as raízes desse polinômio
b) determine os valores de *a* e *b*

1665 (Santa Casa-SP) A equação $x^3 - 2x^2 + x - 1 = 0$ admite raízes reais?

a) não
b) sim, situada no intervalo]0, 1[
c) sim, situada no intervalo]1, 2[
d) sim, situada no intervalo]−1, 0[
e) sim, situada no intervalo]−2, −1[

1666 (FGV-SP) Considere a seguinte equação polinomial:

$$x^3 - 3x^2 - k \cdot x + 12 = 0$$

a) Determine *k* de modo que haja duas raízes opostas.
b) Determine *k* de modo que 1 seja raiz da equação. Nesse caso, determine também as outras raízes.

Saiba um pouco mais

Matemática das películas de sabão – I

Manfredo Perdigão do Carmo
Pesquisador Titular do Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq

É grande o número de pessoas que tiveram ocasião de provocar, ou simplesmente observar, o aparecimento de uma bolha de sabão. Bem menor é o número daqueles que realizaram experiências mais cuidadosas com películas de sabão. Considere, por exemplo, a seguinte experiência: solde as extremidades de um pedaço de arame de modo a formar um contorno fechado qualquer, e mergulhe o contorno assim formado em uma solução de sabão, retirando-o cuidadosamente. Em geral, aparece uma película muito fina de líquido com a forma de uma superfície limitada pelo arame. Tal película está em equilíbrio sob a ação de tensão superficial do líquido e, além disto, seu equilíbrio é estável; isto quer dizer que, para qualquer pequena perturbação, a tensão superficial força a película a voltar à sua posição inicial.

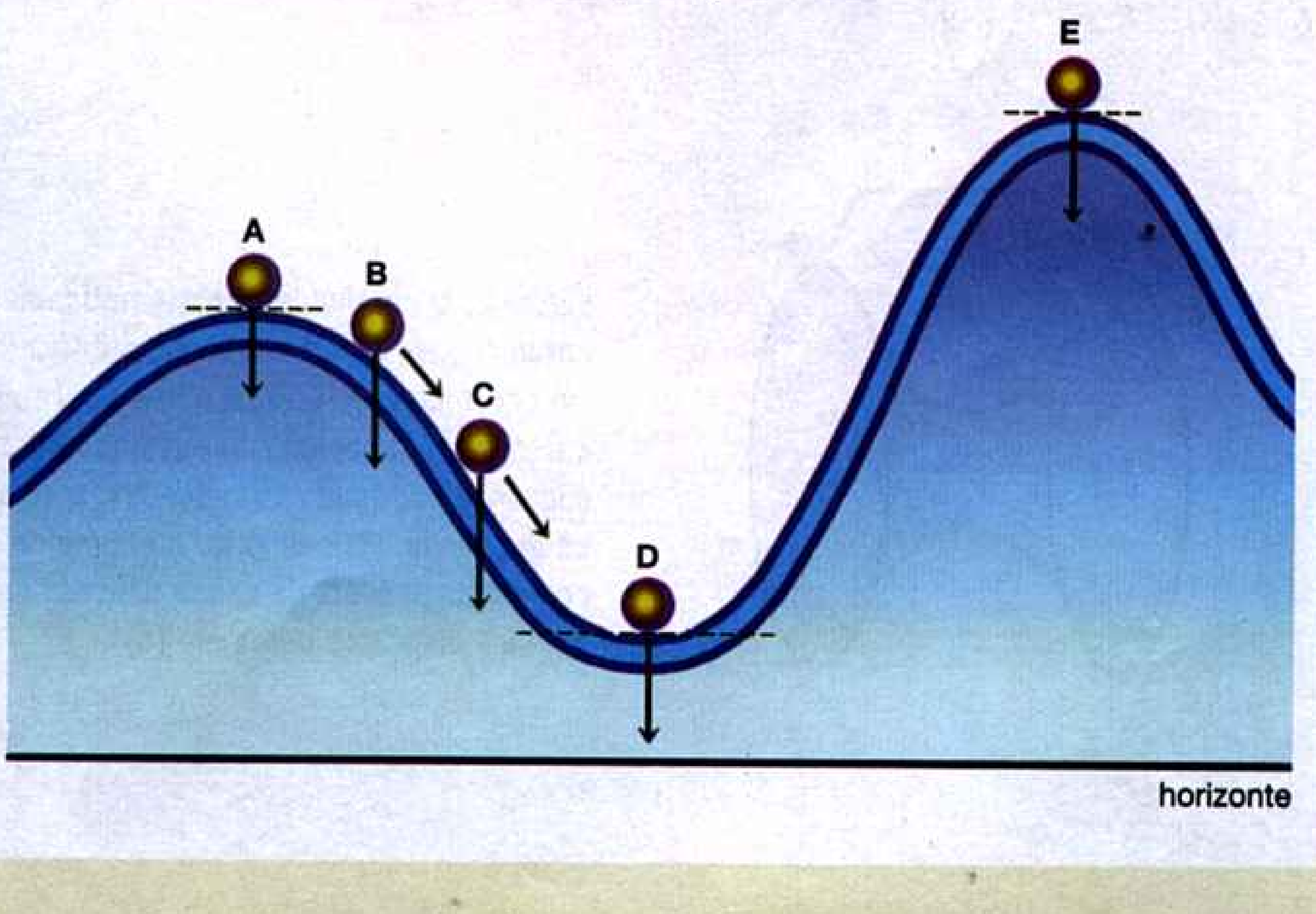


Figura 1: Posições de uma bola que está sujeita a permanecer na curva da figura (por meio de um trilho, digamos) e sobre a qual a única força que atua é a da gravidade. As posições *A*, *D* e *E* são posições de equilíbrio; delas, apenas *D* é uma posição de equilíbrio estável.

Uma idéia intuitiva da noção de equilíbrio estável pode ser obtida a partir da seguinte situação: considere as várias posições de uma bola pequena que se move ao longo de uma curva, unicamente sob a ação da gravidade (figura 1). Os pontos A, D e E da figura 1 são *pontos de equilíbrio*, isto é: sem outra influência além da ação da gravidade, as bolas permaneceriam nestes pontos. Entretanto, apenas o ponto D é uma posição de equilíbrio estável (para pequenas perturbações, a ação da gravidade força a bola deslocada a voltar à posição inicial D). A situação da película de que falamos é inteiramente análoga, tomando-se películas de sabão no lugar de bolas e a tensão superficial no lugar da gravidade.

Fonte: extraído de CARMO, M. P. "Matemática das películas de sabão" in Revista *Ciência Hoje*. Rio de Janeiro, SBPC, v. 2, n. 11, pp. 25 e 26, março/abril/1984.

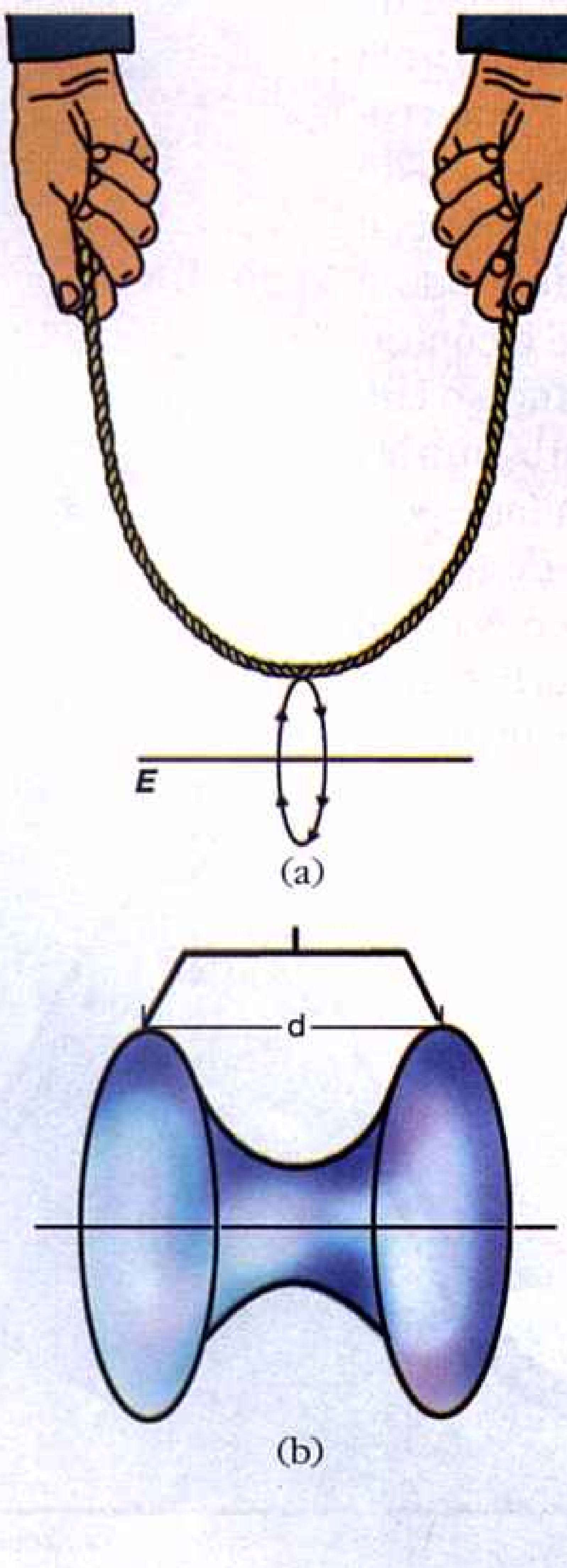


Figura 2: ***O catenóide*** **— Matematicamente, o catenóide (*b*) é obtido girando a curva indicada em (*a*) em torno do eixo *E*. A curva em (*a*), chamada *catenária*, é a posição de equilíbrio de uma corda suspensa por duas extremidades, e sujeita à ação da gravidade. Fisicamente, o catenóide ocorre como uma película de sabão limitada por dois círculos dispostos como em (*b*).**