

Matemática

M17 – Sólidos Geométricos

p. 80

1 (MACK-SP) Determine o número de vértices de um poliedro que tem três faces triangulares, uma face quadrangular, uma pentagonal e duas hexagonais. 10

Resolução:

$$F = 3 + 1 + 1 + 2 \therefore F = 7$$

$$A = \frac{3 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 6}{2} \Rightarrow A = \frac{30}{2} \therefore A = 15$$

$$V - A + F = 2 \Rightarrow V - 15 + 7 = 2 \therefore V = 10$$

2 (UnB-DF) Qual o número de lados das faces de um poliedro regular com 20 vértices e 30 arestas?

5 lados

Resolução:

$$V - A + F = 2 \Rightarrow 20 - 30 + F = 2 \therefore F = 12$$

$$A = \frac{F \cdot n}{2} \Rightarrow 30 = \frac{12 \cdot n}{2} \therefore n = 5 \text{ lados}$$

Em questões como a 3, a resposta é dada pela soma dos números que identificam as alternativas corretas.

3 (UFSC) Dado o poliedro regular, é correto afirmar:

(01) É um tetraedro.

(08) Obedece à relação de Euler.

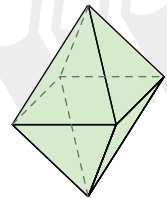
(02) É um octaedro.

(16) Suas faces são triângulos equiláteros.

(04) Todas as arestas são iguais.

(32) Tem 12 arestas.

Resposta: 62



Resolução:

(01) Falsa, pois o poliedro tem oito faces.

São corretas as afirmativas 2, 4, 8, 16 e 32, somando 62.

4 (Faap-SP) Num poliedro convexo, o número de arestas excede o número de vértices em 6 unidades. Calcule o número de faces. 8 faces

Resolução:

$$V - A + F = 2$$

$$A = V + 6$$

$$V - (V + 6) + F = 2 \Rightarrow V - V - 6 + F = 2 \Rightarrow F = 8$$

O poliedro possui 8 faces.

5 (PUC-RS) Um poliedro convexo tem cinco faces triangulares e três pentagonais. O número de arestas e o número de vértices desse poliedro são, respectivamente:

a) 30 e 40

c) 30 e 8

e) 15 e 9

b) 30 e 24

d) 15 e 25

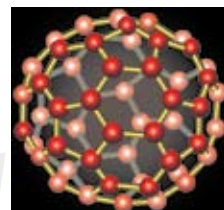
Resolução:

$$\left. \begin{array}{l} 5 \text{ faces triangulares} \\ 3 \text{ faces pentagonais} \end{array} \right\} F = 5 + 3 = 8$$

$$A = \frac{5 \cdot 3 + 3 \cdot 5}{2} = 15$$

$$V - A + F = 2 \Rightarrow V - 15 + 8 = 2 \Rightarrow V = 9$$

6 Numa publicação científica de 1985, foi divulgada a descoberta de uma molécula tridimensional de carbono, na qual os átomos ocupam os vértices de um poliedro convexo cujas faces são 12 pentágonos e 20 hexágonos regulares, como numa bola de futebol. Em homenagem ao arquiteto norte-americano Buckminster Fuller, a molécula foi denominada fulereno. Determine o número de átomos de carbono nessa molécula e o número de ligações entre eles. **A molécula possui 60 átomos e 90 ligações.**



Resolução:

Sendo V o número de átomos e A o número de ligações entre eles:

$$\text{face pentagonal: } 12 \cdot 5 = 60 \text{ ligações}$$

$$\text{face hexagonal: } 20 \cdot 6 = 120 \text{ ligações}$$

Como cada aresta (ligação) foi contada duas vezes: $2A = 60 + 120 \therefore A = 90$

O número de átomos (vértices) pode ser obtido pela relação de Euler.

$$V - A + F = 2 \Rightarrow V - 90 + 32 = 2 \therefore V = 60$$

A molécula possui 60 átomos e 90 ligações.

7 (UFPEL-RS) Quando João entrou na sala do professor, fez uma observação sobre a beleza do objeto de vidro que estava sobre os papéis do mestre. Este, não resistindo à tentação de propor um problema, característica do matemático, apresentou ao aluno a seguinte questão:

— Calcule o número de arestas e de vértices deste peso de papel, que é um poliedro convexo de 6 (seis) faces quadrangulares e 2 (duas) hexagonais.

Responda à questão proposta no texto acima. **18 arestas e 12 vértices**

Resolução:

$$F = 6 + 2 = 8$$

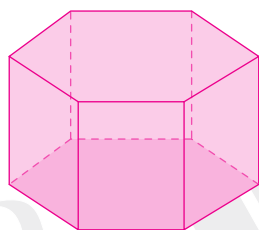
$$A = \frac{6 \cdot 4 + 2 \cdot 6}{2} = 18$$

$$V - A + F = 2 \Rightarrow V - 18 + 8 = 2 \Rightarrow V = 12$$

O poliedro tem 18 arestas e 12 vértices.

- 8** Um poliedro convexo tem como faces 2 hexágonos regulares e 6 quadrados. Sabendo que todas as arestas desse poliedro medem a , determine a área total da superfície desse poliedro. $3a^2(2 + \sqrt{3})$

Resolução:



$$S_{\text{hexágono}} = 6 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = S_b$$

$$S_{\text{quadrado}} = a^2 \therefore S_{\ell} = 6a^2$$

$$S_t = S_{\ell} + 2S_b$$

$$S_t = 6a^2 + 2 \cdot 6 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = 3a^2(2 + \sqrt{3})$$

- 9** Sabendo que as arestas medem 4 cm cada uma, determine a área total da superfície dos seguintes poliedros:

a) hexaedro regular 96 cm^2

b) icosaedro regular $80\sqrt{3} \text{ cm}^2$

Resolução:

a) o hexaedro possui 6 faces quadradas $\therefore S_t = 6 \cdot 4^2 = 96 \text{ cm}^2$

b) o icosaedro possui 20 faces triangulares $\therefore S_t = 20 \cdot \frac{4^2 \sqrt{3}}{4} = 80\sqrt{3} \text{ cm}^2$

- 10** (Fuvest-SP) O número de faces triangulares de uma pirâmide é 11. Pode-se, então, afirmar que essa pirâmide possui:

a) 33 vértices e 22 arestas

c) 22 vértices e 11 arestas

(e) 12 vértices e 22 arestas

b) 12 vértices e 11 arestas

d) 11 vértices e 22 arestas

Resolução:

Se a pirâmide possui 11 faces triangulares, então sua base é um polígono de 11 lados. Logo, $F = 12$ e $V = 12$.

$$V - A + F = 2 \Rightarrow 12 - A + 12 = 2 \therefore A = 22$$

- 11** (Cesgranrio-RJ) Um poliedro convexo é formado por quatro faces triangulares, duas faces quadrangulares e uma face hexagonal. O número de vértices desse poliedro é:

a) 6

(c) 8

e) 10

b) 7

d) 9

Resolução:

$$F = 4 + 2 + 1 \therefore F = 7$$

$$A = \frac{4 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 6}{2} \therefore A = 13$$

$$V - A + F = 2 \Rightarrow V - 13 + 7 = 2 \therefore V = 8$$

12 (PUC-PR) Um poliedro convexo tem sete faces. De um dos seus vértices partem seis arestas e de cada um dos vértices restantes partem três arestas. Quantas arestas tem esse poliedro?

- a) 8
b) 10

- c) 12**
d) 14

- e) 16

Resolução:

$$\left. \begin{aligned} F &= 7 \\ V - A + F &= 2 \end{aligned} \right\} V = A - 5 \quad (1)$$

$$A = \frac{1 \cdot 6 + (V - 1)3}{2} \Rightarrow 2A = 3V + 3 \quad (2)$$

De (1) e (2), temos:

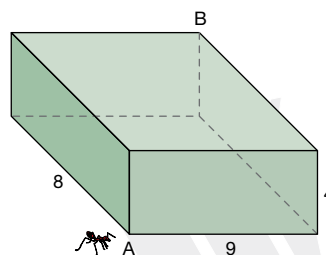
$$2A = 3(A - 5) + 3$$

$$2A = 3A - 15 + 3$$

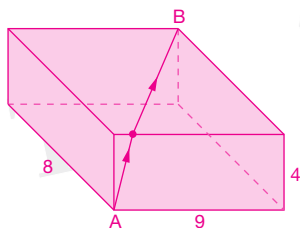
$$-A = -12 \therefore A = 12$$

p. 94

13 (UFPE) Uma formiga (ignore seu tamanho) encontra-se no vértice *A* do paralelepípedo reto ilustrado ao lado. Qual a menor distância que ela precisa percorrer para chegar ao vértice *B* (caminhando sobre a superfície do paralelepípedo)? **15**



Resolução:

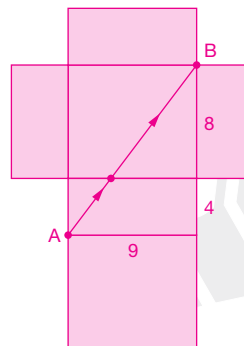


A menor distância entre *A* e *B* é quando traçamos um segmento no plano, ou seja, planificando a caixa.

$$AB^2 = 12^2 + 9^2$$

$$AB^2 = 225$$

$$AB = 15$$



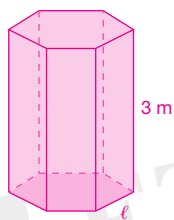
14 (UFPA) Num prisma regular de base hexagonal, a área lateral mede 36 m^2 e a altura é 3 m . A aresta da base é:

- a) 2 m**
b) 4 m

- c) 6 m
d) 8 m

- e) 10 m

Resolução:



$$S_{\ell} = 36 \text{ m}^2$$

$$S_{\ell} = 6 \cdot \ell \cdot h$$

$$36 = 6 \cdot \ell \cdot 3$$

$$\ell = 2 \text{ m}$$

15 (UFC) As dimensões de um paralelepípedo retângulo são proporcionais a 3, 5 e 7. Sabendo que a diagonal mede $4\sqrt{83}$ cm, calcule o volume do paralelepípedo. **6 720 cm³**

Resolução:

$$V = a \cdot b \cdot c$$

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \frac{c}{7} = k \Rightarrow a = 3k; b = 5k \text{ e } c = 7k$$

$$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$4\sqrt{83} = \sqrt{(3k)^2 + (5k)^2 + (7k)^2} \Rightarrow 4\sqrt{83} = \sqrt{83k^2} \Rightarrow 4\sqrt{83} = k\sqrt{83} \Rightarrow k = 4$$

$$a = 12 \text{ cm}; b = 20 \text{ cm e } c = 28 \text{ cm}$$

$$V = 12 \cdot 20 \cdot 28 \Rightarrow V = 6 720 \text{ cm}^3$$

16 (FGV-SP) Um arquiteto tem dois projetos para construção de uma piscina retangular com 1 m de profundidade:

Projeto 1: dimensões do retângulo: 16 m $\times$ 25 m

Projeto 2: dimensões do retângulo: 10 m $\times$ 40 m

Sabendo que as paredes laterais e o fundo são revestidos de azulejos cujo preço é R\$ 10,00 o metro quadrado:

a) qual a despesa com azulejos em cada projeto? **1: R\$ 4 820,00 e 2: R\$ 5 000,00**

b) se a área do retângulo for de 400 m² e x uma de suas dimensões, expresse o custo dos azulejos em função de x .

$$c = 4 000 + 20x + \frac{8 000}{x}$$

Resolução:

$$\text{a) projeto 1: } 2(16 \cdot 1 + 25 \cdot 1) + 16 \cdot 25 = 482 \text{ m}^2$$

$$\text{despesa 1} = 482 \cdot 10 \therefore \text{despesa 1} = \text{R\$ } 4 820,00$$

$$\text{projeto 2: } 2(10 \cdot 1 + 40 \cdot 1) + 10 \cdot 40 = 500 \text{ m}^2$$

$$\text{despesa 2} = 500 \cdot 10 \therefore \text{despesa 2} = \text{R\$ } 5 000,00$$

$$\text{b) } x \cdot y = 400 \Rightarrow y = \frac{400}{x}$$

$$S_t = 400 + 2\left(x \cdot 1 + \frac{400}{x} \cdot 1\right) = 400 + 2x + \frac{800}{x}$$

$$\text{custo} = \left(400 + 2x + \frac{800}{x}\right) \cdot 10 = 4 000 + 20x + \frac{8 000}{x}$$

p. 95

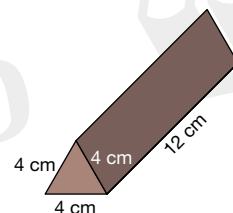
17 Uma barra de chocolate tem o formato da figura ao lado. Calcule o volume de chocolate contido nessa barra. (Use $\sqrt{3} = 1,73$.) **83,04 cm³**

Resolução:

$$V = S_b \cdot h$$

$$S_b = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{2} \therefore S_b = 4\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$V = 4\sqrt{3} \cdot 12 \therefore V = 83,04 \text{ cm}^3$$



- 18** (UEPG-PR) As medidas internas de uma caixa-d'água em forma de paralelepípedo retângulo são: 1,2 m, 1 m e 0,7 m. Sua capacidade é de:
- a) 8 400 ℓ c) 840 ℓ e) n.d.a.
- b) 84 ℓ d) 8,4 ℓ

Resolução:

$$1,2 \text{ m} = 12 \text{ dm}$$

$$1 \text{ m} = 10 \text{ dm}$$

$$0,7 \text{ m} = 7 \text{ dm}$$

$$V = a \cdot b \cdot c = 12 \cdot 10 \cdot 7 = 840$$

$$V = 840 \text{ dm}^3 = 840 \text{ l}$$

- 19** (Unesp-SP) A área da superfície da Terra é estimada em $510\,000\,000\text{ km}^2$. Por outro lado, estima-se que, se todo o vapor de água da atmosfera terrestre fosse condensado, o volume de líquido resultante seria de $13\,000\text{ km}^3$. Imaginando que toda essa água fosse colocada no interior de um paralelepípedo retângulo, cuja área da base fosse a mesma da superfície da Terra, a medida que mais se aproxima da altura que o nível da água alcançaria é:
- a) 2,54 mm c) 25,4 cm e) 0,254 km
b) 2,54 cm d) 2,54 m

Resolução:

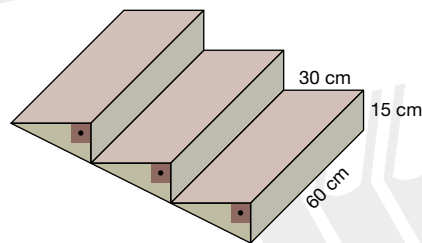
$$S = 510\,000\,000 \text{ km}^2$$

$$V = 13\,000 \text{ km}^3$$

$$V = S_b \cdot h$$

$$13\,000 = 510\,000\,000 \cdot h \Rightarrow h \simeq 0,0000254 \text{ km} \Rightarrow h \simeq 2,54 \text{ cm}$$

- 20** (UnB-DF) A figura ao lado ilustra alguns degraus de uma escada de concreto. Cada degrau é um prisma triangular reto de dimensões 15 cm, 30 cm e 60 cm. Se a escada tem 20 degraus, qual o volume (em decímetros cúbicos) do concreto usado para construir a escada? **270 dm³**



Resolução:

Volume de cada degrau = V_1

$$V_1 = S_b \cdot h$$

$$S_b = \frac{30 \cdot 15}{2} \therefore S_b = 225 \text{ cm}^2$$

$$V_1 = 225 \cdot 60 \therefore V_1 = 13500 \text{ cm}^3 = 13,5 \text{ dm}^3$$

Volume de concreto usado = V

$$V = 20 \cdot 13,5 \therefore V = 270 \text{ dm}^3$$

- 21** (UFPel-RS) De um reservatório de forma cúbica cheio de água foram retirados 2ℓ dessa água. Verificando-se que houve uma variação de 5 cm no nível do líquido, calcule quanto mede a aresta interna da caixa-reservatório. **20 cm**

Resolução:

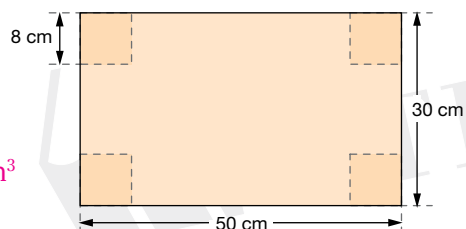
$$5 \text{ cm} = 0,5 \text{ dm}$$

$$V = x \cdot x \cdot 0,5 = 2 \Rightarrow x^2 = 4 \therefore x = 2 \text{ dm}$$

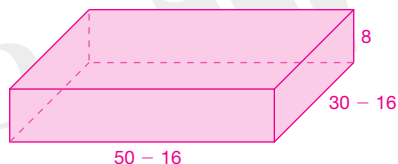
$x = 20 \text{ cm}$

22 (FCMSC-SP) Dispondo de uma folha de cartolina medindo 50 cm de comprimento por 30 cm de largura, pode-se construir uma caixa aberta cortando-se um quadrado de 8 cm de lado em cada canto da folha (ver figura ao lado).

Qual será o volume dessa caixa, em centímetros cúbicos? **3 808 cm³**



Resolução:



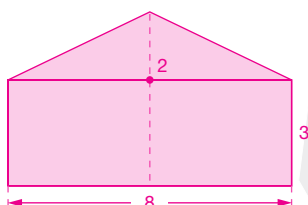
O volume da caixa

$$V = 34 \cdot 14 \cdot 8$$

$$V = 3 808 \text{ cm}^3$$

23 (Vunesp-SP) Calcule o volume de ar contido em um galpão com a forma e as dimensões dadas pela figura. **384 m³**

Resolução:

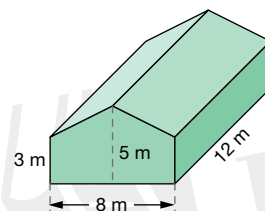


$$S_b = 3 \cdot 8 + \frac{8 \cdot 2}{2}$$

$$S_b = 32 \text{ m}^2$$

$$V = S_b \cdot h = 32 \cdot 12$$

$$V = 384 \text{ m}^3$$



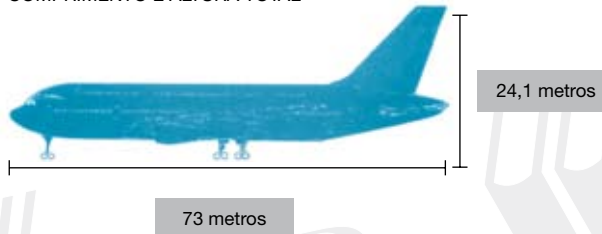
24 (UENF-RJ) Na construção de um hangar, com a forma de um paralelepípedo retângulo, que possa abrigar um *Airbus*, foram consideradas as medidas apresentadas abaixo.

Airbus A3XX-100

ENVERGADURA



COMPRIMENTO E ALTURA TOTAL



Calcule o volume mínimo desse hangar. **140 392,14 m³**

Resolução:

$$a = 79,8 \text{ m}$$

$$b = 73 \text{ m}$$

$$c = 24,1 \text{ m}$$

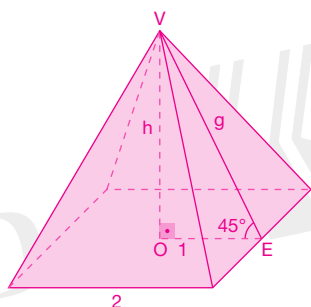
$$V_{\min} = a \cdot b \cdot c$$

$$V_{\min} = 79,8 \cdot 73 \cdot 24,1 \therefore V_{\min} = 140 392,14 \text{ m}^3$$

(Adaptado de *Veja*, 14/6/2000)

25 (ITA-SP) Uma pirâmide regular tem por base um quadrado de lado 2 cm. Sabe-se que as faces formam com a base ângulos de 45° . Calcular a razão entre a área da base e a área lateral. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Resolução:



$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{h}{1} \therefore h = 1 \text{ cm}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{1}{g} \therefore g = \sqrt{2} \text{ cm}$$

$$S_b = 2^2 \therefore S_b = 4 \text{ cm}^2$$

$$S_\ell = 4 \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{2} \therefore S_\ell = 4\sqrt{2} \text{ cm}^2$$

$$\frac{S_b}{S_\ell} = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

26 (PUC-BA) A aresta de um tetraedro regular mede 4 cm. Sua área total, em centímetros quadrados, é:

a) $2\sqrt{3}$

c) $8\sqrt{3}$

e) $32\sqrt{3}$

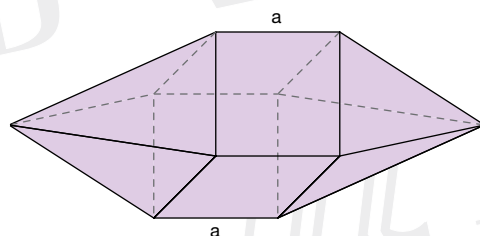
b) $4\sqrt{3}$

(d) $16\sqrt{3}$

Resolução:

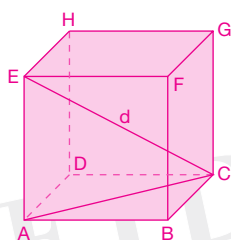
$$S_t = a^2 \sqrt{3} = 4^2 \sqrt{3} \therefore S_t = 16\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

27 (UFOP-MG) A figura ao lado mostra duas pirâmides regulares cujas bases coincidem com duas faces de um cubo de aresta a . Sabe-se que as alturas das pirâmides são iguais à diagonal do cubo. Determine a área total do sólido formado pelas pirâmides e o cubo. $2a^2(\sqrt{13} + 2)$



Resolução:

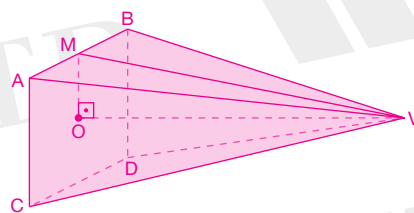
Cálculo da diagonal do cubo:



$$\triangle EAC: EC^2 = EA^2 + AC^2$$

$$d^2 = a^2 + 2a^2 = 3a^2$$

$$d = a\sqrt{3}$$



$$\begin{cases} OV = d \\ OM = \frac{a}{2} \end{cases}$$

$$\triangle OMV: MV^2 = OM^2 + OV^2 \Rightarrow g^2 = \frac{a^2}{4} + 3a^2 \therefore g = \frac{a\sqrt{13}}{2}$$

$$\triangle ABV: S_{\text{pirâmide}} = \frac{a \cdot g}{2} = \frac{a^2 \sqrt{13}}{4}$$

$$S_{\text{total}} = 8S_{\text{pirâmide}} + 4S_{\text{cubo}} \Rightarrow S_{\text{total}} = \frac{8a^2 \sqrt{13}}{4} + 4a^2 = 2a^2 \cdot (\sqrt{13} + 2)$$

28 (Unifor-CE) A aresta da base de uma pirâmide regular hexagonal mede 4 cm. Qual é o volume dessa pirâmide, se sua altura mede $6\sqrt{3}$ cm?

a) 432 cm^3

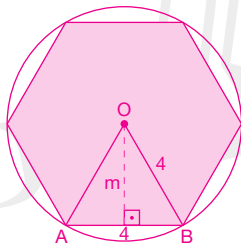
c) 286 cm^3

e) 132 cm^3

b) 392 cm^3

d) 144 cm^3

Resolução:



No $\triangle AOB$ da base:

$$m = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

$$S_{\triangle} = \frac{4 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

$$S_b = 6 \cdot S_{\triangle} = 6 \cdot 4\sqrt{3} \Rightarrow S_b = 24\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

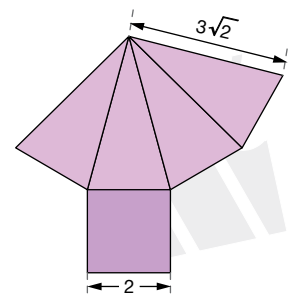
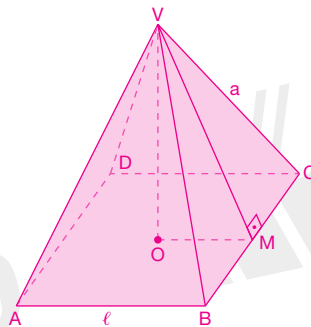
$$V = \frac{1}{3} S_b \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3} 24\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3} \Rightarrow V = 144 \text{ cm}^3$$

p. 96

29 (FUC-MT) Determine o volume de uma pirâmide cuja planificação é: $\frac{16}{3}$

Resolução:

$$\ell = 2; a = 3\sqrt{2}$$



$$\triangle VBM: VB^2 = VM^2 + MB^2$$

$$a^2 = g^2 + \frac{\ell^2}{4}$$

$$(3\sqrt{2})^2 = g^2 + \frac{2^2}{4} \Rightarrow g^2 = 17$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_b \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 2^2 \cdot 4 = \frac{16}{3}$$

$$\triangle VOM: VM^2 = VO^2 + OM^2$$

$$g^2 = h^2 + \frac{\ell^2}{4}$$

$$17 = h^2 + 1 \therefore h = 4$$

30 (UFPA) Uma pirâmide triangular regular tem 9 cm^3 de volume e $4\sqrt{3} \text{ cm}$ de altura. Qual a medida de aresta da base?

a) $\sqrt{2} \text{ cm}$

c) $2\sqrt{2} \text{ cm}$

e) $\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$

b) 3 cm

d) $\sqrt{3} \text{ cm}$

Resolução:

$$V = \frac{1}{3} S_b \cdot h$$

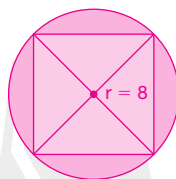
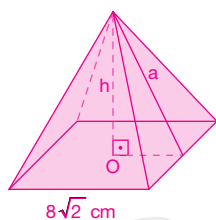
$$9 = \frac{1}{3} S_b \cdot 4\sqrt{3} \Rightarrow S_b = \frac{9\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2$$

$$S_b = \frac{\ell^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$\ell^2 = 9 \Rightarrow \ell = 3 \text{ cm}$$

31 (UFRN) Uma pirâmide regular tem base quadrada inscrita em um círculo de raio 8 cm e seu apótema é igual ao semiperímetro da base. Calcular o volume da pirâmide. $\frac{512\sqrt{30}}{3} \text{ cm}^3$

Resolução:



$$\ell \sqrt{2} = 16$$

$$\ell = 8\sqrt{2}$$

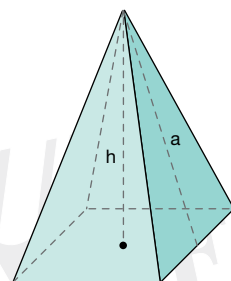
$$a = \frac{4 \cdot 8\sqrt{2}}{2}$$

$$a = 16\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$a^2 = h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2$$

$$(16\sqrt{2})^2 = h^2 + (4\sqrt{2})^2 \therefore h = 4\sqrt{30} \text{ cm}$$

$$V = \frac{1}{3} S_b \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3} (8\sqrt{2})^2 \cdot 4\sqrt{30} \Rightarrow V = \frac{512\sqrt{30}}{3} \text{ cm}^3$$



32 (MACK-SP) Uma pirâmide, cuja base é um quadrado de lado $2a$, tem o mesmo volume que um prisma, cuja base é um quadrado de lado a . Determine a razão entre as alturas da pirâmide e do prisma. $\frac{3}{4}$

Resolução:

$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} S_{b_{\text{pirâmide}}} \cdot h_{\text{pirâmide}}$$

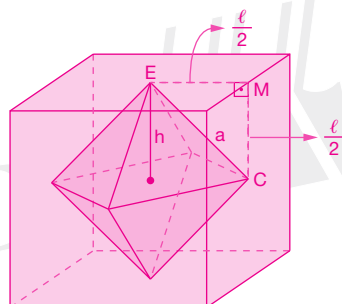
$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} (2a)^2 \cdot h_{\text{pirâmide}} \therefore V_{\text{pirâmide}} = \frac{4a^2}{3} h_{\text{pirâmide}} \quad (\text{I})$$

$$V_{\text{prisma}} = S_{b_{\text{prisma}}} \cdot h_{\text{prisma}} \Rightarrow V_{\text{prisma}} = a^2 h_{\text{prisma}} \quad (\text{II})$$

$$(\text{I}) = (\text{II}): \frac{4}{3} a^2 \cdot h_{\text{pirâmide}} \Rightarrow a^2 \cdot h_{\text{prisma}} \therefore \frac{h_{\text{pirâmide}}}{h_{\text{prisma}}} = \frac{3}{4}$$

33 (Unicamp-SP) Dado um cubo de aresta ℓ , qual é o volume do octaedro cujos vértices são os centros das faces do cubo? $\frac{\ell^3}{6}$

Resolução:



Sejam:

a = medida da aresta do octaedro

V_o = volume do octaedro

V_p = volume da pirâmide quadrangular regular cuja aresta da base mede a

O $\triangle EMC$ é retângulo: $(EC)^2 = (ME)^2 + (MC)^2$

$$a^2 = \frac{\ell^2}{4} + \frac{\ell^2}{4} \Rightarrow a = \frac{\ell\sqrt{2}}{2}$$

$$h = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{\ell\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\ell}{2}$$

$$V_o = 2V_p \Rightarrow V_o = 2 \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{\ell\sqrt{2}}{2} \right)^2 \cdot \frac{\ell}{2} \Rightarrow V_o = \frac{\ell^3}{6}$$

34 (Vunesp-SP) Em cada um dos vértices de um cubo de madeira se recorta uma pirâmide AMNP, em que M, N e P são os pontos médios das arestas, como se mostra na ilustração. Se V é o volume do cubo, o volume do poliedro que resta ao retirar as 8 pirâmides é igual a:

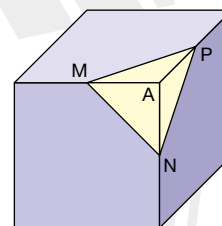
a) $\frac{1}{2} V$

c) $\frac{2}{3} V$

e) $\frac{3}{8} V$

b) $\frac{3}{4} V$

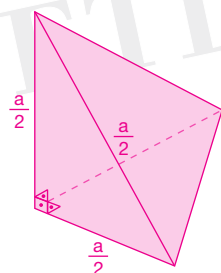
d) $\frac{5}{6} V$



Resolução:

$$V = a^3 \Rightarrow a = \sqrt[3]{V} \quad (I)$$

Cada pirâmide retirada tem $S_b = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{8}$ e $h = \frac{a}{2}$



$$V_{pir} = \frac{1}{3} S_b \cdot h = \frac{1}{3} \frac{a^2}{8} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3}{48} \quad (II)$$

Substituindo (I) em (II), temos:

$$V_{pir} = \frac{(\sqrt[3]{V})^3}{48} = \frac{V}{48}$$

Como o volume do cubo é V , e o volume de cada pirâmide é $\frac{V}{48}$, o volume do poliedro será:

$$V_{pol} = V - 8V_{pir} = V - \frac{8 \cdot V}{48} = \frac{5}{6} V$$

35 (PUC-RS) Em uma pirâmide quadrangular regular, a secção feita a 3 dm do vértice tem área igual a 45 dm². Calcular o volume da pirâmide, sabendo que a sua altura é de 6 dm. **360 dm³**

Resolução:

$$\frac{b}{B} = \frac{d^2}{h^2} \Rightarrow \frac{45}{B} = \frac{3^2}{6^2} \therefore B = 180 \text{ dm}^2$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 180 \cdot 6 \therefore V = 360 \text{ dm}^3$$

36 (PUC-SP) Um tronco de pirâmide de bases quadradas tem 2814 cm³ de volume. A altura do tronco mede 18 cm e o lado do quadrado da base maior mede 20 cm. Então, o lado do quadrado da base menor mede:

- a) 8 cm
b) 6 cm

- c) 3 cm
d) 12 cm

- e) 14 cm

Resolução:

$$V_T = \frac{k}{3} [B + \sqrt{Bb} + b]$$

$$B = 20^2 = 400 \therefore B = 400 \text{ cm}^2$$

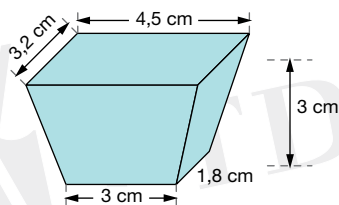
$$b = \ell^2$$

$$2814 = \frac{18}{3} [400 + \sqrt{400\ell^2} + \ell^2]$$

$$\ell^2 + 20\ell - 69 = 0 \begin{cases} \ell' = 3 \\ \ell'' = -23 \text{ (não convém)} \end{cases}$$

Portanto, $\ell = 3 \text{ cm}$.

37 Uma fôrma de gelo, como a da figura abaixo, tem a forma de tronco de pirâmide, de bases retangulares, com as medidas indicadas.



- a) Qual a quantidade de água, em mililitros, necessária para encher completamente essa fôrma de gelo? **28,62 ml**
b) Sabendo-se que, ao congelar, o volume de água aumenta em 8%, qual o volume de gelo que teremos após o congelamento? **30,91 cm³**

Resolução:

$$a) V = \frac{h}{3} [B + \sqrt{B \cdot b} + b]$$

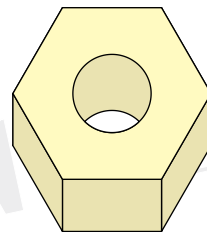
$$h = 3 \text{ cm} \quad B = 4,5 \cdot 3,2 \therefore B = 14,4 \text{ cm}^2 \quad b = 3 \cdot 1,8 \therefore b = 5,4 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{3}{3} [14,4 + \sqrt{14,4 \cdot 5,4} + 5,4]$$

$$V = 28,62 \text{ cm}^3 = 28,62 \text{ ml}$$

$$b) V' = 1,08 V \Rightarrow V' = 1,08 \cdot 28,62 \Rightarrow V' = 30,91 \text{ cm}^3$$

41 Um prisma regular hexagonal de altura 15 cm e aresta da base medindo 20 cm apresenta um furo cilíndrico cujo raio é 8 cm. Sendo $2,5 \text{ g/cm}^3$ a densidade do material, determine a massa, em quilogramas, desse sólido. (Use $\pi = 3,14$ e $\sqrt{3} = 1,73$.) **31,39 kg**



Resolução:

$$V_{\text{prisma}} = S_b \cdot h = 6 \cdot \frac{20^2 \sqrt{3}}{4} \cdot 15 \therefore V_{\text{prisma}} = 15\,570 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{cilindro}} = S_b \cdot h = \pi \cdot 8^2 \cdot 15 \therefore V_{\text{cilindro}} = 3\,014 \text{ cm}^3 \text{ (aprox.)}$$

$$V_{\text{sólido}} = 15\,570 - 3\,014 \therefore V_{\text{sólido}} = 12\,556 \text{ cm}^3$$

$$m = d \cdot V \Rightarrow m = 2,5 \times 12\,556 \therefore m = 31,39 \text{ kg}$$

42 (FGV-SP) Um produto é embalado em recipientes com formato de cilindros retos.

O cilindro A tem altura 20 cm e raio da base 5 cm.

O cilindro B tem altura 10 cm e raio da base 10 cm.

a) Em qual das duas embalagens gasta-se menos material? **A**

b) O produto embalado no cilindro A é vendido a R\$ 4,00 a unidade, e o do cilindro B a R\$ 7,00 a unidade.

Para o consumidor, qual a embalagem mais vantajosa? **B**

Resolução:

a) Cilindro A: $h = 20 \text{ cm}$; $r = 5 \text{ cm}$

$$S_{\ell} = 2\pi rh$$

$$S_{\ell} = 2\pi \cdot 5 \cdot 20 \therefore S_{\ell} = 200\pi \text{ cm}^2$$

$$S_b = \pi r^2$$

$$S_b = \pi \cdot 5^2 \therefore S_b = 25\pi \text{ cm}^2$$

$$S_t = S_{\ell} + 2S_b$$

$$S_t = 200\pi + 2 \cdot 25\pi \therefore S_t = 250\pi \text{ cm}^2$$

Cilindro B: $h = 10 \text{ cm}$; $r = 10 \text{ cm}$

$$S_{\ell} = 2\pi \cdot 10 \cdot 10 \therefore S_{\ell} = 200\pi \text{ cm}^2$$

$$S_b = \pi \cdot 10^2 \therefore S_b = 100\pi \text{ cm}^2$$

$$S_t = 200\pi + 2 \cdot 100\pi \therefore S_t = 400\pi \text{ cm}^2$$

Gasta-se menos material na embalagem A.

b) Cálculo dos volumes:

$$\text{Cilindro A: } V_A = \pi \cdot 5^2 \cdot 20 \therefore V_A = 500\pi \text{ cm}^3$$

$$\text{Cilindro B: } V_B = \pi \cdot 10^2 \cdot 10 \therefore V_B = 1\,000\pi \text{ cm}^3$$

Cálculo do preço de cada centímetro cúbico do produto (em reais):

$$\text{Embalagem A: } P_A = \frac{4}{500\pi} = \frac{8}{1\,000\pi}$$

$$\text{Embalagem B: } P_B = \frac{7}{1\,000\pi}$$

Logo, para o consumidor a embalagem B é mais vantajosa.

43 (PUCC-SP) Uma piscina circular tem 5 m de diâmetro. Um produto químico deve ser misturado à água na razão de 25 g por 500 ℓ de água. Se a piscina tem 1,6 m de profundidade e está totalmente cheia, quanto do produto deve ser misturado à água? (Use $\pi = 3,1$)

a) 1,45 kg

c) 1,65 kg

e) 1,85 kg

b) 1,55 kg

d) 1,75 kg

Resolução:

$$V = \pi r^2 h$$

$$\pi \cdot (2,5)^2 \cdot 1,6 = 31$$

$$V = 31 \text{ m}^3 = 31\,000 \text{ dm}^3 = 31\,000 \text{ ℓ}$$

Mistura-se 25 g por 500 ℓ:

$$x = \frac{31\,000}{500} \cdot 25 = 1\,550 \Rightarrow x = 1\,550 \text{ g} = 1,55 \text{ kg}$$

44 Atira-se uma pedra em um vaso cilíndrico de 1,2 m de diâmetro da base, parcialmente cheio de água. Determine o volume da pedra se, em consequência da imersão, a água elevou-se 0,54 m. **0,61 m³**

Resolução:

$$r = \frac{1,2}{2} \therefore r = 0,6 \text{ m}; h = 0,54 \text{ m}$$

O volume da pedra é igual ao volume de água deslocada. Logo:

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$V = \pi \cdot (0,6)^2 \cdot 0,54 \therefore V \approx 0,61 \text{ m}^3$$

45 Duzentos litros de um líquido serão armazenados em latas cilíndricas de raio 5 cm e altura 13 cm. Cada lata deverá ser preenchida em até 80% do seu volume. Quantas latas, no mínimo, serão necessárias? **245 latas**

Resolução:

$$1 \ell = 1 \text{ dm}^3$$

$$V_{\text{lata}} = \pi r^2 h$$

$$V_{\text{lata}} = \pi \cdot 5^2 \cdot 13 \therefore V_{\text{lata}} \approx 1021 \text{ cm}^3$$

$$V = 0,8 V_{\text{lata}}$$

$$V = 0,8 \cdot 1021 \therefore V \approx 817 \text{ cm}^3 \text{ ou } 0,817 \text{ dm}^3$$

$$\begin{array}{l} 1 \text{ lata} \text{ — } 0,817 \text{ dm}^3 \\ n \text{ latas} \text{ — } 200 \text{ dm}^3 \end{array} \Rightarrow n = \frac{200}{0,817} \approx 244,8$$

245 latas

46 Uma fábrica de sopa em lata decidiu aumentar em 20% a altura de suas latas cilíndricas, mas mantendo o mesmo volume. Qual deverá ser a diminuição, em porcentagem, do raio da lata para que o volume permaneça constante? **8,71%**

Resolução:

	lata 1	lata 2
raio da base	r_1	r_2
altura	h_1	$h_2 = 1,2h_1$

$$V_2 = V_1$$

$$\pi r_2^2 \cdot (1,2 \cdot h_1) = \pi r_1^2 h_1$$

$$r_2^2 = \frac{r_1^2}{1,2} \Rightarrow r_2 = \frac{r_1}{\sqrt{1,2}}$$

$$r_2 \approx 0,91287 r_1$$

$$r_1 - 0,91287 r_1 = 0,08712 r_1$$

$$\text{diminuição do raio} \approx 8,71\%$$

47 (UFPE) Interceptando-se um cilindro reto com raio da base igual a 2 cm e altura 5 cm com dois planos que passam pelo eixo do cilindro e formam um ângulo de 36° entre eles, obtém-se o sólido ilustrado ao lado.

Indique o inteiro mais próximo do volume desse sólido, em centímetros cúbicos. **6**

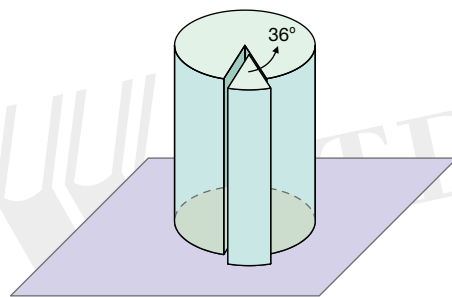
Resolução:

Se $\alpha = 36^\circ$, o volume do sólido é $\frac{1}{10}$ do volume do cilindro.

$$V_c = \pi r^2 h = \pi \cdot 2^2 \cdot 5 = 20\pi \therefore V_c = 20\pi \text{ cm}^3$$

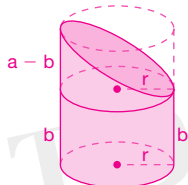
$$V_s = \frac{20\pi}{10} = 2\pi \therefore V_s \approx 6,28 \text{ cm}^3$$

O inteiro mais próximo é o 6.



48 (Unicamp-SP) Um cilindro circular reto é cortado por um plano não paralelo à sua base, resultando no sólido ilustrado na figura. Calcule o volume desse sólido em termos do raio da base r , da altura máxima $AB = a$ e da altura mínima $CD = b$. Justifique seu raciocínio. $\frac{1}{2}\pi r^2(a + b)$

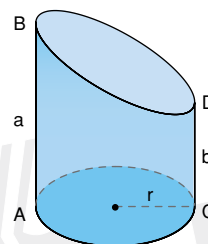
Resolução:



O volume do sólido é a soma do volume do cilindro de raio r e altura b , com a metade do volume do cilindro de raio r e altura $a - b$.

$$V = \pi r^2 b + \frac{\pi r^2(a - b)}{2}$$

$$V = \frac{1}{2} \pi r^2(a + b)$$



49 (UFPA) Num cone reto, a altura é 3 m e o diâmetro da base é 8 m. Então, a área total, em metros quadrados, vale:

a) 52π

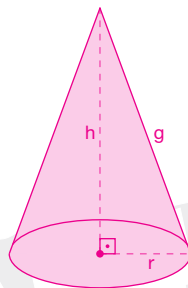
c) 20π

e) 12π

(b) 36π

d) 16π

Resolução:



$$g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow g^2 = 3^2 + 4^2 \therefore g = 5 \text{ m}$$

$$S_\ell = \pi r g = \pi \cdot 4 \cdot 5 \therefore S_\ell = 20\pi \text{ m}^2$$

$$S_b = \pi r^2 = \pi \cdot 4^2 \therefore S_b = 16\pi \text{ m}^2$$

$$S_t = S_\ell + S_b = 20\pi + 16\pi \therefore S_t = 36\pi \text{ m}^2$$

50 (UFES) Com um setor circular, cujo ângulo central mede 120° , constrói-se um cone circular reto de raio igual a 3 cm. Determine o volume do cone assim obtido. $18\pi\sqrt{2} \text{ cm}^3$

Resolução:

$$\alpha = 120^\circ = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$$

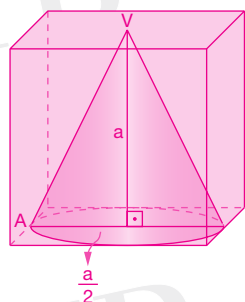
$$2\pi r = \alpha \cdot g \Rightarrow 2\pi \cdot 3 = \frac{2\pi}{3} \cdot g \therefore g = 9 \text{ cm}$$

$$g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow 9^2 = h^2 + 3^2 \therefore h = 6\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \pi \cdot 3^2 \cdot 6\sqrt{2} \therefore V = 18\pi\sqrt{2} \text{ cm}^3$$

51 Na figura, a base do cone reto está inscrita numa face do cubo e seu vértice está no centro da face oposta. Se a área total do cubo é 54 m^2 , determine o volume do cone. $2,25\pi \text{ m}^3$

Resolução:



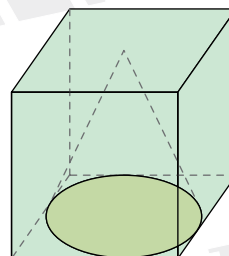
$$S_t = 6a^2 \Rightarrow 6a^2 = 54$$

$$a^2 = 9 \therefore a = 3 \text{ m}$$

$$V = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot a$$

$$V = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot 3 = \frac{9}{4} \pi$$

$$V = 2,25\pi \text{ m}^3$$



52 (UniSantos-SP) Com um semicírculo de papel, com raio igual a 20 cm, um pipoqueiro faz saquinhos para vender pipocas, com a forma de cone circular reto. O volume desses saquinhos, usando $\pi \approx 3$, é mais próximo de:

a) 1100 cm^3

c) 1500 cm^3

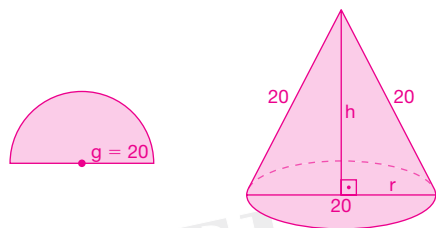
e) 1900 cm^3

b) 1300 cm^3

d) 1700 cm^3

Resolução:

O desenvolvimento de um cone equilátero é um semicírculo.



$$\frac{2\pi g}{2} = 2\pi r$$

$$\pi = \frac{g}{2} = \frac{20}{2} \therefore r = 10 \text{ cm}$$

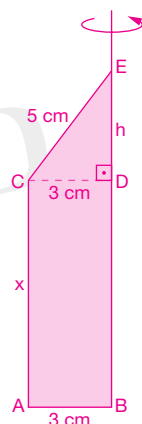
$$h = \frac{20\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$$

$$h = 10\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi 10^2 10\sqrt{3} \approx 1700 \therefore V = 1700 \text{ cm}^3$$

53 (UFV-MG) O trapézio retângulo ao lado sofre uma rotação de 360° em torno da base maior. Sabendo-se que $AB = 3$ cm, $CE = 5$ cm e que o volume do sólido obtido é 84π cm³, determine AC. **8 cm**

Resolução:



$$\triangle CDE: CE^2 = DE^2 + CD^2$$

$$5^2 = h^2 + 3^2 \therefore h = 4 \text{ cm}$$

$$V_{\text{cone}} = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$V_{\text{cone}} = \frac{1}{3} \pi \cdot 3^2 \cdot 4 \therefore V_{\text{cone}} = 12\pi \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{cilindro}} = V_{\text{sólido}} - V_{\text{cone}}$$

$$V_{\text{cilindro}} = 84\pi - 12\pi \therefore V_{\text{cilindro}} = 72\pi \text{ cm}^3$$

$$\text{Como } V_{\text{cilindro}} = \pi r^2 \cdot x, \text{ temos:}$$

$$72\pi = \pi \cdot 3^2 \cdot x \therefore x = 8 \text{ cm}$$



54 Deseja-se utilizar um cone reto de papelão com 16 cm de diâmetro e 30 cm de altura como embalagem para um produto. Nessas condições:

- a) qual a quantidade de papelão (em m²) utilizado em cada embalagem? **0,098089 m²**
 b) qual a capacidade, em litros, dessa embalagem? **2,0096 ℓ**

Resolução:

$$a) g^2 = 30^2 + 8^2 = 964$$

$$g = \sqrt{964} \therefore g \approx 31,048 \text{ cm}$$

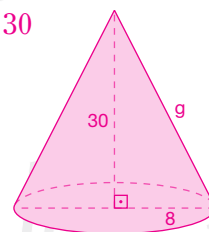
$$S_t = \pi r(g + r)$$

$$S_t = 3,14 \cdot 8 \cdot (31,048 + 8)$$

$$S_t \approx 980,89 \text{ cm}^2 = 0,098089 \text{ m}^2$$

$$b) V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \cdot 3,14 \cdot 8^2 \cdot 30$$

$$V = 2009,6 \text{ cm}^3 = 2,0096 \text{ ℓ}$$

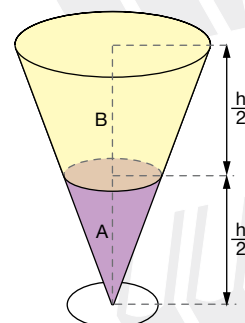


55 (UFPel-RS) Duas substâncias, A e B, que não se misturam, são colocadas num recipiente de forma cônica, de modo que a substância A ocupe até a metade da altura do cone e a substância B, o restante (conforme a figura). A razão entre o volume de A e o volume de B é:

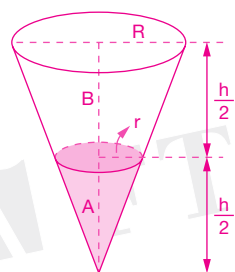
a) $\frac{8}{7}$
 b) $\frac{1}{7}$

c) 1
 d) $\frac{1}{8}$

e) 7



Resolução:



$$\begin{cases} A \text{ é um cone de raio } r \text{ e altura } \frac{h}{2} \\ B \text{ é um tronco de cone} \end{cases}$$

$$\frac{\frac{h}{2}}{r} = \frac{h}{R} \Rightarrow r = \frac{R}{2}$$

$$V_A = \frac{1}{3} \pi r^2 \frac{h}{2} = \frac{1}{3} \pi \frac{R^2}{4} \frac{h}{2}$$

$$V_B = \frac{h}{2} \frac{\pi}{3} \left[R^2 + R \cdot \frac{R}{2} + \frac{R^2}{4} \right] = \frac{h}{2} \frac{\pi}{3} \frac{7R^2}{4}$$

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{1}{7}$$

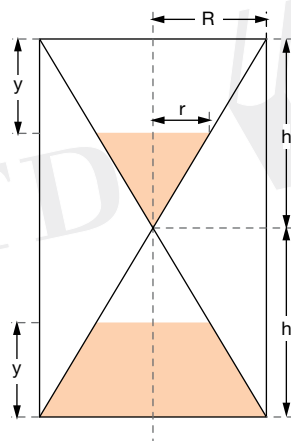
56 (UFPE) Um cone circular reto, com altura igual a 60 cm, é interceptado por um plano perpendicular ao seu eixo, resultando numa circunferência de raio igual a 40 cm. Se a distância desse plano à base do cone é 30 cm, quanto mede, em centímetros, o raio da base do cone? **80 cm**

Resolução:

$$d = h - 30 \Rightarrow d = 60 - 30 \therefore d = 30 \text{ cm}$$

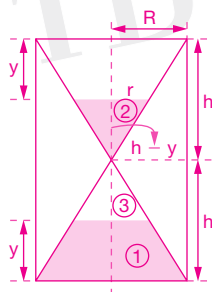
$$\frac{r}{R} = \frac{d}{h} \Rightarrow \frac{40}{R} = \frac{30}{60} \therefore R = 80 \text{ cm}$$

57 (UFRN) A figura abaixo registra o momento em que $\frac{7}{8}$ do volume de areia da ampulheta encontra-se na parte inferior.



O volume de um cone circular reto é dado por $V = \left(\frac{1}{3}\right)\pi R^2 h$, sendo R o raio e h a altura do cone. Calcule o valor da fração numérica que representa a proporção entre y e h nesse momento. Sugestão: expresse o valor da altura y em função de h . $\frac{y}{h} = \frac{1}{2}$

Resolução:



No cone superior:

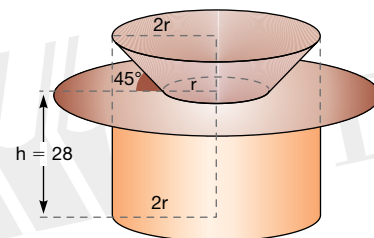
$$\frac{h-y}{r} = \frac{h}{R} \quad (I)$$

$$V_2 = V_3 \quad \frac{1}{8} \frac{\pi R^2 h}{3} = \frac{1}{3} \pi r^2 (h-y) \Rightarrow \frac{R^2}{r^2} = 8 \frac{(h-y)}{h} \quad (II)$$

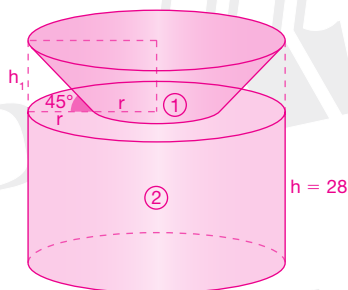
$$\text{Substituindo (I) em (II), temos: } \frac{R^2}{r^2} = \frac{8r}{R} \Rightarrow R^3 = 8r^3 \Rightarrow R = 2r \quad (III)$$

$$\text{De (I) e (III), vem: } \frac{r}{2r} = \frac{h-y}{h} \Rightarrow \frac{y}{h} = \frac{1}{2}$$

58 (UnB-DF) A figura ao lado representa um coador de café (em forma de um tronco de cone) apoiado sobre um vaso cilíndrico com perímetro da base igual ao perímetro da boca do coador. Calcule r , de acordo com os dados da figura e sabendo que a capacidade do coador é um quarto da capacidade do vaso. $r = 12$



Resolução:



$$\operatorname{tg} 45^{\circ} = \frac{h_1}{r} \Rightarrow h_1 = r \quad (\text{I})$$

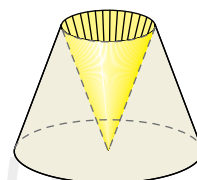
$$V_1 = \frac{1}{4} V_2$$

$$V_1 = V_T \Rightarrow h_1 \cdot \frac{\pi}{3} [(2r)^2 + 2r \cdot r + r^2] \therefore V_1 = \frac{7\pi}{3} r^3$$

$$V_2 = V_{ci} = \pi(2r)^2 h \therefore V_2 = 112\pi r^2$$

$$\frac{7\pi}{3} r^3 = \frac{1}{4} 112\pi r^2 \Rightarrow r = 12$$

59 (UFPR) Um sólido tem o formato de um tronco de cone circular reto com uma cavidade na forma de cone com a mesma altura do tronco e com base igual à base menor do tronco, conforme a figura. Calcule o volume do sólido, sabendo que as medidas do tronco são: 16 cm de altura, 250 cm² de área da base maior e 40 cm² de área da base menor. $\frac{5600}{3} \text{ cm}^3$



Resolução:

$$b = \pi r^2 \Rightarrow 40 = \pi r^2 \therefore r = \sqrt{\frac{40}{\pi}} \text{ cm}$$

$$B = \pi \cdot R^2 \Rightarrow 250 = \pi R^2 \therefore R = \sqrt{\frac{250}{\pi}} \text{ cm}$$

$$V_{\text{tronco}} = \frac{k\pi}{3} (R^2 + Rr + r^2) = \frac{16\pi}{3} \cdot \left(\frac{250}{\pi} + \frac{100}{\pi} + \frac{40}{\pi} \right)$$

$$V_{\text{tronco}} = 2080 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{cone}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot k = \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{40}{\pi} \cdot 16 \therefore V_{\text{cone}} = \frac{640}{3} \text{ cm}^3$$

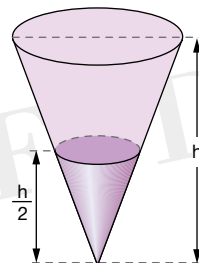
$$V_{\text{sólido}} = V_{\text{tronco}} - V_{\text{cone}} = 2080 - \frac{640}{3}$$

$$V_{\text{sólido}} = \frac{5600}{3} \text{ cm}^3$$

60 Na figura ao lado tem-se um recipiente com a forma de um cone circular reto, com um líquido que atinge metade de sua altura. Se V é a capacidade do cone, qual o volume do líquido? $\frac{V}{8}$

Resolução:

$$d = \frac{h}{2} \quad \frac{V'}{V} = \frac{d^3}{h^3} \Rightarrow \frac{V'}{V} = \frac{\left(\frac{h}{2}\right)^3}{h^3} \therefore V' = \frac{V}{8}$$



61 Uma taça em forma de cone tem raio da base igual a 5 cm e altura 10 cm. Coloca-se champanhe em seu interior até que atinja, a partir do vértice da taça, 5 cm de altura, conforme mostra a figura 1. Vedando a taça e virando-a para baixo, conforme mostra a figura 2, pergunta-se: em que altura (h), a partir da base do cone, ficará o nível do champanhe nessa nova posição? (Considere $\sqrt[3]{7} = 1,91$.) **0,45 cm**

Resolução:

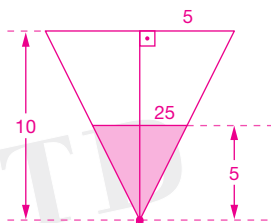


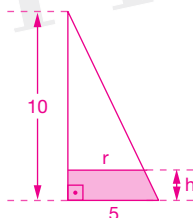
Figura 1

$$V_{\text{champ}} = \frac{1}{3} \pi (2,5)^2 \cdot 5$$

Daí resulta:

$$\frac{\pi h}{3} (25 + 5r + r^2) = \frac{5\pi}{3} (2,5)^2$$

$$(25 + 5r + r^2)h = 31,25 \quad (\text{I})$$



$$\frac{10 - h}{r} = \frac{10}{5} \therefore h = 10 - 2r \quad (\text{II})$$

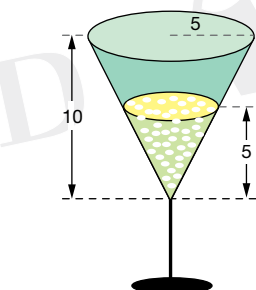


Figura 1

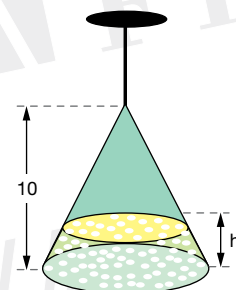


Figura 2

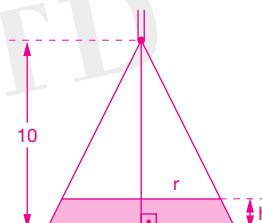


Figura 2

$$V_{\text{champ}} = \frac{\pi h}{3} (5^2 + 5r + r^2)$$

Substituindo (II) em (I):

$$(25 + 5r + r^2)(10 - 2r) = 31,25$$

Desenvolvendo e simplificando:

$$8r^3 = 875 \Rightarrow r^3 = \frac{875}{8} = \left(\frac{5}{2}\right)^3 \therefore r = \frac{5}{2} \sqrt[3]{7}$$

Voltando em (II):

$$h = 10 - 2 \cdot \frac{5}{2} \cdot \sqrt[3]{7} = 10 - 5 \sqrt[3]{7}$$

$$h = 10 - 5 \cdot 1,91 \therefore h = 0,45 \text{ cm}$$

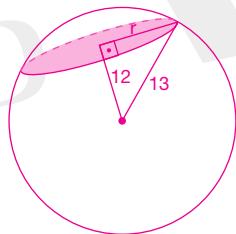
62 (Fuvest-SP) Uma superfície esférica de raio 13 cm é cortada por um plano situado a uma distância de 12 cm do centro da superfície esférica, determinando uma circunferência. O raio dessa circunferência, em centímetros, é:

- a) 1
b) 2

- c) 3
d) 4

e) 5

Resolução:



$$\begin{aligned}13^2 &= 12^2 + r^2 \\ r^2 &= 169 - 144 \\ r &= 5 \text{ cm}\end{aligned}$$

63 Sabendo que a área de uma superfície esférica é $8\pi \text{ cm}^2$, calcule o raio da esfera. $\sqrt{2} \text{ cm}$

Resolução:

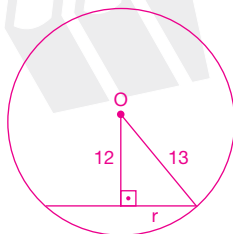
$$S = 4\pi r^2 \Rightarrow 8\pi = 4\pi \cdot r^2 \therefore r = \sqrt{2} \text{ cm}$$

64 Uma esfera cuja superfície tem área igual a $676\pi \text{ cm}^2$ é cortada por um plano situado a uma distância de 12 cm do seu centro, determinando um círculo. Nessas condições, determine:

- a) a área desse círculo; $25\pi \text{ cm}^2$
b) o comprimento da circunferência máxima dessa esfera; $26\pi \text{ cm}$
c) o volume do cone reto cujo vértice é o centro da esfera e a base é o círculo determinado pela intersecção do plano com a esfera. (Faça um desenho representativo dessa situação.) $100\pi \text{ cm}^3$

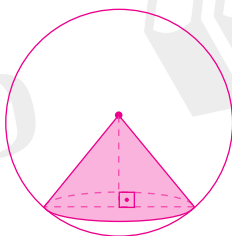
Resolução:

$$\begin{aligned}\text{a) } S_{\text{esfera}} &= 4\pi r^2 = 676\pi \\ R^2 &= 169 \therefore R = 13 \text{ cm} \\ r^2 + 12^2 &= 13^2 \\ r^2 &= 25 \therefore r = 5 \text{ cm} \\ S_{\text{círculo}} &= \pi r^2 = \pi 5^2 \\ \therefore S_{\text{círculo}} &= 25\pi \text{ cm}^2\end{aligned}$$



$$\text{b) } C = 2\pi r = 2\pi \cdot 13 \Rightarrow C = 26\pi \text{ cm}$$

$$\begin{aligned}\text{c) } V &= \frac{1}{3} \pi r^2 h \\ V &= \frac{1}{3} \pi 5^2 \cdot 12 \\ \therefore V &= 100\pi \text{ cm}^3\end{aligned}$$



65 Uma firma de arquitetura apresentou a maquete de uma construção na forma de uma semi-esfera. Nessa maquete, o diâmetro da semi-esfera é 20 cm. Sabendo que a escala utilizada foi 1 : 400, responda (use $\pi = 3,14$):

- a) Qual a área da superfície dessa construção? **10 048 m²**
 b) Qual o volume dessa construção? **133 973 m³**

Resolução:

a) Esc. 1 : 400

$$\begin{cases} 1 \text{ cm} \longrightarrow 400 \text{ cm} \\ 10 \text{ cm} \longrightarrow R \end{cases}$$

$$R = 4\,000 \text{ cm} = 40 \text{ m}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 4\pi r^2 = 2\pi r^2$$

$$S = 2\pi \cdot 40^2 \therefore S = 10\,048 \text{ m}^2$$



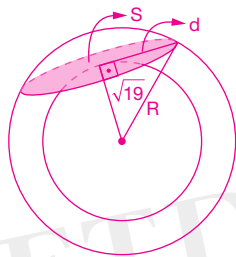
b) $V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{2}{3} \pi r^3$

$$V = \frac{2}{3} \pi \cdot 40^3 \therefore S = 133\,973 \text{ m}^3$$

66 (UFJF-MG) Duas esferas são concêntricas, a menor tem $\sqrt{19}$ cm de raio. A área da secção feita na esfera maior por um plano tangente à esfera menor é 81π cm². Calcule:

- a) o raio da esfera maior; **10 cm**
 b) o volume da esfera maior. **$\frac{4\,000\pi}{3}$ cm³**

Resolução:



a) $S = \pi d^2$

$$81\pi = \pi d^2$$

$$d = 9 \therefore d = 9 \text{ cm}$$

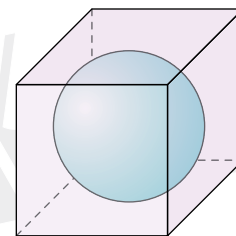
$$R^2 = d^2 + (\sqrt{19})^2 = 81 + 19 = 100$$

$$R = 10 \text{ cm}$$

b) $V = \frac{4}{3} \pi 10^3 = 4\,000 \frac{\pi}{3}$

$$V = \frac{4\,000\pi}{3} \text{ cm}^3$$

Calcule a área da superfície esférica e o volume da esfera. $16\pi \text{ cm}^2$ e $\frac{32\pi}{3} \text{ cm}^3$


$$\ell = 2 \cdot r \Rightarrow 4 = 2 \cdot r \therefore r = 2 \text{ cm}$$

$$S = 4\pi r^2 \Rightarrow S = 4\pi \cdot 2^2 \therefore S = 16\pi \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 \Rightarrow V = \frac{4}{3} \pi \cdot 2^3 \therefore V = \frac{32\pi}{3} \text{ cm}^3$$

d) 150

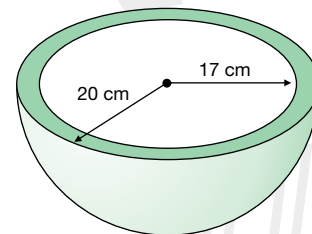
$$V_{\text{panela}} = \pi r^2 \cdot h \Rightarrow V_{\text{panela}} = \pi \cdot \left(\frac{20}{2}\right)^2 \cdot 16$$

$$\therefore V_{\text{panela}} = 1600\pi \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{doce}} = \frac{4}{3} \pi R^3 \Rightarrow V_{\text{doce}} = \frac{4}{3} \pi \cdot 2^3 \therefore V_{\text{doce}} = \frac{32}{3} \pi \text{ cm}^3$$

$$\begin{array}{lcl} 1 \text{ doce} & \text{---} & \frac{32}{3} \pi \text{ cm}^3 \\ n \text{ doces} & \text{---} & 1600 \pi \text{ cm}^3 \end{array} \Rightarrow n = \frac{1600\pi}{\frac{32}{3}\pi} \therefore n = 150$$

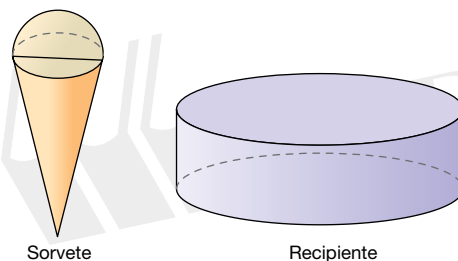
69 O recipiente da figura é feito de madeira com densidade $0,7 \text{ g/cm}^3$, com formato de uma semi-esfera com raio externo de 20 cm e raio interno de 17 cm . Calcule a massa, em quilogramas, desse recipiente. $\approx 4,53 \text{ kg}$


$$V = V_{\text{ext}} - V_{\text{int}}$$

$$V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 \Rightarrow V = \frac{2}{3} \pi \cdot (20^3 - 17^3) \therefore V = 2058\pi \text{ cm}^3$$

$$d = \frac{m}{V} \Rightarrow 0,7 = \frac{m}{2\,058\pi} \therefore m \simeq 4\,526 \text{ g ou } \simeq 4,53 \text{ kg}$$

70 (UnB-DF) Um sorveteiro vende sorvetes em casquinhas de biscoito que têm a forma de cone de 3 cm de diâmetro e 6 cm de profundidade. As casquinhas são totalmente preenchidas de sorvete e, ainda, nelas é superposta uma meia bola de sorvete de mesmo diâmetro do cone. Os recipientes onde é armazenado o sorvete têm forma cilíndrica de 18 cm de diâmetro e 5 cm de profundidade. Determine o número de casquinhas que podem ser servidas com o sorvete armazenado em um recipiente cheio.



60 casquinhas

Resolução:

$$r = \frac{3}{2} \text{ cm}; R = \frac{18}{2} \therefore R = 9 \text{ cm}$$

$$V_{\text{cone}} = \frac{1}{3} \pi r^2 h \Rightarrow V_{\text{cone}} = \frac{1}{3} \pi \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot 6 \Rightarrow V_{\text{cone}} = \frac{9\pi}{2} \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{semi-esfera}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 \Rightarrow V_{\text{semi-esfera}} = \frac{2}{3} \pi \left(\frac{3}{2}\right)^3 \Rightarrow V_{\text{semi-esfera}} = \frac{9\pi}{4} \text{ cm}^3$$

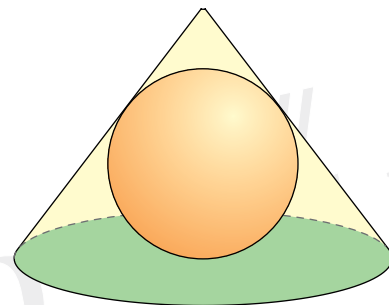
$$V_{\text{casquinha}} = V_{\text{cone}} + V_{\text{semi-esfera}} \Rightarrow V_{\text{casquinha}} = \frac{9\pi}{2} + \frac{9\pi}{4} \Rightarrow V_{\text{casquinha}} = \frac{27\pi}{4} \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{cilindro}} = \pi R^2 \cdot H \Rightarrow V_{\text{cilindro}} = \pi \cdot 9^2 \cdot 5 \Rightarrow V_{\text{cilindro}} = 405\pi \text{ cm}^3$$

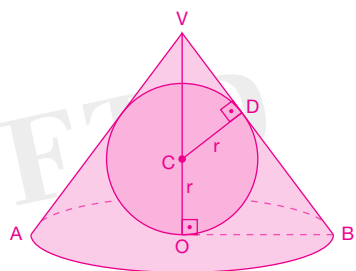
Seja n o número de casquinhas. Logo:

$$n = \frac{V_{\text{cilindro}}}{V_{\text{casquinha}}} \Rightarrow n = \frac{405\pi}{\frac{27\pi}{4}} \therefore n = 60 \text{ casquinhas}$$

71 (UFPE) A figura ilustra a esfera de maior raio contida no cone reto de raio da base igual a 6 e altura igual a 8, tangente ao plano da base do cone. Qual o inteiro mais próximo da metade do volume da região do cone exterior à esfera? 94



Resolução:



$$\triangle VOB: VB^2 = VO^2 + OB^2$$

$$g^2 = 8^2 + 6^2$$

$$g = 10$$

$$\triangle VDC \sim \triangle VOB$$

$$\frac{VB}{OB} = \frac{VC}{CD}$$

$$\frac{10}{6} = \frac{8-r}{r} \therefore r = 3$$

$$V = V_{\text{cone}} - V_{\text{esfera}} \Rightarrow V = \frac{1}{3} \pi \cdot R^2 \cdot h - \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot 6^2 \cdot 8 - \frac{4}{3} \pi \cdot 3^3 \therefore V = 60\pi \Rightarrow \frac{V}{2} = 30\pi \approx 94,25$$

Logo, o inteiro mais próximo é 94.

72 (PUC-PR) Tem-se um recipiente cilíndrico, de raio 3 cm, com água. Se mergulharmos inteiramente uma bolinha esférica nesse recipiente, o nível da água subirá cerca de 1,2 cm. Sabe-se, então, que o raio da bolinha vale, aproximadamente:

- a) 1 cm c) 2 cm e) 3 cm
b) 1,5 cm d) 2,5 cm

Resolução:

$$V = \pi r^2 h$$

$$V = \pi \cdot 3^2 \cdot 1,2 \therefore V = 10,8\pi \text{ cm}^3$$

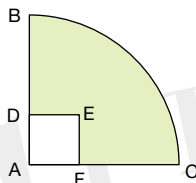
$$V_{\text{bolinha}} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$\frac{4}{3} \pi r^3 = 10,8\pi$$

$$r^3 = 8,1 \Rightarrow r = \sqrt[3]{8,1} \Rightarrow r \simeq 2 \text{ cm}$$

p. 115

73 (UFMG) Observe esta figura:



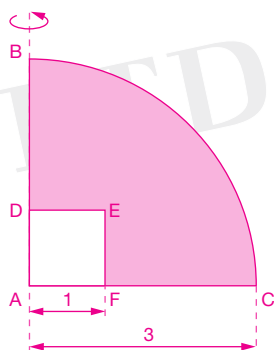
Nessa figura, ABC é um quadrante de círculo de raio 3 cm e ADEF é um quadrado, cujo lado mede 1 cm. Considere o sólido gerado pela rotação de 360° , em torno da reta AB, da região colorida na figura.

Sabe-se que o volume de uma esfera de raio r é igual a $\frac{4\pi r^3}{3}$.

Assim sendo, esse sólido tem um volume de:

- a) $14\pi \text{ cm}^3$ b) $15\pi \text{ cm}^3$ c) $16\pi \text{ cm}^3$ **d) $17\pi \text{ cm}^3$**

Resolução:



Volume da semi-esfera:

$$V_1 = \frac{2\pi r_1^3}{3} = \frac{2\pi \cdot 3^3}{3} \therefore V_1 = 18\pi \text{ cm}^3$$

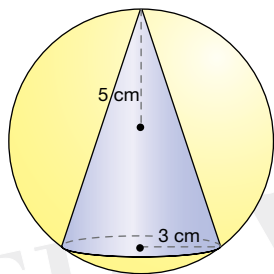
Volume do cilindro gerado por ADEF:

$$V_2 = \pi r_2^2 h = \pi \cdot 1^2 \cdot 1 \therefore V_2 = \pi \text{ cm}^3$$

Volume do sólido:

$$V = V_1 - V_2 = 18\pi - \pi \therefore V = 17\pi \text{ cm}^3$$

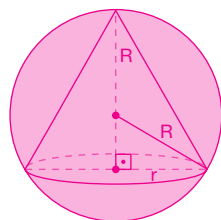
- 74** (PUC-SP) Um cone circular reto, cujo raio da base é 3 cm, está inscrito em uma esfera de raio 5 cm, conforme mostra a figura.



O volume do cone corresponde a que porcentagem do volume da esfera?

- a) 26,4% c) 19,5% e) 16,2%
b) 21,4% d) 18,6%

Resolução:



$$\begin{aligned} R^2 &= d^2 + r^2 \\ d^2 &= 5^2 - 3^2 \\ d &= 4 \text{ cm} \\ h &= R + d \\ h &= 5 + 4 \therefore h = 9 \text{ cm} \end{aligned}$$

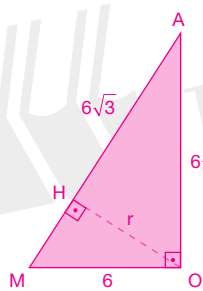
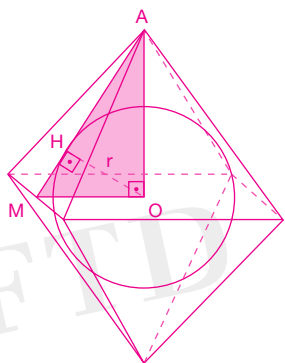
$$\begin{aligned} V_c &= \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \cdot 3^2 \cdot 9 \therefore V_c = 27\pi \text{ cm}^3 & V_e &= \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot 5^3 \therefore V_e = \frac{500\pi}{3} \text{ cm}^3 \\ \frac{V_c}{V_e} &= \frac{27\pi}{\frac{500\pi}{3}} = 0,162 = 16,2\% \end{aligned}$$

- 75** Uma esfera está inscrita num octaedro regular de aresta 12 cm. Calcule:

- a) o raio da esfera; $2\sqrt{6} \text{ cm}$ b) o volume da esfera. $64\pi\sqrt{6} \text{ cm}^3$

Resolução:

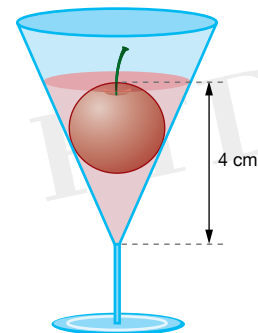
a)



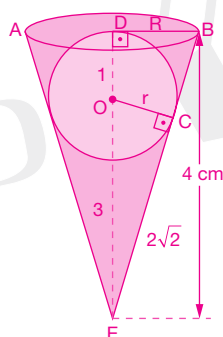
$$\begin{aligned} \triangle AOM: AM \cdot OH &= OA \cdot OM \\ 6\sqrt{3} \cdot r &= 6\sqrt{2} \cdot 6 \therefore r = 2\sqrt{6} \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } V_{\text{esfera}} &= \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi (2\sqrt{6})^3 \\ V_{\text{esfera}} &= 64\pi\sqrt{6} \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

76 (FGV-SP) Um cálice com a forma de cone contém $V \text{ cm}^3$ de uma bebida. Uma cereja de forma esférica, com diâmetro de 2 cm, é colocada dentro do cálice. Supondo-se que a cereja repousa apoiada nas paredes laterais do cálice e o líquido recobre exatamente a cereja a uma altura de 4 cm a partir do vértice do cone, determinar o valor de V . $V = \frac{4\pi}{3} \text{ cm}^3$



Resolução:



$$CO^2 + CE^2 = 3^2$$

$$CE^2 = 8$$

$$CE = 2\sqrt{2} \text{ cm}$$

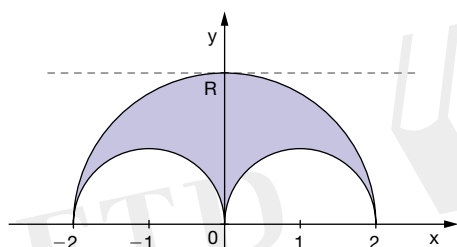
$$\triangle BDE \sim \triangle OCE$$

$$\frac{DE}{CE} = \frac{DB}{CO} \Rightarrow \frac{4}{2\sqrt{2}} = \frac{R}{1}$$

$$R = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2} \therefore R = \sqrt{2} \text{ cm}$$

$$V + \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3}\pi R^2 h \Rightarrow V + \frac{4}{3}\pi 1^3 = \frac{1}{3}\pi (\sqrt{2})^2 \cdot 4 \Rightarrow V + \frac{4}{3}\pi = \frac{8\pi}{3} \Rightarrow V = \frac{4\pi}{3} \text{ cm}^3$$

77 (PUC-RS) A região R da figura está limitada por três semicírculos.



Sabendo que R efetua uma volta completa em torno do eixo do x , calcule o volume do sólido gerado. 8π

Resolução:

Sejam (1) a esfera de raio 2 e (2) a esfera de raio 1

$$V = V_{(1)} - 2V_{(2)}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot 2^3 - 2 \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 1^3 \Rightarrow V = \frac{24\pi}{3} \text{ cm}^3 \therefore V = 8\pi$$

78 (Cesgranrio-RJ) Uma laranja pode ser considerada uma esfera de raio R , composta de 12 gomos exatamente iguais. A superfície total de cada gomo mede:

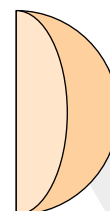
a) $2\pi R^2$

c) $\frac{3\pi}{4} R^2$

e) $\frac{4\pi}{3} R^2$

b) $4\pi R^2$

d) $3\pi R^2$



Resolução:

$$S_{\text{gomo}} = S_{\text{fuso}} + S_{\text{círculo}} \Rightarrow S_{\text{gomo}} = 2 \cdot \left(\frac{2\pi}{12}\right) \cdot R^2 + \pi R^2$$

$$S_{\text{gomo}} = \frac{\pi}{3} R^2 + \pi R^2 \therefore S_{\text{gomo}} = \frac{4\pi}{3} R^2$$

79 (UEL-PR) Um cilindro circular reto e uma esfera são equivalentes (mesmo volume). Se o raio da esfera e o raio de base do cilindro têm medida 1, a área lateral desse cilindro é:

- a) $\frac{14}{3}\pi$ c) $\frac{11}{4}\pi$ e) $\frac{5}{4}\pi$
 b) $\frac{11}{3}\pi$ d) $\frac{8}{3}\pi$

Resolução:

O volume do cilindro é $V_c = \pi r^2 h \Rightarrow V_c = \pi \cdot 1^2 \cdot h = \pi h$.

O volume da esfera é $V_e = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 \Rightarrow V_e = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 1^3 = \frac{4}{3}\pi$.

Como $V_c = V_e$, temos: $\pi \cdot h = \frac{4}{3}\pi \Rightarrow h = \frac{4}{3}$.

A área lateral do cilindro é: $A_L = 2\pi r h = 2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{3}\pi$.

80 (MACK-SP) A razão entre a área lateral do cilindro equilátero e a superfície esférica nele inscrita é:

- a) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{1}{2}$
 b) $\frac{1}{4}$ d) 1

Resolução:

No cilindro equilátero $h = 2r$, logo, a área lateral será:

$$A_L = 2 \cdot \pi \cdot h \cdot r = 2 \cdot \pi \cdot 2r \cdot r = 4\pi r^2$$

Na esfera inscrita o raio é r , temos: $A_e = 4\pi \cdot r^2$

A razão entre essas medidas é: $\frac{4\pi r^2}{4\pi r^2} = 1$.

81 (ITA-SP) A razão do volume de uma esfera para o volume de um cubo nela inscrito é:

- a) $\frac{3\sqrt{2}}{2\pi}$ c) 2π e) $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$
 b) $\frac{\pi}{2}$ d) $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$

Resolução:

O volume da esfera é $V_e = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$.

O cubo inscrito tem diagonal igual ao diâmetro da esfera, daí temos: $d = 2r = \ell\sqrt{3} \Rightarrow \ell = \frac{2r\sqrt{3}}{3}$
 (em que ℓ é a aresta do cubo).

O volume do cubo será: $V = \ell^3 = \left(\frac{2r\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \frac{8 \cdot r^3 \cdot 3\sqrt{3}}{27} = \frac{8r^3\sqrt{3}}{9}$.

A razão entre essas medidas é: $\frac{\frac{4}{3}\pi \cdot r^3}{\frac{8r^3\sqrt{3}}{9}} = \frac{\cancel{4} \cdot \pi \cdot \cancel{r^3}}{\cancel{8}_1 \cdot \sqrt{3}} \cdot \frac{\cancel{9}^3}{\cancel{8}^3 \sqrt{3}} =$
 $= \frac{3\pi}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3\pi\sqrt{3}}{6} = \frac{\pi \cdot \sqrt{3}}{2}$

82 (Unitau-SP) Aumentando em 10% o raio de uma esfera, a sua superfície aumentará:

- a) 11% c) 21% e) 30%
- b) 24% d) 31%

Resolução:

Se o raio for r , a superfície será $S = 4 \cdot \pi \cdot r^2$.

Aumentando o raio em 10%, o novo raio será 1,1r e a superfície

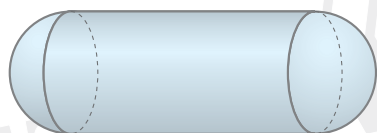
$$S = 4 \cdot \pi \cdot (1 \cdot 1)^2 r^2 = 4 \cdot \pi \cdot 1,21 = 4,84\pi r^2.$$

O aumento da superfície foi de $0,84\pi r^2$, então:

$$\frac{4\pi r^2}{0,84\pi r^2} = \frac{100\%}{x} \Rightarrow 4\pi r^2 x = 0,84\pi r^2 \cdot 100 \Rightarrow x = \frac{84\pi r^2}{4\pi r^2} = 21\%$$

p. 116

83 (MACK-SP) Um tanque de gás tem a forma de um cilindro de 4 m de comprimento, acrescido de duas semi-esferas, de raio 2 m, uma em cada extremidade, como mostra a figura.



Adotando $\pi = 3$, a capacidade total do tanque, em m^3 , é:

- a) 80 c) 60 e) 50
b) 70 d) 55

Resolução:

A capacidade do tanque corresponde à soma dos volumes de um cilindro de raio da base 2 m e altura 4 m com duas semi-esferas de raio 2 m, logo:

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h + \cancel{2} \cdot \frac{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3}{\cancel{2}} \Rightarrow V = 3 \cdot 2^2 \cdot 4 + \frac{4}{3} \cdot \cancel{3} \cdot 2^3 = 48 + 32 = 80 \text{ m}^3$$

84 (MACK-SP) Um frasco de perfume de forma esférica, com raio de 4 cm, contém perfume em $\frac{1}{4}$ de seu volume total. Se uma pessoa utilizar, todos os dias, 2 ml do perfume, das alternativas abaixo, a que indicará o maior período de tempo de duração do perfume será:

- a) 16 dias c) 26 dias e) 43 dias
b) 31 dias d) 54 dias

Resolução:

O volume do frasco é $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 4^3 = \frac{256\pi}{3} \text{ cm}^3 = \frac{256\pi}{3} \text{ ml}$.

O volume do perfume é $\frac{1}{4}$ do total, ou seja, $\frac{64\pi}{3}$ ml.

Utilizando 2 ml por dia, terá perfume para $\frac{\frac{64\pi}{3}}{2 \text{ dias}}$, ou seja, $\frac{64\pi}{6} \simeq 33$ dias.

85 (UFPA) Um cone reto tem raio de base R e altura H . Se uma esfera tem raio R e volume igual ao dobro do volume desse cone, podemos afirmar que:

- a) $H = R$ c) $H = \frac{R}{3}$ e) $H = \frac{R}{2}$
 b) $H = 2R$ d) $H = 3R$

Resolução:

$$V_{\text{cone}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H$$

$$V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$$

$$V_{\text{esfera}} = 2 \cdot V_{\text{cone}} \Rightarrow \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H \Rightarrow H = 2R$$

86 (MACK-SP) Um recipiente cilíndrico reto, com raio da base igual a 4 cm, contém água até a metade de sua altura. Uma esfera maciça, colocada no seu interior, fica totalmente submersa, elevando a altura da água em 2 cm. O raio da esfera é:

- a) $2\sqrt[3]{3}$ c) $3\sqrt[3]{2}$ e) 2
b) 4 d) $\frac{\sqrt[3]{5}}{2}$

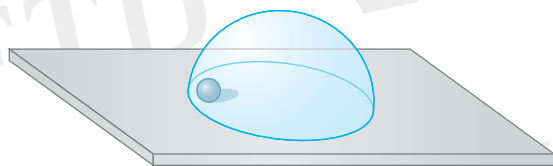
Resolução:

Pelo Princípio de Arquimedes, o volume da esfera corresponde ao volume de água deslocado. Este volume corresponde ao volume de um cilindro reto, de raio da base igual a 4 cm e altura 2 cm.

Chamando de R o raio da esfera, temos:

$$\left. \begin{aligned} V_{\text{cilindro}} &= \pi \cdot 4^2 \cdot 2 = 32\pi \text{ cm}^3 \\ V_{\text{esfera}} &= \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{Como } V_{\text{cilindro}} = V_{\text{esfera}}, \text{ teremos:} \\ &32\pi = \frac{4}{3} \pi \cdot R^3 \Rightarrow R^3 = \frac{96\pi}{4\pi} \Rightarrow \\ &\Rightarrow R^3 = 24 \Rightarrow R = \sqrt[3]{24} = 2\sqrt[3]{3} \text{ cm.} \end{aligned}$$

87 (UERJ) Uma cuba de superfície semi-esférica, com diâmetro de 8 cm, está fixada sobre uma mesa plana. Uma bola de gude de forma esférica, com raio igual a 1 cm, encontra-se sob essa cuba.

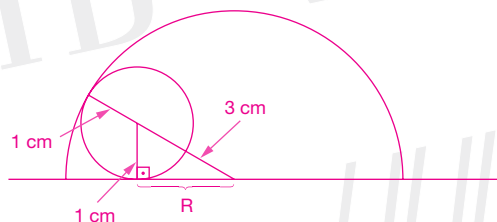


Desprezando-se a espessura do material usado para fabricar a cuba, determine:

- a) a maior área, em cm^2 , pela qual a bola de gude poderá se deslocar na superfície da mesa; $8\pi \text{ cm}^2$
b) o volume, em cm^3 , da maior esfera que poderia ser colocada embaixo dessa cuba. $\frac{32\pi}{3} \text{ cm}^3$

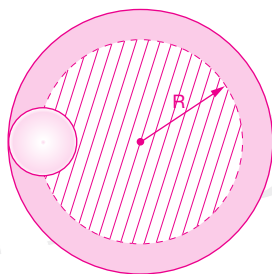
Resolução:

- a) Considerando a bola de gude junto à cuba temos, representado na figura abaixo:



Por Pitágoras: $3^2 = 1^2 + R^2$
 $R^2 = 9 - 1$
 $R^2 = 8$
 $R = 2\sqrt{2} \text{ cm}$

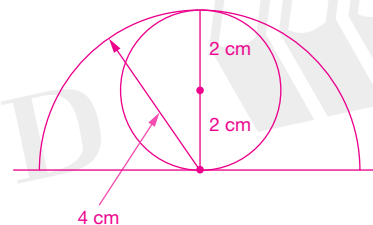
Esse valor corresponde ao raio da maior área que a bola de gude poderá se deslocar sobre a mesa, como mostra (em vista superior) a figura abaixo:



$$A = \pi \cdot R^2 = \pi \cdot (2\sqrt{2})^2$$

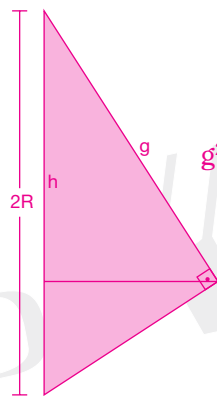
$$A = 8\pi \text{ cm}^2$$

- b) A maior esfera que pode ser colocada embaixo da cuba deve ter raio igual à metade do raio da cuba, ou seja, o raio deve ser 2 cm.



Portanto: $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 2^3 = \frac{32\pi}{3} \text{ cm}^3$

No triângulo EBC, temos:



$$g^2 = 2R \cdot h \quad \text{II}$$

Considerando $r = \frac{3}{5}R$ e aplicando a propriedade transitiva a ① e ②, teremos:

$$h^2 + \left(\frac{3}{5}R\right)^2 = 2Rh \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h^2 - 2Rh + \frac{9R^2}{25} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta = (-2R)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{9R^2}{25} = 4R^2 - \frac{36R^2}{25} =$$

$$= \frac{100R^2 - 36R^2}{25} = \frac{64R^2}{25}$$

$$h' = \frac{2R + \frac{8R}{5}}{2} = \frac{18R}{10} = \frac{9R}{5} = \frac{9}{5}R$$

$$h'' = \frac{2R - \frac{8R}{5}}{2} = \frac{2R}{10} = \frac{R}{5} \text{ (não serve, pois } h > r \text{)}$$

$$h = \frac{-(-2R) \pm \sqrt{\frac{64R^2}{25}}}{2 \cdot 1} = \frac{2R \pm \frac{8R}{5}}{2} =$$

$$\text{Portanto, } h = \frac{9}{5}R.$$

90 (FGV-SP) Deseja-se construir um galpão em forma de um hemisfério, para uma exposição. Se, para o revestimento total do piso, utilizaram-se $78,5 \text{ m}^2$ de lona, quantos metros quadrados de lona se utilizariam na cobertura completa do galpão? (Considerar $\pi = 3,14$.)

a) 31,4

(c) 157

e) 261,66

b) 80

d) 208,2

Resolução:

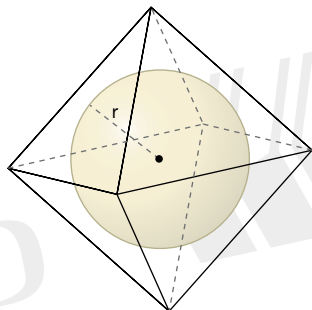
A área do piso é $78,5 \text{ m}^2$, logo: $\pi \cdot r^2 = 78,5 \Rightarrow 3,14r^2 = 78,5 \Rightarrow$

$$\Rightarrow r^2 = \frac{78,5}{3,14} \Rightarrow r^2 = 25 \Rightarrow r = 5 \text{ m}$$

O galpão terá a superfície de uma semi-esfera de raio 5 m:

$$A = \frac{4\pi r^2}{2} = 2\pi r^2 = 2 \cdot 3,14 \cdot 25 = 157 \text{ m}^2$$

- 91** (UEL-PR) Um joalheiro resolveu presentear uma amiga com uma jóia exclusiva. Para isso, imaginou um pingente, com o formato de um octaedro regular, contendo uma pérola inscrita, com o formato de uma esfera de raio r , conforme representado na figura a seguir.

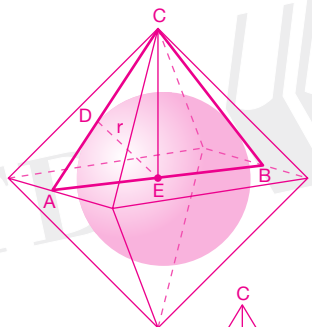


Se a aresta do octaedro regular tem 2 cm de comprimento, o volume da pérola, em cm^3 , é:

- a) $\frac{\sqrt{2} \pi}{3}$ c) $\frac{8\sqrt{2} \pi}{9}$ e) $\frac{8\sqrt{6} \pi}{27}$
 b) $\frac{8 \pi}{3}$ d) $\frac{4\sqrt{6} \pi}{9}$

Resolução:

Considerando o triângulo ABC da figura:



$\overline{AC}$ é a altura da face: $h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ cm.

$AB = 2$ cm $\Rightarrow AE = 1$ cm $\Rightarrow$ No $\triangle AEC$, temos:

$$AC^2 = AE^2 + EC^2 \Rightarrow (\sqrt{3})^2 = 1^2 + EC^2 \Rightarrow EC = \sqrt{2}$$
 cm

No $\triangle AEC$, $\overline{DE}$ é a altura relativa à base $\overline{AC}$ e igual a r .

Pelas relações métricas nos triângulos retângulos sabemos que cateto $\times$ cateto = hipotenusa $\times$ altura, logo:

$$\sqrt{2} \times 1 = \sqrt{3} \cdot r \Rightarrow r = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$
 cm

Sendo $\frac{\sqrt{6}}{3}$ cm o raio da pérola, seu volume será:

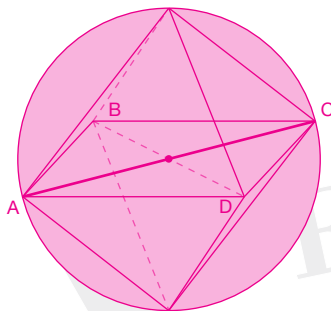
$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \frac{6\sqrt{6}}{27} = \frac{24\pi\sqrt{6}}{81} = \frac{8\pi\sqrt{6}}{27} \text{ cm}^3.$$

- 92** (UFPI) A esfera circunscrita a um octaedro regular de aresta a tem raio igual a:

- a) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ c) $2a$ e) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$
 b) $a\sqrt{2}$ d) $a\sqrt{3}$

Resolução:

O raio da esfera circunscrita será igual a metade da diagonal do quadrado ABCD representado na figura abaixo:



Sendo a a aresta do octaedro, a diagonal do quadrado será $a\sqrt{2}$, logo, o raio da esfera será:

$$r = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$