PROBABILIDADES

Imagine que você irá disputar um "par ou ímpar" com alguém. Você sabe qual a chance de você escolher "par" e sair vencedor na disputa? E se você escolher "ímpar", você acredita que suas chances são maiores ou menores?

Você sabia que a chance de uma pessoa acertar seis números em um jogo como a mega sena é de 0,000002%, ou seja, cerca de 1 em 50 063 860 (cinquenta milhões, sessenta e três mil e oitocentos e sessenta). Sabia que a chance de saírem os números 01 - 02 - 03 - 04 - 05 - 06 é a mesma de sair qualquer outro grupo de seis números?

As empresas de seguro, por exemplo, precisam estar atentas a esta área da Matemática para poderem definir quanto vale o seguro de um bem, baseado apenas na chance maior ou menor de ocorrer um dano com aquilo que é segurado.

São situações desse tipo que são estudadas em probabilidades.

Definição: Se há n formas de uma situação ocorrer e dentre estas n há k formas de ocorrer um evento que desejamos, dizemos que a probabilidade de ocorrer o evento desejado é:

$$P(E) = \frac{k}{n}$$

Exemplo 1: Ao lançarmos um dado não viciado, qual a probabilidade de a face voltada para cima ser um número par?

Solução: Note que ao lançarmos o dado ele pode oferecer os números 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 na face de cima, ou seja, há **seis** possibilidades no total. Contudo, dentre estas, desejamos obter 2, 4 ou 6 (um número par). Ou seja, em seis, temos **três** em nosso favor. Portanto:

$$P(par) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 50\%.$$

Uma outra de escrever esta definição é:

$$P(E) = \frac{\text{N}^{\text{o}} \text{ de casos favoráveis}}{\text{N}^{\text{o}} \text{ de casos possíveis}}.$$

Exemplo 2: Um casal planeja ter três filhos, qual a probabilidade de os três filhos serem do mesmo sexo?

Solução: é preciso ver todas as possibilidades possíveis para o nascimento das três crianças. Para isso chamemos y o nascimento menino e x o nascimento menina. Assim para os três podemos ter:

$$U = \left\{ \begin{matrix} (y,y,y);\ (y,y,x);\ (y,x,y);\ (y,x,x); \\ (x,x,x);\ (x,x,y);\ (x,y,x);\ (x,y,y) \end{matrix} \right\}$$

Dentre estes 8 casos possíveis, apenas 2 representam situações em que os três filhos têm o mesmo sexo. Logo:

$$P(\text{mesmo sexo}) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 25\%$$

Outras definições importantes:

Espaço Amostral: conjunto formado por todos os elementos possíveis de ocorrer em uma situação. No exemplo anterior, U indica o espaço amostral.

Evento: qualquer situação que exibe resultados que podem ser estudados e quantificados. O conjunto $E = \{(x,x,x);\ (y,y,y)\}$ representa o evento desejado no exemplo anterior.

Probabilidade: a chance (em fração ou porcentagem) de um evento ocorrer.

Evento Certo: evento cuja probabilidade de ocorrer é 1 ou 100%.

Evento Impossível: evento cuja chance de ocorrer é nula.

Eventos equiprováveis: eventos que têm a mesma probabilidade de ocorrer.

Evento Complementar: sendo A um evento, diz-se que B é complementar de A, se $P(A) + P(B) = 1$.

Exemplo 3: No problema anterior, qual a probabilidade de nascerem:

A) dois meninos e uma menina?

B) um menino e duas meninas?

C) três crianças de sexos diferentes?

Solução: Observando espaço amostral, temos os eventos: $E_1 = \{(y,y,x);\ (y,x,y);\ (x,y,y)\}$ e $E_2 = \{(y,x,x);\ (x,x,y);\ (x,y,x)\}$ que indicam o que desejamos obter nos itens a) e b). Ora, em ambos os casos a probabilidade é $\frac{3}{8}$ ou 37,5%. Dizemos que esses dois eventos são equiprováveis. Note ainda que as crianças só podem ter sexo masculino ou feminino, portanto é impossível o evento que se deseja no item c). Logo sua probabilidade é nula.

Exemplo 4: Duas moedas são lançadas simultaneamente, qual a probabilidade de sair ao menos uma cara?

Solução: Se você apostou, digamos que vai sair pelo menos uma cara, a única coisa que não pode ocorrer é sair duas coroas. Neste caso, "sair duas coroas", é o evento complementar de "sair duas caras". Como são duas moedas e apenas duas possibilidades para cada, há um total de 4 resultados possíveis. Sair duas coroas é uma das quatro. Logo, a probabilidade de sair ao menos uma cara é $P = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Probabilidade da União de Eventos (Regra do Ou)

Chamamos $P(A \cup B)$ a probabilidade da união de dois eventos A e B ou mesmo a probabilidade de ocorrer o evento A ou o evento B, e definimos $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, onde $P(A \cap B)$ indica a probabilidade de ocorrer ao mesmo tempo os eventos A e B.

Exemplo 5: Uma urna possui 15 bolas numeradas de 01 a 15. Retira-se uma bola dessa urna, sem olhar, e mostra-se o seu número. Qual a probabilidade de que o número mostrado seja divisível por 3 ou por 4?

A → divisível por 3 $\Rightarrow A = \{3,6,9,12,15\} \to P(A) = \frac{5}{15}$.

B → divisível por 4 $\Rightarrow B = \{4,8,12\} \to P(B) = \frac{3}{15}$.

A e B → divisível por 3 e 4 $\Rightarrow A \cap B = \{12\} \to P(A \cap B) = \frac{1}{15}$.

Logo, a probabilidade de o número mostrado ser divisível por 3 ou por 4 é: $P(A \cup B) = \frac{5}{15} + \frac{3}{15} - \frac{1}{15} = \frac{7}{15}$.

Exercícios (Lista 01):

01. Qual a probabilidade de ocorrer um número primo no lançamento de um dado?

02. Um disco tem uma face branca e uma face azul. Se o disco for lançado três vezes, qual a probabilidade de a face branca aparecer pelo menos uma vez?

03. Um casal planeja ter quatro filhos, qual a probabilidade de nascerem dois meninos e duas meninas?

04. Um baralho tem 52 cartas, entre elas, quatro ases. Retiram-se duas cartas deste baralho, uma após a outra. Observa-se que a primeira é um ás. Qual a probabilidade de:

A) A segunda também ser um ás?

B) A segunda não ser um ás?

05. Uma caixa contém 11 bolas idênticas, numeradas de 01 a 11. Retira-se uma bola desta caixa e verifica-se que é um número ímpar. Qual a probabilidade de esse número ser menor que 7?

06. Dois dados são lançados simultaneamente. Em seguida observa-se o número mostrado na face superior em ambos os dados. Qual a probabilidade de:

A) a soma dos números mostrados ser maior que 5?

B) a soma dos números mostrados ser ímpar?

C) os números mostrados serem ambos primos?

07. Uma bola é retirada de uma urna que contém bolas coloridas. A probabilidade de esta bola ser vermelha é $\frac{5}{13}$.

Qual a probabilidade de a bola retirada não ser vermelha?

08. Um grupo de 9 amigos, sendo 4 moças, entre elas Babi, e 5 rapazes, entre eles Bineu, pretende agendar uma reunião com o diretor da escola. Pra esta reunião será formada uma comissão três membros, sendo pelo menos uma moça e pelo menos um rapaz. Qual a probabilidade de Babi e Bineu participarem juntos da reunião?
A) 8% B) 10% C) 15% D) 19%

09. 500 pessoas foram entrevistadas e perguntadas acerca de qual canal de televisão assistem em certo horário. 280 pessoas disseram assistir ao canal A, 250 disseram que assistem ao canal B, 70 disseram que assistem a outros canais e 30 disseram não assistir televisão no referido horário. Escolhido ao acaso, um desses entrevistados, qual a probabilidade de que ele:
A) Assista apenas ao canal A, no horário dito?
B) Assista ao canal B no horário?
C) Assista o canal A ou o canal B?

10. Participaram de uma assembleia 60 médicos, 50 dentistas, 32 enfermeiros, 20 nutricionistas e 38 agentes de saúde. Escolhe-se ao acaso um dos membros desse grupo, qual a probabilidade de que seja médico ou dentista?

Eventos Sucessivos e Independentes (regra do e)
Se dois eventos A e B são sucessivos (ou mesmo simultâneos) e independentes, a probabilidade de que ambos ocorram é:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$

É importante destacar que esta situação vale também para três ou mais ou mais eventos independentes e sucessivos.
Exemplo 6: Um dado e uma moeda são lançados. Qual a probabilidade de dar coroa na moeda e um número ímpar no dado?
Solução: Note que o dado pode oferecer 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 como possíveis resultados. Destes, apenas 1, 3 e 5 são favoráveis, pois são ímpares. Logo a probabilidade de ímpar no dado é $P(I)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$. Na moeda, são apenas duas possibilidades, cara (C) ou coroa (K). Segue assim, que a probabilidade de o resultado ser coroa é $P(K)=\frac{1}{2}$. Logo, $P(I\cap K)=\frac{1}{4}$. É importante que você entenda por que os eventos são independentes.

Probabilidade Condicional
Dado um evento A, suponha que sua probabilidade esteja condicionada ao fato de o evento B já ter ocorrido. Neste caso, dizemos que A está condicionado a B e definimos:

$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ ou ainda $P(A\cap B)=P(A/B)\cdot P(B)$

Exemplo 7: Uma urna contém 10 bolas, sendo 6 azuis e 4 verdes. Duas bolas são retiradas sucessivamente da urna, sem reposição. Qual a probabilidade de que a segunda bola seja azul, dado que a primeira foi verde?
Solução: O evento B (sair bola verde) já ocorreu. Deseja-se com esta informação, calcular-se a probabilidade de a segunda bola ser azul (evento A). Ora, note que como a primeira foi verde, restam 6 bolas azuis, num total de 9. Logo:

$$P(Bola-2-azul)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$$

Exemplo 8: Num cofre há moedas 100 moedas, sendo 50 de R$ 0,50, 25 de R$ 0,25, 10 de R$ 0,10, 5 de R$ 0,05 e as demais de R$ 1,00. Retiram-se três moedas sucessivamente desse cofre, sem reposição. Qual a probabilidade de a primeira ser de R$ 1,00, a segunda de R$ 0,50 e a terceira de R$ 0,25?
Solução: Não custa pensar um pouco. Resposta: $\frac{125}{9702}$.

Exercícios (Lista 02):
11. Uma urna contém duas bolas brancas e cinco bolas vermelhas. Retirando-se ao acaso duas bolas dessa urna, qual a probabilidade de:
A) As bolas serem de cores diferentes?
B) As bolas serem ambas brancas?

12. Uma urna A contém 3 bolas brancas, 4 pretas e 2 verdes. Uma urna B contém 5 bolas brancas, 2 pretas e 1 verde. Uma urna C contém 2 bolas brancas, 3 pretas e 4 verdes. Uma bola é retirada de cada urna. Qual é a probabilidade de as três bolas retiradas da primeira, da segunda e da terceira urna serem, respectivamente, branca, preta e verde?

13. Escolhe-se ao acaso dois números do conjunto $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. A probabilidade de o produto dos números escolhidos ser ímpar é:
A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{2}{9}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{2}{7}$

14. Quatro prêmios serão sorteados entre os 20 melhores alunos da escola, entre eles Tales e Euler. Sabendo que cada aluno só poderá receber um prêmio, qual a probabilidade de Tales ou Euler façam parte do grupo sorteado?
A) $\frac{3}{95}$ B) $\frac{3}{19}$ C) $\frac{7}{19}$ D) $\frac{38}{95}$

15. O técnico de um time especula que a probabilidade de um zagueiro D não ser escalado é 0,2, enquanto a probabilidade de um centrovante J ser escalado é de 0,7. Qual a probabilidade de que o zagueiro e o atacante apareçam na escalação?
A) 0,06 B) 0,14 C) 0,56 D) 0,72

16. Numa urna foram colocados todos os anagramas da palavra VESTIBULAR. Põe-se uma mão na urna e retira-se um desses anagramas. Qual a probabilidade de que o anagrama retirado tenha as vogas juntas?
A) $1/5040$ B) $1/1260$ C) $1/60$ D) $1/30$

17. Num grupo de 12 professores, somente 5 são de Matemática. Escolhendo ao acaso, três professores desse grupo, a probabilidade de que, no máximo um deles seja de Matemática é:
A) $2/11$ B) $4/11$ C) $6/11$ D) $8/11$

18. Em um jogo há duas urnas com 10 bolas do mesmo tamanho em cada urna. A tabela a seguir indica a quantidade de bolas de cada cor em cada urna.

Cor	Urna 1	Urna 2
Amarela	4	0
Azul	3	1
Branca	2	2
Verde	1	3
Vermelha	0	4

Uma jogada consiste em:
I. O jogador apresenta um palpite sobre a cor da bola que será retirada por ele da urna 2;
II. Ele retira aleatoriamente uma bola da urna 1 e a coloca na urna 2, misturando-a com as que lá estão;
III. Em seguida ele retira também uma bola da urna 2;
IV. Se a cor da bola retirada for a mesma do palpite inicial, ele ganha.
Qual cor deve ser escolhida pelo jogador para que ele tenha maior probabilidade de ganhar?

19. Uma prova apresenta 8 questões objetivas (com alternativas de A até E). Qual a probabilidade de pelo menos 5 acertos, no chute?

20. Numa urna há 8 bolas numeradas de 01 a 08. Três bolas são retiradas sucessivamente e sem reposição. Qual a probabilidade de que os números nas bolas retiradas sejam consecutivos?