$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \cdots + \binom{n}{n}y^n$$

$$T_{p+1} = \binom{n}{p} \cdot x^{n-p} \cdot y^p$$

BINÔMIO DE NEWTON

"O homem que não sabe amar nunca chegou a raciocinar, porque até os animais que não raciocinam sabem amar."

Isaac Newton

BINÔMIO DE NEWTON

São conhecidas como Binômios de Newton as expressões como as que estão representadas a seguir:

- $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
- $(x - 1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$
- $(x + 2)^4 = x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16$
- $(x - 1)^5 = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1$
- $(x + y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \dfrac{n(n-1)}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + y^n.$

O DESENVOLVIMENTO DO BINÔMIO DE NEWTON

O desenvolvimento de um binômio do tipo $\mathbf{(x + y)^n}$, com $n \in \mathbb{N}$, pode ser feito aplicando somas de produtos de um número binomial por potências de x e y, como neste resultado aqui abaixo.

$$(x+y)^n = \binom{n}{0} x^n \cdot y^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} \cdot y^1 + \binom{n}{2} x^{n-2} \cdot y^2 + \cdots + \binom{n}{n} x^0 \cdot y^n$$

E aí você já percebe que o binômio $\mathbf{(x + y)^n}$ possui as seguintes características:

- ele possui n + 1 termos;
- as potências de x têm expoentes decrescentes que vão de n a 0;
- as potências de y têm expoentes crescentes que vão de 0 a n.

EXEMPLO RESOLVIDO

01. Escreva a expressão de desenvolvimento dos seguintes binômios.

A) $(x + 3)^4$.

B) $(3x - 2)^6$.

SOLUÇÃO

A) Conforme o resultado anterior, o binômio terá os seguintes termos:

- $\binom{4}{0} \cdot x^4 \cdot 3^0 = 1 \cdot x^4 \cdot 1 = x^4$
- $\binom{4}{1} \cdot x^3 \cdot 3^1 = 4 \cdot x^3 \cdot 3 = 12x^3$
- $\binom{4}{2} \cdot x^2 \cdot 3^2 = 6 \cdot x^2 \cdot 9 = 54x^2$
- $\binom{4}{3} \cdot x^1 \cdot 3^3 = 4 \cdot x \cdot 27 = 108x$
- $\binom{4}{4} \cdot x^0 \cdot 3^4 = 1 \cdot 1 \cdot 81 = 81$

Assim resulta que $(x + 3)^4 = x^4 + 12x^3 + 54x^2 + 108x + 81$

SOLUÇÃO

B) Primeiro escreva a lista de termos do binômio, como a seguir:

- $\binom{6}{0} \cdot (3x)^6 \cdot (-2)^0 = 1 \cdot 729 \cdot x^6 \cdot 1 = 729x^6$
- $\binom{6}{1} \cdot (3x)^5 \cdot (-2)^1 = 6 \cdot 243 \cdot x^5 \cdot (-2) = -2916x^5$
- $\binom{6}{2} \cdot (3x)^4 \cdot (-2)^2 = 15 \cdot 81 \cdot x^4 \cdot 4 = 4860x^4$
- $\binom{6}{3} \cdot (3x)^3 \cdot (-2)^3 = 20 \cdot 27 \cdot x^3 \cdot (-8) = -4320x^3$
- $\binom{6}{4} \cdot (3x)^2 \cdot (-2)^4 = 15 \cdot 9 \cdot x^2 \cdot 16 = 2160x^2$

- $\binom{6}{5} \cdot (3x)^1 \cdot (-2)^5 = 6 \cdot 3 \cdot x \cdot (-32) = -576x$

- $\binom{6}{6} \cdot (3x)^0 \cdot (-2)^6 = 1 \cdot 1 \cdot 64 = 64$

Portanto resulta que

$$(3x - 2)^6 = 729x^6 - 2916x^5 + 4860x^4 - 4320x^3 + 2160x^2 - 576x + 64$$

TERMO GERAL DO BINÔMIO DE NEWTON

Nem sempre, para resolver um problema, é preciso desenvolver todo o binômio de Newton. Na maior parte do tempo, é preciso apenas calcular um termo numa posição específica, por exemplo, o 3º termo ou o termo médio do binômio; em outros casos, basta obter o coeficiente de um termo com uma característica específica, por exemplo, do termo com x^7 ou o termo independente de x.

Nesses casos, o mais conveniente é aplicar um resultado que já permita obter o termo desejado. A expressão que fornece um termo numa posição p + 1, para todo p natural, com p ≥ 0, é:

$$T_{p+1} = \binom{n}{p} \cdot x^{n-p} \cdot y^{p}$$

EXEMPLO RESOLVIDO

03. Considere o desenvolvimento do binômio $\left(2x^3 - \dfrac{1}{x^2}\right)^{10}$ segundo as potências decrescentes de x e determine:

A) o seu 3º termo;

B) o seu termo médio;

C) o coeficiente do termo em que aparece x^{10};

D) o termo independente de x.

SOLUÇÃO

A) Observe que o 3º termo está na posição p + 1 = 3 $\Longrightarrow$ p = 2. Logo

$$T_3 = \binom{10}{2} \cdot \left(2x^3\right)^8 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)^2 = 45 \cdot 256 \cdot x^{24} \cdot 1 \cdot x^{-4} = 11\,520x^{20}$$

Portanto $\mathbf{11\,520x^{20}}$ é o 3º termo do binômio considerado.

B) O binômio dado possui 10 + 1 = 11 termos. Dessa forma, o termo médio ou central, é o termo na posição 6. De um modo geral, para obter o termo médio, quando ele existir, faça $p = \frac{n}{2}$. Aqui tem-se p = 5 e fica:

$$T_{\text{Médio}} = T_6 = \binom{10}{5} \cdot \left(2x^3\right)^5 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)^5 = 252 \cdot 32 \cdot x^{15} \cdot (-1) \cdot x^{-10} = -8\,064x^5$$

Portanto $\mathbf{-8\,064x^5}$ é o termo médio ou central do binômio considerado.

C) Nesse caso, não é obvia a posição do termo onde aparece x^{10}. A sugestão é escrever um termo geral e perceber uma forma de obter p. O termo geral é:

$$\binom{10}{p} \cdot \left(2x^3\right)^{10-p} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)^p$$

Distribuindo os expoentes e depois reduzindo-os em x fica:

$$\binom{10}{p} \cdot 2^{10-p} \cdot x^{30-3p} \cdot (-1)^p \cdot x^{-2p} = \binom{10}{p} \cdot 2^{10-p} \cdot (-1)^p \cdot x^{30-3p-2p}$$

Agora observe que $x^{30-3p-2p}$ deve ser x^{10}. Desse modo $30 - 5p = 10$, portanto $5p = 30 - 10 \Longrightarrow 5p = 20 \Longrightarrow p = 4$. Substituindo obtemos:

$$\binom{10}{4} \cdot 2^{10-4} \cdot (-1)^4 \cdot x^{30-12-8} = 210 \cdot 2^6 \cdot 1 \cdot x^{10} = 210 \cdot 64 \cdot 1 \cdot x^{10} = 13\,440x^{10}$$

Dessa forma, o coeficiente do termo com a potência x^{10} é 13 440.

D) Como visto no item anterior, o binômio tem termo geral dado por

$$\binom{10}{p} \cdot \left(2x^3\right)^{10-p} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)^p.$$

Distribuindo os expoentes e depois reduzindo-os em x obteve-se

$$\binom{10}{p} \cdot 2^{10-p} \cdot (-1)^p \cdot x^{30-3p-2p}.$$

O termo independente de x é aquele em que não aparece x, ou seja, ocorre quando o expoente de x é nulo. Dessa forma $30 - 3p - 2p = 0$. Ou seja, $5p = 30 \Longrightarrow p = 6$. Substituindo no último resultado fica:

$$\binom{10}{6} \cdot 2^{10-6} \cdot (-1)^6 \cdot x^{30-18-12} = 210 \cdot 2^4 \cdot 1 \cdot x^0 = 210 \cdot 16 \cdot 1 \cdot 1 = 3\,360$$

Dessa forma, o termo independente de x é 3 360.

EXERCÍCIOS

QUESTÃO 01

Desenvolva os binômios a seguir.

A) $(3x + 2)^2$

C) $(x + 1)^4$

B) $(2x - 1)^3$

D) $(x - 2)^5$

QUESTÃO 02

Indique o coeficiente do termo onde aparece x^7 no desenvolvimento do binômio $(2x + 4)^{10}$.

A) 983 040
B) 368 640
C) 180 150
D) 81 920
E) 30 060

QUESTÃO 03

Qual é o termo central do binômio $(x + 3)^8$?

A) $1470x^3$

B) $1470x^4$

C) $13068x^3$

D) $20412x^4$

E) $20421x^2$

QUESTÃO 04

Para que o termo médio do binômio $\left(x^3 + \frac{1}{x^2}\right)^n$ seja $252x^5$ deve-se ter n igual a:

A) 10
B) 12
C) 15
D) 8
E) 6

QUESTÃO 05

O valor do termo independente no binômio $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4$ é:

A) 1.
B) 4.
C) 6.
D) -4.
E) -6.

QUESTÃO 06

Qual o termo independente de x no desenvolvimento do binômio $\left(\sqrt[3]{x^2} - \dfrac{2}{\sqrt{x^3}}\right)^{13}$?

A) 1 430
B) 2 680
C) 5 720
D) 11 440
E) 22 880

QUESTÃO 07

No desenvolvimento do binômio $\left(x\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^{12}$ aparece o termo mx^5. O número m vale:

A) 65 913
B) 13 659
C) 59 136
D) 96 531
E) 13 596

QUESTÃO 08

O coeficiente de m^{13} no desenvolvimento do binômio $(m + 2)^{15}$ é:

A) 105
B) 210
C) 360
D) 420
E) 480

QUESTÃO 09

No desenvolvimento de $(x + h)^8$, o coeficiente de x^5 é igual a 7. O valor de 4h será:

A) 1
B) 2
C) 4
D) 8
E) 16

QUESTÃO 10

Considere um número real k positivo tal que o desenvolvimento de $(-2x + k)^{12}$, ordenado segundo as potências decrescentes de x tenha como terceiro termo $264x^{10}$. É correto afirmar que k vale:

A) 1/4
B) 1/8
C) 1/16
D) 1/32
E) 1/64

QUESTÃO 11

Ao se expandir o binômio $\left(x^5 + \frac{1}{x^3}\right)^8$ obtemos termo independente de x igual a:

A) 52
B) 53
C) 54
D) 55
E) 56

QUESTÃO 12

Para que o coeficiente de x^4 no desenvolvimento do binômio $\left(x^2 - \frac{a}{2}\right)^5$ seja igual a $-\frac{5}{32}$ deve-se ter a igual a:

A) 1

B) $\frac{1}{2}$

C) -1

D) $-\frac{3}{2}$

E) -2

QUESTÃO 13

Considere que T é o termo independente de x no desenvolvimento binomial de $\left(x - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^6$. Então o valor $\frac{T}{5}$ é igual a:

A) 48
B) 60
C) 80
D) 120
E) 240

QUESTÃO 14

Desenvolvendo o binômio $\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)\cdot\left(x-\frac{1}{x}\right)\right]^{n}$ obtemos termo independente igual a 70 . O valor n é igual a:

A) 15
B) 10
C) 12
D) 8
E) 6

QUESTÕES COMPLEMENTARES

QUESTÃO 15

Desenvolvendo o binômio $\left(\sqrt[5]{5}+\sqrt[3]{2}\right)^8$ obtemos um único termo racional cujo valor é:

A) 1120
B) 480
C) 560
D) 360
E) 280

QUESTÃO 16

Desenvolvendo o binômio $\left(\sqrt[5]{2}+\sqrt[3]{5}\right)^{20}$ obtemos dois termos racionais. A razão entre o maior e o menor desses termos vale:

A) 96 900 000
B) 48 450 000
C) 6 056 250
D) 3 028 125
E) 160 000

QUESTÃO 17

Considere a expansão de um binômio mostrada pela expressão abaixo:

$$\binom{n}{0}5^n + \binom{n}{1}5^{n-1} + \binom{n}{2}5^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n-1}5 + \binom{n}{n}$$

O valor desta expressão pode ser indicado por:

A) 2^n
B) 3^n
C) 5^n
D) 5^{2n}
E) $2^n \cdot 3^n$

QUESTÃO 18

A soma dos coeficientes dos termos obtidos no desenvolvimento do binômio $(x - 3y)^8$ é:

A) 120

B) 240

C) 256

D) 320

E) 480

QUESTÃO 19

No polinômio $P(x) = (x - 1)(x + 3)^5$, o coeficiente de x^4 é:

A) 14

B) 75

C) 180

D) 135

E) 162

QUESTÃO 20

No cálculo de $\left(x^2 + xy\right)^{18}$, o termo em que o grau de x é 20 vale:

A) $153x^{20}y^{16}$
B) $135x^{20}y^{16}$
C) $126x^{20}y^{16}$
D) $120x^{20}y^{16}$
E) $216x^{20}y^{16}$

QUESTÃO 21 (UCSAL)

O 5º termo do desenvolvimento do binômio $\left(2x^2 + \frac{1}{x}\right)^n$, segundo as potências decrescentes de x, é $1120x^4$. O número n é:

A) primo.
B) divisível por 3.
C) múltiplo de 5.
D) quadrado perfeito.
E) cubo perfeito.

QUESTÃO 22

No desenvolvimento do binômio $\left(2x^2 - \frac{y^3}{4}\right)^8$, o coeficiente do termo médio é uma fração irredutível $\frac{A}{B}$. A diferença entre A e B é:

A) 16.
B) 27.
C) 36.
D) 54.
E) 70.

QUESTÃO 23 (MACK-SP)

A soma dos coeficientes numéricos do desenvolvimento de $(2x-5y)^n$ é 81. Ordenando os termos segundo potencias decrescentes de x, o termo cujo módulo do coeficiente numérico é máximo é

A) o segundo.
B) o terceiro.
C) o quarto.
D) o quinto.
E) o sexto.

QUESTÃO 24

Seja t o número de termos no desenvolvimento do binômio $\left(\sqrt[5]{m} + \sqrt[10]{n}\right)^{55}$ que não contenham radicais. O valor t é:

A) 8
B) 7
C) 6
D) 5
E) 4

QUESTÃO 25

Observa-se que no desenvolvimento de $\left(x^2 + \frac{3}{x}\right)^m$, $m \in \mathbb{N}$, os coeficientes binomiais do quarto e do décimo são iguais. Nessa situação, segundo as potências decrescentes de x, o termo independente de x é o

A) 15º
B) 13º
C) 12º
D) 9º
E) 7º

QUESTÃO 26

Sabe-se que os três primeiros coeficientes obtidos no desenvolvimento de $\left(x + \frac{1}{2x}\right)^k$ estão em progressão aritmética. Daí se conclui que o valor de k é:

A) 4.
B) 6.
C) 8.
D) 10.
E) 12.

GABARITOS E RESPOSTAS

01. **sugestão**: desenvolva e verifique no aplicativo mathway.

02. A
03. C
04. A
05. C
06. D
07. C
08. D
09. B
10. C
11. E
12. B
13. A
14. D
15. C
16. C
17. E
18. C
19. B
20. A
21. E
22. B
23. C
24. C
25. D
26. C