Matemática

Quadro-Resumo

Álgebra Elementar

Simbologia

$\wedge$ (e)
$\vee$ (ou)
$|$ (tal que)
$\exists$ (existe)
$\nexists$ (não existe)
$\forall$ (qualquer que seja)
$\varnothing$ (vazio)
$\in$ (pertence)
$\notin$ (não pertence)
$\supset$ (contém)
$\not\supset$ (não contém)
$\subset$ (contido)
$\not\subset$ (não contido)

Conjuntos

Interseção

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \}$$

União

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \vee x \in B \}$$

Diferença

$$A - B = \{ x \mid x \in A \wedge x \notin B \}$$

Complementar

se $B \subset A$ então $C_A^B = A - B$

Logaritmos

$$\boxed{\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b}$$

onde:

$a, b, x \in R$
$a > 0$ e $a \neq 1$ e $b > 0$

Decorrências da definição

$\log_a 1 = 0$ ($\forall\ 0 < a \neq 1$)
$\log_a a = 1$ ($\forall\ 0 < a \neq 1$)
$a^{\log_a b} = b$ ($0 < a \neq 1$ e $b > 0$)
$\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$ ($0 < a \neq 1$, $b > 0$ e $c > 0$)

Propriedades operatórias

$$\log_a b + \log_a c = \log_a bc$$
$$\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$$
$$\log_a b^\alpha = \alpha \cdot \log_a b$$
$$\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha} \cdot \log_a b$$

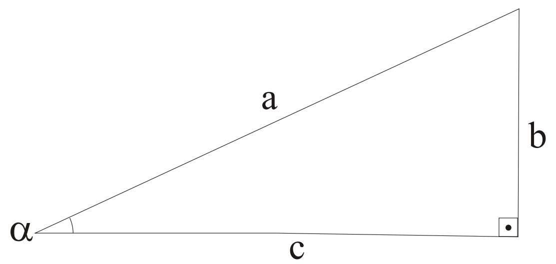
Mudança de base

$$\boxed{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}}$$

Trigonometria

Razões Trigonométricas

Seja um triângulo retângulo, fixando um ângulo agudo α, temos:



seno - é a razão entre o cateto oposto ao ângulo e a hipotenusa:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{b}{a}$$

cosseno - é a razão entre o cateto oposto ao ângulo e a hipotenusa:

$$\cos\alpha = \frac{c}{a}$$

tangente - é a razão entre o cateto oposto ao ângulo e o cateto adjacente ao ângulo:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{c}$$

Funções

Estudo da função

Uma relação R: $A \rightarrow B$ será uma função de A em B, se e somente se:

- $D(R) = A$
- Cada elemento $x \in A$ se relaciona (forma par) com um único elemento B.

Notação: $f: A \rightarrow B$ ou $y = f(x)$

Função do 2º grau

- $f: R \rightarrow R$, definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$
- $D(f) = R$
- Coordenadas do vértice: $V = \left(\frac{-b}{2a} ; \frac{-\Delta}{4a} \right)$
- Se $a > 0$, valor mínimo $= y_v$.
- Se $a < 0$, valor máximo $= y_v$.

Para lembrar...

Lembre-se da frase: “Corri, caí e tomei uma coca”.
corri - co/hip (cateto oposto/hipotenusa) = seno
caí - ca/hip (cateto adjacente/hipotenusa) = cosseno
coca - co/ca (cateto oposto por adjacente) = tangente

Valores notáveis

	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Radianos - Graus

$$180° = \pi \text{ rad}$$
$$y° = x \text{ rad}$$
$$x = \frac{y° \pi}{180°}$$

De ***1*** temos:

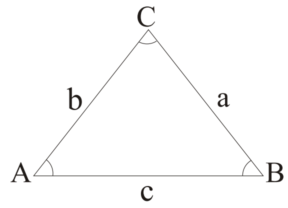
$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\text{cotg}^2\alpha + 1 = \text{cossec}^2\alpha$$
$$\text{tg}^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha$$

De ***2*** temos:

$$\text{tg}\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} \quad \text{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\alpha}$$
$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \quad \text{cossec}\alpha = \frac{1}{\text{sen}\alpha}$$

Triângulos Quaisquer

Seja um triângulo abc, qualquer:



Lei dos Senos:

$$\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B} = \frac{c}{\text{sen}C}$$

Lei dos Cossenos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos B$$
$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ab.\cos C$$

Transformação de Arcos

Arcos negativos:

$$\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}\alpha$$
$$\text{tg}(-\alpha) = -\text{tg}\alpha$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

Adição/Subtração de arcos:

$$\text{sen}(a+b) = \text{sen}\, a \,.\, \cos b + \text{sen}\, b \,.\, \cos a$$
$$\text{sen}(a-b) = \text{sen}\, a \,.\, \cos b - \text{sen}\, b \,.\, \cos a$$
$$\cos(a+b) = \cos a \,.\, \cos b - \text{sen}\, a \,.\, \text{sen}\, b$$
$$\cos(a-b) = \cos a \,.\, \cos b + \text{sen}\, a \,.\, \text{sen}\, b$$

$$\text{tg}(a+b) = \frac{\text{tg}\, a + \text{tg}\, b}{1 - \text{tg}\, a \,.\, \text{tg}\, b} \quad \text{tg}(a-b) = \frac{\text{tg}\, a - \text{tg}\, b}{1 + \text{tg}\, a \,.\, \text{tg}\, b}$$

Arco dobro:

$$\text{sen}(2a) = 2 \,.\, \text{sen}\, a \,.\, \cos a$$
$$\cos(2a) = \cos^2 a - \text{sen}^2 a$$
$$\text{tg}(2a) = \frac{2\text{tg}a}{1 - \text{tg}^2 a}$$

Arco metade:

$$\text{sen}(x/2) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$
$$\cos(x/2) = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$
$$\text{tg}(x/2) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$$

PG (Progressões Geométricas)

Termo geral

$$\boxed{a_n = a_1 \,.\, q^{n-1}}$$

Soma dos termos

$$\boxed{S_n = \frac{a_1 - a_n \,.\, q}{1 - q}} \Leftrightarrow \boxed{S_n = \frac{a_1 \,.\, (1 - q^n)}{1 - q}}$$

PG infinita (–1 < q < 1)

$$\boxed{S = \frac{a_1}{1 - q}}$$

Média da PG

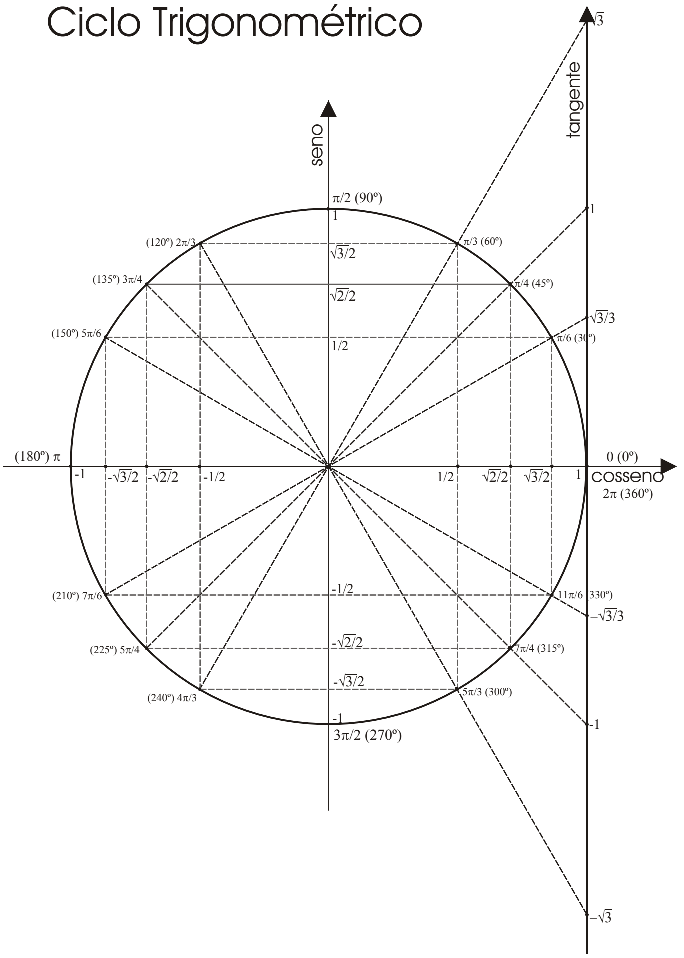
Seja uma PG(...,a,b,c,...)

$$b = \sqrt{a \,.\, c}$$

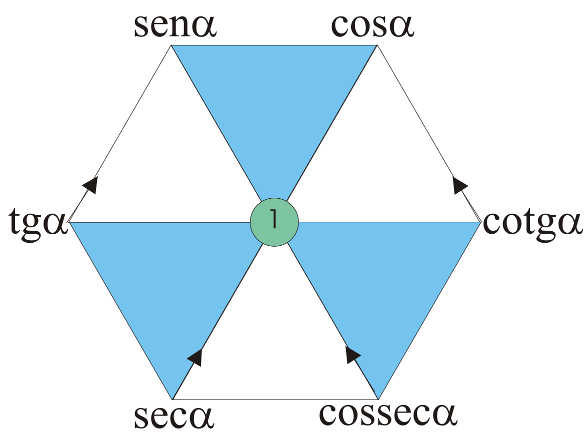
Escrevendo 3 termos consecutivos

$$(\ldots, xq^{-1}, x, xq)$$

Ciclo Trigonométrico



Relações Trigonométricas Fundamentais



A partir desse hexágono, podemos retirar todas as relações trigonométricas fundamentais. Notemos as seguintes propriedades:

1) Somamos o quadrado de dois vértices dos triângulos azuis (tendo que a reta base do segmento de reta formado por esses dois vértices deve ser paralela ao eixo tg-cotg) e igualamos à 'ponta' do triângulo.

2) Seguindo as setas, igualamos o primeiro vértice à razão dos dois vértices seguintes.

Matrizes

Matriz *m* x *n* é uma tabela de números reais, dispostos em *m* linhas e *n* colunas.

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & \dots & . \\ . & . & . & \dots & . \\ . & . & . & \dots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Onde a_{ij} indica a posição de cada elemento, sendo i = linha e j = coluna.

Casos Especiais

Matriz quadrada: m = n
Matriz linha: m = 1
Matriz coluna: n = 1
Matriz nula: $a_{ij} = 0, \forall\, i, j.$

Adição de matrizes

Tendo as duas matrizes o mesmo número de linhas e colunas, soma-se cada elemento um a um.

Propriedades

associativa: (A + B) + C = A + (B + C)
comutativa: A + B = B + A
elemento neutro: A + O = 0 + A = A

Progressões

PA (Progessões Aritméticas)

Termo geral

$$\boxed{a_n = a_1 + (n - 1)\,.\,r}$$

Soma dos termos

$$\boxed{S_n = \frac{(a_1 + a_n)\,.\,n}{2}}$$

Média da PA

Tendo-se uma PA(...,a,b,c,..)

$$\boxed{b = \frac{a + c}{2}}$$

Reescrevendo 3 termos consecutivos

PA(...,x – r, x, x + r)

elemento oposto: $A + (-A) = O$.

Multiplicação de um numero real por uma matriz
Multiplica-se todos os elementos da matriz pelo número real.

Multiplicação de duas matrizes
Dadas duas matrizes A e B, o produto AB só existe se o número de colunas de A for igual ao número de linhas de B, pois A é do tipo $m \times n$ e B é do tipo $n \times p$.
O produto AB é uma matriz que tem o número de linhas de A e o número de colunas de B, pois $C = AB$ é do tipo $m \times p$.
Ainda pela definição, deve-se obter cada elemento c_{ik} da matriz AB da seguinte forma:
(I) Toma-se a linha *i* da matriz A.
(II) Toma-se a coluna *k* da matriz B.
(III) Coloca-se a linha *i* de A na 'vertical' ao lado da coluna *k* de B.
(IV) Calcula-se os *n* produtos dos elementos que ficaram lado a lado.
(V) Somam-se esses *n* produtos, obtendo c_{ik}.

Propriedades
associativa: $(AB).C = A.(BC)$
distributiva à dir.: $(A+B).C = AC + AB$
distributiva à esq.: $A.(B+C) = AB + AC$

Transposta de uma matriz

Determinantes

Determinante de matriz de ordem 2

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Determinante de matriz de ordem 3

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

Repetimos as duas primeiras colunas ao lado do determinante e a seguir multiplicamos os elementos na direção das flechas. Os produtos dos elementos indicados pelas flechas azuis são somados e os dos elementos indicados pelas flechas vermelhas são subtraídos. Está é a regra de Sarrus, só válida para determinantes de ordem 3.

Menor complementar
Se a_{ij} é um elemento da matriz A de ordem n, então o menor complementar do elemento a_{ij} é o determinante que se obtém retirando-se a linha i e a coluna j da matriz A. Indicamos o menor complementar do elemento a_{ij} por M_{ij}.

Complemento algébrico ou cofator
Indica-se por A_{ij} e é dado por:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

Determinantes do produto de matrizes
Sendo A e B matrizes quadradas de mesma ordem então:

$$\boxed{\det(A.B) = \det A \cdot \det B}$$

Determinante de inversa de uma matriz:

$$\boxed{\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}}$$

Obs.: uma matriz A só é inversível se, e somente se, $\det A \neq 0$.

Análise Combinatória

Fatorial
$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1 \Rightarrow n \cdot (n-1)!$
$1! = 1$
$0! = 1$

Princípio multiplicativo
Se um evento A pode ocorrer de *m* maneiras distintas e a seguir, um evento B pode ocorrer de *n* maneiras distintas, então o número de probabilidades de ocorrer A seguido de B é *m* vezes *n*.

Arranjos simples
São agrupamentos onde a ordem com que os elementos participam é considerada e não existe repetição de elementos. É dado pela fórmula:

$$\boxed{A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}}$$

Permutações simples
São arranjos onde n = p.

$$\boxed{P_n = n!}$$

Combinações simples
São agrupamentos onde não importa a ordem dos elementos.

$$\boxed{C_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!}}$$

Teorema de Laplace

O determinante de uma matriz quadrada de ordem n(n>1), é igual à soma dos produtos dos elementos de uma fila (linha ou coluna) pelos seus respectivos cofatores.

Propriedades dos determinantes

- $\boxed{\det A^t = \det A}$
- Trocando-se a posição de duas filas paralelas de uma matriz, seu determinante não se altera em módulo, apenas trocando de sinal.
- Se duas filas paralelas de uma matriz são iguais, então seu determinante é nulo.
- Multiplicando-se (ou dividindo-se) uma fila qualquer de uma matriz por um número, seu determinante fica multiplicado (ou dividido) por esse número.
- Sendo A, uma matriz quadrada de ordem n, e α o um número real, então:

$$\det(\alpha \cdot A) = \alpha^n \cdot \det A$$

- Se uma fila de uma matriz é formada por somas de duas parcelas, então seu determinante é igual à soma de outros dois determinantes: o primeiro formado com as primeiras parcelas e o segundo formado com as segundas parcelas, inalteradas as demais filas.
- Teorema de Jacobi: um determinante não se altera quando se soma a uma de suas filas uma outra fila paralela previamente multiplicada por uma constante.

Sendo A uma matriz do tipo $m \times n$, a transposta de A, que se indica por A^t, é a matriz do tipo $n \times m$ que se obtém trocando as linhas por colunas da matriz A. Isto é, a 1ª linha de A^t é igual à 1ª coluna de A, a 2ª linha de A^t é igual a 2ª coluna de A e assim sucessivamente.

Propriedades

$$(A^t)^t = A$$
$$(A+B)^t = A^t + B^t$$
$$(\alpha \cdot A)^t = \alpha \cdot A^t$$
$$(AB)^t = B^t \cdot A^t$$

Matriz Identidade

$I_n = (a_{ij})_{n\times n}$ onde $a_{ij} = 1$ (se $i = j$) e $a_{ij} = 0$ (se $i \neq j$)

Propriedade

$$A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$$

Inversão de matrizes

A matriz inversa da matriz quadrada A, se existir, será indicada por A^{-1} e será tal que:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

Propriedades

$$(A^{-1})^{-1} = A$$
$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$$
$$(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

Binômio de Newton

Número binomial

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!}$$

Binomais complementares

$\binom{n}{p}$ e $\binom{n}{k}$ são binomiais complementares se: $\boxed{p + k = n}$

Igualdade de binomiais

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{k} \Leftrightarrow p = k \text{ ou } p + k = n$$

Triângulo de Pascal

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1
$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	...	$\binom{n}{n-1}$	$\binom{n}{n}$	

Propriedades

- A soma dos binomiais de uma linha é igual a 2n, onde n é o "numerador" dos binomiais.

Sistemas lineares

Todo sistema com uma ou mais equações do tipo:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b$$

Regra de Cramer

Um sistema linear de n equações a n incógnitas pode ser resolvido pela regra de Cramer:

$$\boxed{x_1 = \frac{D_{x1}}{D},\ x_2 = \frac{D_{x2}}{D},\ \ldots,\ x_n = \frac{D_{xn}}{D}}$$

Classificação

- Se $D \neq 0$, sistema possível e determinado.
- Se $D = D_{x1} = D_{x2} = \ldots = D_{xn} = 0$, sistema possível e indeterminado
- Se $D = 0$ e ($D_{x1} \neq 0$ ou $D_{x2} \neq 0$ ou ... $D_{xn} \neq 0$) o sistema é impossível.

Sistemas lineares homogêneos

É o sistema linear que possui os termos independentes de todas as suas equações iguais a zero.

Para um sistema linear homogêneo teremos:

- Se $D \neq 0$, o sistema admitirá uma única solução que será (0;0;0;...;0), chamada solução trivial.
- Se $D = 0$, o sistema será possível e indeterminado admitindo infinitas soluções.

- Relação de Stifel: a soma de dois binomiais “vizinhos” de uma mesma linha é igual ao binomial situado imediatamente abaixo do segundo número somado.

$$\boxed{\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}}$$

Binômio de Newton

$$(x+a)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}a^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}a^2 + \ldots + \binom{n}{n}a^n$$

obs.: o desenvolvimento $(x + a)^n$ é formado de $n + 1$ termos.

Termo Geral

$$\boxed{T_{p+1} = \binom{n}{p} \cdot x^{n-p} \cdot a^p}$$

Onde T_{p+1} representa o termo de ordem $p + 1$ do desenvolvimento de $(x + a)^n$.

Potências de i

$$\begin{cases} i^0 = 1 \\ i^1 = i \\ i^2 = -1 \\ i^3 = -i \\ i^4 = 1: \end{cases} \qquad \boxed{i^n = i^r,\ n \in N}$$

onde: $r = 0, 1, 2$ ou 3:

$$\begin{array}{c|l} n & 4 \\ \hline r & q \end{array}$$

resto

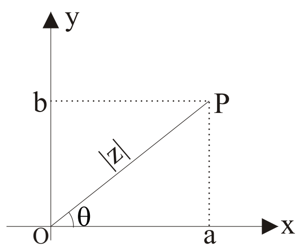
Adição/Subtração/Mutiplicação

Na adição e subtração, adicionam-se e subtraem-se separadamente as partes complexas e as imaginárias. Na multiplicação usa-se a propriedade distributiva, e do fato que $i^2 = -1$.

Divisão

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}}}$$

Representação Gráfica



O número complexo $z = a + bi$ é representado pelo ponto $P(a;b)$ no plano de Argand-Gauss.
P: é o afixo de z;
Ox: eixo real;
Oy: eixo imaginário.

Polinômios

$$\boxed{P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}$$

Polinômio identicamente nulo

$P(x) \equiv 0 \Leftrightarrow P(\alpha) = 0, \forall \alpha$

$P(x) \equiv 0 \Leftrightarrow a_0 = a_1 = \ldots = a_{n-1} = a_n = 0$

Polinômios idênticos

$A(x) \equiv B(x) \Leftrightarrow A(\alpha) = B(\alpha), \forall \alpha.$

Grau de um polinômio

É o maior expoente de x, com coeficiente não nulo, que aparece em P(x).

gr(P) ou δP

Se $P(x) \equiv 0$, não se define gr(P).

Divisão de polinômios

$$\begin{array}{c|c} A(x) & B(x) \\ \hline R(x) & Q(x) \end{array}$$

Temos que:

$$A(x) \equiv B(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

(desde que $gr(R) < gr(B)$ ou $R(x) \equiv 0$).

Teorema do resto

O resto da divisão de um polinômio P(x) por $x - a$ é igual a P(a).

$$r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 + r_1 \cdot r_2 \cdot r_4 + \ldots + r_{n-2} \cdot r_{n-1} \cdot r_n = -\frac{a_3}{a_0}$$

$$r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \ldots r_n = (-1)^n \cdot \frac{a_n}{a_0}$$

Propriedades

- Se a soma dos coeficientes de um dado polinômio P(x) é 0, então P(x) admite 1 como raiz.
- Se a soma da diferença dos coeficientes simétricos de um dado polinômio P(x) é 0, então P(x) admite -1 como raiz.

Números Complexos

Unidade Imaginária

$$\boxed{i^2 = -1}$$

Definição de número complexo

$$\boxed{z = a + b\ .\ i}$$

onde:

$$\begin{cases} a \in R,\ a = \text{parte real} \\ b \in R,\ b = \text{coeficiente da p. imaginária} \\ i = \text{unidade imaginária} \end{cases}$$

números imaginários puros:
São os complexos onde $a = 0$ e $b \neq 0$
números reais:
São os complexos onde $b = 0$.

Conjugado de um número complexo
Dado um complexo: $z = a + b\ .\ i$, definimos como seu conjugado: $\boxed{\bar{z} = a - b\ .\ i}$

Igualdade de Complexos
Iguala-se a parte real com a outra parte real e o coeficiente da parte imaginária com o coeficiente da outra parte imaginária.

Módulo

$$z = a + bi \Rightarrow \boxed{\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

Argumento
É o ângulo θ determinado pelo eixo real Ox e o segmento OP, medido no sentido anti-horário a partir do eixo real.

$$\boxed{\cos\theta = \frac{a}{|z|}} \quad \boxed{\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{|z|}}$$

Forma trigonométrica

$$z = a + bi \Leftrightarrow z = |z|\ .\ (\cos\theta + i\ .\ \operatorname{sen}\theta)$$

Operações na Forma Trigonométrica

Multiplicação

$$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\ .\ \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)]$$

Divisão

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\ .\ \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)]$$

Potenciação

$$z^n = \rho^n\ .\ [\cos(n\theta) + i\ .\ \operatorname{sen}(n\theta)]$$

Geometria Analítica

Distância entre dois pontos

$$d_{AB} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

Ponto médio

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

Baricentro do triângulo

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$$

Área do Triângulo

$$A = \frac{1}{2}\ .\ \text{mód}\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

Alinhamento de três pontos
Se A, B e C são colineares, detS = 0. Onde S é a matriz formada com as coordenadas dos três pontos.

Equação geral da reta

$$\boxed{\mathbf{a.x + b.y + c = 0}}$$

Teorema de D'Alambert
Um polinôimo P(x) é divisível por $x - a$, se e somente se, $P(a) = 0$.

Teorema fundamental da algebra
Toda equação algébrica de grau n, onde $n > 0$, admite pelo menos uma raíz complexa.

Teorema da decomposição
$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$, pode ser fatorado em:
$P(x) = a_0(x - r_1)\ .\ (x - r_2)\ ...\ (x - r_n)$ onde $r_1, r_2, ... r_n$ são as raízes de P(x).

Multiplicidade de uma raiz
Se $P(x) = (x - r)^m\ .\ Q(x)$ e $Q(r) \neq 0$, então r é uma raiz com multiplicidade m de $P(x) = 0$.

Teorema das raízes complexas
Seja P(x) um polinômio de grau n, onde $n > 1$, com coeficientes reais, se $P(z) = 0$, então $P(\bar{z}) = 0$, onde $z = a + bi$ e $\bar{z} = a - bi$ (com $a \in R$ e $b \in R^*$).

Relações de Girard
Seja $a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0$, e suas raízes $r_1, r_2, ..., r_n$:

$$r_1 + r_2 + r_3 + ... + r_n = -\frac{a_1}{a_0}$$

$$r_1.r_2. + r_1.\ r_3 + ... + r_{n-1}.r_n = \frac{a_2}{a_0}$$

Obtendo eq. geral pelo determinante

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow ax + by + c = 0$$

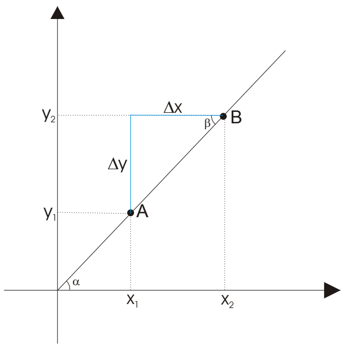
Equação reduzida

$$r: ax + by + c = 0 \Rightarrow y = -\frac{a}{b}x + -\frac{c}{b}$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$\boxed{y = m \,.\, x + n}$$

m = coeficiente angular ou declividade



$$m = \frac{-a}{b} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\alpha$$

α = inclinação

n = coeficiente linear: ordenada do ponto em que a reta (não vertical) intercepta o eixo das ordenadas.

Observação: Na equação de uma circunferência, temos, necessariamente:

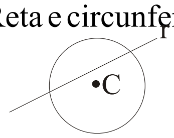
- **Os coeficientes de x^2 e y^2 são iguais, inclusive em sinal e não nulos. Se o coeficiente de x^2 for diferente de 1, deve-se dividir toda a equação por ele.**
- **Não pode existir termo x.y na equação.**
- **O termo independente p é tal que:**

$$R^2 = a^2 + b^2 - p > 0$$

(numa circunferência o raio é sempre positivo)

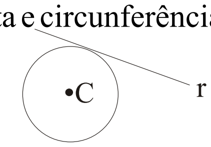
Posições relativas entre reta e circunferência

- Reta e circunferência secantes:



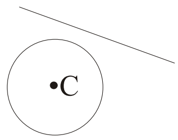
$\boxed{d_{Cr} < R}$

- Reta e circunferência tangentes:



$\boxed{d_{Cr} = R}$

- Reta externa à circunferência:



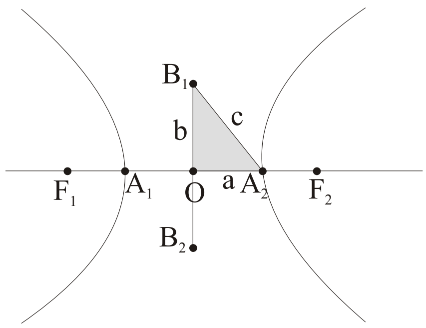
$\boxed{d_{Cr} > R}$

Propriedade do lugar geométrico

A soma das distâncias de qualquer ponto da elipse aos focos F_1 e F_2 é constante e igual ao segmento $\overline{A_1A_2}$.

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$$

Hipérbole



F_1 e $F_2 \rightarrow$ focos

$O \rightarrow$ centro

$A_1A_2 \rightarrow$ eixo real ou transverso

$B_1B_2 \rightarrow$ eixo imaginário

$2c \rightarrow$ distância focal

$2a \rightarrow$ medida do eixo real

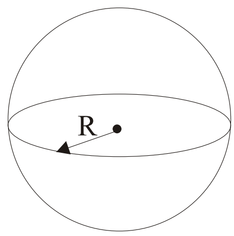
$2b \rightarrow$ medida do eixo imaginário

$\frac{c}{a} \rightarrow$ excentricidade

relação notável: $\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$

Geometria Espacial

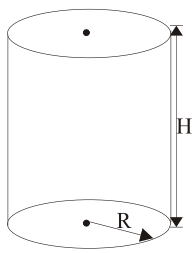
Esfera



$$\boxed{V = \frac{4}{3} \,.\, \pi \,.\, R^3}$$

$$\boxed{S = 4 \,.\, \pi \,.\, R^2}$$

Cilindro Reto

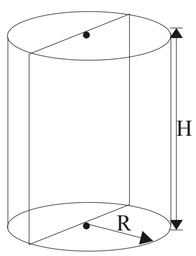


$V = B \,.\, H$

$V = \pi \,.\, R^2 \,.\, H$

S_L (área lateral) $= 2 \,.\, \pi \,.\, R \,.\, H$

S_T (área total) $= 2\pi R(R + H)$

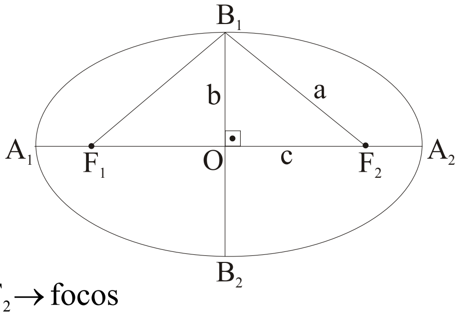


Secção meridiana

É o retângulo resultante da intersecção do cilindro com um plano que contém os centros das bases.

Quando o cilindro é eqüilátero H = 2R; neste caso a secção meridiana é um quadrado.

Elipse



F_1 e $F_2 \rightarrow$ focos

$O \rightarrow$ centro

$A_1A_2 \rightarrow$ eixo maior

$B_1B_2 \rightarrow$ eixo menor

$2c \rightarrow$ distância focal

$2a \rightarrow$ medida do eixo maior

$2b \rightarrow$ medida do eixo menor

$\frac{c}{a} \rightarrow$ excentricidade

relação notável: $\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$

Equação reduzida

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$ para o eixo principal paralelo ao eixo x

$$\frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1$$ para o eixo principal paralelo ao eixo y

Equação da reta, dado um ponto e o coeficiente angular

$$r: y - y_0 = m(x - x_0)$$

Posição relativa de duas retas

Se duas retas r e s são paralelas $m_r = m_s$.

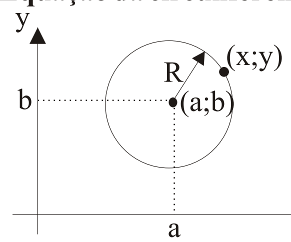
Se duas retas r e s são perpendiculares $m_r = \frac{-1}{m_s}$

Distância de ponto a reta

Dado o ponto $P(x_0, y_0)$, e a reta $r: ax + by + c = 0$:

$$\boxed{d_{pr} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

Equação da circunferência



$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

$$x^2 + y^2 - 2a.x - 2b.y + p = 0$$

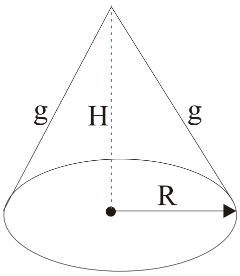
Cálculo do centro e do raio

$$x^2 + y^2 \underbrace{-2a}_{\Downarrow}.\ x \underbrace{-2b}_{\Downarrow}.\ y + p = 0$$

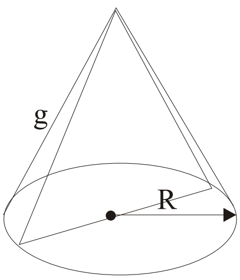
$\boxed{\text{metade com sinal trocado}} \Rightarrow C(a;b)$

p (termo indenpendente) $\Rightarrow p = a^2 + b^2 - R^2$

Cone reto



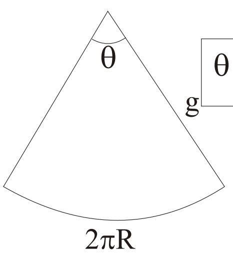
$$\boxed{\begin{gathered} V = \frac{1}{3} . \pi . R^2 . H \\ S_L = \pi . R . g \\ S_T = \pi R (R + g) \end{gathered}}$$



Secção meridiana

É o triângulo resultante da intersecção do cone com um plano que contém o vértice do cone e o centro da base.

Obs.: o cone eqüilátero é aquele em que g = 2R; neste caso a secção meridiana é um triângulo eqüilátero.



$\boxed{\theta = \frac{2\pi R}{g} \text{ rad}}$ ou $\boxed{\theta = \frac{360R}{g} \text{ graus}}$

Equação reduzida

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$ para o eixo real paralelo ao eixo x

$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1$$ para o eixo real paralelo ao eixo y

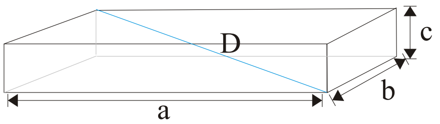
Propriedade do lugar geométrico

A diferença da distância de qualquer ponto da hipérbole aos focos F_1 e F_2 é constante e igual ao segmento $\overline{A_1A_2}$.

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$$

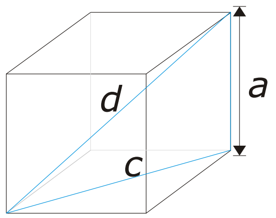
Paralelepípedo retângulo

É um prisma de seis faces, todas retangulares.



$$V = a\ .\ b.\ c$$
$$S = 2\ .\ (ab + ac + bc)$$
$$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Cubo



$$V = a^3$$
$$S = 6\ .\ a^2$$
$$D = a\sqrt{3}$$

Pirâmide

Base: em forma de polígono.
Faces laterais: são triângulares.

$$V = \frac{1}{3}\ .\ B\ .\ H$$

Obs.: Pirâmide regular: a base é um polígno regular; as faces laterais são triângulos isósceles.

Geometria Plana

Ângulo

Tipos de ângulos

Ângulo reto = 90º
Ângulo agudo = entre 0º e 90º
Ângulo obtuso = entre 90º e 180º
Ângulo raso = 180º
Ângulo complementares = soma = 90º
Ângulos suplementares = soma = 180º

Polígonos

Soma dos ângulos internos:

$$S_i = (n - 2)\ .\ 180^\circ$$

Soma dos ângulos externos (p/ convexos):

$$S_e = 360^\circ$$

Número de diagonais:

$$D = \frac{n\ .\ (n - 3)}{2}$$

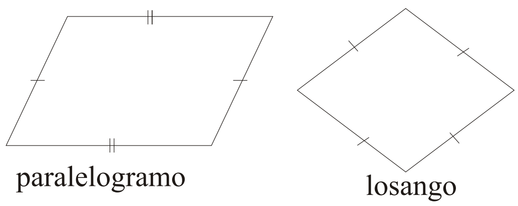
Polígonos regulares

- Todos os lados de mesma medida e
- Todos os ângulos internos iguais.

Triângulos

São os polígonos de 3 lados

Quadriláteros



Retângulo	4 ângulos retos
Losango	4 lados iguais
Quadrado	4 ângulos retos e 4 lados iguais

Trapézios

Um par de lados paralelos, chamados de bases; os outros dois lados não sao paralelos.

Trapézio isósceles: lados não paralelos são iguais; os ângulos adjacentes das bases são iguais.
Trapézio retângulo: tem dois ângulos retângulos
Trapézio escaleno: os lados não paralelos são desiguais.

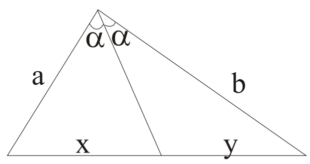
Quadrilátero inscritível

Se e somente se os ângulos opostos somam 180º.

Quadrilátero circunscritível

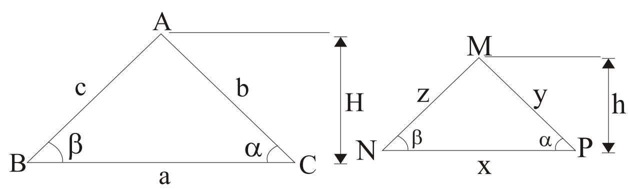
Se e somente se a soma de dois lados opostos é igual à soma dos outros dois lados.

Teorema da bissetriz interna



$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$$

Semelhança de triângulos



$$\left.\begin{matrix}\hat{B} = \hat{N} = \beta \\ \hat{C} = \hat{P} = \alpha\end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta MNP \Rightarrow$$

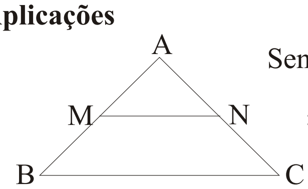
$$\Rightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} = k$$

$$\Rightarrow \frac{per(\Delta ABC)}{per(\Delta MNP)} = k$$

$$\frac{H}{h} = k$$

$$\frac{área(\Delta ABC)}{área(\Delta MNP)} = k^2$$

Aplicações



Sendo M e N pontos médios:

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix}\overline{MN} \mathbin{//} \overline{BC} \\ MN = \dfrac{\overline{BC}}{2}\end{matrix}\right.$$

Propriedades angulares
Soma dos ângulos internos = 180º
Soma dos ângulos externos = 360º
Teorema do ângulo externo: “Cada ângulo externo é igual à soma dos dois internos não adjacentes.”

Segmentos notáveis
altura - ângulo de 90º em relação a base, unindo ao ângulo oposto.
bissetriz - divide o ângulo em duas partes.
mediatriz - perpendicular ao meio do segmento.
mediana - une o ponto médio ao ângulo oposto.

Pontos notáveis

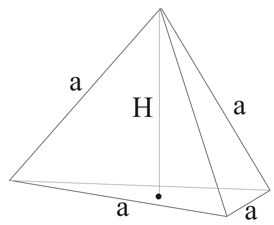
Ortocentro	Intersecção das alturas
Incentro	Intersecção das bissetrizes
Circuncentro	Interceção das mediatrizes
Baricentro	Intersecção da medianas

Classificação

Eqüilátero	3 lados iguais: 3 ângulos de 60º
Isósceles	2 lados iguais, ângulos da base com medidas iguais.
Escaleno	lados todos diferentes
Retângulo	1 ângulo reto
Acutângulo	3 ângulos agudos
Obtusângulo	1 ângulo obtuso, 2 agudos.

Tetraedro regular

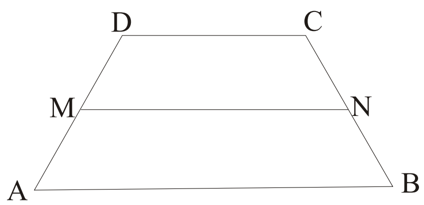
É uma pirâmide de base triângular regular; todas as quatro faces são triângulos eqüiláteros.



$$\boxed{B = \frac{a^2 . \sqrt{3}}{4}}$$

$$\boxed{H = \frac{a . \sqrt{6}}{3}}$$

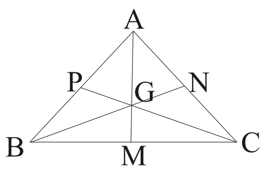
$$\boxed{V = \frac{a^2 . \sqrt{2}}{12}}$$



ABCD: Trapézio M e N: pontos médios.

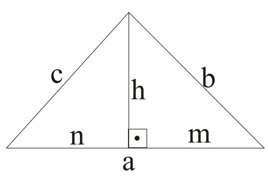
$$\boxed{MN = \frac{AB + CD}{2} \text{ (base média)}}$$

Propriedades do baricentro do triângulo



$$\begin{cases} AG = 2GM \\ BG = 2GN \\ CG = 2GP \end{cases}$$

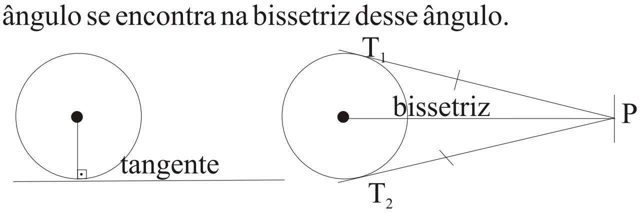
Relações Métricas em Triângulos Retângulos



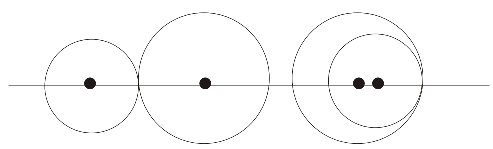
$ah = bc$
$h^2 = mn$
$b^2 = am$
$c^2 = an$

Tangências

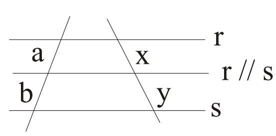
Retas e circunferências
- São tangentes quando tem um único ponto em comum.
- O raio traçado no ponto de tangência é perpendicular à reta tangente.
- De um ponto externo a uma circunferência é possível traçar duas tangentes de comprimentos iguais: $\overline{PT_1} = \overline{PT_2}$
- O centro da circunferência tangente aos lados de um ângulo se encontra na bissetriz desse ângulo.



Circunferências tangentes
- São tangentes quando têm um único ponto comum.
- O ponto de tangência e os dois centros sempre estão sobre a mesma reta.



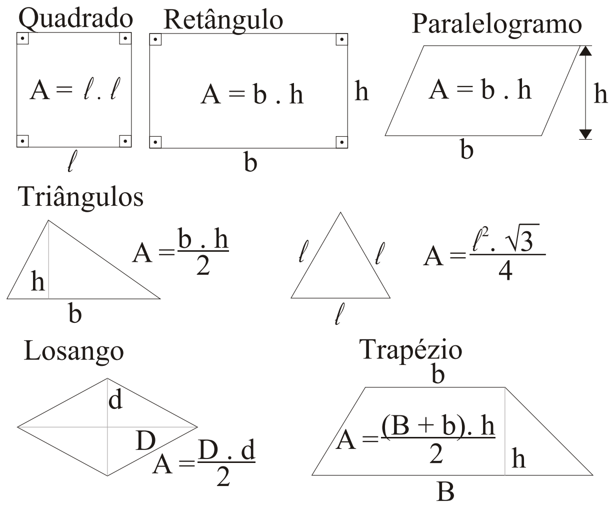
Teorema de Tales



$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{x}{y}}$$

Áreas das figuras planas

Área dos polígonos



Quadrado

$$A = \ell \,.\, \ell$$

Retângulo

$$A = b \,.\, h$$

Paralelogramo

$$A = b \,.\, h$$

Triângulos

$$A = \frac{b \,.\, h}{2}$$

$$A = \frac{\ell^2 \,.\, \sqrt{3}}{4}$$

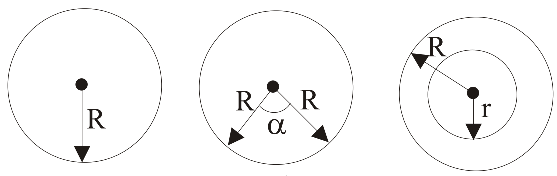
Losango

$$A = \frac{D \,.\, d}{2}$$

Trapézio

$$A = \frac{(B + b) \,.\, h}{2}$$

Área do círculo e suas partes



$$A = \pi \,.\, R^2$$

$$A = \frac{\pi R^2 \,.\, \alpha}{360}$$

$$A = \pi\,(R^2 - r^2)$$

nota: $C = 2 \,.\, \pi \,.\, R$