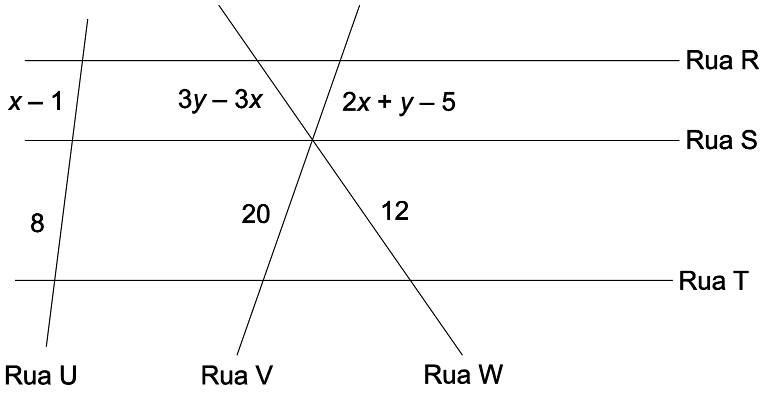
Sumário

Questão 1 (Assunto: Teorema de Tales)

A disposição de seis ruas foi representada usando o esquema abaixo:



Sabendo que as ruas R, S e T são paralelas entre si, determine os valores de *x* e de *y*.

Dê as respostas usando a unidade de medida quilômetro (km).

Gabarito

Podemos usar o Teorema de Tales: $\frac{x-1}{8} = \frac{3y-3x}{12} = \frac{2x+y-5}{20}$

1) $\frac{x-1}{8} = \frac{3y-3x}{12} \Rightarrow$ (simplificar) $\frac{x-1}{2} = \frac{3(y-x)}{3} \Rightarrow$ (simplificar) $\frac{x-1}{2} = y - x$

$x - 1 = 2y - 2x$

$3x - 2y = 1$ (I)

2) $\frac{x-1}{8} = \frac{2x+y-5}{20} \Rightarrow$ (simplificar) $\frac{x-1}{2} = \frac{2x+y-5}{5} \Rightarrow$

$5x - 5 = 4x + 2y - 10$

$x - 2y = -5$ (II)

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1 \cdot (-1) \\ x - 2y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x + 2y = -1 \cdot (-1) \\ x - 2y = -5 \end{cases}$$

$-2x = -6$

$x = 3$

Substituindo x = 3 em (II), temos:

$x - 2y = -5$

$3 - 2y = -5$

$-2y = -8$

$y = 4$

$x = 3$ km e $y = 4$ km.

Nas melhores soluções, o aluno vai escolher as duas melhores proporções, que tornarão os cálculos mais fáceis, para montar as equações.

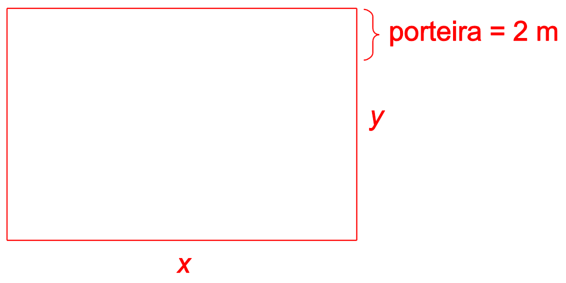
Escolhidas as duas equações, sendo elas as mais simples de se trabalhar ou não, o próximo passo que pode facilitar os cálculos e que mostra habilidade numérica é fazer as possíveis simplificações entre denominadores de razões antes de continuar.
Do aluno acima da média, espera-se que acerte todo o exercício, e aproveite as simplificações possíveis; do aluno mediano, espera-se que percorra um caminho mais longo na resolução.

Questão 2 (Assunto: Equações do 2º grau)

Leia atentamente a situação a seguir e encontre a melhor solução.

Sr. Rodrigo tem um terreno retangular de 320 m^2. Ele resolveu cercar o terreno com três fios de arame farpado, gastando 210 metros. Instalou uma porteira de madeira que mede 2 metros. Quais são as dimensões (largura e comprimento) do terreno do Sr. Rodrigo?

Gabarito
Esboço do cercado



Foram usados 210 metros de arame total.
Como são três fios, então temos 210 : 3 = 70 m, para cada volta.
Descontando a porteira, temos:

$$2x + 2y - 2 = 70$$
$$2x + 2y = 72 \quad \Rightarrow \quad \text{equação 1}$$

A outra informação que temos é sobre a área total que é de 320 m^2.

$$x \cdot y = 320 \quad \Rightarrow \quad \text{equação 2}$$

Temos então duas equações com duas incógnitas:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 72 \\ x \cdot y = 320 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 36 \\ x \cdot y = 320 \end{cases} \Rightarrow \quad x = 36 - y \text{ ou } y = 36 - x$$

Resolvendo por substituição, temos:

$x(36 - x) = 320$	ou	$y(36 - y) = 320$
$35x - x^2 = 320\ (-1)$	ou	$35y - y^2 = 320\ (-1)$
$x^2 - 35x + 320 = 0$	ou	$y^2 - 35y + 320 = 0$

A partir de agora, a resolução será apenas com uma das equações, pois a resposta será igual escolhendo uma ou outra equação:

Por fatoração

$x^2 - 36x + 320 = 0$

$(x - 20)(x - 16) = 0$

$x = 20$ e $x = 16$

Por Baskhara

$x^2 - 36x + 320 = 0$

$\Delta = 1296 - 1280 = 16$

$x = \frac{36 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{36 \pm 4}{2}$

$x' = \frac{36 + 4}{2} = 20$ $\qquad$ $x'' = \frac{36 - 4}{2} = 16$

As dimensões do terreno do Sr. Rodrigo são 20 m por 16 m.

Nessa questão, seria interessante o aluno fazer o esboço para visualizar principalmente a porteira, e não esquecer que para montar a equação se faz necessário subtraí-la da sentença. Outro ponto é que se faz necessário também saber quanto se usou em cada volta de arame farpado na cerca.

O aluno mediano pode não perceber esses detalhes e então equacionar errado. Se equacionar corretamente, ao determinar a equação do 2º grau, pode resolvê-la por Baskhara. O aluno acima da média aplica a fatoração, que é um cálculo mais bonito e que agiliza o trabalho.

Questão 3 (Assunto: Potenciação)

Calcule o valor de $(-1)^n + (-1)^{2n} + (-1)^{3n}$, sendo n um número ímpar. Justifique a resposta.

Gabarito –1

Para $n = -1$

$(-1)^{-1} + (-1)^{2(-1)} + (-1)^{3(-1)}$

$= -1 + (-1)^{-2} + (-1)^{-3} =$

$-1 + 1 - 1 =$

$= -1$

Para $n = 1$

$(-1)^{1} + (-1)^{2(1)} + (-1)^{3(1)}$

$= -1 + (-1)^{2} + (-1)^{3} =$

$-1 + 1 - 1 =$

$= -1$

Para qualquer número ímpar, o resultado dessa equação será sempre –1.

Essa questão avalia a capacidade do aluno de substituir o valor de n por números ímpares e concluir que o resultado não será alterado. O aluno acima da média faz naturalmente as substituições por mais de um número ímpar, para testar. O aluno mediano talvez faça uma ou duas substituições e sinta alguma dificuldade na justificativa. Cabe ao professor verificar se há coerência na resposta dada.

Questão 4 (Assunto: Notação científica)

Represente com notação científica o número abaixo:

A massa de um átomo de prata é, em gramas, aproximadamente: 0,0000000000000000000018.

Gabarito

$1,8 \cdot 10^{-21}$

Questão 5 (Assunto: Operações com expoentes)

Resolva a expressão abaixo e dê a resposta na forma de fração.

$0,001 \cdot 0,1 \cdot (-0,1)^2 \cdot 1000^3 \cdot 0,00001$

Gabarito

$$0,001 \times 0,1 \times (-0,1)^2 \times 1000^3 \times 0,00001 =$$

$$= 10^{-3} \times 10^{-1} \times \left(-10^{-1}\right)^2 \times \left(10^3\right)^3 \times 10^{-5} =$$

$$= 10^{-3} \times 10^{-1} \times 10^{-2} \times 10^{9} \times 10^{-5} =$$

$$= 10^{(-3)+(-1)+(-2)+(9)+(-5)} =$$

$$= 10^{-2} = \frac{1}{100}$$

Questão 6 (Assunto: Operações com radiciação)

Simplifique:

$$\left[\sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{625}\right] : \sqrt[3]{25}$$

Gabarito

$$\left[\sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{625}\right] : \sqrt[3]{25} =$$

$$= \left[\sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{5^4}\right] : \sqrt[3]{5^2} =$$

$$= \sqrt[3]{5^1 \times 5^4} : \sqrt[3]{5^2} =$$

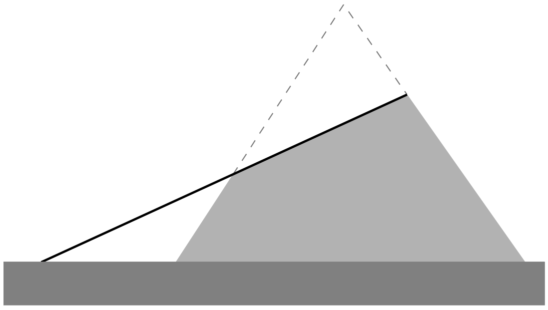
$$= \sqrt[3]{\frac{5^5}{5^2}} =$$

$$= \sqrt[3]{5^3} = 5$$

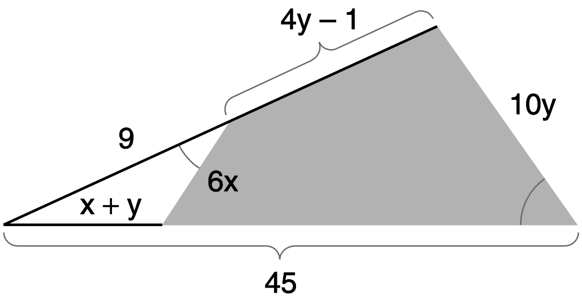
Questão 7 (Assunto: Teorema de Tales)

Para a construção das antigas pirâmides, foi necessário um grande número de trabalhadores. Para que os homens atingissem os pontos mais altos da construção, foram construídas rampas.

Observe o desenho abaixo, ele representa o perfil de uma pirâmide sendo construída por trabalhadores.



Imagine os seguintes registros de uma situação como a que foi ilustrada acima:



a) Determine os valores de x e de y.

b) Qual é o perímetro da face da pirâmide (quadrilátero) que pode ser vista acima?

Gabarito

a) $\frac{6x}{10y} = \frac{9}{45} = \frac{x+y}{9+4y-1}$

1. $\frac{6x}{10y} = \frac{9}{45}$

   $y = 3x \quad (I)$

2. $\frac{9}{45} = \frac{x+y}{9+4y-1}$

   $5x + 5y = 9 + 4y - 1$

   $5x + y = 8 \quad (II)$

Substituindo (I) em (II):

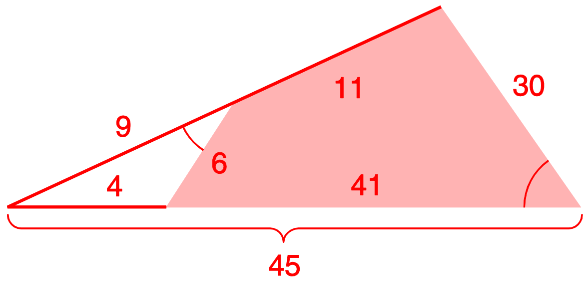
$5x + 3x = 8$

$8x = 8$

$x = 1$

$y = 3$

b) Substituindo os valores de x e de y na figuras, temos:

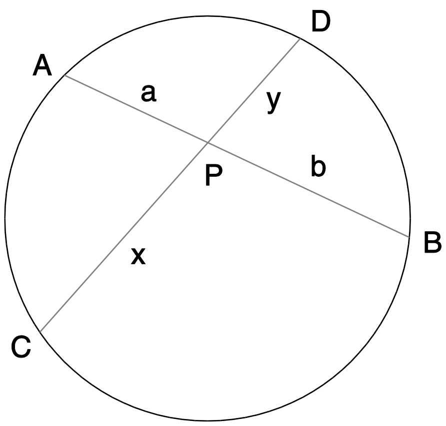


Perímetro = 6 + 11 + 30 + 41 = 88

Questão 8 (Assunto: Teorema de Tales)

Quando duas cordas se cruzam em um ponto interior a uma circunferência, conforme mostra a figura a seguir, existe uma relação válida entre a medida dos segmentos determinados por elas.

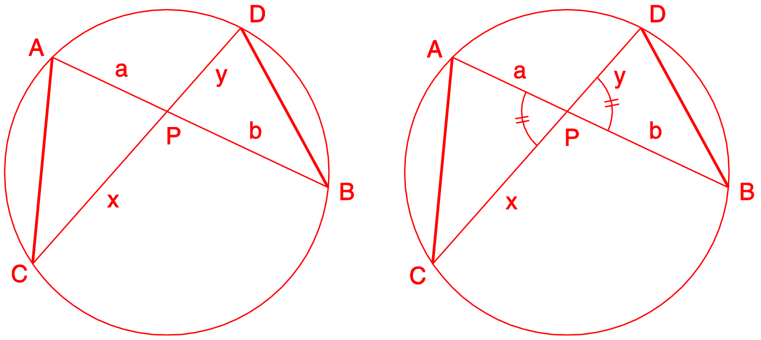
Determine qual é essa relação e justifique o seu raciocínio.



Para resolver esse problema, considere que o ângulo $A\hat{C}D$ é congruente ao ângulo $D\hat{B}A$.

Lembrete: Corda é todo segmento que tem as extremidades na circunferência.

Gabarito



Os triângulos APC e DPB são semelhantes pelo caso AA de semelhança de triângulos, pois:
$A\hat{P}C \cong D\hat{P}B$ (ângulos opostos pelo vértice) e $\hat{C} \cong \hat{B}$ (dado do enunciado).

Assim, é válida a proporção: $\frac{x}{b} = \frac{a}{y}$, que pode ser escrita como: a · b = x · y.

Questão 9 (Assunto: Notação científica)

A distância entre a Terra e o Sol é, aproximadamente, $1{,}5 \cdot 10^8$ km e a velocidade da luz é, aproximadamente, $3{,}0 \cdot 10^5$ km/s. Para calcularmos o tempo que a luz leva para chegar à Terra, devemos efetuar a divisão entre a distância Terra-Sol e a velocidade da luz.

a) Calcule o tempo, em segundos, que a luz do Sol leva para chegar à Terra.

b) Se a distância do Sol até Marte é $2{,}2 \cdot 10^8$, a luz do Sol levaria um tempo maior que 8 minutos para chegar até ele?

Gabarito

a) Como sugerido pelo enunciado, o cálculo do intervalo de tempo necessário para que a luz saia do Sol e chegue à Terra é dado pela divisão entre a distância Terra-Sol e a velocidade da luz, logo:

$$\text{tempo} = \frac{\text{distância Terra-Sol}}{\text{velocidade da luz}}$$

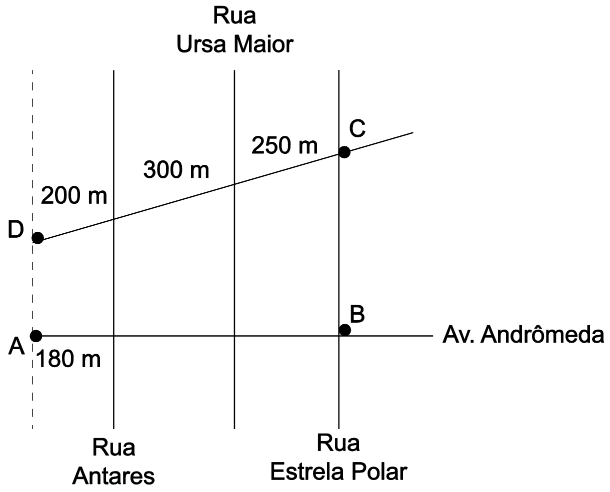
$$\text{tempo} = \frac{1{,}5 \cdot 10^8}{3{,}0 \cdot 10^5}$$

Aplicando as propriedades de potenciação, temos:
tempo = 500 s = 8 minutos e 20 segundos

b) Como Marte está mais distante que a Terra, certamente a luz levará mais tempo para chegar até lá. Como o tempo que a luz leva para chegar até à Terra é de 8 minutos e 20 segundos, a luz do Sol levará um tempo maior para chegar até Marte.

Questão 10 (Assunto: Teorema de Tales)

Um carro parte do ponto A na Av. Andrômeda, conforme mostra o esquema a seguir, e o GPS indica ao motorista que ele deverá fazer uma curva à direita a 450 m.



a) Em qual rua ele irá entrar?

b) Qual é a menor distância, a que liga os pontos A e B ou a que liga os pontos C e D?

Gabarito

a) Partindo de A, ele precisa percorrer 450 m; como o primeiro quarteirão possui 180 m, descontamos do total. Para verificar qual rua ele deverá entrar, precisamos relacionar o que sobrou e o comprimento do lado oposto ao quarteirão em que o carro trafega. Utilizando o Teorema de Tales para relacionar as distâncias das ruas:

$$\frac{450 - 180}{180} = \frac{x}{200}$$

$$x = 200 \cdot \frac{270}{180}$$

$$x = 300 \text{ m}$$

Como o lado oposto possui 300 m de comprimento, ele deverá entrar na rua Ursa Maior.

b) A menor distância é a que liga os pontos A e B e que pode ser calculada através do Teorema de Tales:

$$\frac{AB}{180} = \frac{750}{200}$$

$$AB = 180 \cdot \frac{750}{200}$$

$$AB = 675 \text{ m}$$

Questão 11 (Assunto: Equações do 2°grau)

Pelo estudo da Física, sabemos que no dia a dia é quase impossível manter um movimento com velocidade constante. Uma simplificação para o estudo do movimento é o retilíneo uniformemente variado e a expressão que o representa se assemelha a uma equação do 2º grau.

Supondo que o movimento de um corpo seja expresso por:

$$S = t^2 - 6 \cdot t + 8$$

em que S é a posição medida em metros e t é o instante de tempo em segundos, calcule:

a) a posição de um corpo no instante t = 1 s.

b) para quais instantes de tempo a posição S é igual a zero.

Gabarito

a) Para o instante de tempo t = 1 s, devemos substituir, na expressão, o valor de t:
$S = (1)^2 - 6 \cdot (1)$
$S = 1 - 6 + 8$
$S = 3$ m

b) Para encontrar esses instantes, igualamos S = 0 e resolvemos uma equação do 2º grau.
$t^2 - 6 \cdot t + 8 = 0$

Calculando o valor de Δ:
$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$
$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8$
$\Delta = 36 - 32$
$\Delta = 4$

Encontrando as raízes, teremos:

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2 \cdot a}$$

$$t_{1,2} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1}$$

$$t_{1,2} = \frac{6 \pm 2}{2}$$

$$t_1 = \frac{6+2}{2} = \frac{8}{2} = 4\,s$$

$$t_2 = \frac{6-2}{2} = \frac{4}{2} = 2\,s$$

Questão 12 (Assunto: Problemas)

Sabendo que dois lados de um retângulo são números consecutivos e que sua área mede 132 cm^2, calcule:

a) o valor dos lados desse retângulo.

b) o perímetro desse retângulo.

Gabarito

a) Como os lados desse retângulo são números consecutivos, podem ser representados por:
x e x + 1
Dessa forma, a área que mede 132 cm^2 pode ser expressa por:
$x \cdot (x + 1) = 132$
$x^2 + x - 132 = 0$

Resolvendo Δ:
$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$
$\Delta = (1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-132)$
$\Delta = 1 + 528$
$\Delta = 529$

Encontrando as raízes, temos:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2 \cdot a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{529}}{2 \cdot 1}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 23}{2}$$

$$x_1 = \frac{-1 + 23}{2} = \frac{22}{2} = 11$$

$$x_2 = \frac{-1 - 23}{2} = -\frac{24}{2} = -12$$

Como uma medida negativa aqui não faz sentido, o valor de x é 11 cm. Dessa forma, um lado é 11 cm e o outro é 12 cm.

b) O perímetro desse retângulo será igual a:
Perímetro = 2 · (11 + 12)
Perímetro = 2 · (23)
Perímetro = 46 cm

Questão 13 (Assunto: Equações do 1° grau)

Em uma empresa de táxi, o preço por uma viagem é calculado da seguinte forma:

– um valor fixo, chamado de bandeirada;

– somado a um valor variável, que depende de quantos quilômetros um cliente andou.

Se o preço da bandeirada é R$ 3,75 e o preço por quilômetro rodado é de R$ 0,65, calcule:

a) o preço de uma viagem de 25 km.

b) a distância percorrida por um cliente que pagou R$ 83,70.

Gabarito
Primeiramente, é interessante escrever uma equação que represente essa relação:
Custo = 3,75 + x · 0,65
Já que o valor da bandeirada é fixo e a cada quilômetro (representado por x) cobra-se R$ 0,65:
a) Para uma distância de 25 km, isto é, x = 25, podemos calcular:
Custo = 3,75 + 25 · 0,65
Custo = 3,75 + 16,25
Custo = R$ 20,00

b) Agora o custo é de R$ 83,70. Dessa forma, a expressão ficará:

$83,70 = 3,75 + 25 \times 0,65$

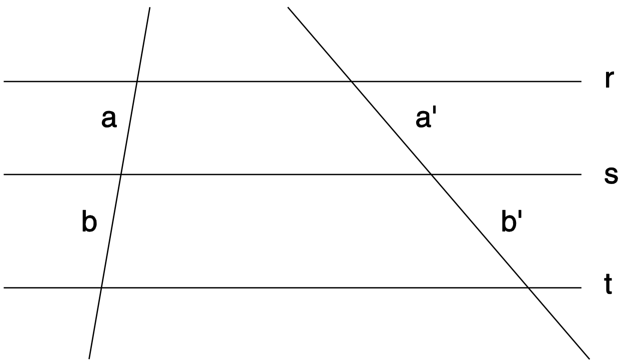
$83,70 - 3,75 = x \times 0,65$

$79,95 = x \times 0,65$

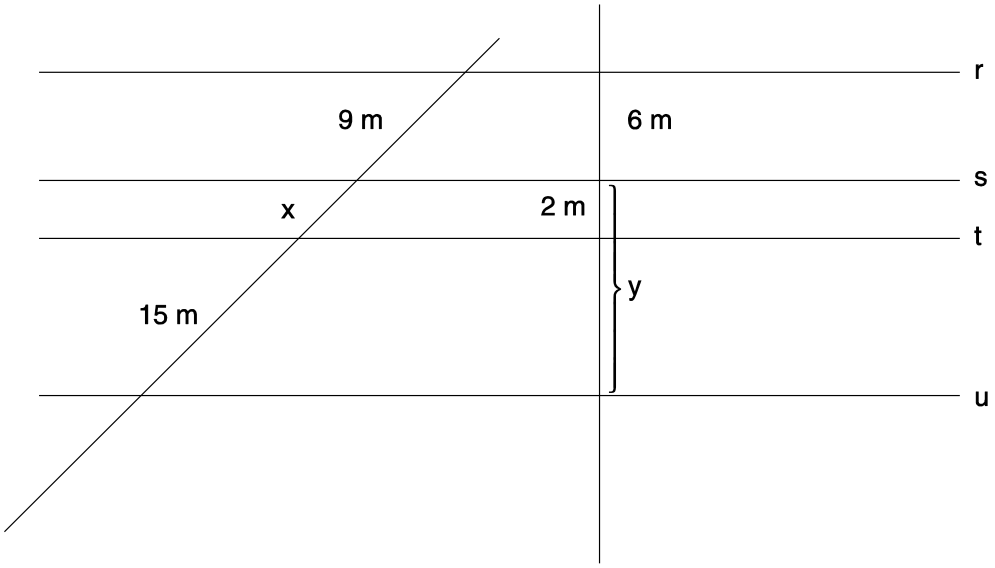
$x = \frac{79,95}{0,65} = 123 km$

Questão 14 (Assunto: Teorema de Tales)

O Teorema de Tales diz: se um feixe de retas paralelas é cortado por retas transversais, teremos segmentos de retas proporcionais. Isso quer dizer que, dadas três retas paralelas – r, s e t, temos $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$, como na figura a seguir.



Na figura a seguir, utilizando o Teorema de Tales, calcule:



a) a medida do segmento x.

b) a medida do segmento y.

Gabarito

a) Pelo Teorema de Tales, pode-se concluir que:

$$\frac{9}{x} = \frac{6}{2}$$

$$6x = 18$$

$$x = 3 \text{ cm}$$

b) Novamente, pelo Teorema de Tales, temos:

$$\frac{9}{x+15} = \frac{6}{y}$$

Como x = 3, logo:

$$\frac{9}{18} = \frac{6}{y}$$

$$9y = 108$$

$$y = 12 \text{ cm}$$

Questão 15 (Assunto: Equações do 2º grau)

O gerador elétrico é um aparelho capaz de transformar algum tipo de energia em energia elétrica. A potência elétrica que um gerador é capaz de fornecer depende da intensidade da corrente elétrica e da dissipação de energia.

Gerador elétrico. Disponível em: <http://images.quebarato.com.br/T440x/gerador+de+energia+tg2800cx+gas+4temp+2+0kva+monf+bivolt+toyama+vargem+grande+do+sul+sp+brasil__56D14D_1.jpg>.

Um dado gerador tem sua potência elétrica dada pela seguinte expressão:

$$\text{Potência} = 100x - 5x^2$$

Na qual x é a intensidade da corrente elétrica que o atravessa.

a) Determine para quais valores de x a potência é nula.

b) Sabendo que a corrente elétrica mais eficiente é a média entre aquelas que resultam em potência nula, determine a intensidade da corrente elétrica mais eficiente e a potência desenvolvida pelo gerador quando for atravessado por essa corrente.

Gabarito

a) Quando a potência elétrica for nula, teremos a seguinte equação:
$0 = 100x - 5x^2$
Colocando sob a forma distributiva, teremos:
$x \cdot (100 - 5x) = 0$
Para essa equação, temos duas soluções: $x = 0$ (1) ou $100 - 5x = 0$ (2).
Resolvendo (2), teremos:
$100 - 5x = 0$
$100 = 5x$
$x = 20$
Então, as intensidades das correntes elétricas que resultam em potência nula são 0 e 20.

b) Sabendo que a corrente mais eficiente é dada pela média das correntes que resultam em uma potência nula, teremos:
$$x_{eficiente} = \frac{0+20}{2}$$
$$x_{eficiente} = 10$$
Assim, para calcular a potência máxima, basta utilizar essa intensidade da corrente na expressão dada no enunciado:
$\text{Potência} = 100 \cdot 10 - 5 \cdot 10^2$
$\text{Potência} = 1000 - 500$
$\text{Potência} = 500$

Questão 16 (Assunto: Propriedades da potenciação)

Considerando que $7^7 = 823.543$, calcule:

a) 7^8

b) 7^6

Gabarito

a) Note que $7^8 = 7^7 \cdot 7$; então, $7^8 = 823.543 \cdot 7 = 5.764.801$

b) Note que $7^6 = \frac{7^7}{7}$; então, $7^6 = \frac{823.543}{7} = 117.649$.

Questão 17 (Assunto: Equações do 2º grau)

Um projétil percorre uma trajetória descrita pela expressão $H(x) = x^2 – 5x$, em que x é a distância horizontal percorrida pelo projétil e H(x) é a altura ao percorrer a distância x.

a) Encontre a média aritmética dos valores das distâncias quando a altura nesses pontos for zero.

b) Em uma expressão do tipo $P = ax^2 + bx + c$, para a, b, c reais e $a \neq 0$, temos que o valor máximo de P ocorre quando $x = -\frac{b}{2a}$. Utilize agora essa fórmula para encontrar a altura máxima percorrida pelo projétil. O que podemos concluir com o resultado obtido na letra a?

Gabarito

a) Primeiramente, encontraremos as distâncias quando a altura for igual a zero; assim:

$x^2 – 5x = 0$

$x \cdot (x – 5) = 0$

$x = 0$ ou $x = 5$

Dessa forma, temos como média dessas distâncias o valor $\frac{0+5}{2} = 2{,}5$.

b) Aplicando a fórmula, temos:

$-\frac{b}{2a} = -\left(\frac{-5}{2}\right) = 2{,}5.$

Portanto, tanto o valor obtido na letra a quanto o valor obtido em b são iguais, ou seja, temos essas duas maneiras para encontrar o x do vértice da função.

Questão 18 (Assunto: Equações do 2º grau)

Considere a seguinte equação:

$$x^2 = (2k – 3)x + 2 = 0$$

Determine:

a) o produto das raízes.

b) o valor de k, sabendo que a soma das raízes dessa equação é 7.

Gabarito

Nessa equação, temos $a = 1$, $b = 2k – 3$ e $c = 2$.

a) O produto das raízes é dado por:

$x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$

Substituindo os valores, teremos:

$x_1 \times x_2 = \frac{2}{1}$

$x_1 \times x_2 = 2$

b) Se soma = $x_1 + x_2 = 7$

Então:

$$\text{Soma} = -\frac{b}{a} = -\frac{2k-3}{1} = 7$$

$$-2k + 3 = 7$$

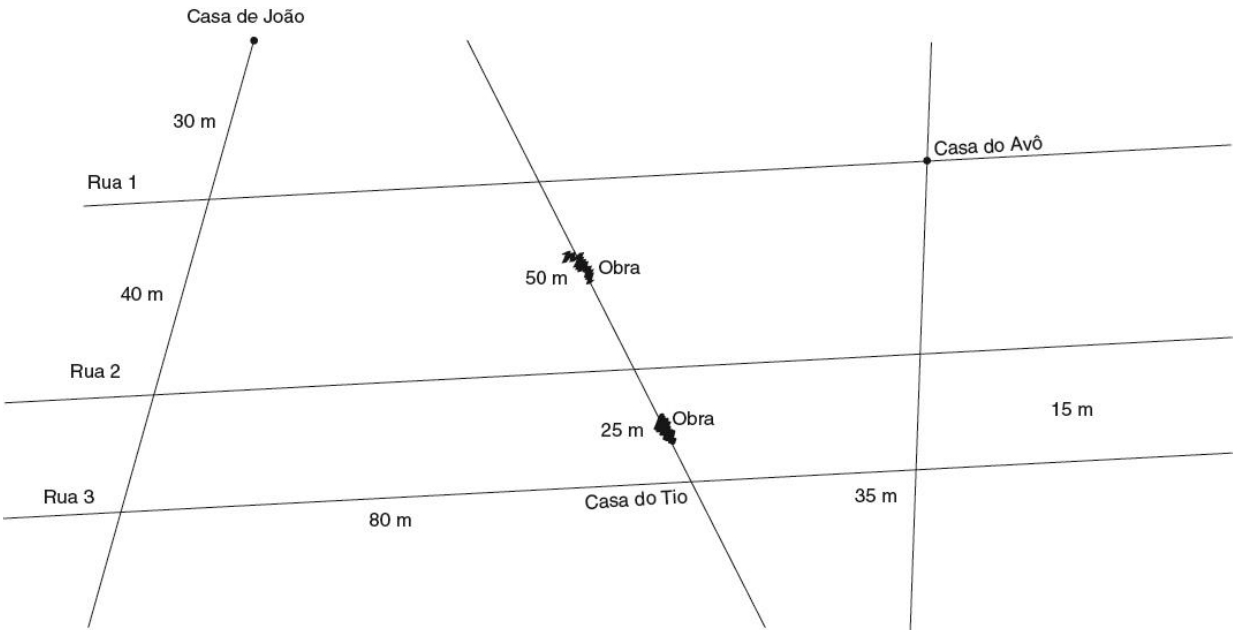
$$-2k = 4$$

$$k = -\frac{4}{2}$$

$$k = -2$$

Questão 19 (Assunto: Teorema de Tales)

O bairro onde João mora tem três ruas, Rua 1, Rua 2 e Rua 3, paralelas entre si. João sempre vai de bicicleta à casa de seu tio e, logo depois, à casa de seu avô, utilizando o menor percurso.



Sabendo que João não consegue passar com sua bicicleta na rua em que há obras, calcule a distância que ele percorrerá:

a) até a casa de seu tio.

b) até a casa de seu avô, partindo da casa de seu tio.

Gabarito

a) Vamos chamar de x o trecho entre a Rua 2 e a Rua 3. Aplicando o Teorema de Tales, temos:

$$\frac{x}{40} = \frac{25}{50}$$

Daí segue que x = 20 m; portanto, até a casa de seu tio, João terá percorrido:

$$30 + 40 + 20 + 80 = 170 \text{ m}$$

b) Chamando de y o trecho entre a Rua 1 e a Rua 2 e aplicando o Teorema de Tales, temos:

$$\frac{y}{15} = \frac{50}{25}$$

Então, y = 30 m. Dessa forma, até a casa de seu avô, João percorrerá mais 35 + 15 + 30 = 80 m.

Questão 20 (Assunto: Números reais; Eixo e intervalo reais)

Observe o intervalo representado na reta real a seguir.

Responda ao que se pede.

a) Quais são o menor e o maior número nesse intervalo?

b) Represente esse intervalo sob a forma de colchetes e descrição.

Gabarito

a) O menor número não é definido, uma vez que o intervalo é aberto em –1; porém, o maior número é o 7.

b) $]-1,7] = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 7\}$

Questão 21 (Assunto: Equações do 2º grau)

Considere a equação $x^2 - 4x + k = 0$ e responda às questões a seguir.

a) Para k = 4, quais são as raízes dessa equação?

b) Para quais valores de k a equação não apresenta raízes reais?

Gabarito

a) Para k = 4, temos: $x^2 - 4x + 4 = 0$

Por soma e produto:

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{-(-4)}{1} = 4$$

$$P = \frac{c}{a} = \frac{4}{1} = 4$$

Como a soma e o produto são iguais a 4, temos que a equação admite duas raízes iguais a 2.

b) Para que a equação não apresente raízes reais, temos que ter $\Delta < 0$, logo:

$\Delta = b^2 - 4ac$

$b^2 - 4ac < 0$

$4^2 - 4k < 0$

$-4k < -16$

$4k > 16$

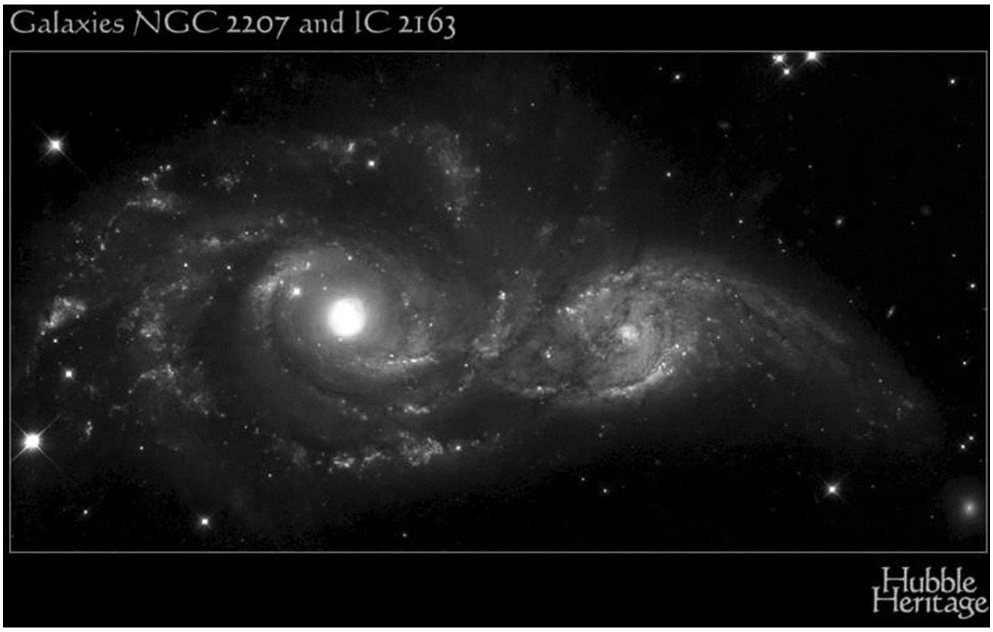
$k > 4$

Questão 22 (Assunto: Notação científica e ordem de grandeza)

O ano-luz é uma unidade de comprimento bastante utilizada em ciências astronômicas. Ela é usada para representar grandes distâncias e corresponde à distância que a luz percorre, no vácuo, em um intervalo de um ano.

a) Considerando que a velocidade da luz seja de 300.000 km/s e que 1 ano tenha 365 dias, qual é a distância, em km, que equivale a um ano-luz? (Deixe o resultado na forma de notação científica).

b) A Canis Major é a galáxia mais próxima da nossa e está localizada a 25 mil anos-luz de nós.



Disponível em: <www.ulisses.us/GALAXIAS-ESPIRAL-ENCONTRO-CANISMAJOR-bergen47-HST.jpg>.

Quanto tempo a luz de uma estrela dessa galáxia levaria para chegar até a nossa galáxia?

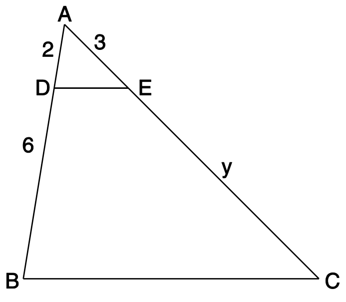
Gabarito

a) Considerando um ano de 365 dias, e cada dia com 24 horas, então:
$24 \cdot 365 = 8.760$ horas
Cada hora tem 60 minutos, portanto:
$8.760 \cdot 60 = 525.600$ minutos
Cada minuto tem 60 segundos, portanto:
$525.600 \cdot 60 = 31.536.000$ segundos
Como a luz viaja a uma velocidade de 300.000 km/s, a distância correspondente será de:
ano-luz = $300.000 \cdot 31.536.000 = 9.460.800.000.000$ km.
Aproximando o resultado, teremos:
$9{,}5 \cdot 10^{12}$ km

b) Se a galáxia se encontra a 25 mil anos-luz de nós, seriam necessários 25 mil anos para a luz de uma estrela daquela galáxia chegar até a nossa.

Questão 23 (Assunto: Teorema de Tales)

No triângulo ABC a seguir, o segmento $\overline{DE}$ é paralelo à base BC. Calcule o valor de y.



Desenho fora de escala

Gabarito

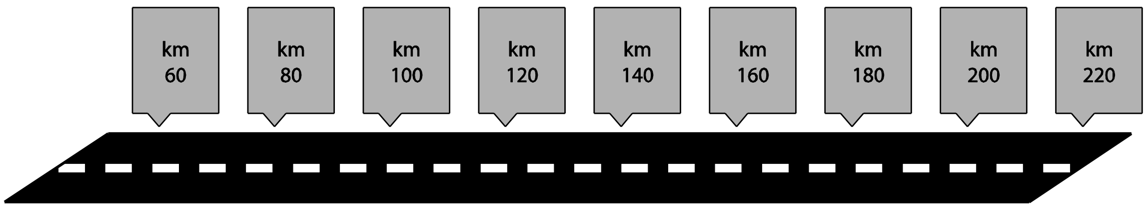
Aplicando o Teorema de Tales, temos:

$$\frac{y}{3} = \frac{6}{2} \Rightarrow y = 3 \times 3 = 9$$

Portanto, y = 9.

Questão 24 (Assunto: Números reais; Eixo real)

Em uma rodovia, é normal encontrar pequenas indicações que demarcam certas posições ao longo dela. Um determinado trecho da Rodovia Presidente Dutra encontra-se representado a seguir:



a) Localize, nessa rodovia, as seguintes cidades:

I. Arujá – km 204

II. Guararema – km 180

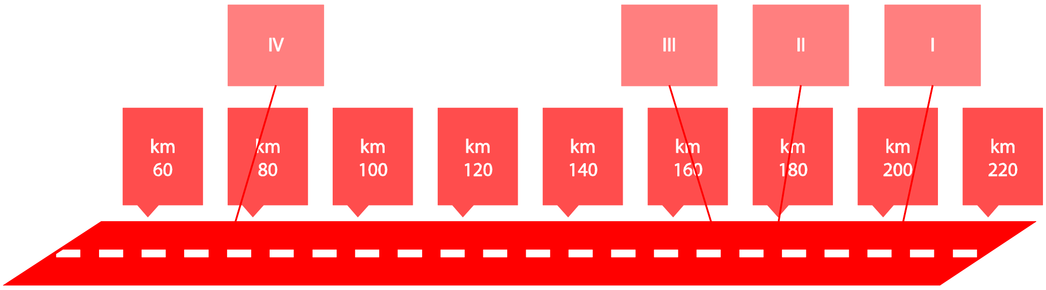
III. Jacareí – km 165

IV. Moreira César – km 78

b) O conceito de deslocamento escalar consiste, basicamente, em calcular a diferença entre duas posições em algum trajeto (posição final menos a posição inicial). Por exemplo, se uma pessoa viaja de Jacareí até Guararema, ela realiza um deslocamento de 15 km, pois 180 – 165 = 15. O deslocamento é, ainda, classificado como progressivo, quando o resultado é positivo, ou retrógrado, quando é negativo. Com base nessas informações, se uma pessoa fizer uma viagem de Guararema até Moreira César, qual será o deslocamento e como ele pode ser classificado?

Gabarito

a)



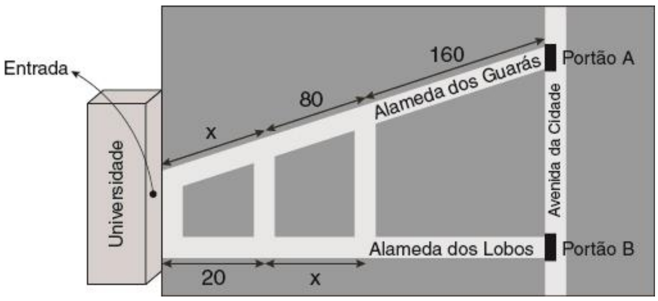
b) deslocamento entre essas duas cidades, de acordo com o enunciado, será de:

$$78 - 180 = -102 \text{ km}$$

Dessa maneira, o deslocamento é retrógrado.

Questão 25 (Assunto: Teorema de Tales)

Carmem está usando um aplicativo de celular que indica, nos seus fones de ouvido, a distância, em metros, percorrida por ela em sua bicicleta. Porém, quando ela estava dando voltas pelo campus de sua universidade, essas indicações foram comunicadas enquanto ela ouvia algumas músicas, e Carmem acabou não prestando muita atenção em algumas medidas.



Pelo ritmo da música e de suas pedaladas, ela percebeu que duas medidas, indicadas na imagem com a letra x, eram iguais. Considerando essa situação, responda às seguintes questões:

a) Qual é a distância entre o portão A e a entrada da universidade?

b) Quantos metros a Alameda dos Guarás é maior do que a Alameda dos Lobos?

Gabarito

a) De acordo com o Teorema de Tales, tem-se:

$$\frac{x}{20} = \frac{80}{x}$$

$$x^2 = 1.600$$

$$x = \pm\sqrt{1.600}$$

$$x = \pm 40$$

Como a medida negativa não interessa, pode-se concluir que x = 40.

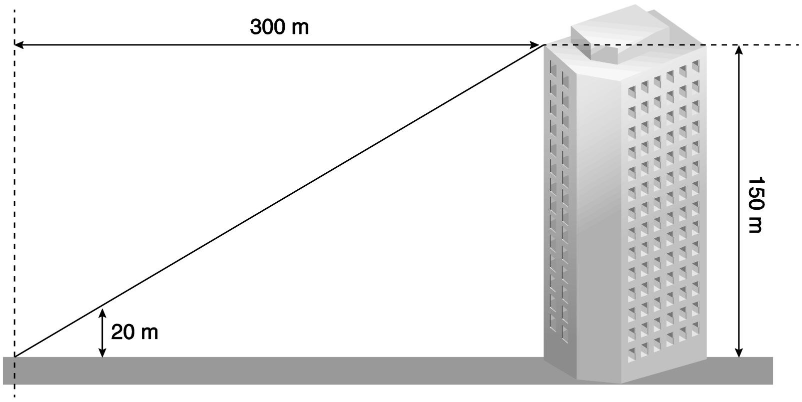
Dessa forma, a distância entre o portão A e a entrada da universidade é igual a 160 + 80 + 40 = 280 metros.

b) Nota-se que cada um dos segmentos da Alameda dos Guarás é o dobro dos segmentos correspondentes na Alameda dos Lobos; portanto, é possível concluir que esta tem a metade do tamanho da outra, ou seja, 140 m.

Dessa forma, a Alameda dos Guarás tem 140 metros a mais do que a Alameda dos Lobos.

Questão 26 (Assunto: Semelhança de triângulos)

Em uma cena de fuga, um dublê precisa descer um prédio usando uma tirolesa que tem uma das extremidades fixada no chão.



O dublê deve saltar quando estiver a uma altura de 20 m em relação ao chão. Dessa maneira, pode-se fazer uma edição de vídeo sem que objetos estranhos ao cenário do filme ou a própria equipe de filmagem apareçam.

a) Qual será a distância do dublê em relação ao prédio no momento do salto?

b) Sabendo que a velocidade é a razão entre a distância percorrida e o tempo de movimento e que o dublê levou 10 s para atingir o ponto do salto, calcule a velocidade horizontal do movimento (que leva em consideração a distância horizontal percorrida).

Gabarito

a) Utilizando a semelhança de triângulos, pode-se calcular a distância horizontal do ponto do salto até a extremidade fixa no chão:

$$\frac{300}{150} = \frac{x}{20}$$
$$\frac{300 \times 20}{150} = x$$
$$40\,m = x$$

Assim, a distância horizontal do dublê até o prédio, no momento do salto, é de:

300 – 40 = 260 m

b) Se o tempo que ele leva para atingir o ponto do salto é de 10 s, então sua velocidade horizontal será de:

$$v = \frac{260}{10}$$
$$v = 26\ m/s$$

Questão 27 (Assunto: Potências e raízes)

Um modelo matemático é uma interpretação, quase sempre na forma de uma expressão algébrica, de uma determinada situação real. Modelar um problema do cotidiano consiste em construir uma representação matemática daquele contexto. Após um estudo sobre uma comunidade de insetos, percebeu-se que sua população P estava variando ao longo do tempo t, dado em horas, de acordo com o seguinte modelo matemático:

$$P = \left(\sqrt{0{,}81}\right)^{t} \times 10.000$$

Assim, após 2 horas do início da análise, a população era igual a:

$$P = \left(\sqrt{0{,}81}\right)^{2} \times 10.000 = 0{,}81 \times 10.000 = 8.100 \text{ insetos}$$

Considerando esse modelo matemático, responda às questões a seguir:

a) Qual era a população de insetos no início da análise?

b) Qual é a porcentagem de insetos que sobrevivem a cada hora que passa?

Gabarito

a) Basta substituir o valor de t por zero. Assim, tem-se:

$P = (\sqrt{0{,}81})^{0} \times 10.000 = 1 \times 10.000 = 10.000$

b) Perceba que o modelo pode ser escrito de uma forma mais simplificada:

$$P = \left(\sqrt{0,81}\right)^t \cdot 10.000$$

$$P = \left(\sqrt{\frac{81}{100}}\right)^t \cdot 10.000$$

$$P = \left(\frac{\sqrt{81}}{\sqrt{100}}\right)^t \cdot 10.000$$

$$P = \left(\frac{9}{10}\right)^t \cdot 10.000$$

$$P = (0,9)^t \cdot 10.000$$

Assim, fica mais fácil perceber que, a cada hora, a população inicial de 10.000 insetos é multiplicada por 0,9 ou, ainda, 90%. Sendo assim, a cada hora, a taxa de sobrevivência percentual dessa população é igual a 90%.

Questão 28 (Assunto: Equações do 2º grau)

Um corpo é lançado de forma oblíqua, de tal maneira que sua velocidade horizontal é igual a 10 m/s, enquanto a vertical é 20 m/s. Considerando que a gravidade local é igual a 10 m/s^2, determine:

a) o tempo durante o qual o corpo fica no ar, sabendo que a relação que descreve esse tipo de movimento é dada por $y = y_0 + v_y t - \frac{1}{2}gt^2$.

b) o alcance horizontal que o corpo realiza no movimento.

Gabarito

a) Para determinar o tempo em que o corpo permanece no ar, é necessário utilizar a expressão:

$$y = y_0 + v_y t - \frac{1}{2}gt^2$$

Como a altura final é igual à inicial, pode-se reescrever:

$$0 = v_y t - \frac{1}{2}gt^2$$

Substituindo os dados do problema, tem-se:

$$0 = 20t - \frac{1}{2} \cdot 10t^2$$

$$0 = 20t - 5t^2$$

Resolvendo a equação incompleta acima, obtém-se:

$$0 = t(20 - 5t)$$

Desse modo:

$$t_1 = 0$$

ou

$$20 - 5t_2 = 0$$
$$20 = 5t_2$$
$$t_2 = \frac{20}{5}$$
$$t_2 = 4\,s$$

Assim, o tempo em que o corpo fica no ar é de 4 s.

b) Para calcular o alcance horizontal do corpo, é preciso pegar o tempo total e multiplicá-lo por sua velocidade horizontal, assim:

$$x = 4 \times 10$$
$$x = 40\ m$$