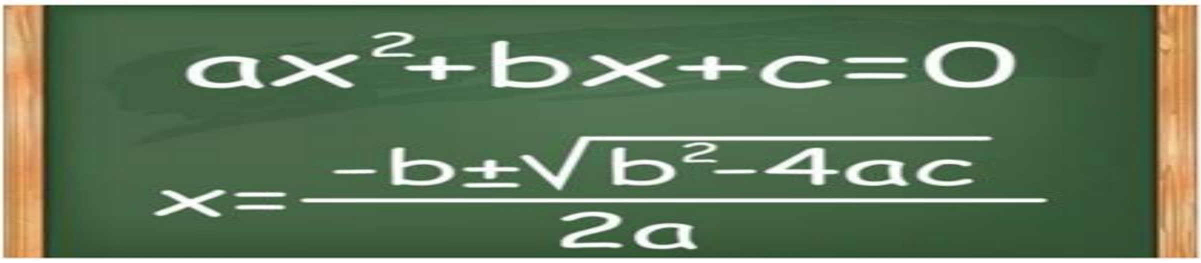
Equação do Segundo Grau



Denomina-se **equação do 2° grau**, qualquer sentença matemática que possa ser reduzida à forma **$ax^2 + bx + c = 0$**, onde **x** é a incógnita e **a**, **b** e **c** são números reais, com **$a \neq 0$**. **a**, **b** e **c** são coeficientes da equação. Observe que o maior índice da incógnita na equação é igual a dois e é isto que a define como sendo uma equação do segundo grau.

Equação do 2° grau completa e equação do 2° grau incompleta

Da definição acima temos obrigatoriamente que **$a \neq 0$**, no entanto podemos ter **$b = 0$** e/ou **$c = 0$**.

Caso **$b \neq 0$** e **$c \neq 0$**, temos uma equação do 2° grau completa. A sentença matemática **$-2x^2 + 3x - 5 = 0$** é um exemplo de equação do 2° grau completa, pois temos **$b = 3$** e **$c = -5$**, que são diferentes de zero.

$-x^2 + 7 = 0$ é um exemplo de equação do 2° grau incompleta, pois **$b = 0$**.

Neste outro exemplo, **$3x^2 - 4x = 0$** a equação é incompleta, pois **$c = 0$**.

Veja este último exemplo de equação do 2° grau incompleta, **$8x^2 = 0$**, onde tanto **b**, quanto **c** são iguais a zero.

Resolução de equações do 2° grau

A resolução de uma equação do segundo grau consiste em obtermos os possíveis valores reais para a incógnita, que torne a sentença matemática uma equação verdadeira. Tais valores são a **raiz** da equação.

Fórmula Geral de Resolução

Para a resolução de uma equação do segundo grau completa ou incompleta, podemos recorrer à **fórmula geral de resolução**:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Esta fórmula também é conhecida como **fórmula de Bhaskara**.

O valor **$b^2 - 4ac$** é conhecido como **discriminante da equação** e é representado pela letra grega **Δ**. Temos então que **$\Delta = b^2 - 4ac$**, o que nos permitir escrever a fórmula geral de resolução como:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Resolução de equações do 2° grau incompletas

Para a resolução de equações incompletas podemos recorrer a certos artifícios. Vejamos:

Para o caso de apenas **b** = **0** temos:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow ax^2 + 0x + c = 0 \Rightarrow ax^2 + c = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ax^2 = -c \Rightarrow x^2 = -\frac{c}{a} \Rightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Portanto para equações do tipo **a**$\mathbf{x^2}$ + **c** = **0**, onde **b** = **0**, podemos utilizar a fórmula simplificada $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ para calcularmos as suas raízes. Observe no entanto que a equação só possuirá raízes no conjunto dos números reais se $-\frac{c}{a} \geq 0$.

Para o caso de apenas **c** = **0** temos:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow ax^2 + bx + 0 = 0 \Rightarrow ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x(ax + b) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{0}{ax + b} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \\ ax + b = \frac{0}{x} \Rightarrow ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = -\frac{b}{a} \Rightarrow x_2 = -\frac{b}{a} \end{cases}$$

Portanto para equações do tipo **a**$\mathbf{x^2}$ + **bx** = **0**, onde **c** = **0**, uma das raízes sempre será igual a zero e a outra será dada pela fórmula $x = \frac{-b}{a}$.

Para o caso de **b** = **0** e **c** = **0** temos:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow ax^2 + 0 + 0 = 0 \Rightarrow ax^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{0}{a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{0} \Rightarrow x = 0$$

Podemos notar que ao contrário dos dois casos anteriores, neste caso temos apenas uma única raiz real, que será sempre igual a zero.

Discriminante da equação do 2° grau

O cálculo do valor do discriminante é muito importante, pois através deste valor podemos determinar o número de raízes de uma equação do segundo grau.

Como visto acima, o discriminante é representado pela letra grega **Δ** e equivale à expressão $\mathbf{b^2}$ **- 4ac**, isto é: **Δ** = $\mathbf{b^2}$ **- 4ac**.

Discriminante menor que zero

Caso **Δ** < **0**, a equação não tem raízes reais, pois $\nexists \sqrt{\Delta} \in \Re$:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \nexists x \in \Re$$

Discriminante igual a zero

Caso $\Delta = 0$, a equação tem duas raízes reais e iguais, pois $+\sqrt{\Delta} = -\sqrt{\Delta}$:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-b \pm 0}{2a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-b + 0}{2a} \Rightarrow x_1 = \frac{-b}{2a} \\ x_2 = \frac{-b - 0}{2a} \Rightarrow x_2 = \frac{-b}{2a} \end{cases}$$

Discriminante maior que zero

Caso $\Delta > 0$, a equação tem duas raízes reais e diferentes, pois $+\sqrt{\Delta} \neq -\sqrt{\Delta}$:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

Conjunto Verdade de equações do 2° grau

A partir do estudado acima, podemos esquematizar o conjunto verdade das equações do segundo grau completas e incompletas como a seguir:

Para o caso das equações completas temos:

$$\begin{cases} V = \left\{\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right\} \mid \Delta > 0 \\ V = \left\{\frac{-b}{2a}\right\} \mid \Delta = 0 \\ V = \{\} \mid \Delta < 0 \end{cases}$$

Para o caso das equações incompletas onde somente **b = 0** temos:

$$\begin{cases} V = \left\{-\sqrt{-\frac{c}{a}}, \sqrt{-\frac{c}{a}}\right\} \mid -\frac{c}{a} \geq 0 \\ V = \{\} \mid -\frac{c}{a} < 0 \end{cases}$$

Para o caso das equações incompletas onde somente **c = 0** temos:

$$V = \left\{0 , -\frac{b}{a}\right\}$$

E no caso das equações incompletas onde tanto **b = 0**, quanto **c = 0** temos:

$$V = \{0\}$$

Exemplo de resolução de uma equação do segundo grau

Encontre as raízes da equação: $2x^2 - 6x - 56 = 0$

Aplicando a fórmula geral de resolução à equação temos:

$$2x^2 - 6x - 56 = 0 \Rightarrow x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-56)}}{2 \cdot 2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{6 + \sqrt{484}}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{6 + 22}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{28}{4} \Rightarrow x_1 = 7 \\ x_2 = \frac{6 - \sqrt{484}}{4} \Rightarrow x_2 = \frac{6 - 22}{4} \Rightarrow x_2 = \frac{-16}{4} \Rightarrow x_2 = -4 \end{cases}$$

Observe que temos duas raízes reais distintas, o que já era de se esperar, pois apuramos para **Δ** o valor **484**, que é maior que **zero**.
Logo:
- As raízes da equação $2x^2 - 6x - 56 = 0$ são: -4 e 7.

Exercicios resolvidos

1)$x^2 – 4x – 5 = 0$

Os coeficientes dessa equação são: a = 1, b = – 4, c = – 5. Agora basta aplicar esses valores na fórmula de Bhaskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}, \Delta = b^2 - 4.a.c$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4.1.(-5)$$
$$\Delta = 16 + 20$$
$$\Delta = 36$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{36}}{2.1}$$
$$x = \frac{4 \pm 6}{2}$$
$$x' = \frac{10}{2} = 5$$
$$x'' = \frac{-2}{2} = -1$$

Nesse caso, a equação tem duas raízes reais: – 1 e 5.

2)$4x^2 + 8x + 6 = 0$

Os coeficientes da equação são: a = 4, b = 8, c = 6. Substituindo esses valores na fórmula de Bhaskara, temos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}, \Delta = b^2 - 4.a.c$$

$$\Delta = 8^2 - 4.4.6$$
$$\Delta = 64 - 96$$
$$\Delta = -32$$

Como $\Delta < 0$, a equação não possui raiz real.

RESOLVA AS EQUAÇÕES DE 2º GRAU

1) $x^2 - 5x + 6 = 0$ (R: 2, 3)
2) $x^2 - 8x + 12 = 0$ (R: 2, 6)
3) $x^2 + 2x - 8 = 0$ (R: 2, -4)
4) $x^2 - 5x + 8 = 0$ (R: vazio)
5) $2x^2 - 8x + 8 = 0$ (R: 2,)
6) $x^2 - 4x - 5 = 0$ (R: -1, 5)
7) $-x^2 + x + 12 = 0$ (R: -3, 4)
8) $-x^2 + 6x - 5 = 0$ (R: 1, 5)
9) $6x^2 + x - 1 = 0$ (R: 1/3 , -1/2)
10) $3x^2 - 7x + 2 = 0$ (R: 2, 1/3)
11) $2x^2 - 7x = 15$ (R: 5, -3/2)
12) $4x^2 + 9 = 12x$ (R: 3/2)
13) $x^2 = x + 12$ (R: -3 , 4)
14) $2x^2 = -12x - 18$ (R: -3)
15)$x^2-x-20=0$ {R:-4 e 5}
16) $x^2-3x +4$ {R:-1 e 4}
17) $x^2-14x+48=0$ {R: 6 e 8}
18) $x^2+3x-28=0$ {R:-7 e 4}
19) $x^2 + 9 = 4x$ (R: vazio)
20) $25x^2 = 20x - 4$ (R: 2/5)
21) $2x = 15 - x^2$ (R: 3, -5)
22) $x^2 + 3x - 6 = -8$ (R: -1, -2)
23) $x^2 + x - 7 = 5$ (R: -4 , 3)
24) $4x^2 - x + 1 = x + 3x^2$ (R: 1)
25) $3x^2 + 5x = -x - 9 + 2x^2$ (R: -3)
26) $4 + x (x - 4) = x$ (R: 1,4)
27) $x (x + 3) - 40 = 0$ (R: 5, -8)
28) $x^2 + 5x + 6 = 0$ (R:-2,-3)
29) $x^2 - 7x + 12 = 0$ (R:3,4)
31) $x^2 + 5x + 4 = 0$ (R:-1,-4)
32) $7x^2 + x + 2 = 0$ (vazio)
33) $x^2 - 18x + 45 = 0$ (R:3,15)
34) $-x^2 - x + 30 = 0$ (R:-6,5)

35) $x^2 - 6x + 9 = 0$ (R:3)
36) $(x + 3)^2 = 1$ (R:-2,-4)
37) $(x - 5)^2 = 1$ (R:3,7)
38) $(2x - 4)^2 = 0$ (R:2)
39) $(x - 3)^2 = -2x^2$ (R:vazio)
40) $x^2 - 3 = 4x + 2$ (R: -1,5)

PROBLEMAS COM EQUAÇÃO DO 2° GRAU

1) A soma de um numero com o seu quadrado é 90. Calcule esse numero. (R: 9 e -10)

2) A soma do quadrado de um número com o próprio número é 12. Calcule esse numero. (R: 3 e -4)

3) O quadrado menos o dobro de um número é igual a -1. Calcule esse número. (R: 1)

4) A diferença entre o quadrado e o dobro de um mesmo número é 80. Calcule esse número (R: 10 e -8)

5) O quadrado de um número aumentado de 25 é igual a dez vezes esse número. Calcule esse número (R: 5)

6) A soma do quadrado de um número com o seu triplo é igual a 7 vezes esse número. Calcule esse número. (R: 0 e 4)

7) O quadrado menos o quádruplo de um numero é igual a 5. Calcule esse número (R: 5 e -1)

8) O quadrado de um número é igual ao produto desse número por 3, mais 18. Qual é esse numero? (R: 6 e -3)

9) O dobro do quadrado de um número é igual ao produto desse numero por 7 menos 3. Qual é esse numero? (R: 3 e ½)

10) O quadrado de um número menos o triplo do seu sucessivo é igual a 15. Qual é esse numero?(R: 6 e -3)

11) Qual o número que somado com seu quadrado resulta em 56? (R: -8 e 7)

12) Um numero ao quadrado mais o dobro desse número é igual a 35. Qual é esse número ? (R: -7 e 5)

13) O quadrado de um número menos o seu triplo é igual a 40. Qual é esse número? (R: 8 e -5)

14) Calcule um número inteiro tal que três vezes o quadrado desse número menos o dobro desse número seja igual a 40. (R: 4)

15) Calcule um número inteiro e positivo tal que seu quadrado menos o dobro desse número seja igual a 48. (R: 8)

16) O triplo de um número menos o quadrado desse número é igual a 2. Qual é esse número? (R: 1 e 2)

17) Qual é o número , cujo quadrado mais seu triplo é igual a 40? (R: 5 , -8)

18) O quadrado de um número diminuido de 15 é igual ao seu dobro. Calcule esse número. (R: 5 e -3)

19) Determine um número tal que seu quadrado diminuído do seu triplo é igual a 26. (R: 7 e -4)

20) Se do quadrado de um número, negativo subtraimos 7, o resto será 42. Qual é esse número? (R: -7)

21) A diferença entre o dobro do quadrado de um número positivo e o triplo desse número é 77. Calcule o número. (R: 7)

22) Determine dois números ímpares consecutivos cujo produto seja 143. (R: 11 e 13 ou -11, -13)

23) Um azulejista usou 2000 azulejos quadrados e iguais para revestir 45m² de parede. Qual é a medida do lado de cada azulejo? (R:15 cm)

RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES INCOMPLETAS

Resolver uma equação é determinar todas as suas soluções. Vejamos, através de exemplos, como se resolvem as equações incompletas do 2° grau

1° CASO – equações da forma $ax^2 + c = 0$, ($b = 0$)
Exemplos:
1) $x^2 - 25 = 0$
$x^2 = 25$
$x = \sqrt{25}$
$x = 5$
logo V = (+5 e -5)

2) $2x^2 - 18 = 0$
$2x^2 = 18$
$x^2 = 18/2$
$x^2 = 9$
$x = \sqrt{9}$
$x = 3$
logo V = (-3 e +3)

3) $7x^2 - 14 = 0$
$7x^2 = 14$
$x^2 = 14/7$
$x^2 = 2$
$x = \sqrt{2}$
logo V = ($-\sqrt{2}$ e $+\sqrt{2}$)

4) $x^2 + 25 = 0$
$x^2 = -25$
$x = \sqrt{-25}$

obs: não existe nenhum número real que elevado ao quadrado seja igual a -25

EXERCÍCIOS

1) Resolva as seguintes equações do 2° grau

a) $x^2 - 49 = 0$ (R: -7 e +7)
b) $x^2 = 1$ (R: +1 e -1)
c) $2x^2 - 50 = 0$ (R: 5 e -5)
d) $7x^2 - 7 = 0$ (R: 1 e -1)
e) $5x^2 - 15 = 0$ (R: $\sqrt{3}$ e $-\sqrt{3}$)
f) $21 = 7x^2$ (R: $\sqrt{3}$ e $-\sqrt{3}$)
g) $5x^2 + 20 = 0$ (R: vazio)
h) $7x^2 + 2 = 30$ (R: 2 e -2)
i) $2x^2 - 90 = 8$ (R: 7 e -7)
j) $4x^2 - 27 = x^2$ (R:3 e -3)
k) $8x^2 = 60 – 7x^2$ (R: 2 e -2)
l) $3(x^2 - 1) = 24$ (R: 3 e -3)
m) $2(x^2 - 1) = x^2 + 7$ (R:3 e -3)
n) $5(x^2 - 1) = 4(x^2 + 1)$ (R:3 e -3)
o) $(x – 3)(x + 4) + 8 = x$ (R:2 e -2)

2° CASO: Equações da forma $ax^2 + bx = 0$ ($c = 0$)
Propriedade: Para que um produto seja nulo é preciso que um dos fatores seja zero .

Exemplos
1) resolver $x^2 - 5x = 0$
fatorando $x(x – 5) = 0$
deixando um dos fatores nulo temos $x = 0$
e o outro $x – 5 = 0$, passando o 5 para o outro lado do igual temos $x = 5$
logo, V = (0 e 5)

2) resolver: $3x^2 - 10x = 0$
fatorando: $x(3x – 10) = 0$
deixando um dos fatores nulo temos $x = 0$
Tendo também $3x – 10 = 0$
$3x = 10$
$x = 10/3$
logo V= (0 e 10/3)
Observe que, nesse caso, uma das raízes é sempre zero.

EXERCÍCIOS

1) Resolva as seguintes equações do 2° grau.

a) $x^2 - 7x = 0$ (R: 0 e 7)
b) $x^2 + 5x = 0$ (R: 0 e -5)
c) $4x^2 - 9x = 0$ (R: 0 e 9/4)
d) $3x^2 + 5x =0$ (R: 0 e -5/3)
e) $4x^2 - 12x = 0$ (R: 0 e 3)
f) $5x^2 + x = 0$ (R: 0 e -1/5)
g) $x^2 + x = 0$ (R: 0 e -1)

h) $7x^2 - x = 0$ (R: 0 e 1/7)
i) $2x^2 = 7x$ (R: 0 e 7/2)
j) $2x^2 = 8x$ (R: 0 e 4)
k) $7x^2 = -14x$ (R: 0 e -2)
l) $-2x^2 + 10x = 0$ (R: 0 e 5)

2) Resolva as seguintes equações do 2° grau
a) $x^2 + x(x – 6) = 0$ (R: 0 e 3)
b) $x(x + 3) = 5x$ (R: 0 e 2)
c) $x(x – 3) -2 (x - 3) = 6$ (R: 0 e 5)
d) $(x + 5)^2 = 25$ (R: 0 e -10)
e) $(x – 2)^2 = 4 – 9x$ (R: 0 e -5)
f) $(x + 1) (x – 3) = -3$ (R: 0 e 2)

Efetue

a) $3x^2 – 7x + 4 = 0$

b) $9y^2 – 12y + 4 = 0$

c) $5x^2 + 3x + 5 = 0$

Resolva a seguinte equação do 2º grau.

$$x^2 + \frac{5x}{2} - \frac{3}{2} = 0$$

Resolução

a)	b)	c)
$3x^2 – 7x + 4 = 0$ $\Delta = (-7)^2 - 4*3*4$ $\Delta = 49 - 48$ $\Delta = 1$ $x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{1}}{2*3}$ $x = \frac{7 \pm 1}{6}$ $x' = \frac{7+1}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$ $x'' = \frac{7-1}{6} = \frac{6}{6} = 1$	***$9y^2 – 12y + 4 = 0$*** $\Delta = (-12)^2 - 4*9*4$ $\Delta = 144 - 144$ $\Delta = 0$ $y = \frac{-(-12) \pm \sqrt{0}}{2*9}$ $y = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$ $y' = y'' = \frac{2}{3}$	***$5x^2 + 3x + 5 = 0$*** $\Delta = 3^2 - 4*5*5$ $\Delta = 9 - 100$ $\Delta = -91$ Não possui raízes reais.

$$x^2+\frac{5x}{2}-\frac{3}{2}=0$$

$$\Delta=b^2-4ac$$

$$\Delta=\left(\frac{5}{2}\right)^2-4*1*\left(-\frac{3}{2}\right)$$

$$\Delta=\frac{25}{4}+\frac{12}{2}$$

$$\Delta=\frac{25+24}{4}$$

$$\Delta=\frac{49}{4}$$

$$x=\frac{-\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{49}{4}}}{2*1}$$

$$x=\frac{-\frac{5}{2}\pm\frac{7}{2}}{2}$$

$$x'=\frac{-\frac{5}{2}+\frac{7}{2}}{2}=\frac{\frac{2}{2}}{2}=\frac{1}{2}$$

$$x''=\frac{-\frac{5}{2}-\frac{7}{2}}{2}=\frac{\frac{-12}{2}}{2}=-\frac{6}{2}=-3$$