

Produtos notáveis

Utilizados para simplificar as contas do produto algébrico, os produtos notáveis apresentam cinco casos distintos.

Antes de entendermos o que são produtos notáveis, devemos saber o que são expressões algébricas, isto é, equações que possuem letras e números. Veja alguns exemplos:

$$\begin{aligned}2x + 3 &= 4 \\ -y + 2x + 1 &= 0 \\ z^2 + ax + 2y &= 3\end{aligned}$$

Os produtos notáveis possuem fórmulas gerais, que, por sua vez, são a simplificação de produtos algébricos. Veja:

$$\begin{aligned}(x + 2) \cdot (x + 2) &= \\ (y - 3) \cdot (y - 3) &= \\ (z + 4) \cdot (z - 4) &= \end{aligned}$$

Há cinco casos distintos de produtos notáveis, a saber:

Primeiro Caso:

QUADRADO DA SOMA DE DOIS TERMOS

| | | | | | | |
|---------------------------------|---|----------------------|---|------------------------------------|---|----------------------|
| $(x + y)^2$ | = | x^2 | + | $2xy$ | + | y^2 |
| Quadrado da soma de dois termos | | Quadrado do 1º termo | | Duas vezes o produto do 1º pelo 2º | | Quadrado do 2º termo |

O quadrado da soma de dois termos é igual ao quadrado do primeiro, mais duas vezes o produto do primeiro pelo segundo, mais o quadrado do segundo.

- quadrado = expoente 2;
- Soma de dois termos = $a + b$;
- Logo, o quadrado da soma de dois termos é: $(a + b)^2$

Efetuada o produto do quadrado da soma, obtemos:

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= (a + b) \cdot (a + b) = \\ &= a^2 + a \cdot b + a \cdot b + b^2 = \\ &= a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2\end{aligned}$$

Toda essa expressão, ao ser reduzida, forma o produto notável, que é dado por:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

Sendo assim, o quadrado da soma de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo, mais duas vezes o primeiro termo pelo segundo, mais o quadrado do segundo termo.

Exemplos:

$$\begin{aligned}(2 + a)^2 &= \\ &= 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot a + a^2 = \\ &= 4 + 4 \cdot a + a^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3x + y)^2 &= \\ &= (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot y + y^2 = \\ &= 9x^2 + 6 \cdot x \cdot y + y^2\end{aligned}$$

Efetue

a) $(x + 3y)^2 =$

b) $(7x + 1)^2 =$

c) $(a^5 + 2bc)^2 =$

Segundo Caso:

QUADRADO DA DIFERENÇA DE DOIS TERMOS

| | | | | | | |
|--|---|-------------------------|---|--|---|-------------------------|
| $(x - y)^2$ | = | x^2 | - | $2xy$ | + | y^2 |
| Quadrado da diferença de dois termos | | Quadrado do 1º termo | | Duas vezes o produto do 1º pelo 2º | | Quadrado do 2º termo |

O quadrado da diferença de dois termos é igual ao quadrado do primeiro, menos duas vezes o produto do primeiro pelo segundo mais o quadrado do segundo.

Quadrado da diferença de dois termos.

- Quadrado = expoente 2;
- Diferença de dois termos = $a - b$;
- Logo, o quadrado da diferença de dois termos é: $(a - b)^2$.

Vamos efetuar os produtos por meio da propriedade distributiva:

$$\begin{aligned} (a - b)^2 &= (a - b) \cdot (a - b) \\ &= a^2 - a \cdot b - a \cdot b + b^2 = \\ &= a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \end{aligned}$$

Reduzindo essa expressão, obtemos o produto notável:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

Temos, então, que o quadrado da diferença de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo, menos duas vezes o primeiro termo pelo segundo, mais o quadrado do segundo termo.

Exemplos:

$$\begin{aligned} (a - 5c)^2 &= \\ &= a^2 - 2 \cdot a \cdot 5c + (5c)^2 = \\ &= a^2 - 10 \cdot a \cdot c + 25c^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (p - 2s)^2 &= \\ &= p^2 - 2 \cdot p \cdot 2s + (2s)^2 = \\ &= p^2 - 4 \cdot p \cdot s + 4s^2 \end{aligned}$$

Efetue

1) $(7x - 4)^2 =$

2) $(6a - b)^2 =$

3) $(x^3 - xy)^2 =$

Terceiro Caso:

PRODUTO DA SOMA PELA DIFERENÇA DE DOIS TERMOS

$$\underbrace{(x + y)}_{\text{Soma dos termos}} \cdot \underbrace{(x - y)}_{\text{Diferença dos termos}} = \underbrace{x^2}_{\text{Quadrado do 1º termo}} - \underbrace{y^2}_{\text{Quadrado do 2º termo}}$$

O produto da soma pela diferença de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo menos o quadrado do segundo termo.

Produto da soma pela diferença de dois termos.

- Produto = operação de multiplicação;
- Soma de dois termos = $a + b$;
- Diferença de dois termos = $a - b$;
- O produto da soma pela diferença de dois termos é: $(a + b) \cdot (a - b)$

Resolvendo o produto de $(a + b) \cdot (a - b)$, obtemos:

$$\begin{aligned} (a + b) \cdot (a - b) &= \\ &= a^2 - ab + ab - b^2 = \\ &= a^2 + 0 + b^2 = a^2 - b^2 \end{aligned}$$

Reduzindo a expressão, obtemos o produto notável:

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

Podemos concluir, portanto, que o produto da soma pela diferença de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo menos o quadrado do segundo termo.

Exemplos:

$$\begin{aligned} (2 - c) \cdot (2 + c) &= \\ &= 2^2 - c^2 = \\ &= 4 - c^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3x^2 - 1) \cdot (3x^2 + 1) &= \\ &= (3x^2)^2 - 1^2 = \\ &= 9x^4 - 1 \end{aligned}$$

Efetue

1) $(3a + x) \cdot (3a - x) =$

2) $(x^2 + 5p) \cdot (x^2 - 5p) =$

3) $(10 - ab^4) \cdot (10 + ab^4) =$

Quarto caso:

CUBO DA SOMA DE DOIS TERMOS

| | | | | | | | | |
|-----------------------------|---|------------------|---|--|---|--|---|------------------|
| $(x + y)^3$ | = | x^3 | + | $3x^2y$ | + | $3xy^2$ | + | y^3 |
| Cubo da soma de dois termos | | Cubo do 1º termo | | Três vezes o produto do quadrado do 1º pelo 2º | | Três vezes o produto do 1º pelo quadrado do 2º | | Cubo do 2º termo |

O cubo da soma de dois termos é igual ao cubo do primeiro, mais três vezes o produto do quadrado do primeiro pelo segundo, mais três vezes o produto do primeiro pelo quadrado do segundo, mais o cubo do segundo.

Cubo da soma de dois termos

- Cubo = expoente 3;
- Soma de dois termos = $a + b$;
- Logo, o cubo da soma de dois termos é: $(a + b)^3$

Efetando o produto por meio da propriedade distributiva, obtemos:

$$\begin{aligned} (a + b)^3 &= (a + b) \cdot (a + b) \cdot (a + b) = \\ &= (a^2 + a \cdot b + a \cdot b + b^2) \cdot (a + b) = \\ &= (a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2) \cdot (a + b) = \\ &= a^3 + 2 \cdot a^2 \cdot b + a \cdot b^2 + a^2 \cdot b + 2 \cdot a \cdot b^2 + b^3 = \\ &= a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + b^3 \end{aligned}$$

Reduzindo a expressão, obtemos o produto notável:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + b^3$$

O cubo da soma de dois termos é dado pelo cubo do primeiro, mais três vezes o primeiro termo ao quadrado pelo segundo termo, mais três vezes o primeiro termo pelo segundo ao quadrado, mais o cubo do segundo termo.

Exemplos

$$\begin{aligned} &(3c + 2a)^3 = \\ &= (3c)^3 + 3 \cdot (3c)^2 \cdot 2a + 3 \cdot 3c \cdot (2a)^2 + (2a)^3 = \\ &= 27c^3 + 54 \cdot c^2 \cdot a + 36 \cdot c \cdot a^2 + 8a^3 \end{aligned}$$

: Efetue:

a) $(a + b)^3 =$

b) $(x + 4)^3 =$

c) $(2a + y)^3 =$

Quinto caso:

CUBO DA DIFERENÇA DE DOIS TERMOS

| | | | | | | | | |
|--|---|---------------------|---|---|---|---|---|---------------------|
| $(x + y)^3$ | = | x^3 | - | $3x^2y$ | + | $3xy^2$ | - | y^3 |
| Cubo da diferença de dois termos | | Cubo do 1º termo | | Três vezes o produto do quadrado do 1º pelo 2º | | Três vezes o produto do 1º pelo quadrado do 2º | | Cubo do 2º termo |

O cubo da diferença de dois termos é igual ao cubo do primeiro, menos três vezes o produto do quadrado do primeiro pelo segundo, mais três vezes o produto do primeiro pelo quadrado do segundo, menos o cubo do segundo.

Cubo da diferença de dois termos

- Cubo = expoente 3;
- Diferença de dois termos = $a - b$;
- Logo, o cubo da diferença de dois termos é: $(a - b)^3$.

Efetutando os produtos, obtemos:

$$\begin{aligned} (a - b)^3 &= (a - b) \cdot (a - b) \cdot (a - b) = \\ &= (a^2 - a \cdot b - a \cdot b + b^2) \cdot (a - b) = \\ &= (a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2) \cdot (a - b) = \\ &= a^3 - 2 \cdot a^2 \cdot b - a \cdot b^2 - a^2 \cdot b + 2 \cdot a \cdot b^2 - b^3 = \\ &= a^3 - 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 - b^3 \end{aligned}$$

Reduzindo a expressão, obtemos o produto notável:

$$(a - b)^3 = a^3 - 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 - b^3$$

O cubo da diferença de dois termos é dado pelo cubo do primeiro, menos três vezes o primeiro termo ao quadrado pelo segundo termo, mais três vezes o primeiro termo pelo segundo ao quadrado, menos o cubo do segundo termo.

Exemplo:

$$\begin{aligned} (x - 2y)^3 &= \\ &= x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot 2y + 3 \cdot x \cdot (2y)^2 - (2y)^3 = \\ &= x^3 - 6 \cdot x^2 \cdot y + 12 \cdot x \cdot y^2 - 8y^3 \end{aligned}$$

: Efetue:

a) $(a - b)^3 =$

b) $(x - 4)^3 =$

c) $(2a - y)^3 =$

)

Utilizando as regras dos produtos notáveis, calcule:

a) $(x + 3)^2$

b) $(a + b)^2$

c) $(5y - 1)^2$

d) $(x^2 - 6)^2$

e) $(2x + 7)^2$

f) $(9x + 1) \cdot (9x - 1)$

g) $(a^2 - xy)^2$

k) $(x^3y - xy^3)^2$

i) $(3y - 5)^2$

j) $(2x^2 + 3xy)^2$

k) $(10x^2 - ab)^2$

l) $(2a^3 + 3a)^2$

m) $(ab + a^2) \cdot (ab - a^2)$