TRIGONOMETRIA

O papel da trigonometria

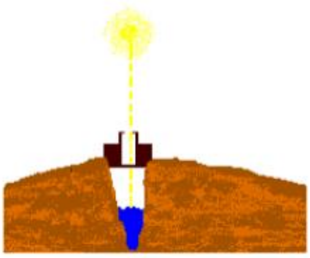
A palavra Trigonometria é formada por três radicais gregos: tri (três), gonos (ângulos) e metron (medir). Daí vem seu significado mais amplo: Medida dos Triângulos, assim através do estudo da Trigonometria podemos calcular as medidas dos elementos do triângulo (lados e ângulos).

Com o uso de triângulos semelhantes podemos calcular distâncias inacessíveis, como a altura de uma torre, a altura de uma pirâmide, distância entre duas ilhas, o raio da terra, largura de um rio, entre outras.

A Trigonometria é um instrumento potente de cálculo, que além de seu uso na Matemática, também é usado no estudo de fenômenos físicos, Eletricidade, Mecânica, Música, Astronomia, Topografia, Engenharia entre outros.

Como Erastótenes calculou o raio da terra?

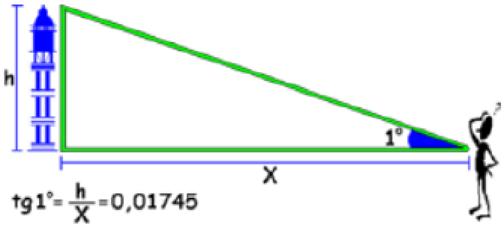
Erastótenes, matemático e geógrafo grego, nasceu em c. 276 aC e morreu em c. 194 aC em Alexandria (antigo Egito). Por volta do ano de 240 aC Erastótenes dirigia a biblioteca do museu de Alexandria, tendo deste modo acesso a catálogos relacionados a acontecimentos astronômicos importantes.
Obteve assim a informação, de que, em certo dia do ano (solstício de verão no hemisfério norte), ao meio-dia, o Sol se refletia nas águas de um poço muito fundo situado na cidade de Syene (que ficava exatamente no limite da zona tropical e no mesmo meridiano de Alexandria).
Para que a luz do Sol pudesse se refletir nas águas de um poço muito fundo, este deveria estar bem alinhado com o Sol, isto é, o Sol, o poço e o raio da Terra deveriam estar todos sobre uma mesma reta imaginária, ou em outras palavras, o Sol deveria estar no zênite, exatamente sobre a cabeça do observador.



Erastótenes observou que neste mesmo dia, em Alexandria, a sombra de uma coluna, ao meio-dia, revelava que o Sol distava do zênite 7 1/2 ^{0} (medida feita com o auxílio do astrolábio).
Sabendo que os raios de luz provindos de grandes distâncias parecem paralelos ou comportam-se como se fossem, Erastótenes concluiu que os raios que ligam as extremidades de um arco de 800 Km ao centro da Terra, formam um ângulo de 7 1/2 ^{0} (800 Km é a distância entre as duas cidades, que já era conhecida pelos funcionários do museu). Este ângulo equivale a aproximadamente 1/50 do comprimento do meridiano terrestre -que é de 360^0.

ÂNGULO DE VISÃO

Todas as vezes que vemos um objeto sob um ângulo de 1 grau é porque ele está, necessariamente, afastado de nós 57 vezes o seu tamanho. Como sabemos disso? É fácil. Basta recordar o conceito de tangente e verificar que a tangente de 1° (um grau) vale aproximadamente 0,01745.



$$tg\,1° = \frac{h}{X} = 0{,}01745$$

$$X = \frac{h}{0{,}01745} \cong 57 \times h$$

Podemos continuar o raciocínio e verificar que se observarmos um astro sob um ângulo de 30 minutos de arco (meio grau), ele estará afastado cerca de 115 vezes o seu diâmetro. Acontece que vemos a Lua Cheia sob um ângulo médio de 31 minutos de arco, o que nos diz que ela esta distante de nós cerca de 115 vezes o seu diâmetro. Se você já conhece a distância da Terra à Lua, agora também já pode saber o seu diâmetro. Daí também não será difícil calcular o volume, a área da superfície...

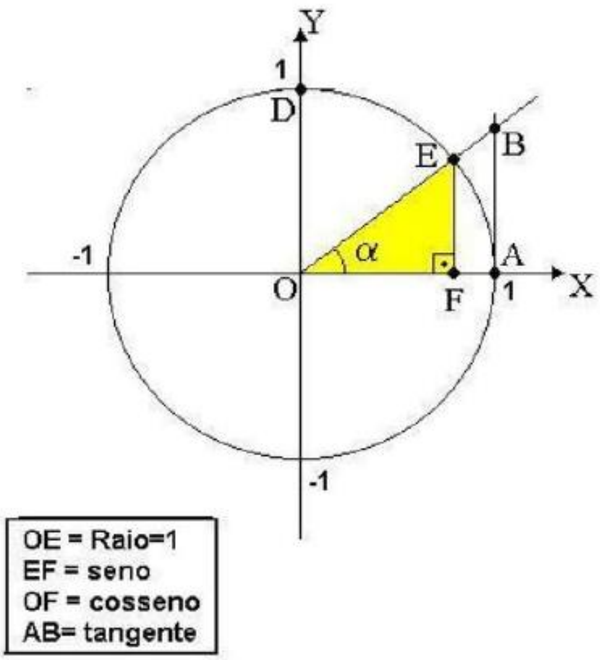
Conclusões

Podemos lamentar que as aulas de geometria da maioria de nós nunca tenham ido tão longe. Podemos imaginar o estado de êxtase ao qual Eratóstenes, Hiparco, Aristarco e tantos outros se depararam ao vislumbrar métodos tão simples, descobertas tão soberbas. Não tem a menor importância se os resultados divergiram dos que hoje obtemos quando disparamos um raio laser contra a Lua, e o fazemos refletir de volta, com intuitos semelhantes. Não importa, agora, que já dispomos de algoritmos que permitem medidas muito mais ousadas. Queremos ressaltar o quanto a imaginação vale mais que o conhecimento.

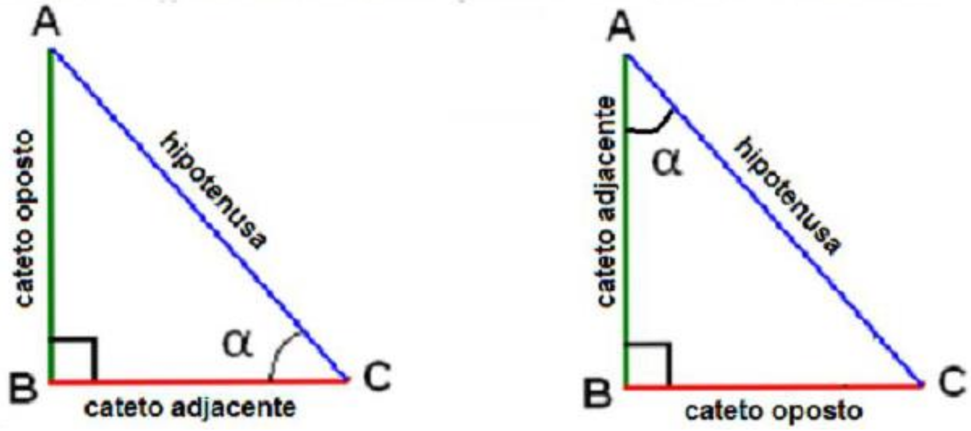
Funções trigonométricas básicas

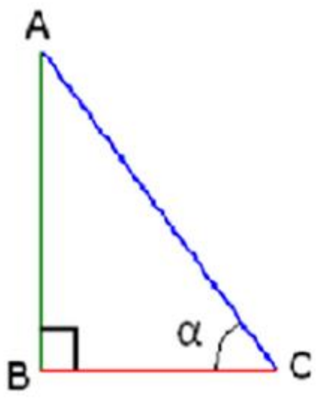
As Funções trigonométricas básicas são relações entre as medida dos lados do triângulo retângulo e seus ângulos. As três funçõe básicas mais importantes da trigonometria são: seno, cosseno tangente.

<u>Círculo e Funções Trigonométricas</u>



<u>NOMENCLATURA DOS CATETOS EM RELAÇÃO AO ÂNGULO</u>





Razões trigonométricas do ângulo α

Seno:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{Cateto oposto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

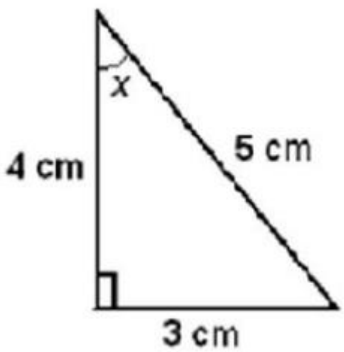
Coseno:

$$\cos\alpha = \frac{\text{Cateto adjacente}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$$

Tangente:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{Cateto oposto}}{\text{Cateto adjacente}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$$

EXEMPLO



Seno:

$$\operatorname{sen} x = \frac{\text{Cateto oposto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

Coseno:

$$\cos x = \frac{\text{Cateto adjacente}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

Tangente:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\text{Cateto oposto}}{\text{Cateto adjacente}} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

OU

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{0{,}6}{0{,}8} = 0{,}75$$

TABELA TRIGONOMETRICA

Ângulo	sen	cos	Tg
1	0,017452	0,999848	0,017455
2	0,034899	0,999391	0,034921
3	0,052336	0,99863	0,052408
4	0,069756	0,997564	0,069927
5	0,087156	0,996195	0,087489
6	0,104528	0,994522	0,105104
7	0,121869	0,992546	0,122785
8	0,139173	0,990268	0,140541
9	0,156434	0,987688	0,158384
10	0,173648	0,984808	0,176327
11	0,190809	0,981627	0,19438
12	0,207912	0,978148	0,212557
13	0,224951	0,97437	0,230868
14	0,241922	0,970296	0,249328
15	0,258819	0,965926	0,267949
16	0,275637	0,961262	0,286745
17	0,292372	0,956305	0,305731
18	0,309017	0,951057	0,32492
19	0,325568	0,945519	0,344328
20	0,34202	0,939693	0,36397
21	0,358368	0,93358	0,383864
22	0,374607	0,927184	0,404026
23	0,390731	0,920505	0,424475
24	0,406737	0,913545	0,445229
25	0,422618	0,906308	0,466308
26	0,438371	0,898794	0,487733
27	0,45399	0,891007	0,509525
28	0,469472	0,882948	0,531709
29	0,48481	0,87462	0,554309
30	0,5	0,866025	0,57735
31	0,515038	0,857167	0,600861
32	0,529919	0,848048	0,624869
33	0,544639	0,838671	0,649408
34	0,559193	0,829038	0,674509
35	0,573576	0,819152	0,700208
36	0,587785	0,809017	0,726543

37	0,601815	0,798636	0,753554
38	0,615661	0,788011	0,781286
39	0,62932	0,777146	0,809784
40	0,642788	0,766044	0,8391
41	0,656059	0,75471	0,869287
42	0,669131	0,743145	0,900404
43	0,681998	0,731354	0,932515
44	0,694658	0,71934	0,965689
45	0,707107	0,707107	1
46	0,71934	0,694658	1,03553
47	0,731354	0,681998	1,072369
48	0,743145	0,669131	1,110613
49	0,75471	0,656059	1,150368
50	0,766044	0,642788	1,191754
51	0,777146	0,62932	1,234897
52	0,788011	0,615661	1,279942
53	0,798636	0,601815	1,327045
54	0,809017	0,587785	1,376382
55	0,819152	0,573576	1,428148
56	0,829038	0,559193	1,482561
57	0,838671	0,544639	1,539865
58	0,848048	0,529919	1,600335
59	0,857167	0,515038	1,664279
60	0,866025	0,5	1,732051
61	0,87462	0,48481	1,804048
62	0,882948	0,469472	1,880726
63	0,891007	0,45399	1,962611
64	0,898794	0,438371	2,050304
65	0,906308	0,422618	2,144507
66	0,913545	0,406737	2,246037
67	0,920505	0,390731	2,355852
68	0,927184	0,374607	2,475087
69	0,93358	0,358368	2,605089
70	0,939693	0,34202	2,747477
71	0,945519	0,325568	2,904211
72	0,951057	0,309017	3,077684
73	0,956305	0,292372	3,270853
74	0,961262	0,275637	3,487414
75	0,965926	0,258819	3,732051

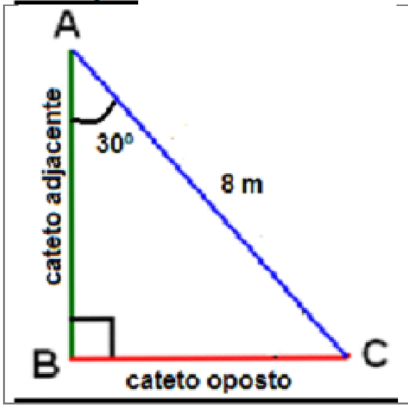
76	0,970296	0,241922	4,010781
77	0,97437	0,224951	4,331476
78	0,978148	0,207912	4,70463
79	0,981627	0,190809	5,144554
80	0,984808	0,173648	5,671282
81	0,987688	0,156434	6,313752
82	0,990268	0,139173	7,11537
83	0,992546	0,121869	8,144346
84	0,994522	0,104528	9,514364
85	0,996195	0,087156	11,43005
86	0,997564	0,069756	14,30067
87	0,99863	0,052336	19,08114
88	0,999391	0,034899	28,63625
89	0,999848	0,017452	57,28996
90	1	0	-

UMA TABELA MUITO IMPORTANTE

Os ângulos de 30º, 45º e 60º aparecem com frequência em muitos problemas. Para as razões trigonométricas relacionadas a esses ângulos é mais conveniente usar os valores indicados abaixo.

	30º	45º	60º
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Exemplo



Calcular a medida dos catetos, tendo a=8m e Â= 30º.

Cateto oposto - co

co = sen 30º . a

co = 0,5. 8= 4 m

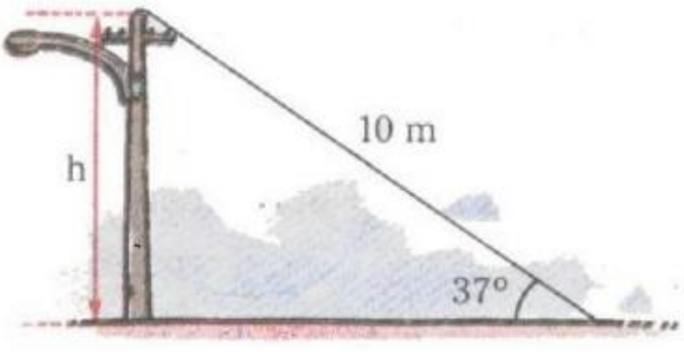
Cateto adjacente- Ca

ca= cos 30º. a

ca= 0,866 . 8 = 6,93 m (arredondado)

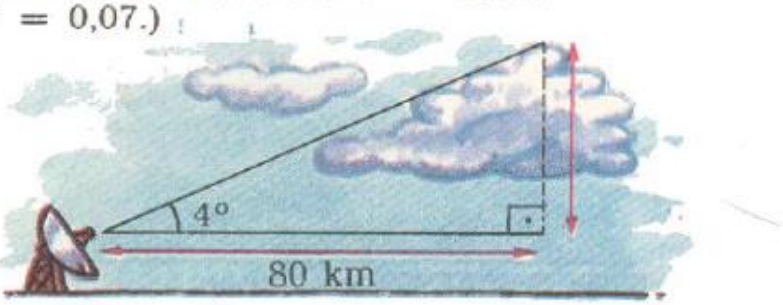
RESOLVA AS ATIVIDADES

1) Qual é a altura **h** do poste representado pela figura abaixo?



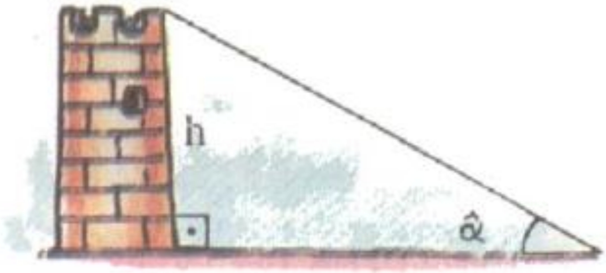
2) Uma rampa lisa com 10 m de comprimento faz ângulo de 15° com o plano horizontal. Uma pessoa que sobe a rampa inteira eleva-se verticalmente a quantos metros? (Use: sen 15° = 0,26; cos 15° = 0,97; tg 15° = 0,27.)

3) A determinação feita por radares da altura de uma nuvem em relação ao solo é importante para previsões meteorológicas e na orientação de aviões para que evitem turbulências. Nessas condições, determine a altura das nuvens detectadas pelos radares conforme o desenho seguinte.
(Use: sen 4° = 0,07; cos 4° = 0,99; tg 4° = 0,07.)

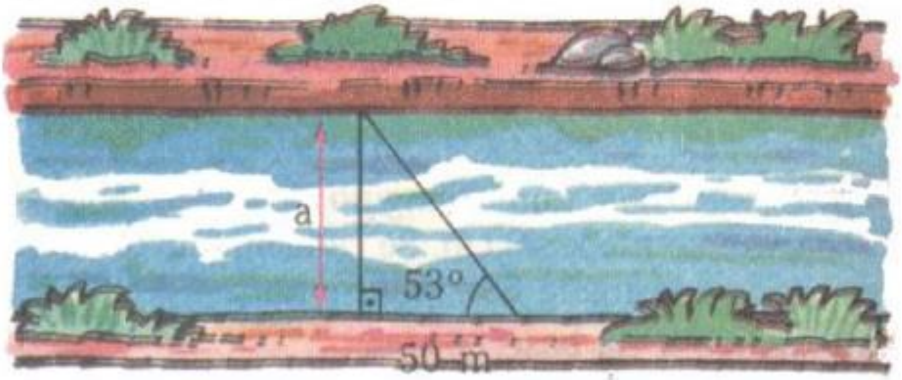


4) A uma distância de 40 m, uma torre é vista sob um ângulo α, como nos mostra a figura. Determine a altura **h** da torre se:

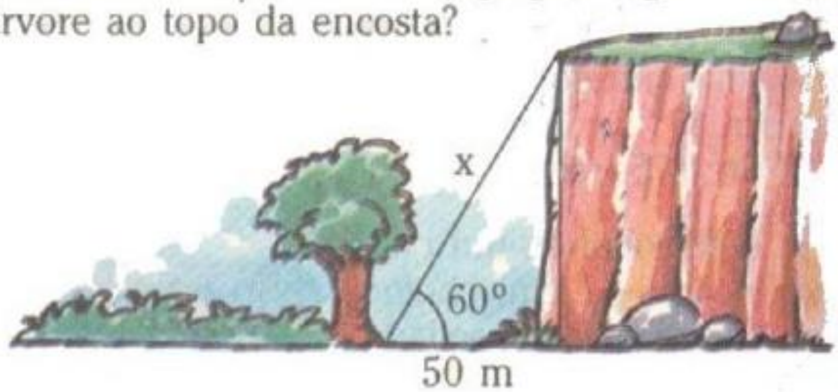
a) $\hat{\alpha} = 20°$; b) $\hat{\alpha} = 40°$.



5) Qual é a largura do rio representado pela figura abaixo?
(Use: sen $53° = 0,80$; cos $53° = 0,60$; tg $53° = 1,32$.)

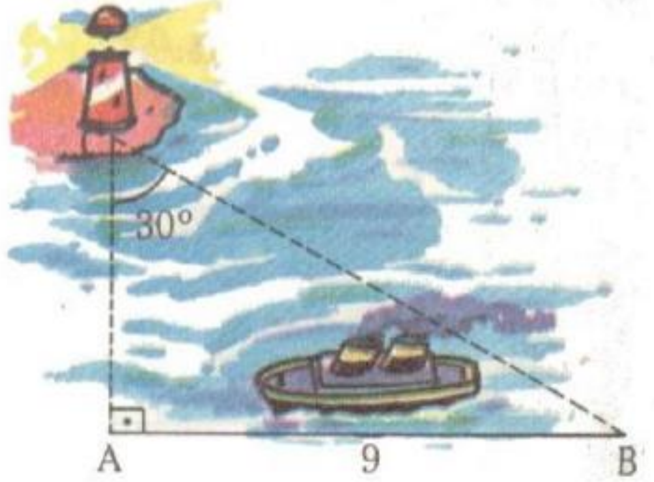


6) O ângulo de elevação do pé de uma árvore ao topo de uma encosta é de 60°. Sabendo-se que a árvore está distante 50 m da base da encosta, que medida deve ter um cabo de aço para ligar a base da árvore ao topo da encosta?

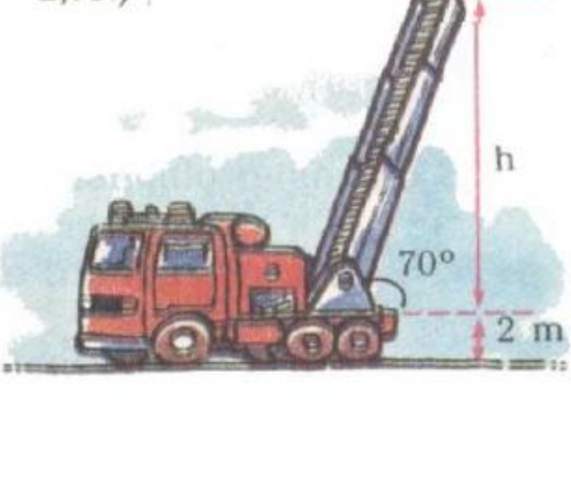


7) Um navio, navegando em linha reta, vai de um ponto A até um ponto B. Quando o navio está no ponto B, é possível observar um farol situado num ponto C de tal forma que o ângulo $A\hat{C}B = 30°$. Sabendo que o ângulo $C\hat{A}B$ é reto e que a distância entre os pontos A e B é de 9 milhas, calcule a distância, em milhas: (Faça: $\sqrt{3} = 1{,}73$.)

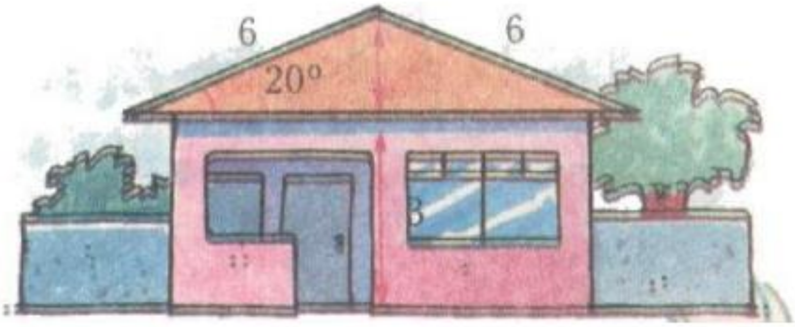
a) do ponto A ao farol; b) do ponto B ao farol.



8) Uma escada de um carro de bombeiros pode estender-se até um comprimento máximo de 30 m, quando é levantada a um ângulo máximo de 70°. Sabe-se que a base da escada está colocada sobre um caminhão, a uma altura de 2 m do solo. Que altura, em relação ao solo, essa escada poderá alcançar? (Use: sen 70° = 0,94; cos 70° = 0,34; tg 70° = 2,75.)

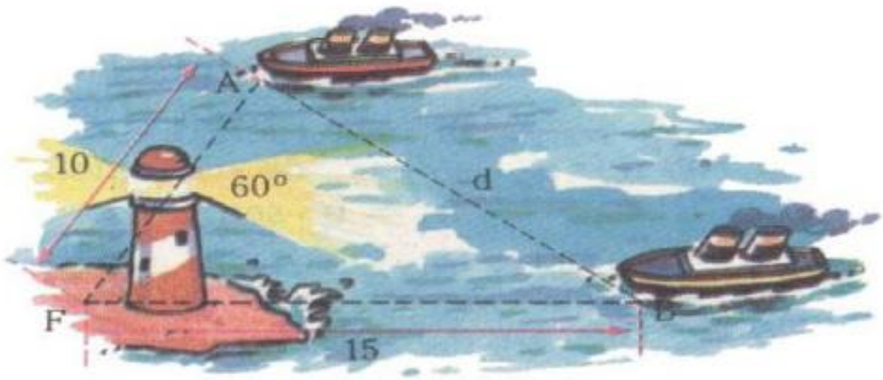


9) Na construção de um telhado, foram usadas telhas francesas e o "caimento" do telhado é de 20° em relação ao plano horizontal. Sabendo que, em cada lado da casa, foram construídos 6 m de telhado e que, até a laje do teto, a casa tem 3 m de altura, determine a que altura se encontra o ponto mais alto do telhado dessa casa.
(Use: sen 20° = 0,34; cos 20° = 0,94; tg 20° = 0,36.)



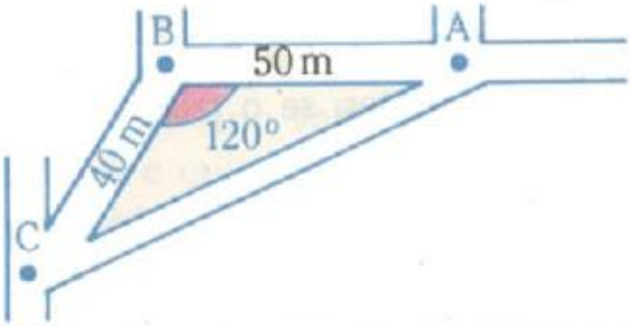
10) Um navio se encontra num ponto A, distante 10 milhas de um farol F. No mesmo instante, um outro navio se encontra num ponto B, distante 15 milhas do mesmo farol F. Um observador, estando no farol F, vê os dois navios sob um ângulo de visão de 60°. Qual é a distância entre os navios nesse instante?

$\left(\text{Use: } \cos 60° = \frac{1}{2};\ \sqrt{7} \simeq 2{,}64.\right)$

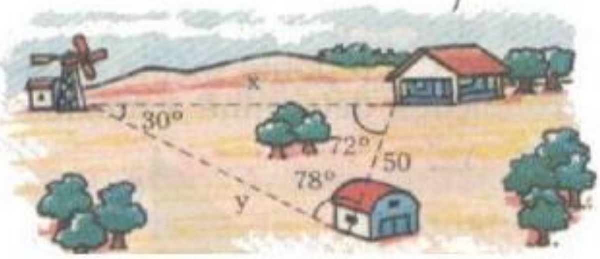


11) Uma pessoa encontra-se no cruzamento A, dirigindo-se para o cruzamento C. Tendo escolhido o caminho mais curto ($\overline{AC}$), quantos m essa pessoa vai andar para ir de A até C?

$\left(\text{Use: } \cos 120^\circ = -\frac{1}{2},\ \sqrt{61} = 7{,}81.\right)$



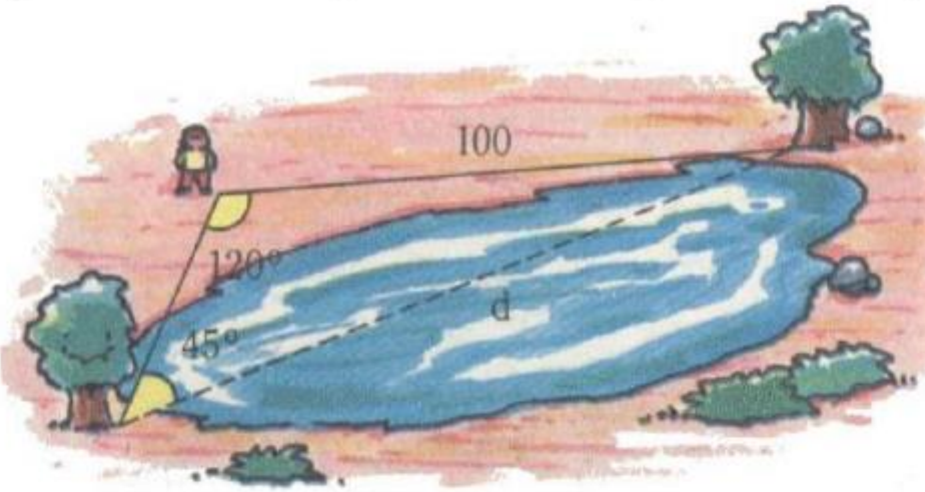
12) Numa fazenda, o galpão fica 50 metros distante da casa. Sejam **x** e **y**, respectivamente, as distâncias da casa e do galpão ao transformador de energia, conforme mostra a figura abaixo. Nessas condições, calcule as medidas **x** e **y** indicadas. $\left(\text{Use: } \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2},\ \operatorname{sen} 78^\circ = 0{,}98,\ \operatorname{sen} 72^\circ = 0{,}95.\right)$



13) **calcule a altura de um escorregador que tem 5 m de comprimento e 50° de inclinação.**

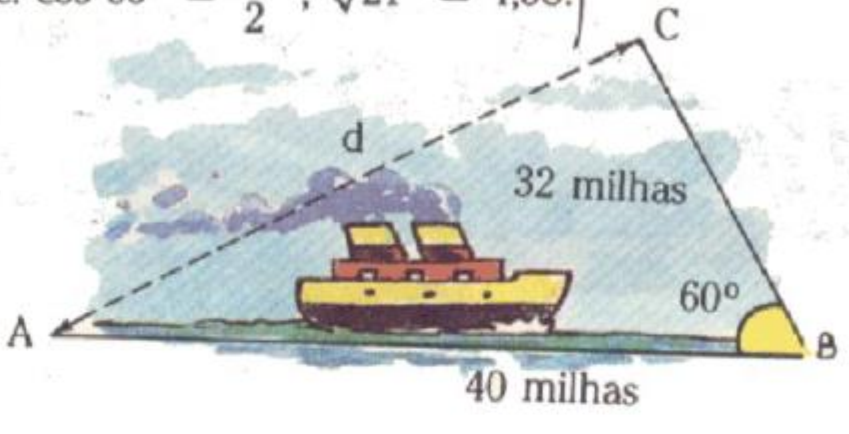
14) Duas árvores localizam-se em lados opostos de um lago. O ângulo entre as linhas de visão de um observador que as vê é 120º, e o ângulo formado por uma dessas linhas e a linha que une as árvores é 45º. Sabendo que uma das árvores está a 100 m do observador (ou seja, a 3ª linha mede 100 m), determine a distância **d** entre as árvores.

$\left(\text{Use: sen } 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ sen } 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{6} \simeq 2{,}44.\right)$

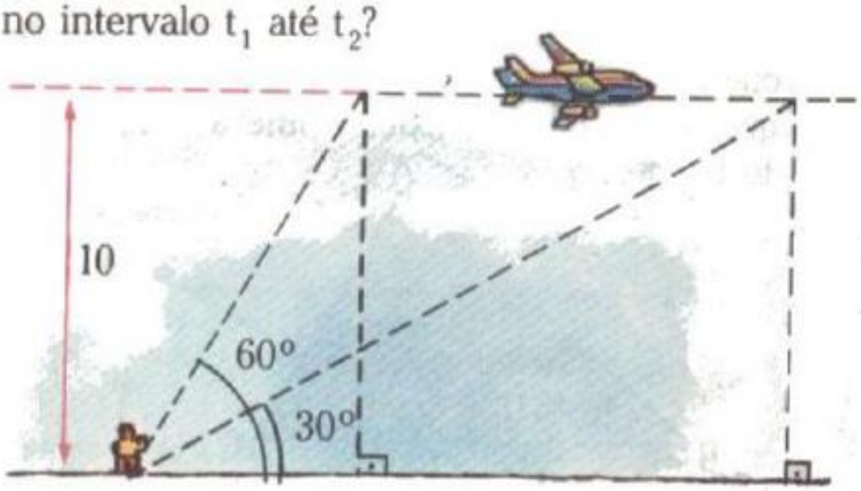


15) Um navio se desloca, em linha reta, de um ponto A para um ponto B, percorrendo assim 40 milhas. No ponto B, sob um ângulo de 60º, o navio muda de rumo e, continuando em linha reta, atinge um ponto C distante 32 milhas do ponto B. Nessas condições, qual é a distância **d**, em linha reta, do ponto C ao ponto A?

$\left(\text{Use: cos } 60° = \frac{1}{2}, \sqrt{21} \simeq 4{,}58.\right)$

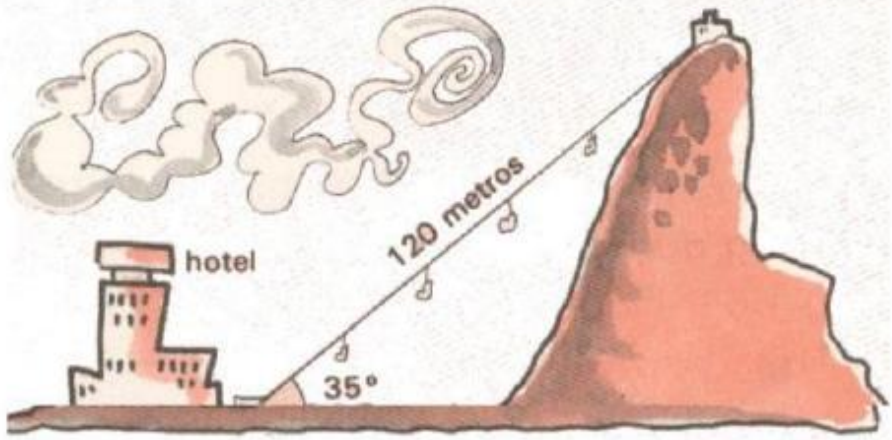


16) Um avião voa numa reta horizontal de altura 10 km em relação a um observador P, situado na projeção ortogonal da trajetória. No instante t_1, o avião é visto sob um ângulo de 60° e no instante t_2, sob um ângulo de 30°. Qual é a distância percorrida pelo avião no intervalo t_1 até t_2?

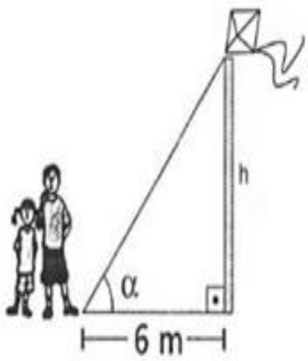


17) Para ligar um hotel ao cimo de uma montanha, foram necessários 120 m de cabo teleférico. O ângulo de inclinação do cabo é de 35°. Qual é a altura da montanha?

(use sen 35° = 0,57.)

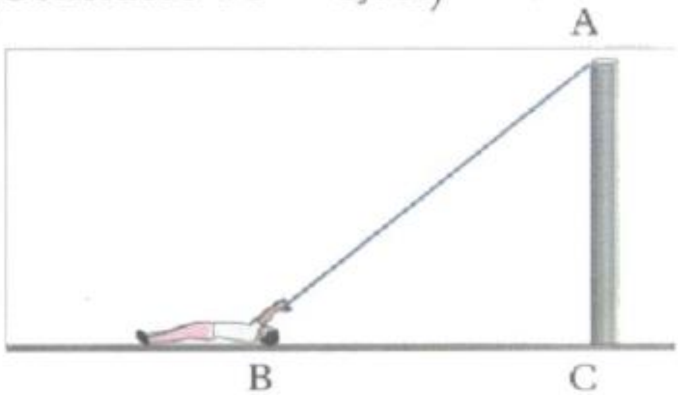


18. Ao empinar uma pipa, João percebeu que estava a uma distância de 6 m do poste onde a pipa engalhou. Renata notou que ângulo α formado entre a linha da pipa e a rua era 60°, como mostra a figura. Calcule a altura do poste.



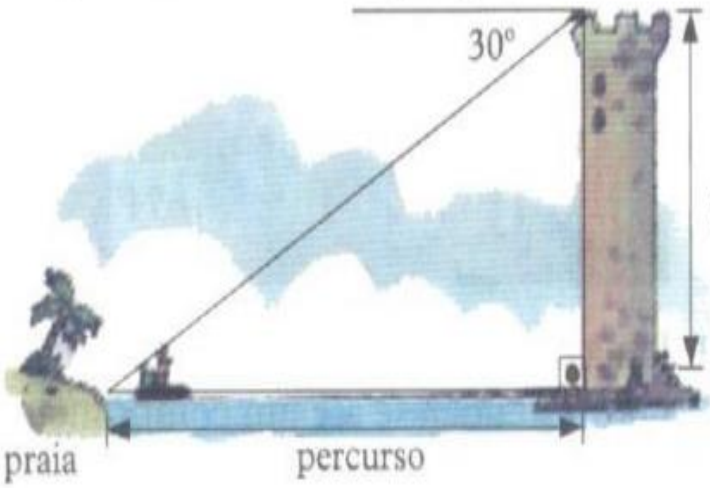
19) Na figura, o segmento $\overline{AC}$ representa uma estaca fincada num terreno. A altura da estaca é de 3 m. Uma corda é amarrada no ponto *A* da estaca, e um homem, no chão, no ponto *B*, puxa a corda, de modo que a mesma forme um ângulo de 30° com a estaca. A que distância o homem se encontra do pé da estaca?

(Considere $\sqrt{3} = 1{,}73$.)



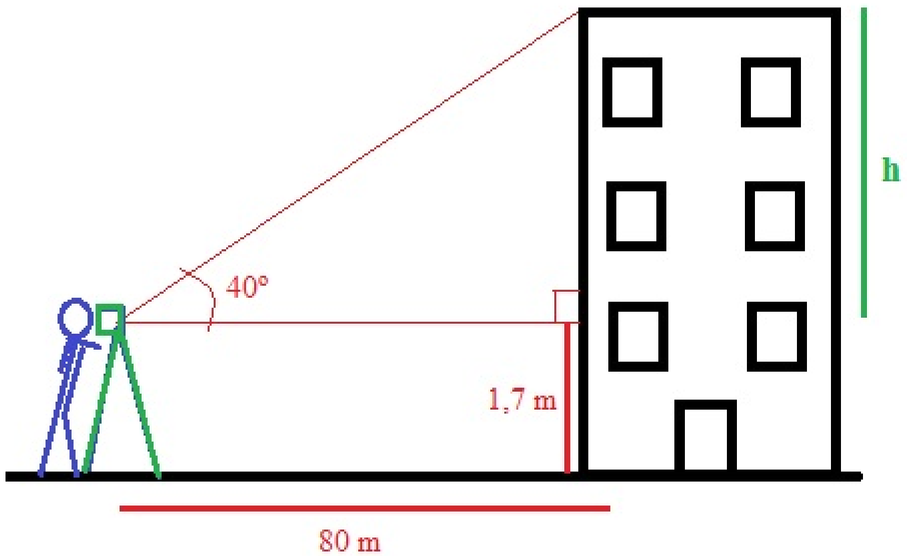
20) Do alto de uma torre de 60 m de altura, localizada numa ilha, avista-se a praia sob um ângulo de 30° em relação à horizontal. Para transportar material da praia até a torre, um barqueiro cobra R$ 5,00 por metro percorrido. Nessas condições, quanto ele recebe em cada transporte que faz?

(Considere $\sqrt{3} = 1{,}73$.)

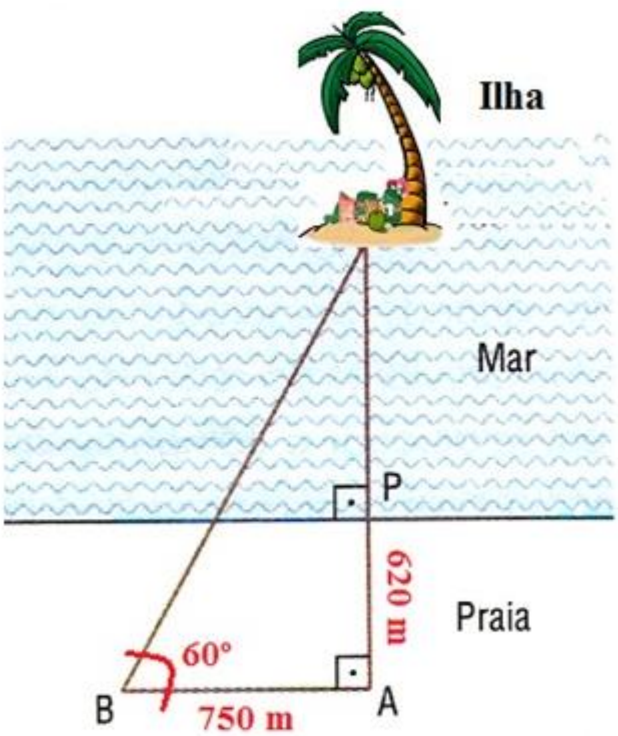


21) A plataforma do caminhão dista 80 cm do chão. Para conseguirem carregar facilmente a betoneira, a tábua que serve de rampa não deve fazer com o chão um ângulo superior a 10^0. Qual o comprimento que a tábua deve ter?
(aproxime o resultado ao centímetro)

22) Um topógrafo instala um teodolito a uma altura de 1,7 metros do solo e observa o topo de um prédio sob um ângulo de 40º. Estando o teodolito e o prédio em um mesmo terreno plano e distantes um do outro 80 metros, determine a altura do prédio, aproximadamente. Dado tan 40º = 0,84



23) Na praia foi medido a distância entre dois pontos distintos A e B conforme mostra a figura. A distância de A até B é 750 metros e de A até P é 620 metros, além do ângulo B de 60º. Encontre a distância, em metros, da ilha até a praia (aproximadamente).



Respostas

1)6,01	2) 2,6	3)5,6	4) 14,40 E 32,20	5) 66	6) 100	¨7) 15,57	8) 30,20
9) 5,04	10) 13,20	11)78,10	12)X=98 Y=95	13)3,80	14)122	15) 36,64	16)$\frac{20\sqrt{3}}{3}$
17)68,4	18)$6\sqrt{3}$	19)1,73	20)519	21)4,62	22)68,9	23)680	24)

1) Calcular os catetos de um triângulo retângulo cuja hipotenusa mede 6 cm e um dos ângulos mede 60º.

2) Quando o ângulo de elevação do sol é de 65 º, a sombra de um edifício mede 18 m. Calcule a altura do edifício.

(sen 65º = 0,9063, cos 65º = 0,4226 e tg 65º = 2,1445)

3) Quando o ângulo de elevação do sol é de 60º, a sombra de uma árvore mede 15m. Calcule a altura da árvore, considerando √3 = 1,7.

4) Uma escada encostada em um edifício tem seus pés afastados a 50 m do edifício, formando assim, com o plano horizontal, um ângulo de 32º. A altura do edifício é aproximadamente: (sen 32º = 0,5299, cos 32° = 0,8480 e tg 32º = 0,6249)

5) Um avião levanta vôo sob um ângulo de 30º. Depois de percorrer 8 km, o avião se encontra a uma altura de:

6) Um foguete é lançado sob um ângulo de 30 º. A que altura se encontra depois de percorrer 12 km em linha reta?

7) Do alto de um farol, cuja altura é de 20 m, avista-se um navio sob um ângulo de depressão de 30º. A que distância, aproximadamente, o navio se acha do farol? (Use √3 = 1,73)

8) Num exercício de tiro, o alvo está a 30 m de altura e, na horizontal, a 82 m de distância do atirador. Qual deve ser o ângulo (aproximadamente) de lançamento do projétil? (sen 20º = 0,3420, cos 20º = 0,9397 e tg 20º = 0,3640)

9) Se cada ângulo de um triângulo equilátero mede 60 º, calcule a medida da altura de um triângulo equilátero de lado 20 cm.

10) Um alpinista deseja calcular a altura de uma encosta que vai escalar. Para isso, afasta-se, horizontalmente, 80 m do pé da encosta e visualiza o topo sob um ângulo de 55º com o plano horizontal. Calcule a altura da encosta. (Dados: sen 55º = 0,81, cos 55º = 0,57 e tg 55º = 1,42)

11 Um bambu de 6m de altura é quebrado pelo vento de modo que a ponta encontra o chão formando com ele um ângulo de 37°. A que altura a partir do chão ele foi quebrado? Dados: sen 37° = 0,60, cos 37° = 0,80, tg 37 = 0,75.

Gabarito:

1) 3√3 e 3 2) 38,6m 3) 25,5 m 4) 31,24m 5) 4 km 6) 6 km

7) 34,6m 8) 20º 9) 10√3 10) 113,6m 11)2,25 m